ARCHIVIO

9b: III. 1

624.21.014

REC 12729
IX
D
166.1

Sui Ponti vedi Scienze per Tutti

1/1 1927
1/2 1927

CORSO TEORICO PRATICO

SULLA

COSTRUZIONE DEI PONTI METALLICI

AD USO

DEGLI INGEGNERI, DEI COSTRUTTORI

E

DEGLI ALLIEVI DELLE SCUOLE DI APPLICAZIONE

PER L'INGEGNERE

PIO Dr CHICCHI

PROFESSORE DI PONTI, STRADE E FERROVIE NELLA REGIA SCUOLA DI APPLICAZIONE
ANNESSA ALL'UNIVERSITÀ DI PADOVA

BIBLIOTECA R. SCUOLA DI INGEGNERIA - PADOVA
25 FEB 1929

SECONDA EDIZIONE

RIORDINATA CON MOLTE AGGIUNTE

L'opera si compone di un volume di testo, di un atlante di 60 tavole in-folio
e di un atlante di 45 tavole in-4°.

TESTO

EDITORI

AUG. FED. NEGRO
Via Alfieri, N° 4
Torino

ANGELO DRAGHI
Via Morsari, N° 364
Padova

1886.

Proprietà Letteraria

Torino - Stabilimento Tipografico, di Stereotipia e di Calcografia di A. F. Negro.

AL

COMMENDATORE

DOMENICO TURAZZA

DIRETTORE

DELLA SCUOLA D'APPLICAZIONE PER GLI INGEGNERI

DI PADOVA

CELEBRANDOSI IL SUO GIUBILEO ACCADEMICO

CON IMPERITURA RICONOSCENZA

L'AUTORE

D.

PREFAZIONE

La favorevole accoglienza fatta alla prima edizione (pubblicata con qualche fretta per le sollecitazioni dei miei allievi) mi ha permesso di fare numerose ed importanti aggiunte al mio lavoro, in questa seconda edizione riordinata e corretta. Ed alle principali aggiunte faccio un accenno, affine di metterle in piena evidenza per norma del lettore.

Il Capitolo che tratta delle travi reticolari e poligonali a grandi maglie venne sviluppato maggiormente coll'aggiunta delle formule che servono al calcolo delle tensioni delle varie sbarre e coll'aggiunta dei procedimenti grafici per il calcolo di queste tensioni e ciò per ciaschedun tipo di trave; ed inoltre furono prese in considerazione le travi ellittiche e le poligonali smussate. Per ogni singolo caso si svilupparono dettagliatissime applicazioni numeriche e grafiche.

Si introdusse il procedimento da seguire per il calcolo delle riquadrature delle varie sbarre. una volta note le rispettive tensioni, colla applicazione delle leggi di Wöhler. Numerosi esempî numerici chiariscono l'argomento.

Molte e notevoli aggiunte vennero fatte al Capitolo dei ponti ad archi, che venne integralmente rifuso: oltre degli archi elastici con due cerniere, si presero in considerazione gli archi elastici con tre cerniere e con nessuna cerniera, sviluppando anche maggiormente la parte che tratta dei piedritti e delle cerniere. I soliti esempî numerici particolareggiati per ogni singolo caso mostrano la via da seguire nelle pratiche applicazioni.

Di queste aggiunte, la parte d'indole affatto generale e teorica si trova nel *Riassunto sulla resistenza dei materiali*, che forma la PARTE I dell'opera, mentre i procedimenti particolari da seguire nello studio dei ponti metallici si trovano nella PARTE II.

Altre minori aggiunte si trovano sparse in tutta l'opera, delle quali sarebbe troppo lunga l'enumerazione.

Considerato che il suolo e le travi secondarie che lo sorreggono (travi trasversali, lungarine, correntini, travi frontali, mensole) possono trovare applicazione in tutte le loro svariate conformazioni a qualunque tipo di ponte, che viene caratterizzato esclusivamente dalla forma delle travi principali, si è premesso nella PARTE II tutto ciò che si riferisce alla forma costruttiva ed ai calcoli di stabilità delle anzidette membrature, formandone un Capitolo speciale.

Nei successivi Capitoli si studiano i varî tipi di ponti, considerando da prima la loro caratteristica, dipendente dalla forma delle travi principali, e la loro complessiva conformazione; indi i particolari di costruzione ed i calcoli di stabilità di esse travi principali.

Ho posto la maggior cura nello sviluppo degli esempi numerici aggiunti, così da chiarire lo spirito delle teoriche particolarmente applicate, ed abbenchè questa parte assai laboriosa non abbia alcuna importanza scientifica, pure mi sono sobbarcato alla grave fatica nella lusinga che possa presentare qualche interesse per la pratica.

Mi lusingo di aver risposto nel miglior modo alla benevole accoglienza fatta alla prima edizione col presentare questa seconda notevolmente migliorata.

PIO CHICCHI.

PARTE PRIMA

RIASSUNTO DELLE TEORIE

SULLA RESISTENZA DEI MATERIALI

RIASSUNTO

DELLE

TEORIE SULLA RESISTENZA DEI MATERIALI

RELATIVE

ALLO STUDIO DEI PONTI METALLICI

GENERALITÀ

1. Forze esterne. — I materiali componenti una costruzione qualsiasi, sono soggetti a delle forze esterne alle quali essi devono essere in grado di poter resistere, non soltanto senza rompersi, ma senza subire deformazione sensibile, affinchè le posizioni relative delle varie parti componenti la costruzione rimangano conservate.

Da ciò la necessità di determinare esattamente *l' intensità ed il modo di agire di queste forze esterne* onde, conosciuto il cimento a cui vengono assoggettate le varie parti della costruzione, potervi proporzionare le dimensioni e stabilire la forma delle parti medesime così, che valgano a resistere stabilmente.

2. Forze interne. — Qualunque corpo deve riguardarsi come l'aggregato di molecole, raggruppate fra loro e tenute a determinata distanza per effetto di azioni mutue, ossia forze molecolari, le une attrattive le altre repulsive, che si equilibrano fra loro; ed allorchè interviene l'azione di una forza esterna, alcune molecole si avvicinano, altre si allontanano e la forma del corpo si modifica, avvegnachè nessun solido è completamente rigido. Però tutte le forze che tendono ad allontanare le molecole determinano

fra esse delle azioni attrattive, tutte le forze che tendono ad avvicinarle sviluppano delle azioni repulsive, cioè le molecole reagiscono alle azioni esterne che tendono a spostarle, opponendo alla deformazione una resistenza che dicesi *forza elastica*.

I corpi godono altresì della proprietà di ritornare alla loro forma e grandezza primitiva, allorchè cessa l'azione delle forze esterne che li hanno deformati, purchè queste forze non sorpassino un dato limite. Questa proprietà si chiama *elasticità*. — Se avvenga però che le forze esterne abbiano sorpassato un dato limite, allora i corpi perdono in tutto od in parte la proprietà di ritornare alla primitiva loro forma e grandezza, quando cessino d'agire le forze esterne, e la deformazione subìta diviene permanente. — In questo caso dicesi che il corpo si è snervato, cioè le sue molecole sono ridotte ad uno stato di aggregazione tale, che non valgono più ad opporre una valida resistenza all'azione delle forze esterne che tendono a deformare il solido, per cui, continuando queste ad agire sul corpo che hanno snervato, ne consegue una disaggregazione di molecole e quindi la rottura.

Anche *le reazioni molecolari* o *forze interne*, che si sviluppano nelle varie parti della costruzione sotto l'azione delle forze esterne, devono adunque venire determinate, affine di conoscere se per avventura il solido non sia cimentato oltre il limite dell'elasticità e quindi in pericolo di snervarsi o rompersi.

3. Ricerca delle forze esterne ed interne. — La meccanica razionale insegna a determinare l'intensità e la direzione delle forze esterne; la teoria della resistenza dei materiali dà il modo di conoscere le forze interne, e coi risultati forniti da questi due rami della scienza si può stabilire definitivamente le dimensioni che convien dare a ciascuna delle parti di una qualunque costruzione, affinchè esse siano in grado di sopportare gli sforzi a cui sono sottoposte, senza deformazione nocevole alle loro funzioni, senza timore di rottura e senza spreco di materia.

Si richiameranno quindi sommariamente quei principî fondamentali, sulla ricerca delle une e delle altre, che in particolar modo riflettono lo studio dei ponti metallici acciò, dovendo essi di continuo venire applicati nello studio che si andrà sviluppando, sieno raccolti ed ordinati opportunamente.

I.

TRAZIONE.

4. Resistenza allo snervamento. — Le leggi della resistenza dei materiali alla trazione furono determinate per mezzo dell'esperienza; applicate poi queste leggi ai fenomeni i più complessi, si è potuto giungere ad analizzarle ed a renderne conto mediante il calcolo.

Si è constatato, assoggettando delle sbarre prismatiche di varie sostanze a sforzi di trazione diretti nel senso del loro asse, e nei limiti dell'elasticità:

1° Che tenuta invariata la sezione retta e la lunghezza delle sbarre e mantenuta una temperatura costante, cangiando la forza stirante, gli allungamenti sono proporzionali agli sforzi che li producono; e che questi allungamenti, a parità di condizioni, hanno un valore particolare per ogni sostanza.

2° Che tenuta invariata la sezione retta e la forza stirante nelle sbarre di differente lunghezza, gli allungamenti risultanti, sono proporzionali alle corrispondenti primitive lunghezze.

3° Che tenuta invariata la lunghezza e la forza stirante nelle sbarre di differente sezione retta, gli allungamenti sono inversamente proporzionali alle aree delle sezioni stesse.

Se quindi si esprime con

L la lunghezza primitiva del solido,

ω l'area della sua sezione retta,

T la risultante delle reazioni molecolari, la quale necessariamente deve essere eguale e direttamente contraria alla forza stirante F,

λ l'allungamento subìto dal solido per l'azione della forza F,

E_t il coefficiente di proporzionalità, si ha

$$\lambda = \frac{F\,L}{E_t\,\omega} \qquad (1)$$

e quindi il valore delle reazioni molecolari è dato da

$$T = F = \frac{\lambda E_t \omega}{L} \qquad (2)$$

Nella (1) $\frac{F}{\omega}$ rappresenta lo *sforzo di trazione* riferito alla unità superficiale, nella (2) $\frac{\lambda}{L}$ rappresenta l'allungamento prodotto dalla forza stirante, riferito all'unità di lunghezza del solido, e che dicesi *allungamento proporzionale.*

Il coefficiente E_t si chiama *coefficiente di elasticità longitudinale* od anche *modulo di elasticità*, può venire definito per quella forza che sarebbe capace di produrre in un prisma non snervato, avente per sezione l'unità superficiale, un allungamento eguale alla lunghezza primitiva del solido, la quale di conseguenza verrebbe raddoppiata, e lo si determina sperimentalmente.

La tabella seguente dà il valore di E_t in chilogrammi, riferendosi al centimetro quadrato, per cui nella (2) anche λ ed L devono essere espressi in centimetri, mentre T risulta in chilogrammi.

Tabella I.

Designazione dei corpi	Valore di Et
Ferro fucinato . . .	1634000 Kg. per centimetro quadrato
Ghisa	909600 » » »
Acciaio fuso	1800000 » » »
Acciaio temperato . .	3000000 » » »
Abete	90200 » » »
Larice	150000 » » »
Quercia	141200 » » »

I valori somministrati dalla tabella I, non sono rigorosamente esatti, ma rappresentano il medio dei vari risultati ottenuti. Difatti il coefficiente di elasticità E_t non è costante per la stessa sostanza e mano a mano che vanno aumentando gli sforzi di trazione, esso diminuisce e tanto più rapidamente quanto più venga sorpassato il limite di elasticità. Nel ferro poi particolar-

mente, il modulo di elasticità è variabilissimo a seconda delle varie qualità che si adoperano, ma specialmente verso il limite di rottura, il quale si verifica fra $\frac{\lambda}{L} = {}^1/_8$ ed $\frac{\lambda}{L} = {}^1/_{60}$; il valore di $^1/_8$ è per il ferro molto tenace, quello di $^1/_{60}$ per il ferro cristallino e cattivo.

Si può ritenere però che, negli sforzi limiti di trazione acconsentiti dalla pratica, i quali sono beni lontani dai limiti di snervamento e di rottura, il coefficiente E_t si mantenga pressochè costante e precisamente del valore somministrato dalla tabella I.

5. Limiti della resistenza allo snervamento. — Riferendosi poi particolarmente al ferro ed alla ghisa, nei limiti della loro resistenza allo snervamento, si può stabilire, in base alle accurate esperienze di molti celebri costruttori fra cui Hodgkinson, Stephenson, Fairbairn, Kirkaldy, ecc., che:

1° I ferri della stessa provenienza ed egualmente trattati, resistono allo snervamento per trazione tanto più quanto minore è la loro sezione retta, giacchè l'azione vantaggiosa del maglio o dei cilindri laminatori non si fa sentire sotto la superficie dei pezzi battuti e cilindrati che ad una certa profondità, poco variabile qualunque sia il loro calibro.

2° I ferri duri e non ricotti resistono allo snervamento generalmente più di quelli duri e ricotti della stessa qualità e presentano allungamenti inferiori a quelli cui vanno soggetti questi ultimi.

3° I pezzi di ghisa a grande sezione resistono meno di quelli a piccola sezione, fatti colla stessa qualità di ghisa, giacchè nella fabbricazione di questi pezzi, raffreddandosi il metallo esterno più celeremente di quello interno, si costituisce come un involucro più duro e più resistente del metallo che copre, il quale involucro, essendo dello spessore costante di circa un millimetro tanto nei pezzi grossi quanto in quelli sottili, è causa che domini la parte che maggiormente resiste più in questi che in quelli.

In pratica i materiali non devono essere cimentati fino al limite di snervamento, sia per non dar luogo a delle sensibili de-

formazioni permanenti nelle varie parti della costruzione, ciò che nuocerebbe all'ufficio cui esse devono adempiere, sia per non compromettere la stabilità dell'opera, avvegnachè il passaggio dallo snervamento alla rottura è repentino e facile ad avvenire.

Perciò, allo scopo di poter fare le opportune verifiche, si dà nella tabella II, il valore della resistenza allo snervamento per trazione, riferita al centimetro quadrato, per alcuni corpi comunemente usati nella costruzione dei ponti metallici, e si unisce anche il corrispondente peso dell'unità cubica, considerato che può interessare di tener conto del proprio peso dei solidi che vengono cimentati allo snervamento per trazione.

Tabella II.

Indicazione dei corpi	Resistenza allo snervamento per trazione riferita al centimetro quadrato	Peso del decimetro cubico
Abete	173 Kg.	0,50 Kg.
Larice	315 »	0,70 »
Quercia	240 »	0,85 »
Ghisa a grana fina.	1000 »	7,20 »
Ghisa grigia	600 »	7,20 »
Ferro in barre sottili	1500 »	7,77 »
» » ordinarie . . .	1220 »	7,77 »
Acciaio fuso	2500 »	7,82 »
Acciaio temperato	6600 »	7,82 »

6. Influenza del peso del solido sull'allungamento. — Volendo tener conto del peso del solido è facile determinare la sua influenza sull'allungamento.

Sia L la lunghezza del solido prismatico sospeso verticalmente alla sua estremità superiore, Fig. 1, e si consideri la porzione di lunghezza x. È evidente che il peso della porzione inferiore $L - x$ agisce nella stessa guisa di una forza che operi ad allungare la superiore. Se si denota con P questo peso, con ω l'area della sezione retta e con π il peso unitario della materia costituente il solido sarà

$$P = (L - x)\,\omega\,\pi$$

Se l'allungamento prodotto dal peso P sulla parte x è Δx, è evidente che quello prodotto sull'incremento infinitesimo della stessa, cioè dx, sarà $d\Delta x$ e si avrà dalla (1)

$$d\Delta x = \frac{(L-x)\pi dx}{E_t}$$

ed integrando

$$\int_0^L d\Delta x = \frac{\pi}{E_t}\int_0^L (L-x)\,dx$$

ossia

$$\Delta L = \frac{\pi}{2}\frac{L^2}{E_t} \qquad (3)$$

che rappresenta l'allungamento totale del solido sotto l'azione del proprio peso.

Ora se il peso di tutto il solido $\omega L \pi$ fosse applicato alla sua parte inferiore, l'allungamento corrispondente dato dalla (1) sarebbe

$$\frac{\pi L^2}{E_t}$$

cioè doppio del precedente, per cui conchiudesi che *l'allungamento prodotto dal peso del prisma è metà di quello che produrrebbe una forza equivalente a quel peso, applicata alla parte inferiore del prisma stesso.*

7. Resistenza alla rottura. — Oltre il limite di elasticità, quando cioè il solido è snervato e che gli allungamenti non sono più proporzionali alle corrispondenti forze stiranti, se viene a cessare l'azione delle medesime, il solido non riprende più la lunghezza primitiva, ma resta allungato di una certa quantità che si chiama *allungamento permanente.* — In allora viene alterata la naturale compagine del corpo, la sua resistenza rimane affievolita, come si è già accennato, e gli allungamenti crescono in molto maggior proporzione che non gli sforzi corrispondenti. — Continuando ad aumentare gli sforzi giunge un istante in cui le reazioni molecolari non possono più equilibrarli ed avviene la rottura.

Molte ed accurate esperienze confermarono che, cimentando dei solidi prismatici alla rottura per trazione mediante forze dirette

secondo i loro assi, le forze capaci di produrne la immediata rottura, sono proporzionali alle aree delle loro sezioni rette. Si può stabilire adunque che queste forze si ripartiscono uniformemente sulle sezioni rette dei solidi cimentati.

Perciò se si chiama

ω l'area della loro sezione retta,

T_o la risultante delle reazioni molecolari che si oppongono alla rottura per trazione del solido prismatico, la quale deve considerarsi eguale e direttamente contraria alla forza stirante F_o, sotto la cui azione il prisma sta per rompersi,

K_t il coefficiente di proporzionalità, ossia lo sforzo unitario di trazione

si ha che il valore delle reazioni molecolari è dato da

$$T_o = F_o = K_t \omega \qquad (4)$$

K_t si chiama anche il *coefficiente di rottura per trazione*, dipende dalla materia di cui è costituito il solido e si può definire per quella forza che è capace di produrre la rottura per trazione in un prisma che abbia per sezione retta l'unità superficiale, od altrimenti rappresenta la risultante delle reazioni molecolari che si sviluppano nel solido cimentato alla rottura, avente l'unità di superficie per sezione retta.

Tabella III.

Indicazione dei corpi	Carico capace di produrre la rottura
Ferro fucinato di qualità ordinaria	3500
» » laminato con cura	4000
» » di qualità superiore per chiodature	4500
Acciaio ordinario	5-8000
» di qualità superiore	8000
» Bessemer di buona qualità	5500
Ghisa di buona qualità	1100
» di qualità superiore	1500
Quercia e larice secco	800
Abete	650

Il coefficiente K_t si determina sperimentalmente, e nella tabella III, si dà il suo valore per alcuni corpi impiegati nella costruzione dei ponti metallici, esprimendolo in chilogrammi per centimetro quadrato.

8. Carico di sicurezza. — Alcuni costruttori, nello istituire i calcoli relativi alla stabilità delle parti soggette a trazione, presero per base come sforzo permesso in pratica, quello corrispondente al limite di elasticità. Tale pratica però è da ritenersi imprudente dietro la considerazione che, non appena il solido comincia a snervarsi, non si può più far assegnamento sulla sua resistenza, imperocchè essa in modo permanente rimane affievolita ed alterata.

La buona pratica invece suggerisce di provocare nei corpi una parte soltanto della loro resistenza allo snervamento per trazione, delimitando come sforzo da adottarsi: per i legnami $^1/_5$ ed $^1/_7$ dello sforzo limite di elasticità, a seconda che sieno di essenza forte o dolce e che abbiano maggior o minor facilità di guastarsi, mentre per i metalli viene fissato $^1/_2$. Soltanto quando occorra di usare la massima leggerezza o la maggior economia, e non si abbiano a temere dei carichi accidentali troppo forti, si potrà prendere per sforzo pratico $^3/_4$ di quello limite di elasticità.

Generalmente però si preferisce nelle pratiche applicazioni riferirsi allo sforzo di rottura prendendo per base dei calcoli come sforzo pratico da adottarsi una data frazione n di quello di rottura. E precisamente l'esperienza ha dimostrato essere conveniente di assumere il valore di n variante fra $^1/_{10}$ ed $^1/_{12}$ per i legnami a seconda della loro essenza forte o dolce, e per i metalli fra $^1/_5$ ed $^1/_6$ a seconda dell'ufficio e dell'importanza della costruzione.

Denotando dunque con R_t lo sforzo di trazione massimo ammissibile in pratica che dicesi anche *carico di sicurezza*, sarà

$$R_t = n K_t$$

e quindi nei limiti di stabilità la (4) si modifica nella

$$F = R_t \omega \qquad (5)$$

la quale servirà in seguito di base per il calcolo delle parti soggette a trazione semplice.

Nella tabella IV, sono raccolti i valori di R_t più comunemente usati, *espressi in chilogrammi per centimetro quadrato.*

Se è data la forza sollecitante il prisma, se ne determina l'area della sezione valendosi della (5) posta sotto la forma $\frac{F}{R_t} = \omega$, applicando per R_t i valori della tabella IV; oppure se è data l'area della sezione e la forza sollecitante, se ne determina lo sforzo di trazione col mezzo della (5), il quale, per la stabilità del solido, non dovrà di troppo discostarsi dai valori della tabella IV.

Tabella IV.

Indicazione dei corpi	Sforzo pratico di trazione
Ferro fucinato di qualità ordinaria	600
» laminato con cura	700
» di qualità superiore per chiodature . .	800
Acciaio ordinario	1200
» di qualità superiore	1600
» Bessemer di buona qualità	1000
Ghisa di buona qualità	220
» di qualità superiore	300
Larice e quercia	80
Abete	60

Osservazione. — Per *sforzo di trazione* si intenderà sempre quello riferito all'unità di superficie cioè il carico di sicurezza.

I valori dello sforzo di trazione, dati nella tabella IV, non sono che valori medî, desunti da quelli dei vari sperimentatori, i quali differiscono in causa del variare della qualità dei diversi materiali col luogo di fabbricazione, poichè non solamente la scelta della materia prima, ma altresì il metodo di fabbricazione soggetto a dei frequenti cambiamenti, influisce sul valore della resistenza.

D'altronde la resistenza del materiale dipende anche dalla maniera nella quale viene impiegato, venendo essa menomata dai

bruschi piegamenti e principalmente dalle curvature e dai gomiti.

L'acciaio particolarmente presenta delle grandi differenze nella resistenza sia a motivo della sua qualità che del modo col quale furono effettuate le chiodature, e perciò è consigliabile di adoperarlo con molta riserva.

Non si tralascia di osservare che la ghisa resiste alla trazione molto meno del ferro e che quindi il suo impiego, in costruzioni nelle quali venisse cimentata questa resistenza, è poco opportuno e possibilmente da evitarsi.

Come risultato di numerose e diligenti esperienze si può ritenere, nei riguardi della resistenza alla rottura per trazione del ferro e della ghisa, quanto segue:

1° La duttilità e la resistenza alla rottura per trazione reagiscono l'una sull'altra; un ferro duro poco estensibile può sopportare lo stesso sforzo di un buon ferro duttile, ma il primo si rompe ad un tratto ed il secondo si allunga con restringimento della sezione; quest'ultimo è adunque a parità del carico di rottura, preferibile al primo, perchè rende avvertiti dell'indebolimento della coesione.

2° Il ferro si rompe sotto minore trazione quando il carico è applicato bruscamente che quando la trazione è progressiva; la differenza oltrepassa alcune volte il 2 per 100.

3° I grandi freddi diminuiscono di 2,2 per 100 la resistenza alla trazione progressiva, e di 3,6 per 100 la resistenza alla trazione istantanea.

4° Il peso specifico varia assieme alla resistenza e può servire di indizio in una data qualità di ferro, essendo generalmente maggiore nei ferri tirati al maglio, che non nei ferri laminati della stessa provenienza.

5° La tempera forte aumenta la resistenza e diminuisce la duttilità.

6° Il ricuocimento diminuisce la resistenza ed aumenta la duttilità.

7° I ferri laminati presentano maggior resistenza nel senso parallelo anzichè nel senso normale alla laminatura, ma la differenza però non è molto grande.

8° La prolungata ricottura diminuisce la resistenza delle ghise.

9° La ghisa bianca resiste meglio della ghisa bigia.

10° I pezzi di ghisa tirati nel senso del loro asse resistono tanto più quanto minore è la loro sezione traversale.

11° I pezzi di ghisa presentano maggior resistenza quando vengono tirati nel senso del loro asse, che non quando vengono tirati tangenzialmente alla loro superficie.

9. Resistenza dei fili di ferro. — La resistenza dei fili di ferro soggetti a sforzi di trazione, varia sia nel limite di elasticità, che in quello di rottura, a seconda che il ferro di cui sono costituiti sia dolce o duro, ricotto o meno.

Il filo di ferro dolce e ricotto si allunga assai più degli altri, mentre invece si rompe sotto l'azione di carichi molto minori di quelli necessari per i ferri duri e crudi. Secondo le esperienze di VICAT e, riferendosi al centimetro quadrato, per i primi il coefficiente di elasticità ha per valore $E_t = 1700000$ e per i secondi $E_t = 1900000$; generalmente però in pratica si adopera il valor medio $E_t = 1800000$. Lo sforzo che produce snervamento nei fili di ferro dolci e ricotti è appena di 1500 chilogrammi per centimetro quadrato, mentre esso ascende a 2500 chilogrammi nei fili di ferro dell'altra specie.

Non è a credersi però che il ferro duro sia preferibile al ferro dolce, come sembrerebbe, inquantochè i notevoli allungamenti di questo ultimo prima di rompersi, hanno il vantaggio di avvertire che il metallo sta per cedere, e quello ancora maggiore di attenuare i perniciosi effetti prodotti dagli urti bruschi.

Tabella V.

Indicazione dei fili	Carico capace di produrre la rottura	Sforzo pratico di trazione
Fili di ferro da 0,5 ad 1 mill. di diametro .	8000	1600
» 1 » 3 »	6000	1200
» di grossezze maggiori	5000	1000
» in fasci o canapi	3000	600

L'esperienza ha altresì dimostrato che la resistenza dei fili di ferro alla rottura per trazione va aumentando col diminuire del diametro, e può conchiudersi che se i limiti estremi fra i quali essa può variare sono da 5000 a 9000 chilogrammi per centimetro quadrato, mediamente però la si valuta in pratica di 7000 chilogrammi per centimetro quadrato, il quale carico poi va ridotto di $^1/_5$ od $^1/_6$ per assicurare la stabilità della costruzione.

Nella tabella V, sono raccolti i valori medî generalmente adottati per il carico K_t di rottura e per lo sforzo pratico ammissibile di trazione R_t *espressi in chilogrammi per centimetro quadrato*, relativamente alle varie qualità di ferro.

II.

COMPRESSIONE.

10. Resistenza allo snervamento. — Quanto si è detto al § **4** relativamente alla trazione, può ripetersi anche rispetto alla compressione, non però in modo assoluto, ma entro certi limiti, i quali verranno in seguito meglio precisati. Quindi anche per i solidi prismatici, cimentati alla compressione da forze dirette nel senso del loro asse, si può scrivere che l'accorciamento λ, sempre nei limiti di elasticità, è dato da

$$\lambda = \frac{F\,L}{E_c\,\omega} \qquad (6)$$

ove L ed ω conservano lo stesso significato del § **4**, F rappresenta la forza comprimente ed E_c il *coefficiente di elasticità longitudinale relativo alla compressione.*

Dalla (6) si deducono le reazioni molecolari C, eguali e direttamente contrarie alla forza comprimente F, espresse da

$$C = F = E_c\,\omega\,\frac{\lambda}{L} \qquad (7)$$

Anche per la compressione il modulo di elasticità E_c dipende dalla natura del corpo cimentato, lo si determina sperimentalmente, e si può definire per quella forza che sarebbe capace di produrre in un prisma non snervato avente per sezione l'unità superficiale, e l'unità lineare per lunghezza, un accorciamento pure eguale all'unità.

Nella tabella VI sono indicati i valori di E_c per alcuni corpi *espressi in chilogrammi per centimetro quadrato.*

Tabella VI.

Indicazione dei corpi	Valori di E_c
Ferro fucinato	1968000 Kg. per centimetro quadrato
Ghisa	880470 » » »
Acciaio fuso	1800000 » » »
» temperato . .	3000000 » » »
Abete	90200 » » »
Larice	150000 » » »
Quercia	141200 » » »

Riguardo al coefficiente di elasticità relativo alla compressione, in generale esso differisce assai poco da quello relativo alla trazione, anzi, nei limiti entro i quali sono cimentati i corpi nella pratica, si può ritenere che il coefficiente di elasticità sia lo stesso tanto rapporto alla trazione che alla compressione, ben inteso adottando per esso dei valori medî sui vari risultati delle esperienze. Tale considerazione acquista la massima importanza allora quando si dovrà farne applicazione allo studio della flessione.

11. Limite della resistenza allo snervamento. — Il fenomeno della compressione essendo molto più difficile ad esperimentare che non quello della trazione, ben pochi sono i materiali dei quali si conoscono le resistenze allo snervamento per compressione, anzi si può quasi dire che il ferro e la ghisa sono i soli per cui si abbiano dati sicuri, mentre sugli altri non si hanno ancora risultati concludenti.

Le esperienze di Hodgkinson sul ferro e sulla ghisa hanno portato alle seguenti conclusioni:

1° Che la resistenza allo snervamento per compressione è nel ferro di buona qualità di 1400 a 1800 chilogrammi per centimetro quadrato.

2° Che la resistenza allo snervamento per compressione varia nella ghisa da 1200 a 1500 chilogrammi per centimetro quadrato.

3° Che fino al punto in cui non ha luogo snervamento, sottoponendo ad eguali pressioni dei pezzi in ferro ed in ghisa di identiche dimensioni, quelli si accorciano assai meno di questi.

12. Resistenza alla rottura. — Riguardo alla resistenza alla rottura per compressione sono a farsi le stesse osservazioni del § 7, e quindi si può concludere che: nei solidi prismatici cimentati alla rottura per compressione da forze dirette secondo i loro assi, capaci di produrne la immediata rottura, queste sono proporzionali alle aree delle loro sezioni rette, e si può quindi stabilire che queste forze si ripartiscono uniformemente sulle sezioni rette dei solidi cimentati.

Perciò si chiami

ω l'area della loro sezione retta,

C_0 la risultante delle reazioni molecolari che si oppongono alla rottura per compressione del solido prismatico, la quale deve considerarsi eguale e direttamente contraria alla forza premente F_0, sotto la cui azione il prisma sta per rompersi,

K_c il coefficiente di proporzionalità ossia lo sforzo unitario di compressione, si ha che il valore delle reazioni molecolari è dato da

$$C_0 = F_0 = K_c \omega \qquad (8)$$

K_c si chiama il *coefficiente di rottura di compressione*, dipende dalla materia costituente il solido e si definisce per quella forza che è capace di produrre la rottura per compressione in un prisma che abbia per sezione retta l'unità superficiale, od altrimenti rappresenta la risultante delle reazioni molecolari che si sviluppano nel solido cimentato alla rottura, avente l'unità di superficie per sezione retta.

I valori di K_c si determinano sperimentalmente e nella tabella VII sono raccolti quelli di alcuni corpi *espressi in chilogrammi e per centimetro quadrato.*

Tabella VII.

Indicazione dei corpi	Carico capace di produrre la rottura
Ferro fucinato ordinario	2500
» di qualità superiore	3500
Ghisa bianca	9400
» grigia	7000
Acciaio fuso ordinario	12000
» di qualità superiore	16000
Abete giallo	250
Larice rosso	450
Quercia	425
» assai secca	650

13. Carico di sicurezza. — Nelle pratiche applicazioni dovendosi adottare degli sforzi di compressione inferiori non solo al limite di rottura, ma a quello di elasticità, sono a ripetersi le osservazioni del § **8**.

Il massimo sforzo ammissibile di compressione ossia il carico di sicurezza, detto R_c, sarà adunque

$$R_c = n K_c$$

dove n è una frazione che varia fra $^1/_{10}$ ed $^1/_{12}$ per i legnami e fra $^1/_5$ ed $^1/_6$ per i metalli, colle stesse norme già accennate al § **8**.

Di conseguenza la (8) nei limiti di stabilità si trasforma nella

$$F = R_c \omega \qquad (9)$$

la quale si adotterà in seguito per il calcolo delle parti soggette a *compressione semplice.*

La tabella VIII dà i valori di R_c più comunemente usati per alcuni corpi, *espressi in chilogrammi e per centimetro quadrato.*

La (9) serve a determinare la sezione retta, o lo sforzo di compressione, di un solido cimentato da una forza F, nella prima

ricerca valendosi per R_c dei valori dati nella tabella VIII, e nella seconda non dovendo, per la stabilità, risultare R_c ad essi superiore.

R. SCUOLA D'INGEGNERIA PADOVA 25 FEB 1929

Tabella VIII.

Indicazione dei corpi	Sforzo pratico di compressione
Ferro fucinato ordinario	500
» di qualità superiore	600
Ghisa di buona qualità	1200
Acciaio fuso ordinario	1500
» di buona qualità	2000
Abete giallo	25
Larice e quercia	45

Osservazione. — Si intenderà sempre per *sforzo di compressione* quello riferito all'unità di superficie.

Anche la tabella VIII non dà che valori medî, sui vari risultati ottenuti dalle esperienze, risultati che differiscono fra loro per i motivi di già avvertiti al § 8.

14. Resistenza dei solidi che si piegano sotto l'azione di forze comprimenti, ossia dei solidi caricati di punta. — Quello che si è veduto e stabilito finora rispetto alla compressione di un solido prismatico, vale fintantochè l'altezza o lunghezza del solido, confrontata colla minima dimensione della sua sezione retta, non superi un dato rapporto. In generale quando quella sia maggiore del triplo di questa, quando cioè il detto rapporto divenga più grande di 3, in allora il prisma cimentato piuttostochè schiacciarsi si piega, ed in questo caso si presenta un fenomeno molto più complesso, che non permette l'impiego delle formule sopra accennate, e dicesi che *il solido è caricato di punta.*

Allorchè ciò avviene, la rottura del solido si produce sotto l'azione di un carico molto minore di quello che non lo indichi

la (8). Essendo in questo caso in presenza della flessione, concorre alla resistenza del solido non solo l'area della sua sezione retta, ma ben anco la forma della medesima, come pure vi influisce notabilmente anche la lunghezza del solido.

La teoria matematica che studia la resistenza di un solido trovantesi nelle accennate condizioni non conduce a risultamenti che concordino coll'esperienza. Ciò si metterà maggiormente in evidenza in seguito quando si tratterà della flessione.

Tralasciando di occuparsi pertanto del modo col quale l'analisi studia il problema della resistenza di un solido prismatico che, caricato da forze passanti per il suo asse, si inflette sotto l'azione delle stesse, si riassumono invece alcuni dati empirici, i quali, desunti da accurate e molteplici esperienze, conducono a risultati attendibili in pratica.

15. Formule empiriche di Hodgkinson e regola di Rondelet per i solidi di legno.

α) **Formule di Hodgkinson.** — Le più numerose esperienze sono quelle di Eaton Hodgkinson.

Da quelle istituite sopra i ritti prismatici di legno, egli ha potuto dedurre che nei ritti a sezione quadrata la resistenza alla rottura per pressione è proporzionale alla quarta potenza del lato ed inversamente proporzionale al quadrato dell'altezza, mentre in quelli a sezione rettangolare la resistenza risulta proporzionale al prodotto del lato maggiore per il cubo del lato minore ed inversamente proporzionale al quadrato dell'altezza o lunghezza del ritto. Per i ritti a sezione quadrata si avrà quindi

$$F_0 = k \frac{a^4}{L^2} \qquad (10)$$

mentre per quelli a sezione rettangolare sarà:

$$F_0 = k \frac{b\,c^3}{L^2} \qquad (10a)$$

nelle quali

F_0 è il carico capace di produrre la rottura del ritto prismatico,
L la lunghezza od altezza di questo,
a il lato della sezione quadrata,
b il lato maggiore della sezione rettangolare,
c il lato minore della medesima,

k un coefficiente numerico che varia coll'essenza del legname e se si esprime F_0 in chilogrammi, a, b, c in centimetri, L in decimetri, i valori di k per le varie qualità dei legnami sono:

Indicazione dei legnami	Valori di k
Quercia forte	2565
» debole	1800
Larice rosso e pino resinosi.	2142
Abete bianco e pino giallo	1600

Nelle costruzioni permanenti non si deve far sopportare ai ritti di legname che $^1/_{10}$ del carico di rottura F_0, dato dalle (10) e (10a), mentre nei lavori provvisori si può arrivare fino ad $^1/_5$.

β) **Regola del Rondelet.** — Il RONDELET ha dato un'altra regola pratica relativamente ai ritti di legname, cioè determinata che si abbia la resistenza alla rottura di un cubo di legno di data qualità e presa questa per unità, la resistenza di un ritto dello stesso legno di qualsiasi lunghezza, a base quadrata, varia rispetto alla precedente col rapporto r fra la lunghezza ed il lato della base e precisamente come lo indica la seguente tabella:

r	1	12	24	36	48	60	72
F_0	1	$^5/_6$	$^1/_2$	$^1/_3$	$^1/_6$	$^1/_{12}$	$^1/_{24}$

dove si scorge che mano a mano che va crescendo il valore di r, diminuisce la resistenza sopraindicata a seconda delle corrispondenti frazioni. Il massimo carico poi da adottarsi in pratica deve esser ridotto secondo l'opinione dello stesso RONDELET ad $^1/_7$ di quello determinato applicando la suesposta regola.

16. Formule empiriche di Hodgkinson per le colonne di ghisa. — Dalle numerose esperienze fatte da HOD-

GKINSON sulla rottura per pressione nelle colonne di ghisa piene e vuote a basi piatte, avendo fatto variare la loro lunghezza da 25 sino a 120 volte il diametro, egli ha potuto stabilire le seguenti formule:

Per le colonne piene

$$F_o = 10380 \frac{D_o^{3,6}}{L^{1,7}} \qquad (11)$$

e per le colonne vuote

$$F_o = 10410 \frac{D^{3,6} - d^{3,6}}{L^{1,7}} \qquad (11a)$$

in cui:

L rappresenta la lunghezza della colonna in decimetri,
D_o il diametro delle colonne piene in centimetri,
D il diametro esterno delle colonne vuote in centimetri,
d il diametro interno delle stesse pure in centimetri,
F_o il carico in chilogrammi che produce la rottura.

Vista la poca differenza fra i coefficienti numerici dati da HODGKINSON per le superiori equazioni, alcuni costruttori, a seconda di quanto venne fatto dal MORIN, adottano per entrambe il coefficiente 10676. Importa però osservare che questi coefficienti furono dedotti da esperienze istituite sopra una ghisa la cui resistenza alla rottura per compressione semplice era di 8133 chilogrammi per centimetro quadrato, e che quindi se si dovesse applicare ad una ghisa la cui resistenza K_c fosse molto differente, converrebbe modificare i detti coefficienti proporzionatamente al rapporto

$$\frac{K_c}{8133}$$

Inoltre per le colonne nelle quali l'altezza sia inferiore a 25 volte il diametro, le formule (11) e (11*a*) non sono più esattamente applicabili, giacchè condurrebbero a carichi F_o troppo piccoli, oppure a diametri troppo grandi. In questo caso HODGKINSON porge la formula seguente

$$F_o = \frac{F_1 F_2}{F_1 + 0{,}75\, F_2} \qquad (12)$$

nella quale

F_0 è il carico che produrrebbe rottura nelle colonne di altezza minore di 25 volte il diametro,

F_1 il carico che dovrebbe produrre la rottura qualora fosse calcolato colle (11) e (11*a*),

F_2 il carico che produrrebbe rottura nei prismi molto corti, cioè nel caso di compressione semplice, il quale carico sarebbe da ricavarsi dalla (8).

Tabella IX.

Potenze 3,6 dei diametri.

Diametri	Potenze 3,6	Diametri	Potenze 3,6	Diametri	Potenze 3,6	Diametri	Potenze 3,6
1,00	1,0000	3,70	111,05	5,60	493,72	7,50	1413,30
1,25	2,2329	3,75	116,55	5,70	526,20	7,60	1482,30
1,50	4,3045	3,80	122,24	5,75	543,01	7,70	1553,70
1,75	7,4978	3,90	134,23	5,80	560,20	7,75	1590,30
2,00	12,125	4,00	147,03	5,90	595,75	7,80	1627,60
2,10	14,454	4,10	160,70	6,00	632,91	7,90	1704,00
2,20	17,089	4,20	175,26	6,10	671,72	8,00	1782,90
2,25	18,529	4,25	182,89	6,20	712,22	8,25	1991,70
2,30	20,055	4,30	190,76	6,25	733,11	8,50	2217,70
2,40	23,375	4,40	207,22	6,30	754,44	8,75	2461,70
2,50	27,076	4,50	224,68	6,40	798,45	9,00	2724,40
2,60	31,182	4,60	243,18	6,50	844,28	9,25	3006,85
2,70	35,720	4,70	262,76	6,60	891,99	9,50	3309,80
2,75	38,159	4,75	272,96	6,70	941,61	9,75	3634,30
2,80	40,716	4,80	283,44	6,75	967,15	10,00	3981,07
2,90	46,199	4,90	305,28	6,80	993,19	10,25	4351,20
3,00	52,196	5,00	328,32	6,90	1046,80	10,50	4745,50
3,10	58,736	5,10	352,58	7,00	1102,40	10,75	5165,00
3,20	65,848	5,20	378,10	7,10	1160,20	11,00	5610,70
3,25	69,628	5,25	391,36	7,20	1220,10	11,25	6083,40
3,30	73,561	5,30	404,94	7,25	1250,90	11,50	6584,30
3,40	81,908	5,40	433,13	7,30	1282,20	11,75	7114,40
3,50	90,917	5,50	462,71	7,40	1346,60	12,00	8074,50
3,60	100,62						

A facilitare il calcolo delle (11) (11*a*) (12) si danno nelle tabelle IX e X le potenze 3,6 dei diametri ed 1,7 delle lunghezze che più frequentemente possono trovare impiego nella costruzione dei ponti metallici.

Tabella X.

Potenze 1,7 delle lunghezze.

Lunghezze	Potenze 1,7	Lunghezze	Potenze 1,7	Lunghezze	Potenze 1,7	Lunghezze	Potenze 1,7
1	1,0000	7	27,332	13	78,289	19	149,24
2	3,2490	8	34,297	14	88,801	20	162,84
3	6,4730	9	41,900	15	99,851	21	176,92
4	10,556	10	50,119	16	111,430	22	191,48
5	15,426	11	58,934	17	123,53	23	206,51
6	21,031	12	68,329	18	136,13	24	222,00

Le formule (11) (11*a*) (12) servono per il caso di colonne terminate agli estremi a forma piatta, la quale viene a formare quasi un incastramento; se gli estremi fossero arrotondati in modo che le colonne nel piegarsi potessero liberamente girare intorno agli stessi, allora la resistenza viene diminuita di $^2/_3$ e quindi chiamato in questo caso F'_o il carico di rottura, esso viene dato da

$$F'_o = 0{,}33\ F_o$$

dove F_o si calcola colle superiori formule. Se le colonne fossero invece solidamente incastrate ai loro estremi, allora la loro resistenza viene accresciuta e chiamando F''_o il carico di rottura lo si valuta colla formula

$$F''_o = 1{,}33\ F_o$$

dove F_o ha i valori dati dalle (11) (11*a*) (12) a seconda dei casi.

E siccome il rapporto

$$\frac{1,33}{0,33} = 4$$

conchiudesi che la resistenza di una colonna cogli estremi incastrati, è quattro volte maggiore di quella di una colonna le cui estremità sono affatto libere di girare.

Non si tralascia d'avvertire che le colonne vuote, a parità di area nella sezione retta, resistono più delle piene, e ciò si chiarisce meglio con un esempio.

La resistenza di una colonna vuota è proporzionale a $D^{3,6} - d^{3,6}$, quella di una colonna piena a $D_0^{3,6}$ e quindi il rapporto r delle loro resistenze è

$$r = \frac{D^{3,6} - d^{3,6}}{D_0^{3,6}} \qquad (I)$$

e dovendo avere le due colonne eguale sezione retta, si ha la relazione:

$$D^2 - d^2 = D_0^2 \qquad (II)$$

Se ora si prende per esempio $d = {}^4/_5\, D$ sarà dalla (II)

$$D_0 = \frac{3}{5} D$$

e quindi sostituendo nella (I) si ottiene

$$r = \frac{D^{3,6} - \left(\frac{4}{5} D\right)^{3,6}}{\left(\frac{3}{5} D\right)^{3,6}} = \frac{5^{3,6} - 4^{3,6}}{3^{3,6}}$$

e ricorrendo alla tabella IX risulta

$$r = \frac{328,32 - 147,03}{52,196} = 3,473$$

cioè la resistenza di una colonna vuota, nel caso contemplato, è quasi tre volte e mezza quella della piena.

Perciò è manifesto che le colonne vuote sono più vantaggiose delle colonne piene, imperocchè le prime, a parità di resistenza, presentano un'economia di materia, mentre a parità di volume, offrono maggior resistenza.

I carichi valutati colle (11) (11*a*) (12) rappresentando quelli che produrrebbero la rottura, nelle pratiche applicazioni essi devono venire ridotti di $^1/_5$ od $^1/_6$.

17. Formule empiriche di Lowe per le colonne di ghisa e di ferro. — Anche il Lowe diede delle formule empiriche per valutare la resistenza alla rottura per pressione nelle colonne prismatiche in ghisa ed in ferro a sezione circolare piena. Denotando con

L la lunghezza od altezza della colonna espressa in centimetri,
D il diametro pure espresso in centimetri,
F_0 il carico in chilogrammi producente la rottura,
si ha per la ghisa

$$F_0 = \frac{7500\ D^4}{1{,}846\ D^2 + 0{,}0043\ L^2} \qquad (13)$$

e per il ferro

$$F^0 = \frac{2500\ D^4}{1{,}973\ D^2 + 0{,}00064\ L^2} \qquad (14)$$

le quali sono applicabili per rapporti $\frac{L}{D}$ compresi fra 5 e 120; mentre allorquando il rapporto $\frac{L}{D}$ varia fra 5 e 30, il Lowe ha proposto le più semplici formule, per la ghisa

$$F_0 = \frac{7500\ D^3}{0{,}864\ D + 0{,}127\ L} \qquad (13a)$$

per il ferro

$$F_0 = \frac{2500\ D^3}{0{,}08\ D + 0{,}0508\ L} \qquad (14a)$$

Anche nell'applicazione delle formule di Lowe, siccome esse danno il carico di rottura, conviene ridurre quest'ultimo di $^1/_5$ od $^1/_6$, onde ottenere quello pratico che garantisca la stabilità.

Acciò si possa procedere speditamente nell'uso di queste formule si unisce una tabella contenente le potenze 2^a, 3^a, 4^a, dei numeri naturali dall'1 al 160, sufficiente per le ordinarie dimensioni impiegate nella pratica; la quale tabella serve anche per il calcolo delle formule (10) e (10*a*).

Tabella XI.

Delle potenze 2ª, 3ª, 4ª dei numeri compresi fra 1 e 160.

Numero	2ª potenza	3ª potenza	4ª potenza	Numero	2ª potenza	3ª potenza	4ª potenza
1	1	1	1	41	16 81	68 921	2 825 761
2	4	8	16	42	17 64	74 088	3 111 696
3	9	27	81	43	18 49	79 507	3 418 801
4	16	64	256	44	19 36	85 184	3 748 096
5	25	125	625	45	20 25	91 125	4 100 625
6	36	216	1 296	46	21 26	97 336	4 477 456
7	49	343	2 401	47	22 09	103 823	4 879 681
8	64	512	4 096	48	23 04	110 592	5 308 416
9	81	729	6 561	49	24 01	117 646	5 764 801
10	1 00	1 000	10 000	50	25 00	125 000	6 250 000
11	1 21	1 331	14 641	51	26 01	132 651	6 765 201
12	1 44	1 728	20 736	52	27 04	140 608	7 321 616
13	1 69	2 197	28 561	53	28 09	148 877	7 890 481
14	1 96	2 744	38 416	54	29 16	157 464	8 503 056
15	2 25	3 375	50 625	55	30 25	166 375	9 150 625
16	2 56	4 096	66 536	56	31 36	175 616	9 834 496
17	2 89	4 913	83 521	57	32 49	185 193	10 556 001
18	3 24	5 832	104 976	58	33 64	195 112	11 316 496
19	3 61	6 859	130 321	59	34 81	205 379	12 117 361
20	4 00	8 000	160 000	60	36 00	216 000	12 960 000
21	4 41	9 261	194 481	61	37 11	226 981	13 845 841
22	4 84	10 648	234 256	62	38 44	238 328	14 776 336
23	5 29	12 167	279 841	63	39 69	250 047	15 752 961
24	5 76	13 824	331 776	64	40 96	262 144	16 777 216
25	6 25	15 625	390 625	65	42 25	274 625	17 850 625
26	6 76	17 576	456 976	66	43 56	287 496	18 974 736
27	7 29	19 683	531 441	67	44 89	300 763	20 151 121
28	7 84	21 952	614 656	68	46 24	314 432	21 381 376
29	8 41	24 389	707 281	69	47 61	328 509	22 667 121
30	9 00	27 000	810 000	70	49 00	343 000	24 010 000
31	9 61	29 791	923 121	71	50 41	357 911	25 411 681
32	10 24	32 768	1 048 576	72	51 84	373 248	26 873 856
33	10 89	35 937	1 185 921	73	53 29	389 017	28 398 241
34	11 56	39 304	1 336 336	74	54 76	405 224	29 986 576
35	12 25	42 875	1 500 625	75	56 25	421 875	31 640 625
36	12 96	46 656	1 679 616	76	57 76	438 976	33 362 176
37	13 69	50 653	1 874 161	77	59 29	456 533	35 153 041
38	14 44	54 872	2 085 136	78	60 84	474 552	37 015 056
39	15 21	59 319	2 313 441	79	62 41	493 039	38 950 081
40	16 00	64 000	2 560 000	80	64 00	512 000	40 960 000

Segue Tabella XI.

Numero	2ª potenza	3ª potenza	4ª potenza	Numero	2ª potenza	3ª potenza	4ª potenza
81	65 61	531 441	43 046 721	121	1 46 41	1 771 561	214 358 881
82	67 24	551 368	45 212 176	122	1 48 84	1 815 848	221 533 456
83	68 89	571 787	47 458 321	123	1 51 29	1 860 867	228 886 641
84	70 56	592 704	49 787 136	124	1 53 76	1 906 624	236 421 376
85	72 25	614 125	52 200 625	125	1 56 25	1 953 125	244 140 625
86	73 96	636 056	54 700 816	126	1 58 76	2 000 376	252 047 376
87	75 69	658 503	57 289 761	127	1 61 29	2 048 383	260 144 641
88	77 44	681 472	61 969 536	128	1 63 84	2 097 152	268 435 456
89	79 21	704 696	62 742 241	129	1 66 41	2 146 689	276 922 881
90	81 00	729 000	65 610 000	130	1 69 00	2 197 000	285 610 000
91	82 81	753 571	68 574 961	131	1 71 61	2 248 091	294 499 921
92	84 64	778 688	71 639 296	132	1 74 24	2 299 968	303 595 776
93	86 49	804 357	74 805 201	133	1 76 89	2 352 637	312 900 721
94	88 36	830 584	78 074 896	134	1 79 56	2 406 104	322 417 936
95	90 25	857 375	81 450 625	135	1 82 25	2 460 375	332 150 625
96	92 16	884 736	84 934 656	136	1 84 96	2 515 456	342 102 016
97	94 09	911 673	88 529 281	137	1 87 69	2 571 353	352 275 361
98	96 04	941 192	92 236 816	138	1 90 44	2 628 072	362 673 936
99	98 01	970 299	96 059 601	139	1 93 21	2 685 619	373 301 041
100	1 00 00	1 000 000	100 000 000	140	1 96 00	2 744 000	384 160 000
101	1 02 01	1 030 301	104 060 401	141	1 98 81	2 803 221	395 254 161
102	1 04 04	1 061 208	108 243 216	142	2 01 64	2 863 288	406 586 896
103	1 06 09	1 092 727	112 550 881	143	2 04 49	2 924 207	418 161 601
104	1 08 16	1 124 864	116 985 856	144	2 07 36	2 985 984	429 981 696
105	1 10 25	1 157 625	121 550 625	145	2 10 25	3 048 625	442 050 625
106	1 12 36	1 191 016	126 247 696	146	2 13 16	3 112 136	454 371 856
107	1 14 49	1 225 043	131 079 601	147	2 16 09	3 176 523	466 948 881
108	1 16 64	1 259 712	136 048 896	148	2 19 04	3 241 792	479 785 216
109	1 18 81	1 295 029	141 158 161	149	2 22 01	3 307 949	492 884 401
110	1 21 00	1 331 000	146 410 000	150	2 25 00	3 375 000	506 250 000
111	1 23 21	1 367 631	151 807 041	151	2 28 01	3 442 951	519 885 601
112	1 25 44	1 404 928	157 351 936	152	2 31 04	3 511 808	533 794 816
113	1 27 69	1 442 897	163 047 361	153	2 34 09	3 581 577	547 981 281
114	1 29 96	1 481 544	168 896 016	154	2 37 16	3 652 264	562 448 656
115	1 32 25	1 520 875	174 900 625	155	2 40 25	3 723 875	577 200 625
116	1 34 56	1 560 896	181 063 936	156	2 43 36	3 796 416	592 240 896
117	1 36 89	1 601 613	187 388 721	157	2 46 49	3 869 893	607 573 201
118	1 39 24	1 643 032	193 877 776	158	2 49 64	3 944 312	623 201 296
119	1 41 61	1 685 159	200 533 921	159	2 52 81	4 019 679	939 128 961
120	1 44 00	1 728 000	207 360 000	160	2 56 00	4 096 000	655 360 000

18. Colonne vuote. — Una osservazione importante resta a farsi sulla scelta dei diametri delle colonne vuote.

Infatti lo spessore che si può assegnare alle colonne vuote in ghisa, ammette un limite minimo, determinato dall'arte del fonditore ed indipendente dalle condizioni di resistenza. Tale limite che in parte dipende dalla natura delle ghise più o meno fluide, ma principalmente dalla lunghezza dei pezzi che voglionsi ottenere, viene fissato dal MORIN come segue:

12	millimetri	per	le	colonne	alte	da 2 a 3	metri
15	»	»	»	»		3 a 4	»
20	»	»	»	»		4 a 6	»
25	»	»	»	»		6 a 8	»

Potrebbe anche avvenire che pur adottando spessori contenuti entro i suindicati limiti, essi fossero troppo esigui in confronto delle altre dimensioni, dal che ne risulterebbe un accartocciamento di queste deboli parti. Si può rimediare a tale inconveniente, impiegando dei rinforzi opportuni disposti sia nel senso parallelo che perpendicolare all'asse della colonna. I primi consistono generalmente nell'aggiunta di nervature longitudinali, in modo da formare una colonna scanalata, aumentandone così l'area della sezione resistente; i secondi in dischi o diaframmi che più di frequente però si usano nei tubi di ferro laminato.

19. Metodo dei coefficienti di riduzione. — Non si hanno delle esperienze esatte per determinare la resistenza dei prismi metallici, compressi da forze dirette secondo il loro asse, aventi sezioni differenti dalla circolare; HODGKINSON tuttavia ha osservato che una sbarra a sezione cruciforme resiste soltanto $^{18}/_{40}$ della sbarra a circolo cavo avente eguale area nella sezione trasversale, ciò che per altro presenta un vantaggio sul circolo pieno. Si è anche constatato che il rigonfiamento delle colonne verso il mezzo della loro lunghezza aumenta la loro resistenza nel rapporto di $^1/_7$ ad $^1/_8$; null'altro però si può aggiungere in proposito.

Risolve invece il problema, sufficentemente bene per i bisogni della pratica, il metodo dei *coefficienti di riduzione*, immaginato dal RONDELET. Esso consiste nel dividere il coefficiente di rottura K_c relativo al caso di compressione semplice (i cui valori sono

riportati nella tabella VII) per un coefficiente di riduzione m, dipendente dal rapporto $\frac{L}{g}$ fra la lunghezza del solido e la minima dimensione della sua sezione retta, e nel quoziente si ottiene il carico di rottura relativo al caso in cui può avvenire flessione invece che il semplice schiacciamento, metodo che si è già indicato relativamente ai prismi di legname.

Nella tabella XII sono elencati i detti coefficienti di riduzione sia per la ghisa che per il ferro.

Per tutti i rapporti $\frac{L}{g}$ non contenuti nella tabella il coefficiente di riduzione m si ricava col metodo delle parti proporzionali.

Tabella XII.

Rapporto di $r = \frac{L}{g}$		3	5	12	24	36	48	60
Coefficienti di riduzione m	Ghisa	—	1	1,2	2	3	6	12
	Ferro	1	—	1,2	2	3	6	12

Con g si intende la minima dimensione della sezione retta del prisma, e nel caso di sezioni contornate, come ferri in forma di ┐┬┌┘ . . . , per g si deve prendere il lato minore del rettangolo circoscrivente.

Per il caso adunque di prismi che, essendo molto lunghi in confronto della loro grossezza, si piegano sotto l'azione di forze prementi dirette nel senso del loro asse, si può stabilire la formula

$$F_o = \frac{K_c}{m} \omega \qquad (15)$$

la quale dà il carico di rottura che nelle pratiche applicazioni deve essere ridotto di $^1/_5$ od $^1/_6$. Il carico $\frac{K_c}{m}$ si può chiamare *carico di rottura ridotto* e lo si indica con K_o. — Per la stabilità dovendosi prendere uno sforzo unitario, o carico di sicurezza,

minore, chiamando quest'ultimo *sforzo ridotto* ed indicandolo con R_0 si ha

$$R_0 = \alpha K_0 \qquad (16)$$

nella quale α esprime una frazione che varia da $^1/_5$ ad $^1/_6$. — Un esempio servirà a chiarire l'uso della formula.

Esempio.

Un ritto di ferro alto metri 1,98 avente per sezione un ferro in forma di] *colle dimensioni segnate nella* Fig. 2 *e cogli estremi vincolati a mantenersi lungo la medesima verticale, senza che possano girare, deve sopportare l'azione di una forza premente diretta nel senso del suo asse; si vuol conoscere quale sarà il massimo valore di questa forza, acciò la stabilità del ritto sia garantita.*

Si calcola intanto il rapporto r cioè

$$r = \frac{L}{g} = \frac{198}{6} = 33$$

e non trovandosi questo nella tabella XII, conviene formare il relativo coefficiente di riduzione m. Si osservi che il rapporto 33 è compreso fra i rapporti 24 e 36 della tabella, che la differenza fra questi due ultimi rapporti è $36 - 24 = 12$, quella dei loro corrispondenti coefficienti è $3 - 2 = 1$ e paragonando il rapporto 33 del caso esemplificato, con l'uno o l'altro di quelli fra cui è compreso, per es., col 24, vedesi che la differenza, è $33 - 24 = 9$. Quindi se per due rapporti che differiscono di 12 la differenza fra i coefficienti è di 1, è evidente che, per due rapporti che differiscono di 9, la differenza fra i coefficienti sarà data dalla quarta proporzionale fra le suddette differenze, la quale detta x sarà:

$$x = \frac{1 \times 9}{12} = 0{,}75$$

vale a dire il coefficiente m relativo al rapporto 33 differisce in più da quello relativo al rapporto 24 della quantità 0,75 e quindi sarà:

$$m = 2 + 0{,}75 = 2{,}75$$

L'area ω del ferro ad] è $6 \times 10 - 5 \times 8 = 20$ centimetri quadrati.

Il coefficiente di rottura per il ferro si ricava dalla tabella VII, cioè $K_0 = 2500$, e quindi sostituendo nella (15) si ottiene

$$F_0 = \frac{2500}{2{,}57}\, 20 = 18181{,}8 \text{ Kg.}$$

Ora il ricavato valore di chilogrammi 18181,8 che rappresenta il carico di rottura, devesi per garantire la stabilità ridurre di $^1/_5$ od $^1/_6$; prendendo $^1/_5$ risulta il massimo peso col quale si potrà caricare il ritto di

$$\frac{18181.8}{5} = 3636{,}36 \text{ Kg.}$$

Con questo metodo non viene tenuto conto della forma che presentano le sezioni rette dei prismi cimentati.

20. Metodo degli equivalenti di compressione. — Un altro metodo pratico, così detto degli *equivalenti di compressione*, considera anche la forma, ed è conforme alla risoluzione teorica. Lo sforzo massimo di compressione R_c col quale si possono caricare in pratica i solidi prismatici sull'unità di sezione retta, viene dato dalla formula

$$R_c = n\, E_c\, m\, c \left(\frac{1}{r}\right)^2 \qquad (17)$$

nella quale

r indica il rapporto $\frac{L}{g}$ della lunghezza alla minima dimensione della sezione retta del prisma.

c rappresenta un coefficiente che dipende dalla forma della sezione retta del prisma stesso.

m un coefficiente dipendente dal modo col quale il prisma è attaccato.

E_c il coefficiente di elasticità longitudinale relativo alla compressione.

n un coefficiente di stabilità.

Riferendosi al centimetro quadrato, è mediamente

per il ferro $E_c = 1900000$ Kg.
per la ghisa $E_c = 900000$ »

e si prende generalmente in ogni caso $n = {}^1/_6$, mentre si ha per la sezione quadrata, circolare e cruciforme composta di 5 eguali quadrati, rispettivamente

$$c = \frac{1}{12} \quad , \quad c = \frac{1}{16} \quad , \quad c = \frac{19}{540}$$

Furono calcolati e raccolti nella tabella XIII, per alcuni rapporti r, i corrispondenti valori R_c espressi in chilogrammi e per centimetro quadrato, nell'ipotesi che i prismi sieno incastrati ad un solo estremo ed all'altro pienamente liberi, nel qual caso è:

$$m = 2{,}467$$

Tabella XIII.

$r=\frac{L}{g}$	Ferro - Valori di R_c			$r=\frac{L}{g}$	Ghisa - Valori di R_c		
	■	●	✚		■	●	✚
8,36	—	—	600	4,07	—	—	1200
9	—	—	516	4,39	—	1200	—
9,02	—	600	—	5	—	925	795
10	—	488	420	5,06	1200	—	—
10,40	600	—	—	6	855	643	553
11	536	403	347	7	627	472	405
12	451	339	291	8	480	361	310
13	384	289	248	9	378	284	244
14	331	249	214	10	308	231	199
15	288	217	186	12	213	163	138
20	162	122	105	15	137	103	88
25	104	78	67	20	77	58	50
30	72	54	47	30	34	26	22
40	41	31	26	40	12	9	8
50	26	20	17				

Per valori di r non contenuti nella tabella si ottengono i corrispondenti di R_c col mezzo dell'interpolazione.

Nel caso che i prismi sieno fissi ad ambidue gli estremi, ma che questi fossero arrotondati in modo da poter girare liberamente, allora diventa

$$m = 4 \times 2,467 = 9,868$$

e se invece i prismi sono fissati ad ambidue gli estremi ed ivi sagomati a forma piatta, in modo che non possono girare, allora è

$$m = 16 \times 2,467 = 39,472$$

Vedesi pertanto che in questi due ultimi casi si può egualmente ricorrere alla tabella XIII per avere i valori di R_c, basta cioè moltiplicare i valori da essa forniti rispettivamente per 4 e

per 16 onde ottenere quelli relativi al primo od al secondo modo di attacco dei prismi.

Bisognerà però aver l'avvertenza di non oltrepassare mai lo sforzo di 600 chilogrammi per centimetro quadrato per il ferro, e di 1200 chilogrammi per centimetro quadrato per la ghisa, ancorchè i risultanti prodotti avessero a riescire maggiori, nel qual caso vorrebbe dire che il prisma resisterebbe teoricamente ad uno sforzo più grande dei limiti dati senza piegarsi, ma non sarebbe poi atto a resistervi stabilmente rispetto allo schiacciamento.

Se la sezione è cruciforme a braccia eguali di qualunque lunghezza e di spessore $\frac{g}{n}$, come mostra la **Fig. 3**, allora il coefficiente c ha per valore

$$c = \frac{n^3 + n - 1}{12\,(2\,n - 1)\,n^2}$$

Per una sezione a $\mathbf{I}$ di altezza $2\,g$, con tavolette larghe g e di spessore $\frac{g}{m}$, e col gambo di spessore $\frac{2\,g}{n}$, **Fig. 4**, il coefficiente c assume il valore

$$c = \frac{n^3 + 8\,(m - 1)}{12\,(n + 2\,m - 2)\,m^2}$$

Ci sembra però che nelle pratiche applicazioni a questo metodo sia da preferirsi l'altro dei *coefficienti di riduzione*.

21. Resistenza dei rulli. — Nella costruzione dei ponti metallici, acquista una notevole importanza la conoscenza del modo di resistere alla rottura per compressione dei corpi cilindrici impiegati come rulli, e premuti fra due piani orizzontali. Mancano in proposito dei dati sperimentali sicuri a cui potersi riferire con certezza; però dalle ricerche istituite da VICAT, egli potè dedurre che questo genere di resistenza è proporzionale al prodotto degli assi per i diametri dei cilindri.

Si può quindi stabilire riguardo alla resistenza medesima;

1° Che nei cilindri aventi assi eguali essa sta come i diametri,

2° Che nei cilindri dello stesso diametro sta come gli assi,

3° Che nei cilindri simili sta come i quadrati dei diametri.

Alcuni pratici sogliono anche valutare questa resistenza colla formula

$$K_r = 0{,}316\ K_c \qquad (18)$$

nella quale

K_r rappresenta la resistenza alla rottura per compressione, riferita all'unità di superficie della sezione orizzontale passante per l'asse del rullo,

K_c la resistenza alla rottura per compressione riferita all'unità di superficie della sezione retta di un cubo, della stessa materia del rullo, compresso verticalmente nel senso del suo asse, ed i cui valori sono forniti dalla tabella VII.

Se dunque si chiama

F la forza comprimente,

N il numero dei rulli che devono resistervi, disposti coll'asse orizzontale,

d il diametro degli stessi,

l la loro lunghezza,

riferendosi al limite di rottura si ha la relazione

$$F = K_r N l d \qquad (19)$$

nella quale, il valore di K_r esprimendo il carico unitario che produrrebbe rottura, bisogna ridurre il valore di F di $^1/_5$ od $^1/_6$, onde conseguire nelle pratiche applicazioni una stabilità durevole.

22. Resistenza delle pietre. — Le molteplici esperienze istituite sopra la resistenza delle pietre alla rottura per pressione, fecero conoscere che la forma della sezione retta dei prismi cimentati influisce sul loro modo di resistere e precisamente paragonando fra loro, a parità di tutte le altre condizioni, le forme rettangolare, quadrata e circolare, le rispettive resistenze stanno circa come i numeri 7, 8 e 9.

Nei monoliti la resistenza è maggiore di quella che presentano, a parità di volume e di forma, parti composte di molti pezzi e sopratutto nuocono alla resistenza le congiunture verticali.

Ogni qual volta poi si devono impiegare pietre di nuova cava, è necessario di sperimentarne la resistenza alla rottura, la quale è variabilissima da pietra a pietra, e lo stesso dicasi dei mattoni di nuova provenienza, rimarcando che per mattoni della stessa

qualità a seconda che essi siano albasi, mezzani, forti o ferrioli, cangia notevolmente la loro resistenza. Così pure i mattoni lavorati a macchina sono meno resistenti di quelli lavorati a mano, mentre quelli di fornace sono migliori di quelli di cumulo.

I mattoni sono da annoverarsi fra i materiali che presentano la maggior variabilità nella resistenza alla rottura per pressione; difatti vi sono dei mattoni che non resistono ad una pressione superiore a 5 chilogrammi per centimetro quadrato, ma questi sono di terra cattiva, mal fabbricati e mal cotti e devono assolutamente rifiutarsi, mentre dei mattoni di ottima qualità e ben cotti sopportano oltre 300 chilogrammi per centimetro quadrato. Praticamente però si ritiene che il valor medio della resistenza sia di 60 chilogrammi per centimetro quadrato nei mattoni ordinari, e di 100 fino a 200 chilogrammi per centimetro quadrato nei mattoni di scelta qualità.

Si unisce una tabella dei carichi producenti rottura, riferentisi alle principali qualità di pietre che possono venire impiegate nelle costruzioni, espressi in chilogrammi per centimetro quadrato.

Tabella XIV.

Indicazione delle pietre	Carico di rottura K_c
Basalto	3000
Granito duro	1050
» ordinario	600
Grès duro	1350
» tenero	6
Pietra calcare assai dura	750
» » ordinaria	450
Arenaria comune	35
Mattoni assai duri	180
» ordinari	60

Nelle costruzioni non si sottoporranno giammai le pietre a carichi maggiori di $^1/_{10}$, di $^1/_{15}$ o di $^1/_{20}$ di quelli producenti la rottura, alcuni dei quali sono forniti dalla tabella XIV, prendendo

tanto più piccolo il coefficiente di riduzione, quanto più minuto e disforme è il materiale componente le murature.

α) **Leggi sulla diffusione delle pressioni sopra le superficie premute.** — È fuori di dubbio che le pietre sono dotate di elasticità; ciò ammesso, il loro modo di resistere all'azione delle forze esterne è vario a seconda che queste sieno dirette secondo l'asse od eccentricamente.

Nel primo caso la pressione si diffonde uniformemente sulla superficie premuta, nell'altro caso essa si comporta altrimenti.

Per solidi cimentati nella direzione stessa del loro asse, la relazione fra le forze esterne e le reazioni molecolari, nei limiti di rottura, è data dalla (8) nella quale, come abbiamo veduto, F_o deve essere ridotto praticamente da $^1/_{10}$ fino ad $^1/_{20}$ a seconda dei casi, onde ottenere lo sforzo pratico ammissibile per la stabilità della costruzione.

Per solidi cimentati eccentricamente, come avviene di frequente nei piedritti dei ponti, conviene vedere con qual legge la pressione si diffonde sulle superficie premute.

Attenendosi alle ricerche analitiche del Bresse e considerando il problema sotto il suo aspetto il più generale, bisogna distinguere, nella superficie premuta del prisma, un nucleo centrale entro cui cadendo la forza, tutta l'area viene premuta con intensità variabile, mentre se la forza cade al di fuori del medesimo, soltanto una parte della superficie è soggetta a pressione, pure variabile. Ad esempio, se la superficie premuta è rettangolare, il nucleo è determinato attorno al centro del rettangolo, da un parallelogrammo che ha i vertici, due a due, sugli assi di simmetria del rettangolo a distanza dal centro di $^1/_3$ dei semilati corrispondenti; se è un circolo, il nucleo è limitato da un altro circolo concentrico che ha per raggio $^1/_4$ di quello del cerchio perimetrale; se la sezione del solido fosse un poligono regolare, sarebbe a proposito, per i casi pratici, di sostituirvi il circolo inscritto ed ommettere nel calcolo i triangoli mistilinei disposti lungo il contorno.

Ciò ammesso, la soluzione generale sarebbe ancora troppo complicata e laboriosa per le pratiche applicazioni. Siccome però nelle costruzioni, generalmente il punto d'applicazione della forza premente cade sopra uno degli assi di simmetria della superficie

premuta e, specialmente nei piedritti dei ponti, le sezioni sono rettangolari, ne viene che, limitandosi a questo caso pratico, la risoluzione del problema non presenta difficoltà alcuna.

Il rettangolo **A B C D** rappresenti la faccia di contatto di due strati aderenti di un prisma murario, **Fig. 5**, la quale sia premuta in direzione ad essa normale da una forza F applicata in un punto qualunque **P** giacente su di un asse di simmetria, distante dal centro di superficie della quantità **P G** $= e$.

Il rettangolo **A B C D** si può considerare costituito da tante zone elementari parallele alla sua base **C D**, lunghe come la stessa, e di altezza infinitesima.

In causa dell'eccentricità del punto di applicazione della forza premente F, la pressione non si diffonde più uniformemente, ma ciascuna zona elementare sarà premuta in modo vario.

Viene ammessa l'ipotesi che la pressione unitaria sulle varie zone, cioè quella che si riferisce all'unità di superficie delle medesime, vada aumentando proporzionalmente alla rispettiva distanza di queste zone dal lato del rettangolo il più lontano dal centro di pressione, ed inoltre che la forza premente F rappresenti la risultante di tutte le pressioni assolute che cimentano ciascuna zona. Evidentemente risulta che, la pressione unitaria minima ha luogo per la zona elementare aderente al lato del rettangolo il più lontano dal centro di pressione, mentre la massima pressione unitaria si verifica per la zona elementare aderente al lato del rettangolo il più vicino al centro di pressione.

Ciò posto se si chiama:

b la base **C D** del rettangolo,

a la sua altezza **B D**,

p_o la *pressione unitaria minima* che si esercita sulla zona elementare aderente al lato **C D** del rettangolo, il più lontano dal centro di pressione **P**,

p la *pressione unitaria massima* che si esercita sulla zona elementare aderente al lato **A B** del rettangolo, il più vicino al centro di pressione **P**,

π la pressione unitaria che ha luogo in una zona elementare qualunque $\alpha\ \beta$ distante x dal centro di figura **G**, ed $(x + {}^1/_2\ a)$ dal lato **C D**,

k il coefficiente di proporzionalità degli incrementi della pressione unitaria,

è evidente che sarà:

$$\pi = p_0 + k\left(\frac{1}{2}a + x\right) \qquad (I)$$

e siccome l'area della zona elementare $\alpha\beta$ ha per valore $b \cdot d\,x$, così la pressione assoluta sulla medesima sarà espressa da

$$\pi\, b\, d\, x = \left\{ p_0 + k\left(\frac{1}{2}a + x\right)\right\} b\, d\, x$$

nella quale sono da determinarsi le incognite p_0 e k.

Per l'accennata ipotesi si avranno le due equazioni:

$$F = b\int_{x=-\frac{a}{2}}^{x=\frac{a}{2}} \left\{ p_0 + k\left(\frac{1}{2}a + x\right)\right\} d\,x \qquad (II)$$

$$b\int_{x=-\frac{a}{2}}^{x=\frac{a}{2}} \left\{ p_0 + k\left(\frac{1}{2}a + x\right)\right\} (e - x)\, d\,x = 0 \qquad (III)$$

l'ultima delle quali rappresenta la somma dei momenti di tutte le pressioni assolute elementari, riferiti al punto P di applicazione della risultante F; la qual somma si sa dover essere eguale a zero.

Per brevità di calcolo si ponga la quantità costante

$$p_0 + \frac{1}{2}k\,a = m \qquad (IV)$$

per cui le equazioni (II) e (III) diventeranno

$$b\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (m + k\,x)\, d\,x = F$$

$$b\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (m + k\,x)\,(e - x)\, d\,x = 0$$

le quali, integrate dentro gli indicati limiti, divengono:

$$F = a\,m\,b \qquad (V)$$

$$m\,e - \frac{k\,a^2}{12} = 0 \qquad (VI)$$

Eguagliando i due valori di m, che si ricavano dalla (V) e (VI), si ottiene;

$$k = \frac{12\,e\,F}{b\,a^3}$$

e sostituendo questo valore di k nella (IV), nonchè quello di m ricavato dalla (V), risulta

$$p_0 = \frac{F}{a\,b}\left(1 - \frac{6\,e}{a}\right)$$

ed indicando con ω l'area $a\,b$ del rettangolo

$$p_0 = \frac{F}{\omega}\left(1 - \frac{6\,e}{a}\right)$$

Sostituendo i trovati valori delle incognite k e p_0 nella (I), si ricava l'espressione generale della pressione unitaria, sopra una zona elementare qualsiasi della considerata superficie rettangolare, cioè

$$\pi = \frac{F}{\omega}\left(1 + \frac{12\,e\,x}{a^2}\right) \qquad (20)$$

Posto nella (20) $x = -\frac{a}{2}$, si trova la pressione unitaria minima sulla zona elementare aderente al lato **C D** del rettangolo il più lontano dal centro di pressione, espressa ancora da

$$p_0 = \frac{F}{\omega}\left(1 - \frac{6\,e}{a}\right) \qquad (21)$$

e se si pone nella (20) $x = \frac{a}{2}$, si trova la pressione unitaria massima sulla zona elementare, aderente al lato **A B** del rettan-

golo il più vicino al centro di pressione, espressa da

$$p = \frac{F}{\omega}\left(1 + \frac{6\,e}{a}\right) \qquad (22)$$

Se sia $e = 0$, cioè se la forza comprimente passa per il centro di gravità **G** della superficie premuta, allora dalle (20) (21) (22) si ha

$$p_o = p = \pi = \frac{F}{\omega}$$

ossia la pressione è uniformemente distribuita su tutta l'area del rettangolo.

Nel caso particolare che sia $e = {}^1/_6\,a$, locchè corrisponde (ponendo la quantità **P M** $= d$, **Fig. 5**), a fare $d = {}^1/_3\,a$, cioè nel caso che il centro di pressione si trovi ad $^1/_3$ dell'altezza della superficie rettangolare premuta, diventa:

$$p_o = 0 \qquad p = 2\,\frac{F}{\omega}$$

ossia la pressione unitaria sulla zona elementare aderente al lato del rettangolo il più lontano dal centro di pressione si annulla, mentre quella che si verifica sulla zona elementare aderente al lato del rettangolo il più vicino al centro di pressione diventa doppia della pressione unitaria uniformemente distribuita su tutta l'area rettangolare.

Qualora si abbia $e > {}^1/_6\,a$, ossia $d < {}^1/_3\,a$, vedesi facilmente che p_o diventa una quantità negativa, ciò che significa che in **C D** in luogo di pressione, avrebbe luogo l'effetto contrario, cioè uno sforzo di trazione.

Ora se si considera che nei due strati a contatto non vi ha coesione alcuna (trascurando quella delle malte, che eventualmente possono collegarli) si vede che non vi può essere trazione in nessuna zona elementare, e quindi, il divenire p_o una quantità negativa, non ha altro significato che quello di indicare, che la pressione esercitata dalla forza F, si diffonde sopra una parte soltanto dell'area premuta **A B C D**.

E pertanto nel caso di $e > {}^1/_6\,a$, ossia $d < {}^1/_3\,a$, la formula (21) non vale più a somministrare la massima pressione unitaria sulla zona elementare aderente al lato del rettangolo il

più vicino al centro di pressione, poichè essa fu determinata nell'ipotesi che la forza premente si diffondesse su tutta la superficie.

Per determinare il valore della massima pressione unitaria p nel caso di $e > {}^1/_6\, a$, ossia $d < {}^1/_3\, a$, è necessario di trovare prima la grandezza di quella parte della superficie del rettangolo **A B C D** sulla quale si diffonde la pressione esercitata dalla forza F. Ora è evidente che la linea la quale separerà la parte premuta dalla non premuta, deve essere una *retta* **R S**, parallela a **C D**, rispetto alla quale la pressione unitaria sia nulla, Fig. 6. E che la detta linea separatrice sia una *retta*, risulta dall'aver ammesso la superficie rettangolare **A B C D** divisa in linee rette, o zone elementari, di egual pressione, di cui la pressione unitaria dipende dalla distanza della zona del lato **C D**. Nella linea separatrice adunque, le pressione dovendo essere egualmente nulla per ciascun suo punto, è necessario che ognuno di essi disti della stessa quantità dal lato **C D**, ossia la linea **R S** deve essere parallela alla *retta* **C D** e quindi essa medesima deve essere una *retta*.

E poichè si è veduto che, quando il centro di pressione **P** dista dal lato più vicino del rettangolo di una quantità **P M** eguale ad ${}^1/_3$ della sua altezza, la pressione unitaria sul lato opposto più lontano si riduce a zero, così è chiaro che la cercata retta separatrice si troverà alla distanza $a_1 = \mathbf{K\,M} = 3\,\mathbf{P\,M}$ dal lato **A B** (essendo $\mathbf{P\,M} = d < {}^1/_3\, a$). La pressione F adunque non si diffonde che sulla parte **A B R S** del rettangolo di area $a_1 b$, e siccome per questa parte il centro di pressione giacerebbe ad ${}^1/_3$ della rispettiva altezza a_1, così ne consegue che la pressione unitaria massima nella zona elementare aderente al lato **A B** sarà doppia della pressione uniforme di valore $\frac{F}{a_1 b}$ e quindi essa sarà espressa da

$$p = 2\,\frac{F}{a_1 b} \qquad \text{(VII)}$$

Ora essendo

$$\mathbf{P\,M} = \frac{1}{2}\,a - e \quad , \qquad a_1 = 3\,\mathbf{P\,M} = 3\left(\frac{1}{2}\,a - e\right)$$

fatta la sostituzione nella (VII) risulta

$$p = \frac{4}{3} \frac{F}{\omega \left(1 - \frac{2\,e}{a} \right)} \qquad (23)$$

la quale nel caso contemplato di $e > {}^1/_6\, b$, ossia $d < {}^1/_3\, a$, servirà a dare la massima pressione unitaria.

Siccome di frequente in pratica si usa riferire il centro di pressione **P** al lato più vicino del rettangolo, come **A B**, onde esprimere le (21) (22) (23) in funzione della quantità **P M** $= d$ basterà porre $e = {}^1/_2\, a - d$, e si otterrà:

per $d > \frac{1}{3}\, a$

$$\begin{cases} p_0 = \dfrac{2\,F}{\omega} \left(-1 + \dfrac{3\,d}{a} \right) & (21a) \\ p = \dfrac{2\,F}{\omega} \left(2 - \dfrac{3\,d}{a} \right) & (22a) \end{cases}$$

e per $d < \frac{1}{3}\, a$

$$p = \frac{2\,F}{\omega} \frac{a}{3\,d} \qquad (23a)$$

Una importante osservazione deve farsi, e cioè, che la superficie rettangolare premuta viene a rappresentare in generale la faccia di contatto di due corpi, l'uno premente, premuto l'altro (quali, ad esempio, il zoccolo di fondazione ed il soprastante pilastro, costituenti un piedritto di ponte) e che la forza F altro non è che la componente, normale alla faccia di contatto, della risultante di tutte le forze esterne sollecitanti il corpo premente compreso il proprio peso.

Anzi la esposta teoria trova un impiego razionale soltanto allora che questa faccia di contatto sia piuttosto ampia in confronto di quella del prisma premuto (la quale può esser differente dalla base del corpo premente); che se per avventura succedesse il contrario, allora le formule date non sono più applicabili, inquantochè le fatte ipotesi cessano dal verificarsi. Infatti se, ad esempio, si considera una colonna metallica di piccolo diametro, sorreggente un forte carico, impostata sopra un largo zoccolo di pietra, non conviene più applicare le date formule per determinare le pressioni sulla faccia superiore di questo zoccolo, avvegnachè nascerebbero in questa delle deformazioni elastiche solamente sotto alla base della colonna, ma non su tutta l'estesa di questa

faccia, la quale quindi cesserebbe di rimaner piana, come si è ammesso nella deduzione delle indicate formule.

In generale dunque le date formule non sono da usarsi, ogni qualvolta si tratti di grandi forze applicate direttamente a qualche punto di un solido, nel qual caso si procede rinforzando detti punti con notevole abbondanza di materia molto resistente.

III.

SCORRIMENTO O TAGLIO.

23. Resistenza alla rottura. — Dicesi che viene cimentato lo scorrimento od il taglio in un solido allorchè, in causa dell'azione delle forze esterne, una porzione di esso tende a staccarsi dall'altra per modo, che le due parti scorrano tangenzialmente l'una sull'altra in senso contrario, lungo la sezione retta nella quale sta per manifestarsi la rottura, Fig. 7.

I corpi a struttura granulare presentano in generale eguale resistenza allo scorrimento in qualunque senso vengano cimentati. Non così avviene nei corpi a tessitura fibrosa i quali se vengono cimentati in guisa che la sezione di rottura sia normale alla direzione delle fibre, presentano una resistenza ben differente da quella che oppongono, allorchè la sezione di rottura si presenta nel senso stesso delle fibre.

Anzi la prima maniera di rottura chiamasi *scorrimento trasversale*, mentre la seconda dicesi *scorrimento longitudinale*.

Troppo difficile è la sperimentale determinazione del *coefficiente di elasticità trasversale* e perciò non si hanno dati sicuri in proposito. Soltanto vista la grande analogia che esso presenta col coefficiente di torsione, si assume questo per rappresentarlo.

Dai pochi risultati che si conoscono, sulla sperimentale ricerca del *coefficiente di elasticità trasversale*, si può stabilire che, per i corpi impiegati d'ordinario nella costruzione dei ponti metallici,

esso con molta approssimazione è da ritenersi eguale ad $^1/_3$ del *coefficiente di elasticità longitudinale relativo alla trazione.*

Considerata però la poca certezza dei valori da adottarsi per il coefficiente di elasticità trasversale, ed osservando altresì che nelle pratiche applicazioni non si usa di ricorrere al limite di elasticità, ma bensì a quello di rottura, si tralascia la ricerca delle reazioni molecolari pel limite di elasticità e la si fa invece per quello di rottura.

L'esperienza ha dimostrato, relativamente ai solidi prismatici in cui venga cimentata la resistenza alla rottura per scorrimento da forze dirette perpendicolarmente ai loro assi, per questi passanti, e capaci di produrre l'immediata rottura, che esse forze sono sensibilmente proporzionali alle aree delle sezioni rette dei corpi esperimentati. Si può quindi stabilire che queste forze si ripartiscono uniformemente sulle sezioni rette dei corpi che vengono cimentati alla rottura, e perciò se si chiama:

ω l'area della sezione retta,

S_0 la risultante delle reazioni molecolari che si oppongono alla rottura per scorrimento del solido prismatico, la quale deve considerarsi eguale e direttamente contraria alla risultante F_0 delle forze esterne sotto la cui azione il prisma sta per rompersi,

K_s il coefficiente di proporzionalità, ossia lo sforzo unitario di scorrimento,

si ha che il valore delle reazioni molecolari è dato da

$$S_0 = F_0 = K_s \omega \qquad (24)$$

K_s dicesi *coefficiente di rottura per scorrimento*, dipende dalla materia costituente il solido e si può definire per quella forza che sarebbe capace di produrre la rottura per scorrimento in un prisma che avesse per sezione retta l'unità superficiale, od anche rappresenta la risultante delle reazioni molecolari che si sviluppano nel solido cimentato alla rottura, avente l'unità di superficie per sezione trasversale.

Relativamente al ferro fu constatato da molti costruttori che la sua resistenza allo scorrimento è pressochè eguale a quella alla trazione; avendosi però generalmente rimarcato una qualche inferiorità nella prima, si ritiene opportuno di adottare questa eguale ai $^4/_5$ della seconda.

È da avvertire poi che il ferro laminato offre maggior resistenza nel senso perpendicolare che non nel senso parallelo alla laminatura.

Per la ghisa non venne fatta ancora la diretta determinazione della sua resistenza allo scorrimento, però basandosi sull'analogia dei fenomeni che si riscontrano nello scorrimento e nella torsione, si accettano i risultati relativi a quest'ultima resistenza come comuni, e quindi si può ammettere che il valore di K_s per la ghisa sia di 2000 chilogrammi per centimetro quadrato.

Riguardo al legname mancano dati sperimentali sulla sua resistenza allo scorrimento. Vi è poi una notevole differenza fra il suo modo di resistere alla rottura nel senso parallelo alle fibre, oppure in quello per traverso. Si può per altro ritenere, come consigliano alcuni pratici, senza tema di compromettere la stabilità della costruzione, che la resistenza alla rottura in senso perpendicolare alle fibre sia:

150 chilogrammi al centimetro quadrato per la *quercia*
130 » » » per il *larice rosso;*

e che la resistenza alla rottura nel senso parallelo alle fibre sia da 30 a 40 chilogrammi al centimetro quadrato tanto per la quercia che per il larice rosso.

24. Carico di sicurezza. — Anche riguardo alla rottura per scorrimento non conviene cimentare il materiale fino al limite di rottura, ma bensì con uno sforzo molto minore di questo.

Tabella XV.

Indicazione dei corpi	Sforzo pratico di scorrimento
Ferro fucinato	500
Ferro di 1ª qualità da bulloni	800
Ghisa di buona qualità	220
» ordinaria	190
Acciaio temperato	1800
» non temperato	900
Acciaio fuso temperato	5000
» » non temperato	3300

Chiamando R_s lo sforzo pratico ammissibile di scorrimento, riferito all'unità superficiale, si prenderà

$$R_s = n K_s$$

dove il valore di n varia fra $^1/_{10}$ ed $^1/_{12}$ per il legname e fra $^1/_5$ ed $^1/_6$ per i metalli.

La (24) quindi nei limiti di stabilità si cangia nell'altra

$$F = R_s \omega \qquad (25)$$

che servirà per le ricerche di stabilità dei solidi cimentati allo scorrimento.

Nella tabella XV sono raccolti i valori di R_s per alcuni metalli, *espressi in chilogrammi per centimetro quadrato.*

IV.

FLESSIONE.

25. Generalità. — Se un solido prismatico è sollecitato da una o più forze comunque dirette, ma tutte contenute in uno stesso piano passante per l'asse del solido, e se si immaginano queste forze decomposte parallelamente e normalmente al medesimo asse, l'azione delle componenti parallele produce una tensione longitudinale nel solido, per la quale esso verrebbe allungato od accorciato a seconda dell'intensità e della direzione di queste componenti parallele, mentre l'azione delle componenti normali fa incurvare il solido, originando il *fenomeno della flessione.*

Volendo studiare il fenomeno sotto l'aspetto il più generale, converrebbe supporre che la sezione retta del solido avesse una forma irregolare qualunque e che le forze fossero comunque applicate all'asse del solido; che se pur si volesse limitarsi alla flessione piana, bisognerebbe ritenere che il piano, nel quale sono contenute le forze sollecitanti, avesse una qualsiasi direzione. Siccome però nello studio che si andrà facendo sui ponti metallici, i solidi che si dovranno considerare, avranno sempre la loro sezione retta di forma regolare, presentante almeno un asse di simmetria, e considerando che le forze sollecitanti saranno tutte dirette nor-

malmente all'asse del solido e tutte contenute in uno stesso piano, passante per il suddetto asse di simmetria, oppure a questo normalmente disposto, si semplificheranno di molto le ricerche sulla flessione, ammettendo tutte le circostanze ora accennate.

Il piano nel quale sono contenute tutte le forze sollecitanti dicesi *piano di sollecitazione*, il quale dunque, oltrechè passare per l'asse del solido, si ammetterà che sia sempre diretto o secondo un asse di simmetria, oppure normalmente a detto asse e quindi è la *flessione piana* nei casi i più semplici, quella che si studia.

26. Leggi sulla flessione. — I primi tentativi con cui si è cercato di sottoporre all'analisi il fenomeno della flessione, sono dovuti a GALILEO, il quale ammetteva l'ipotesi che, nei prismi cimentati alla flessione, tutte le fibre si allungassero a partire da quelle giacenti sulla faccia concava, le quali rimanevano inalterate nella loro lunghezza; ipotesi che venne accettata anche da MARIOTTE e LEIBNITZ.

Più tardi le molte ed accurate esperienze di DUHAMEL DI MONCEAUX, DUPIN, DULEAU, FAIRBAIRN, HODGKINSON, CLARK, MORIN fecero conoscere con esattezza l'erroneità di tale ipotesi, e dimostrarono con quali altre leggi invece abbia luogo il fenomeno della flessione. E tali leggi non rigorosamente vere, ma, nei limiti entro i quali sono cimentati i solidi nella pratica, sufficientemente esatte e concordi coi fatti veri e reali che si manifestano nella flessione, verranno ora esposte.

Si consideri un solido prismatico ad asse rettilineo, Fig. 8, e lo si immagini diviso in tanti strati longitudinali di grossezza infinitesima e disposti normalmente ad un asse **s s** della sezione retta del solido stesso. Si considerino due sezioni **M N** ed **R S** normali all'asse del solido e quindi fra loro parallele.

Cimentato il solido dall'azione di forze esterne dirette normalmente al suo asse, in modo che il piano di sollecitazione passi per l'asse di simmetria **s s**, il solido si piega, e, se non si abbia sorpassato il limite di elasticità, si può ritenere:

1° Che le due sezioni **M N** ed **R S** piane, normali all'asse del solido e quindi fra loro parallele prima della flessione, rimangono piane e normali all'asse del solido dopo subìto l'incurvamento, ma

conseguentemente non sieno più parallele, bensì concorrenti in un punto, che è il centro della curva affetta dall'asse del solido.

2° Che gli strati longitudinali piani in cui si è immaginato diviso il solido, primitivamente orizzontali, dopo la flessione divengano incurvati secondo superficie cilindriche concentriche a generatrici rettilinee orizzontali.

Ne consegue allora che gli strati situati fra le due sezioni considerate, quelli dalla parte della convessità si sono allungati, gli altri dalla parte della concavità si sono accorciati, e gli allungamenti ed accorciamenti diventano sempre più grandi a mano a mano che dagli strati interni si procede verso gli esterni. Conservandosi poi le due sezioni **MN** ed **RS** piane, anche dopo avvenuto l'incurvamento, è manifesto che questi allungamenti ed accorciamenti variano in modo continuo da uno strato al successivo, e quindi il passaggio dagli strati allungati a quelli accorciati deve aver luogo in quello strato dove queste deformazioni longitudinali sono nulle, per cui deve esistere nell'interno del corpo uno strato di fibre il quale, abbenchè siasi incurvato, rimane inalterato nella lunghezza e che perciò si chiama *asse neutro* o *strato delle fibre invariabili;* mentre lo strato che passa per l'asse del solido dicesi *strato delle fibre medie.*

La curva poi secondo la quale si dispone l'asse del solido dicesi *curva elastica.*

Originariamente le molecole costituenti il corpo sono in equilibrio. Quando interviene l'azione delle forze esterne producenti la flessione nel solido, l'equilibrio fra le molecole viene sturbato tanto è vero che alcune si allungano, altre si accorciano, ed in complesso il solido si incurva; giunge però un istante in cui il prisma cessa di piegarsi e l'equilibrio si ristabilisce in presenza delle forze esterne che lo cimentano dentro i limiti dell'elasticità. E perchè questo nuovo stato di equilibrio possa sussistere, vedesi la necessità che qualche nuova forza produca un effetto contrario a quello delle forze esterne, altrimenti continuando queste ad agire senza che nulla vi si opponesse, constringerebbero il solido a piegarsi sempre più, finchè fosse affatto distrutta la coesione fra le sue molecole, che terminerebbero collo disgregarsi.

È certo adunque che si sviluppano nelle molecole del solido delle forze intestine o *reazioni molecolari* che tendono ad opporsi

all'azione delle forze esterne per modo da equilibrarle; e l'esistenza di tali reazioni è d'altronde messa in evidenza dal fatto che, se cessa l'azione delle forze esterne, il solido si raddrizza, imperocchè in virtù dell'elasticità tutte le fibre ritornano da per sè stesse alla primitiva lunghezza.

Ciò stabilito si procede alla ricerca del valore di queste *reazioni molecolari*, dette anche *forze elastiche*.

A) Forze interne o reazioni molecolari.

27. Natura delle reazioni molecolari. — Abbiasi un solido prismatico sotto l'azione di forze normali al suo asse e tutte contenute in un piano passante per questo asse e diretto lungo un asse di simmetria della sezione retta del prisma, quale ad esempio **s s**, ciò che torna lo stesso di dire, che il piano di sollecitazione sia un piano di simmetria del solido, **Fig. 9.** Si consideri la sezione **P Q** nonchè la porzione di solido compresa fra questa sezione ed un qualunque estremo, per esempio quello di destra **B**. Sieno F_1, F_2, F_3, . . . le forze esterne applicate al solido, ed ammettendo che queste sieno tali da non oltrepassare il limite di elasticità del corpo, sotto la loro azione esso si piega, ma al cessare della medesima, le reazioni molecolari che si sviluppano nel solido, lo fanno raddrizzare, cioè tutti gli strati allungati si accorciano, tutti gli strati accorciati si allungano, ritornando alla primitiva forma e posizione.

Prima della flessione tutte le sezioni rette del prisma sono fra loro parallele, dopo l'incurvamento queste sezioni hanno ruotato di una certa quantità le une rispetto alle altre e diventano concorrenti. Scorgesi adunque che, avvenuto sotto l'azione delle forze esterne l'incurvamento degli strati, ossia la rotazione delle sezioni rette dal solido, affinchè essi strati possano ricondursi alla primitiva dirittura, ossia esse sezioni rette alla primitiva posizione di parallelismo, cessati che siano gli sforzi sollecitanti, bisogna che le forze elastiche in loro sviluppate, operino con un braccio di leva, onde originare il movimento rotatorio di reazione intorno all'asse neutro.

Venendo ora ad esaminare gli effetti delle forze esterne relativamente alla considerata sezione **P Q**, vedesi che la loro azione

è tale per cui esse tentano di far staccare la porzione P Q B dall'altra A P Q per scorrimento trasversale lungo la sezione stessa, ed inoltre fanno incurvare il solido e continuano a piegarlo fintantochè si stabilisce l'equilibrio fra esse e le reazioni molecolari sviluppantisi nella sezione P Q. È necessario, perchè questo equilibrio avvenga, che lungo la sezione P Q si sviluppino:

1° Delle reazioni molecolari, tangenzialmente alla detta sezione, tali che la loro risultante, che si indica con Σs, sia eguale e direttamente contraria a quella delle forze esterne F_1, F_2, F_3... la quale si indica con ΣF,

2° Delle reazioni molecolari, normalmente alla considerata sezione, tali che il loro momento risultante, riferito all'asse neutro e denotato con $\Sigma m f$, sia eguale e direttamente contrario al momento della risultante delle forze esterne riferito al medesimo asse neutro, il quale momento si esprime con $\Sigma M F$.

Queste condizioni si possono algebricamente esprimere con

$$\Sigma s + \Sigma F = 0$$

$$\Sigma m f + \Sigma M F = 0$$

La risultante ΣF delle forze esterne dicesi *sforzo di taglio*; si rappresenta con T, ed indica la somma algebrica di tutte le forze che sollecitano il solido a partire dalla sezione considerata fino ad uno qualunque dei suoi estremi.

Il momento risultante $\Sigma M F$ delle forze stesse dicesi *momento inflettente;* lo si rappresenta con M ed indica la somma algebrica dei momenti di tutte le forze che sollecitano il solido a partire dalla sezione considerata fino ad uno qualunque dei suoi estremi, riferiti questi momenti all'asse neutro della sezione considerata.

Facendo astrazione dai segni, poichè essi non hanno altro scopo se non quello di indicare che le reazioni operano in senso contrario agli sforzi che le cimentano, si possono scrivere le condizioni di equilibrio del solido anche nel modo seguente:

$$\left.\begin{aligned} T &= \Sigma s \\ M &= \Sigma m f \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

28. Resistenza al taglio. — Il valore delle reazioni molecolari Σs, sviluppate dalla sezione retta di un solido cimen-

tato alla rottura per scorrimento, o taglio, è fornito dalla (24), cioè

$$\Sigma s = K_s \omega$$

e per la stabilità si deve prendere uno sforzo unitario pratico $R_s = n K_s$, per cui si avrà

$$\Sigma s = R_s \omega \qquad (27)$$

ricordando che n varia fra $^1/_{10}$ ed $^1/_{12}$ per i legnami, e fra $^1/_5$ ed $^1/_6$ per i metalli.

29. Momento resistente nei limiti di elasticità. — Il valore del momento $\Sigma m f$ delle reazioni molecolari, che dicesi *momento resistente*, si rappresenterà con μ e lo si deve determinare.

Si considerino perciò due sezioni rette vicinissime **P Q** ed **R S**. Sia lo strato elementare qualunque $\alpha\beta$ (**a b**) l'asse neutro, o strato delle fibre invariabili, che separa gli strati allungati da quelli accorciati e si denoti con t e c le distanze di questo asse, giacente in una posizione qualsiasi, dai rispettivi punti estremi **M** ed **N** di una sezione retta del solido. Si consideri uno strato di fibre $\alpha_1\beta_1$ (**a$_1$ b$_1$**) distante y dall'asse neutro, di altezza infinitesima dy e di larghezza $\alpha_1\beta_1 = z$, per cui ha per area $z\,dy$. Prima dell'incurvamento tutti gli strati compresi fra le sezioni **P Q** ed **R S**, hanno una eguale lunghezza σ; avvenuta la flessione, lo strato **a$_1$ b$_1$** avrà assunto una nuova lunghezza δ, essendosi allungato di una certa quantità $\lambda = \delta - \sigma$, che si può valutare. Potendo considerare tutti gli strati compresi fra **P Q** ed **R S** come concentrici, ed essendo gli archi proporzionali ai raggi, chiamando ρ il raggio di curvatura della curva elastica si ha :

$$\sigma : \rho = \delta : \rho + y$$

$$\delta = \sigma \left(1 + \frac{y}{\rho}\right) \qquad (I)$$

e quindi l'avvenuto allungamento, valendosi della (I), sarà

$$\lambda = \delta - \sigma = \frac{\sigma y}{\rho}$$

La forza f_t capace di produrre questo allungamento si ricava col mezzo della (2) nella quale posto $\lambda = \frac{\sigma\ y}{\rho}$, $\omega = z\ d\ y$, $L = \sigma$, risulta

$$f_t = \frac{E_t}{\rho} z\ y\ \ d\ y \qquad (II)$$

espressione che rappresenta anche le reazioni molecolari dello strato $\alpha, \beta,$ (a, b,) ossia la forza elastica ch'esso sviluppa.

Analogamente per uno strato $\alpha_{,,} \beta_{,,}$ (a,, b,,) accorciato, la (7) dà la relativa forza elastica, o la reazione molecolare espressa da

$$f_c = \frac{E_c}{\rho} z\ y\ \ d\ y \qquad (IIa)$$

Il valore totale delle reazioni molecolari, o forze elastiche sviluppate rispettivamente nelle parti soggette a trazione e compressione di una sezione retta del solido, si avrà integrando la (II) e (IIa)

$$\Sigma f_t = \frac{E_t}{\rho} \int_0^t z\ y\ \ d\ y \qquad (III)$$

$$\Sigma f_c = \frac{E_c}{\rho} \int_0^c z\ y\ \ d\ y \qquad (IIIa)$$

Si osservi ora che la forza elastica f_t sviluppantesi nello strato qualunque $\alpha, \beta,$ (a, b,) opera col braccio di leva y, onde ricondurre lo strato incurvato alla primitiva posizione rettilinea, cioè il suo momento rispetto all'asse neutro $\alpha\ \beta$ (a b) intorno a cui avviene la rotazione, è quello che si oppone al momento delle forze esterne, tendente a far piegare lo strato. Chiamato $m\ f_t$ detto momento, esso ha per valore

$$m\ f_t = \frac{E_t}{\rho} z\ d\ y\ \ y^2$$

e la somma dei momenti di tutte le forze elastiche, che si sviluppano nella parte allungata della sezione retta **M N**, è

$$\Sigma m\ f_t = \frac{E_t}{\rho} \int_0^t z\ d\ y\ \ y^2 \qquad (IV)$$

Analogamente per la parte accorciata si avrebbe

$$\Sigma m f_c = \frac{E_c}{\rho} \int_0^c z\,d\,y \quad y^2 \qquad (IVa)$$

ossia il ricercato *momento resistente* $\Sigma m f$ si avrà nella somma di $\Sigma m f_t$ e $\Sigma m f_c$, cioè

$$\Sigma m f = \frac{E_t}{\rho} \int_0^t z\,d\,y \quad y^2 + \frac{E_t}{\rho} \int_0^c z\,d\,y \quad y^2 \qquad (V)$$

la quale rappresenta il *momento di resistenza del solido nei limiti di elasticità.*

30. Resistenza rispetto alla rottura. — Si consideri ora che in nessuno strato del solido deve essere alterata l'elasticità, e siccome non tutti gli strati del solido sono egualmente cimentati, ma quelli che subiscono la massima deformazione sono gli estremi, è evidente che questi strati estremi non devono essere soggetti a sforzi maggiori di quelli che producono lo snervamento, affinchè la resistenza del solido non sia compromessa. E poichè gli allungamenti ed accorciamenti dei vari strati sono proporzionali alla distanza di questi strati dall'asse neutro, essendo t la distanza dello strato giacente lungo P R, ossia del più lontano dall'asse neutro, si ha che l'allungamento λ_1 di questo strato, similmente a quanto fu trovato per l'allungamento λ dello strato $a_1 b_1$, sarà espresso da

$$\lambda_1 = \frac{\sigma\, t}{\rho}$$

e quindi l'allungamento unitario λ_0 si otterrà dividendo il totale λ_1 per la lunghezza primitiva σ dello strato, per cui sarà

$$\lambda_0 = \frac{t}{\rho}$$

Questo allungamento unitario λ_0, dello strato più cimentato, deve essere relativo al limite di elasticità, e quindi la forza φ_t capace di produrlo si ricava ricordando che E_t è la forza capace di produrre un allungamento unitario eguale all'unità; sarà

perciò

$$\varphi_t = E_t \frac{t}{\rho} \qquad (VI)$$

da cui

$$\frac{\varphi_t}{t} = \frac{E_t}{\rho} \qquad (VIa)$$

Analogamente per lo strato più compresso giacente lungo Q S e distante c dall'asse neutro, si avrà

$$\varphi_c = E_c \frac{c}{\rho} \qquad (VII)$$

da cui

$$\frac{\varphi_c}{c} = \frac{E_c}{\rho} \qquad (VIIa)$$

e quindi la (III) si può scrivere

$$\Sigma\, m f = \frac{\varphi_t}{t} \int_0^t z\, d y \quad y^2 + \frac{\varphi_c}{c} \int_0^c z\, d y \quad y^2 \qquad (VIII)$$

dove gli sforzi unitari φ_t e φ_c hanno i valori dati dalle (VI) e (VII) e rappresentano il massimo sforzo con cui potrà essere cimentata l'unità di superficie degli strati più compromessi, acciò non avvenga snervamento.

α) **Momento di resistenza alla rottura.** — In pratica però si usa di riferirsi al limite di rottura, ed allora la (VIII) diventa

$$\Sigma\, m f = \frac{K_t}{t} \int_0^t z\, d y \cdot y^2 + \frac{K_c}{c} \int_0^c z\, d\, y \cdot y^2 \qquad (VIIIa)$$

che è *il momento di resistenza del solido alla rottura.*

β) **Momento di resistenza nei limiti di stabilità.** — Siccome però bisogna assicurare la stabilità del solido, ciò si ottiene addottando un carico unitario pratico minore di quello di rottura, cioè si prende per gli strati allungati $R_t = n\, K_t$, e per gli accorciati $R_c = n\, K_c$, dove la frazione n è tale da garantire oltrecchè rispetto alla rottura anche riguardo allo snervamento. Si può perciò ritenere

$$\Sigma\, m f = \frac{R_t}{t} \int_0^t z\, d y \quad y^2 + \frac{R_c}{c} \int_0^c z\, d y \quad y^2 \qquad (IX)$$

che rappresenta il *momento di resistenza del solido relativo alla rottura nei limiti di stabilità.*

La frazione n ha un tal valore per cui R_t ed R_c risultano minori delle forze φ_t e φ_c capaci di produrre snervamento, e precisamente si prende per i legnami n compreso fra $^1/_{10}$ ed $^1/_{12}$ e per i metalli fra $^1/_5$ ed $^1/_6$.

Considerato che in pratica i solidi non vengono cimentati mai oltre i limiti di elasticità, e siccome entro questi limiti si può ritenere il coefficiente di elasticità longitudinale relativo alla trazione eguale a quello relativo alla compressione, cioè $E_t = E_c$ ne viene che la (VI*a*) e (VII*a*) danno

$$\frac{\varphi_t}{t} = \frac{\varphi_c}{c}$$

e quindi

$$\frac{R_t}{t} = \frac{R_c}{c}$$

per cui ponendo $E_t = E_c = E$ e sostituendo, la (V) e (IX) diventano rispettivamente

$$\Sigma m f = \frac{E}{\rho}\left(\int_0^t z\,dy\;y^2 + \int_0^c z\,dy\;y^2\right)$$

$$\Sigma m f = \frac{R_t}{t}\left(\int_0^t z dy\;y^2 + \int_0^c z dy\;y^2\right) = \frac{R_c}{c}\left(\int_0^t z dy\;y^2 + \int_0^c z dy\;y^2\right)$$

Ora la quantità $\left(\int_0^t z\,dy\,y^2 + \int_0^c z\,dy\,y^2\right)$ rappresenta la somma dei prodotti di tutti gli elementi della sezione considerata, moltiplicati per i quadrati delle rispettive distanze dall'asse neutro $\alpha\beta$, ossia altro non è che il *momento di inerzia di essa sezione rispetto all'asse neutro;* denotando con I questo momento di inerzia si ha

$$\Sigma m f = \frac{E}{\rho} I \qquad (28)$$

$$\Sigma m f = \frac{R_t}{t} I = \frac{R_c}{c} I \qquad (29)$$

la (28) dà il *momento di resistenza del solido nei limiti di elasticità*, la (29) *il momento di resistenza rispetto alla rottura nei limiti di stabilità.*

Se la sezione è simmetrica rispetto all'asse neutro allora diventa $t = c$, $R_t = R_c$ e quindi sopprimendo gli indici e ponendo nella (29) $t = c = d$, $R_t = R_c = R$ si ottiene

$$\Sigma m f = \frac{R}{d} I \qquad (29a)$$

31. Posizione dell'asse neutro. — Ora, esaminando le (28) (29) e (29*a*), si vede che il momento di resistenza $\Sigma m f$ dipende dal momento di inerzia I della sezione retta del solido, riferito all'asse neutro, che può variare col variare della posizione del medesimo asse, la quale non fu ancora precisata. Quindi il valore del momento resistente $\Sigma m f$ rimane indeterminato fintantochè non si abbia determinata la posizione dell'asse neutro. Allo scopo di determinarla, si osservi che quanto più piccolo diventa il momento di inerzia I, tanto minore diventa il momento di resistenza del solido, per cui questo diventa *minimo* per il minimo valore di I. Ora è certo che il solido, sotto l'azione delle forze esterne, si piega così, che le sue sezioni si muovono intorno a quell'asse rispetto al quale possono ruotare più facilmente che non intorno a qualsiasi altro, rispetto al quale cioè trovano la minima resistenza al loro spostamento. Ma il solido oppone la minima resistenza ad essere incurvato allora quando il suo momento resistente sia un minimo, e si è veduto che ciò avviene quando è minimo il momento di inerzia. Se si determina adunque l'asse, rispetto al quale è minimo il momento di inerzia I, è certo intorno a questo asse che avviene la rotazione delle sezioni rette del solido e quindi esso stabilisce la vera posizione dell'asse neutro. Ma la meccanica razionale insegna che il momento di inerzia di una data sezione rispetto ad un asse in essa contenuto, diventa minimo quando questo asse passa per il baricentro, dunque l'*asse neutro deve passare per il baricentro della sezione retta del solido* e quindi si confonde con l'asse delle fibre medie.

32. Equazioni di condizioni per la stabilità. — Sostituendo nelle (26) i valori delle reazioni molecolari dati dalle (27) (29) (29*a*) si hanno le equazioni che servono a determinare le condizioni di stabilità di un solido soggetto alla flessione nelle ipotesi già indicate, ossia

$$T = R_s \omega \qquad (30)$$

$$M = \frac{R_t}{t} I = \frac{R_c}{c} I \qquad (31)$$

$$M = \frac{R}{d} I \qquad (31a)$$

Per i casi contemplati dalle formule (28) e (31*a*) si sono raccolti nella tabella XVI i valori medi di E e di R che sono generalmente usati nella pratica, *espressi in chilogrammi e per centimetro quadrato.*

Tabella XVI.

Indicazione dei corpi	Valori di E	Valori di R
Ferro laminato	1800 000	600
Ghisa	900 000	200
Acciaio fuso	1800 000	60
» temperato	3000 000	
Legno	100 000	60

33. Determinazione dei baricentri. — L'espressione generale del momento d'inerzia è:

$$I = \int_{-c}^{t} z \, d y \quad y^2$$

Se è $t = c$, Fig. 10, si cade generalmente nel caso di figure simmetriche rispetto all'asse neutro, e la determinazione di I è facilissima, ma se è t differente da c, quando cioè l'asse neutro non è un asse di simmetria, come sarebbe ad esempio nelle sezioni con forma di ⌐T⌙, allora bisogna prima di tutto determinare la posizione del centro di gravità della sezione, onde poterne poi valutare il momento di inerzia rispetto all'asse neutro che passa per esso centro. La determinazione del centro di gravità si può fare analiticamente o graficamente.

α) **Metodo analitico.** — Riferito il centro di gravità ad uno dei lati estremi della data sezione, parallelo all'asse neutro, si chiami

x la rispettiva distanza incognita. Si prende il momento di figura della intera sezione rispetto al considerato lato estremo, nonchè i momenti di figura di tutte le parti componenti la sezione. Eguagliando il primo momento alla somma di tutti gli altri, si ottiene un'equazione in x che serve a determinarne il valore. Lo stesso si fa referendosi ad un lato normale all' asse neutro e determinando la distanza y del centro di gravità della sezione dal medesimo; e quindi col mezzo delle due coordinate x ed y viene precisata la posizione del centro di gravità.

Momento di figura. — Si intende per *momento di figura* di una sezione piana, riferito ad un asse contenuto nel piano stesso della sezione, il prodotto dell'area di questa sezione per la distanza del centro di gravità della medesima dall'asse, rispetto al quale si vuol determinare il momento.

Si fa applicazione ad un esempio.

Si consideri la sezione segnata nella **Fig. 11**, la quale non ammette assi di simmetria. Riferendosi all'estremo lato superiore orizzontale si eguagli il momento di figura di tutta la sezione alla somma dei momenti di figura dei vari rettangoli che la compongono e si ha

$$(b\,a + b_1\,a_1)\,x = b\,a\,d + b_1\,a_1\,d_1$$

da cui

$$x = \frac{b\,a\,d + b_1\,a_1\,d_1}{b\,a + b_1\,a_1}$$

Riferendosi all'estremo lato verticale di destra si ha analogamente

$$(b\,a + b_1\,a_1)\,y = b\,a\,\delta + b_1\,a_1\,\delta_1$$

da cui

$$y = \frac{b\,a\,\delta + b_1\,a_1\,\delta_1}{b\,a + b_1\,a_1}$$

Se la sezione è simmetrica rispetto ad un asse, come è quella segnata nella **Fig. 12**, allora la determinazione del centro di gravità riesce più semplice. Infatti riferendosi all'estremo lato superiore orizzontale, eguagliando il momento di figura di tutta la sezione alla somma dei momenti di figura dei vari rettangoli che la compongono, si ha

$$(b\,a + b_1\,a_1 + b_{11}\,a_{11} + b_{111}\,a_{111})\,x = b\,a\,d + b_1\,a_1\,d_1 + b_{11}\,a_{11}\,d_{11} + b_{111}\,a_{111}\,d_{111}$$

e quindi l'equazione determinatrice di x sarà

$$x = \frac{b\,a\,d + b_{,}\,a_{,}\,d_{,} + b_{,,}\,a_{,,}\,d_{,,} + b_{,,,}\,a_{,,,}\,d_{,,,}}{b\,a + b_{,}\,a_{,} + b_{,,}\,a_{,,} + b_{,,,}\,a_{,,,}}$$

e portando la quantità x sull'asse di simmetria, sul quale pure deve trovarsi il baricentro della sezione, si ha nel punto così determinato il centro di gravità cercato.

β) **Metodo grafico.** — Si scompone la sezione data in varie figure semplici, come triangoli, rettangoli, trapezî, parallelogrammi, delle quali si possano facilmente calcolare le aree e segnare i rispettivi centri di gravità. Poi si riducono tutte queste figure semplici ad una base comune, determinando tante lunghezze proporzionali alle aree delle figure medesime, ed i valori di tali lunghezze si suppongono come altrettanti pesi applicati ai centri di gravità delle figure corrispondenti. Trovando il centro di questi pesi, esso rappresenta il centro di gravità della sezione data.

Come esempio si prende la sezione rappresentata nella Fig. 13. Si scompone nei 4 rettangoli I, II, III, IV di cui si segnano i centri di gravità, che si trovano nell'incontro delle diagonali, e si riducono quei rettangoli alla base comune che prendesi eguale ad una data quantità b.

Riduzione del rettangolo ad una base. — La riduzione di un rettangolo ad una data base si opera nel modo seguente. Sia il rettangolo A B C D, Fig. 14, da ridursi alla base b più grande della base A B del rettangolo dato. Partendo da uno dei vertici, per esempio, A, si porta lungo la direzione della base A B la quantità A O $= b$ e condotta la D O, il segmento M C dell'altezza del rettangolo, è proporzionale all'area del medesimo. Infatti si ha A O : A D = C D : C M da cui

$$\text{A O} \times \text{C M} = \text{A D} \times \text{C D}$$

Se invece sia il rettangolo A B$_{,}$ C$_{,}$ D da ridursi alla base b, più piccola della propria base A B$_{,}$, portata dal vertice A, sulla base del rettangolo, la quantità A O $= b$ e condotta la D O fino ad incontrare il prolungamento dell'altezza C$_{,}$ B$_{,}$ si ha nella C$_{,}$ M$_{,}$ una retta proporzionale all'area del rettangolo: infatti è A O : A D = C$_{,}$ D : C$_{,}$ M$_{,}$ da cui

$$\text{A O} \times \text{C}_{,}\text{M}_{,} = \text{A D} \times \text{C}_{,}\text{D}$$

Per fare adunque la riduzione dei 4 rettangoli della sezione considerata, alla base comune b, segnati due assi ortagonali, Fig. 13a, si porta partendo dall'origine su quello orizzontale le lunghezze O$\alpha_{,}$, O$\alpha_{,,}$, O$\alpha_{,,,}$, Oα_{IV} rispettivamente eguali alle basi

$b_{\prime}$, $b_{\prime\prime}$, $b_{\prime\prime\prime}$, b_{IV} e su quello verticale le lunghezze $0\beta_{\prime}$, $0\beta_{\prime\prime}$, $0\beta_{\prime\prime\prime}$, $0\beta_{IV}$ eguali alle rispettive altezze $a_{\prime}$, $a_{\prime\prime}$, $a_{\prime\prime\prime}$, a_{IV} e si completano i 4 rettangoli. Poi sull'asse delle basi, cioè sull'orizzontale, si porta partendo ancora dall'origine la lunghezza 0α eguale alla base di riduzione b e si conducono le rette $\alpha\beta_{\prime}$, $\alpha\beta_{\prime\prime}$, $\alpha\beta_{\prime\prime\prime}$, $\alpha\beta_{IV}$ in modo da intersecare le corrispondenti altezze dei rettangoli, od i loro prolungamenti, e nei segmenti I, II, III, IV si hanno le rette proporzionali alle aree dei dati rettangoli, le quali moltiplicate per la base comune b, danno per prodotto le aree medesime.

Osservazione. — In pratica però è inutile di segnare la **Fig. 13***a* e per maggior speditezza si eseguisce la costruzione sopra gli stessi rettangoli della sezione data.

Per i centri di gravità dei rettangoli I, II, III, IV, **Fig. 13**, si conducono 4 rette orizzontali, e quindi fra loro parallele, e sopra un'altra retta pure orizzontale, cioè parallela alle precedenti, si portano successivamente i segmenti 0 1, 1 2, 2 3, 3 4 rispettivamente eguali alle trovate lunghezze I, II, III, IV della **Fig. 13***a*, che rappresentano le aree dei 4 rettangoli, ridotti alla base comune b. Da un polo qualunque **P** condotti i raggi polari **P** 0, **P** 1, **P** 2, **P** 3, **P** 4, si costruisce il poligono funicolare O, I, II, III, IV, V, guidando tante parallele ai raggi polari che intersechino successivamente le orizzontali condotte dai centri dei rettangoli I, II, III, IV. Prolungando i due lati estremi O I e IV V fino al loro incontro nel punto **g** e da questo punto conducendo una orizzontale, cioè una parallela alle rette dei centri, sopra questa orizzontale deve trovarsi il centro di gravità della sezione data. Essendo poi la sezione simmetrica rispetto all'asse verticale passante per i baricentri dei 4 rettangoli, il centro di gravità della data sezione dovrà trovarsi anche sopra questo asse e quindi esso sarà determinato dal punto **G** di intersezione dell'asse verticale colla orizzontale passante per **g**.

Nel caso che la sezione non presenti un asse di simmetria, allora bisogna applicare, ai baricentri delle figure semplici che la compongono, le corrispondenti forze proporzionali alle loro aree, in due direzioni fra loro perpendicolari. Poi col mezzo di un medesimo fascio di raggi polari, ottenuto prendendo il poligono

delle forze (che risulta una retta) parallelo ad una delle date direzioni, si costruiscono due poligoni funicolari aventi i lati rispettivamente paralleli e perpendicolari ai raggi polari, servendosi delle due differenti direzioni delle forze. Prolungando i lati estremi dei due poligoni funicolari, si determinano, mediante il loro punto di incontro, le linee d'azione delle due risultanti delle forze, nelle due differenti loro direzioni. Il punto di intersecazione di queste due risultanti determina il centro di gravità della sezione data.

Nella **Fig. 15** si porge un esempio relativo alla risoluzione di questo problema.

Osservando che la determinazione del baricentro non ha altro scopo che di individuare la posizione dell'asse neutro, così anche nel caso di figure dissimetriche basterà determinare, *sia che si usi del processo analitico o di quello grafico*, la sola distanza del baricentro dall'estremo lato parallelo all'asse neutro, con che questo sarà pienamente individuato.

34. Altra espressione del momento resistente. — Il momento resistente $\Sigma m f$ di un solido, dato dalla (29), si può anche esprimere in altro modo. Si denoti con Σf_t e Σf_c la somma o risultante delle forze elastiche che si sviluppano rispettivamente nelle parti soggette a trazione ed a compressione, e ricorrendo alla (III) e (III a) del § **29** si ha

$$\Sigma f_t = \frac{E_t}{\rho}\int_o^t z\,y\;dy$$

$$\Sigma f_c = \frac{E_c}{\rho}\int_o^c z\,y\;dy$$

Si è veduto che, entro i limiti nei quali sono cimentati i solidi nella pratica, si può ritenere $E_t = E_c = E$ e quindi le formule precedenti si possono scrivere

$$\Sigma f_t = \frac{E}{\rho}\int_o^t z\,y\;dy$$

$$\Sigma f_c = \frac{E}{\rho}\int_o^c z\,y\;dy$$

nelle quali le quantità $\int_o^t z\,y\,dy$ ed $\int_o^c z\,y\,dy$ rappresentano i momenti statici delle parti di sezione poste da una parte e dall'altra dell'asse neutro e, passando questo per il baricentro, ne viene che deve essere

$$\int_o^t z\,y\,dy = \int_o^c z\,y\,dy$$

e quindi

$$\Sigma f_t = \Sigma f_c \qquad (32)$$

cioè *nella sezione di un solido cimentato alla flessione, la risultante delle forze elastiche di trazione è eguale alla risultante di quelle di compressione.*

E siccome si è veduto che, relativamente alle fibre più cimentate, cioè alle più lontane dall'asse neutro, riferendosi alla rottura si deve assumere $\frac{E_t}{\rho} = \frac{R_t}{t}$ ed $\frac{E_c}{\rho} = \frac{R_c}{c}$, sostituendo si ottiene

$$\left.\begin{aligned} \Sigma f_t &= \frac{R_t}{t}\int_o^t z\,y\,dy \\ \Sigma f_c &= \frac{R_c}{c}\int_o^c z\,y\,dy \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

Se ora si immagina che queste risultanti Σf_t e Σf_c agiscano come se fossero applicate ai rispettivi loro punti d'applicazione, indicando con H_f la distanza dei medesimi, siccome esse agiscono in senso contrario e devono essere fra loro eguali, è evidente che costituiscono *una coppia che rappresenta il momento* Σ m f *di resistenza del solido*, Fig. 16, il quale adunque si può scrivere anche con

$$\Sigma\, m\, f = \Sigma\, f_t\, H_f = \Sigma\, f_c\, H_f \qquad (34)$$

e paragonando la (29) colla (33) risulta

$$H_f = \frac{R_t}{t} \cdot \frac{I}{\Sigma f_t} = \frac{R_c}{c} \cdot \frac{I}{\Sigma f_c}$$

nella quale sostituendo per Σf_t e Σf_c i valori dati dalla (33)

si ha

$$H_f = \frac{I}{\int_0^t z\,y\;dy} = \frac{I}{\int_0^c z\,y\;dy} \qquad (35)$$

35. Determinazione grafica del momento resistente. — Il momento resistente $\Sigma\, m\, f$ si può anche determinare graficamente.

Affinchè si possa vedere con maggior chiarezza il processo da seguirsi si prende in considerazione un caso particolare è precisamente quello indicato nella **Fig. 17**, nella quale si suppone che la parte superiore sia soggetta a compressione e la parte inferiore a trazione.

Si è già veduto che, supposta divisa la sezione in tanti strati elementari paralleli all'asse neutro, la tensione unitaria in ogni singolo strato va variando proporzionalmente alla rispettiva distanza dall'asse neutro, nel quale la tensione è nulla. Se si chiama adunque $R_t^{(y)}$ la tensione unitaria di uno qualunque degli strati stirati, di larghezza z, distante y dall'asse neutro, mentre è R_t quella dello strato **m m** il più lontano, la cui distanza dall'asse neutro è t, si ha

$$R_t^{(y)} = R_t \frac{y}{t}$$

e la tensione assoluta sul medesimo strato sarà

$$R_t^{(y)}\, z = R_t \frac{y}{t}\, z$$

e se si pone la tensione unitaria sullo strato più lontano eguale all'unità, cioè se si fa $R_t = 1$ risulta

$$R_t^{(y)} = \frac{y}{t} \qquad (I)$$

$$R_t^{(y)}\, z = \frac{z\,y}{t} \qquad (II)$$

Calcolando successivamente col mezzo della (II) tutte le tensioni assolute dei vari strati, e portati i corrispondenti valori come ordinate metà per parte dell'asse di simmetria della sezione, congiungendo poi tutti i punti estremi di queste ordinate con una linea che può risultare retta, spezzata o curva a seconda della

forma della sezione, l'area racchiusa da questo contorno (che nella figura è tratteggiata) rappresenta la somma o risultante ΣF_t di tutte le forze elastiche di trazione che si sviluppano nella parte inferiore della sezione.

Per determinare l'analogo contorno nella parte superiore della sezione, essendo R_c la tensione unitaria sullo strato compresso **n n**, il più lontano dall'asse neutro e che dista dallo stesso della quantità c, basta osservare che

$$R_c = R_t = \frac{c}{t}$$

ed in seguito alla fatta posizione $R_t = 1$ risulta

$$R_c = \frac{c}{t}$$

se dunque si chiama b la larghezza dello strato **n n**, la tensione assoluta corrispondente sarà proporzionale alla quantità

$$R_c\ b$$

si ha la relazione

$$R_c\ b = \frac{c}{t}\ b \qquad \text{(III)}$$

Il valore di $R_c\ b$ si può costruire facilmente: condotta una parallela all'asse neutro, distante t dal medesimo, portando su questa una lunghezza **n' n'** = **n n** = b e conducendo dal baricentro due rette ai punti **n'**, **n'**, queste intercettano sulla retta **n n** una porzione intermedia **r r**, che rappresenta il cercato valore $R_c\ b$, il quale scorgesi facilmente essere quarta proporzionale fra t, b, c come lo indica la (III). Analogamente per ottenere tutte le tensioni assolute degli altri strati, si progettano sulla retta **n' n'** tutte le loro larghezze rispettive, e conducendo dal baricentro ai punti così individuati (come α e β) altrettante rette, queste intersecano gli strati corrispondenti in punti che si congiungono con una linea contornante racchiudente l'area cercata, la quale rappresenta la somma Σf_c delle forze elastiche di compressione che si sviluppano nella parte superiore della sezione.

Se si determinano i centri di gravità di quelle aree tratteggiate, la loro rispettiva distanza dà il valore di H_f.

Si avrebbe invece potuto prendere per tensione unitaria quella che si riferisce allo strato compresso n n, il più lontano dall'asse neutro, ed allora la costruzione grafica delle quantità Σf_t, Σf_c ed H_f si otterrebbe, come lo rappresenta la Fig. 18, con un processo affatto analogo a quello ora indicato.

È evidente, per quello che si è altre volte accennato, che le due aree tratteggiate, poste dall'una e dall'altra parte dell'asse neutro, devono essere fra di loro eguali, di valore però e non di forma, e si chiamano le *aree ridotte allo sforzo massimo di tensione*.

Moltiplicando adunque il valore dell'una o dell'altra di dette aree, per la distanza dei loro centri di gravità, si ottiene il valore $\Sigma m f$ del momento resistente come è rappresentato nella (34).

Per mostrare come si procede alla determinazione del momento resistente nel caso di una figura composta, si prende in esame la sezione rappresentata nella Fig. 19 che è quella stessa per la quale si è determinato il momento d'inerzia nella Fig. 31.

Si comincia dal determinare la posizione dell'asse neutro nella maniera già nota, e poi prendendo come unità di tensione la tensione unitaria che ha luogo rispettivamente in una o l'altra delle fibre più cimentate alla trazione od alla compressione, ossia le più distanti dall'asse neutro, si determinano nei modi indicati precedentemente *le aree ridotte allo sforzo massimo di tensione*.

Nella sezione considerata si ha assunto come unità di tensione quella unitaria che cimenta le fibre maggiormente stirate, poste dalla parte inferiore della figura medesima e si costruirono le *aree ridotte* a questo massimo sforzo, le quali si sono tratteggiate. Per determinare i baricentri delle *aree ridotte* si suddivise le medesime nelle rispettive figure semplici, mediante linee orizzontali, e risultarono per la parte superiore i trapezi 1, 2, 3 ed il triangolo 4 e per la parte inferiore il trapezio 1 ed il triangolo 2. Poscia si segnarono i baricentri delle figure semplici trapezoidali e triangolari.

Baricentro del trapezio. — Riguardo alle figure trapezie, per la determinazione del loro baricentro, è opportuno il metodo grafico indicato nella Fig. 20. Si conduce cioè la m n per i punti di mezzo delle due basi parallele; sul prolungamento della base inferiore C D si porta la grandezza della base

superiore in un dato senso — per esempio a destra, come nella figura — facendo **D s** = **A B**; sul prolungamento della base superiore **A B** si porta la grandezza della base inferiore nel senso opposto al precedente — dunque nella considerata figura a sinistra — facendo **A r** = **C D** e condotta la **r s**, nel punto **G** di intersezione colla **m n** si ha il baricentro cercato.

Individuate le posizioni dei singoli baricentri; ridotte tutte quelle aree parziali ad una medesima base, che nella figura fu presa eguale al doppio della grossezza del gambo, ossia eguale alla grossezza delle braccia orizzontali della croce: costruiti i relativi poligoni delle forze, e poscia i corrispondenti poligoni funicolari per entrambe le due parti della sezione, poste sopra e sotto l'asse neutro, si determinò col noto metodo il baricentro delle due *aree ridotte*.

Riduzione del trapezio ad una base. — Per ridurre un'area trapezia regolare (che è il caso più frequente), ad una data base b si opera come è indicato nella **Fig. 21.** Si conduce la **s s** per i punti di mezzo delle due basi parallele, e la **n m**, parallelamente alle medesime, in modo che essa divida per metà la **s s**. Per il punto **n** dove la retta dividente incontra uno dei due lati inclinati, per esempio **A C**, si innalza la **p q** normale alle due basi, limitandola da una parte nel punto **p** ottenuto col prolungare la base minore **A B**, e dall'altra nel punto **q** ottenuto col prendere $\mathbf{p\,q} = \frac{b}{2}$. Condotta la **s q** essa taglia sulla **n m** il tratto **o m** che rappresenta metà dell' area del trapezio ridotta alla base data b. Infatti dai triangoli simili **s p q** ed **o s m** si ha

$$\mathbf{s\,p} : \mathbf{p\,q} = \mathbf{o\,m} : \mathbf{s\,m}$$

e ricordando che $\mathbf{s\,p} = \mathbf{n\,m}$, che $\mathbf{n\,m} = \frac{\mathbf{A\,s} + \mathbf{C\,s}}{2} = a$ e che **s m** è eguale ad $\frac{h}{2}$, essendo h l'altezza del trapezio, risulta

$$a : \frac{b}{2} = \overline{\mathbf{o\,m}} : \frac{h}{2}$$

da cui

$$a\,h = \overline{\mathbf{o\,m}} \,.\, b$$

Nel caso di un trapezio irregolare si segue il metodo generale che serve pel quadrangolo.

Trovata la posizione dei baricentri delle *aree ridotte*, si misura la distanza dei medesimi H_f, mentre il valore delle aree

stesse viene data, nella assunta scala delle forze, dalle rette $\Sigma f_c = \Sigma f_t$ moltiplicate per la relativa base di riduzione — e nel prodotto di una qualunque di quelle due *aree ridotte* per H_f, si ha il valore del momento resistente.

Osservazione. — Nella **Fig. 19** i due poligoni delle forze son costruiti in modo che i tratti 0 1, 1 2, 2 3 . . . rappresentano metà delle corrispondenti aree parziali, per cui per avere il valore delle totali *aree ridotte* bisogna prendere $2\Sigma f_c$ e $2\Sigma f_t$ e moltiplicare queste quantità per la base di riduzione, (la quale fu presa il doppio della grossezza del gambo).

Se si vuole determinare analiticamente il momento resistente, col mezzo delle (28) (29) e (29*a*), allora è necessario di calcolare il valore del momento di inerzia I. Interessa adunque di vedere come si proceda alla ricerca dei momenti di inerzia nei vari casi che si possono presentare nella pratica. In questa ricerca si fa distinzione fra le *figure semplici e regolari*, e le *figure composte e dissimmetriche.*

36. Momenti di inerzia di figure semplici regolari. — La determinazione del momento di inerzia nel caso di figure semplici e regolari è facilissima. Si prenda, ad esempio, quella del momento di inerzia di un rettangolo riferito all'asse che passa per il baricentro e diretto parallelamente ad uno dei lati. Denotando con b ed a rispettivamente la base e l'altezza del rettangolo e considerando un'area elementare distante y dall'asse **N N**, il suo momento di inerzia rispetto a questo asse è

$$b \; dy \; y^2$$

e quello di tutto il rettangolo sarà:

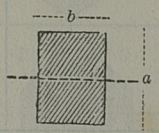
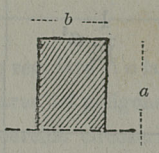
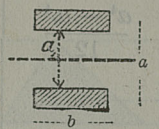
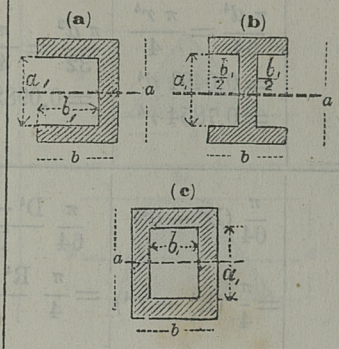
$$I = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} b \; dy \; y^2$$

Eseguendo l'integrazione e poi estendendo fra i limiti si trova:

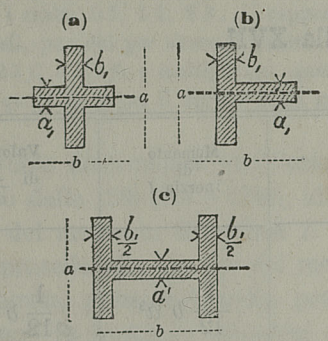
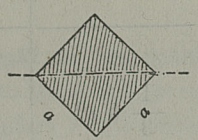
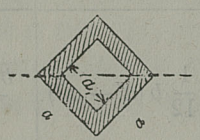
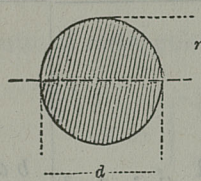
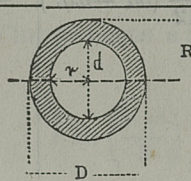
$$I = \left(\frac{b\,y^3}{3}\right)_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{1}{12}\, b\, a^3$$

Analogamente si opererebbe per altre figure e nella tabella XVII si sono raccolte le formule determinatrici dei momenti di inerzia delle principali figure semplici che più di frequente si adoperano nella pratica.

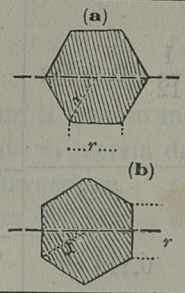
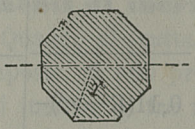
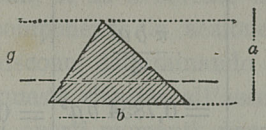
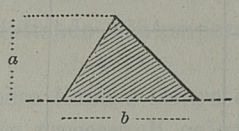
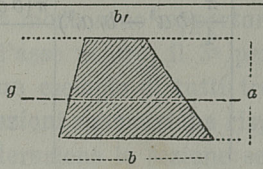
Tabella XVII.

Numero della figura	Forma della sezione	Momento di inerzia I	Valore di $\frac{I}{d}$
1		$\frac{1}{12} b\, a^3$	$\frac{1}{12} b\, a^2$
2		$\frac{1}{3} b\, a^3$	
3		$\frac{1}{12} b\,(a^3 - a_1^3)$	$\frac{b\,(a^3 - a_1^3)}{6a}$
4		$\frac{1}{12}\,(ba^3 - b_1 a_1^3)$	$\frac{b\,a^3 - b_1 a_1^3}{6a}$

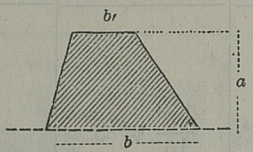
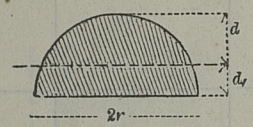
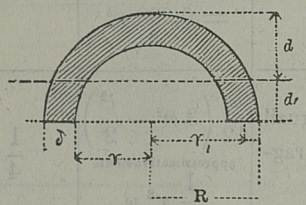
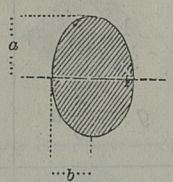
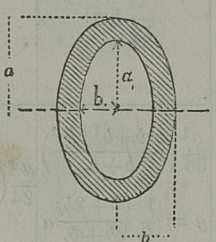
Segue Tabella XVII.

Numero della figura	Forma della sezione	Momento di inerzia I	Valore di $\frac{I}{a}$
5		$\frac{b_1 a^3 + (b - b_1) a_1^3}{12}$	$\frac{b_1 a^3 + (b - b_1) a_1^3}{6\,a}$
6		$\frac{1}{12} a^4$	$0{,}118\ a^3$
7		$\frac{a^4 - a_1^4}{12}$	$\frac{a^4 - a_1^4}{12\,a} \sqrt{2}$ $= 0{,}1178 \frac{a^4 - a_1^4}{a}$
8		$\frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4}$ $= 0{,}0491\ d^4$ $= 0{,}7854\ r^4$	$\frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi}{4} r^3$ $= 0{,}0982\ d^3$
9		$\frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$ $= \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4)$	$\frac{\pi}{64} \frac{D^4 - d^4}{D}$ $= \frac{\pi}{4} \frac{R^4 - r^4}{R}$

Segue Tabella XVII.

Numero della figura	Forma della sezione	Momento di inerzia I	Valore di $\frac{I}{a}$
10		$\frac{5\,r^4}{16}\sqrt{3}$ $= 0{,}5413\,r^4$	$\frac{5\,r^3}{8}$ $= 0{,}625\,r^3$
11		$\frac{1+2\sqrt{2}\,r^4}{6}$ $= 0{,}638\,r^4$	$0{,}6906\,r^3$
	Poligono regolare di n lati eguali ad l; ω area del poligono, r raggio del cerchio circoscritto.	$\frac{\omega}{12}\left(3\,r^2 - \frac{l^2}{2}\right)$ approssimativamente $\frac{1}{4}\,r^2\,\omega$	$\frac{1}{4}\,r\,\omega$
12		$\frac{1}{36}\,b\,a^3$ $g = \frac{2}{3}\,a$	$\frac{1}{24}\,b\,a^2$
13		$\frac{1}{12}\,b\,a^3$	
14		$\frac{a^3}{36}\left(\frac{4bb_1+b^2+b_1^2}{b+b_1}\right)$ $g = \frac{1}{3}\,\frac{3b+2b_1}{2b+b_1}\,a$	$\frac{a^2}{24}\left(\frac{4bb_1+b^2+b_1^2}{b+b_1}\right)$

Segue **Tabella XVII.**

Numero della figura	Forma della sezione	Momento di inerzia I	Valore di $\frac{I}{d}$
15		$\frac{1}{12}(3b_r+b)a$	
16		$0{,}110\ r^4$	$\frac{I}{d}=0{,}19\ r^3$ $\frac{I}{d_r}=0{,}26\ r^3$
17		$\frac{0{,}11(R^4-r^4)-0{,}283R^2r^2(R-r)}{R+r}$ approssimativamente $=0{,}3\ \delta\ r_r^3$	
18		$\frac{\pi\ b\ a^3}{4}$ $=0{,}7854\ b\ a^3$	$\frac{\pi\ b\ a^2}{4}$ $=0{,}7854\ b\ a^2$
19		$\frac{\pi}{4}(b\ a^3-b_r\ a_r^3)$	$\frac{\pi(b\ a^3-b_r\ a_r^3)}{4\ a}$

37. Momento di inerzia rispetto ad un asse parallelo all'asse neutro. — Può occorrere in qualche caso speciale di determinare il momento di inerzia di una sezione rispetto ad un asse parallelo all'asse neutro e distante da questo di una data quantità. La meccanica razionale dà in questo caso la formula

$$I_0 = I + \omega\, d^2 \qquad (36)$$

nella quale:

I_0 rappresenta il cercato momento di inerzia,

I il momento di inerzia della sezione rispetto all'asse neutro,

ω l'area della sezione,

d la distanza dell'asse a cui si riferisce il momento I_0 dall'asse neutro.

38. Momenti di inerzia di figure irregolari e composte. — Quando si tratta di sezioni semplici irregolari o di sezioni composte, si può procedere alla determinazione del loro momento di inerzia in tre modi:

1° Circoscrivendo la sezione con un rettangolo: determinando il momento di inerzia di questo rispetto all'asse neutro, poscia i momenti di inerzia parziali delle aree vuote, comprese fra il perimetro del rettangolo circoscrivente e quello della sezione circoscritta, presi pure questi momenti rispetto all'asse neutro della data sezione, e nella differenza fra il primo momento e la somma degli ultimi, si ha il cercato momento d'inerzia.

2° Scomponendo la sezione in tutte le figure semplici che la costituiscono, determinando il momento di inerzia di ciascheduna di queste rispetto all'asse neutro dell'intera sezione, e nella somma di questi momenti parziali si ha il momento di inerzia totale.

3° Adottando contemporaneamente i due metodi sopra indicati.

Si adopera l'uno o l'altro di questi modi, a seconda che se ne ottenga un processo di calcolo più spedito: generalmente però il 1° e 2° modo sono opportuni per le sezioni simmetriche rispetto all'asse neutro, il 3° per le sezioni dissimmetriche.

Si dà un esempio di tutti tre i modi.

α) **Sezioni simmetriche rispetto all'asse neutro.** — Si prenda in considerazione la sezione segnata nella Fig. 23 per la quale

è opportuno adoperare il 1° modo. Infatti vedesi che tanto il rettangolo circoscrivente, quanto le aree o rettangoli vuoti, hanno il loro centro di gravità sull'asse neutro **N N** della data sezione, e quindi la determinazione del loro momento d'inerzia, rispetto a questo asse, è facilissima e spedita, poichè si è sempre nel caso contemplato nella **Fig. 1**, tabella **XVII**. Il momento d'inerzia della data sezione sarà dunque

$$I = \frac{1}{12}\left\{b\,a^3 - (b_r\,a_r^3 + b_{rr}\,a_{rr}^3 + b_{rrr}\,a_{rrr}^3)\right\}$$

la quale formula si risolve prontamente ricorrendo ad un manuale, nel quale sieno raccolte le potenze terze dei numeri naturali.

Per la sezione segnata nella **Fig. 24** torna utile invece l'impiego del 2° metodo, poichè scomponendo la figura nei 7 rettangoli individuati dai lati verticali prolungati, ciascheduno di essi ha il proprio centro di gravità sull'asse neutro **N N** e quindi tutti si trovano nel caso indicato nella **Fig. 1**, tabella **XVII**. Il momento di inerzia totale della sezione sarà quindi

$$I = \frac{1}{12}\left\{b\,a^3 + b_r\,a_r^3 + b_{rr}\,a_{rr}^3 + b_{rrr}\,a_{rrr}^3\right\}$$

β) **Sezioni dissimetriche rispetto all'asse neutro.** — Per queste sezioni conviene ricorrere generalmente al 3° modo, in ogni caso però bisogna prima determinare la posizione del centro di gravità con l'uno o l'altro dei metodi indicati al § **33**, ciò che si suppone di aver fatto, per cui si considererà la posizione del centro di gravità della data sezione, come nota.

Si prende come esempio la sezione indicata nella **Fig. 25**. La parte inferiore della medesima è circoscrivibile con un rettangolo e tanto questo che i 4 rettangoli vuoti hanno un lato giacente sull'asse neutro **N N**, cioè si è nel caso della **Fig. 2**, tabella **XVII**. Il momento di inerzia I_r di questa parte inferiore sarà perciò:

$$I_r = \frac{1}{3}\left\{b\,g^3 - (b_r\,g_r^3 + b_{rr}\,g_{rr}^3)\right\}$$

Nella parte superiore della sezione si può calcolare separatamente il momento di inerzia della porzione a contorno rettilineo

da quella a contorno curvilineo. La prima si può inscrivere in un rettangolo, e tanto questo che i rettangoli vuoti I, I hanno un lato sull'asse neutro, cioè si è nel caso della parte inferiore, mentre per i rettangoli vuoti II, II bisogna ricorrere alla (36), nella quale per I si applica la formula relativa alla **Fig. 1**, tabella **XVII**. Il momento di inerzia I_2 pella parte superiore a contorno rettilineo sarà dunque:

$$I_2 = \frac{1}{3}\left\{b_{III}\, g_{III}^3 - b_{IV}\, g_{IV}^3\right\} - \left(\frac{1}{12}\, b_{IV}\, a_r^3 + b_{IV}\, a_r\, d^2\right)$$

Per la porzione superiore a contorno curvilineo si ricorre alla (36) dove per il valore di I si è nel caso della **Fig. 9**, tabella **XVII**, e quindi il relativo momento di inerzia I_3 sarà:

$$I_3 = 2\left\{\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{64}\,(a^4 - a_r^4) + \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{4}\,(a^2 - a_r^2)\,d^2\right\}$$

Ed il momento di inerzia I dell'intera sezione sarà la somma dei momenti di inerzia parziali, cioè:

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

39. Formule approssimative per la determinazione spedita dei momenti di inerzia. — La determinazione del momento di inerzia si può semplificare di assai in alcuni casi della pratica, specialmente qualora sieno sufficienti dei risultati di approssimazione, come avviene nello studio dei *progetti di massima*. Onde vedere chiaramente in che consistano tali semplificazioni, suppongasi un caso particolare, quello cioè della sezione segnata nella **Fig. 26**. Si ammette di aver precedentemente determinata la posizione del centro di gravità, cioè sieno noti i valori di c e t (essendo c la distanza delle fibre più compresse dall'asse neutro, e t quella delle fibre più stirate dal medesimo asse).

Ciò posto, il momento totale di inerzia si avrà formando il momento di inerzia della parte di sezione che sta al di sopra dell'asse neutro, indi quello della parte inferiore e poi sommandoli. — Tanto la parte superiore che la inferiore si circoscrivono con un rettangolo, visto che tanto i rettangoli circoscriventi

quanto i vuoti hanno così un lato sull'asse neutro **N N** e quindi sono tutti nel caso della **Fig. 2**, tabella **XVII.** L'espressione rigorosa del momento di inerzia, sarà

$$I = \frac{1}{3}\left[\left\{b\,c^3 - (b-s)\,(c-a)^3\right\} + \left\{b_r t^3 - (b_r - s)\,(t-a_r)^3\right\}\right] \qquad (I)$$

Osservando che $c_0 = c - \frac{a}{2}$, $t_0 = t - \frac{a_r}{2}$, ponendo $\omega_c = a\,b$, $\omega_t = a_r b_r$ e sostituendo nella (I) si trova

$$I = \frac{1}{3}\left[\omega_c\left(3\,c_0^2 + \frac{a_r^2}{4}\right) + \omega_t\left(3\,t_0^2 + \frac{a_r^2}{4}\right) + s\left\{(c-a)^3 + (t-a_r)^3\right\}\right] \qquad (II)$$

E siccome le grossezze a ed a_r delle tavolette, sono in generale piccolissime in confronto dell'altezza della trave, si possono trascurare le quantità $\frac{a^2}{4}$ ed $\frac{a_r^2}{4}$ rispetto alle altre $3\,c_0^2$ e $3\,t_0^2$, locchè vale lo stesso di supporre tutta l'area delle tavolette concentrata nel rispettivo centro di gravità; d'altronde si può ritenere che il gambo si spinga colla sua altezza fino al centro di figura delle tavolette, cioè si può fare la posizione $c - a = c_0$, $t - a_r = t_0$ ed allora la (II) si trasforma nella più semplice espressione

$$I = \omega_c\,c_0^2 + \omega_t\,t_0^2 + \frac{s}{3}\,(c_0^3 + t_0^3) \qquad (37)$$

Se la sezione è simmetrica rispetto all'asse neutro, allora $\omega_c = \omega_t = \omega$, $c_0 = t_0 = \frac{H_0}{2}$ e quindi la (37) diventa

$$I = \omega\,\frac{H_0^2}{2} + \frac{s\,H_0^2}{12} = \frac{H_0^2}{2}\left(\omega + \frac{s\,H_0}{6}\right) \qquad (38)$$

Se si vuole far astrazione dal gambo, o parete verticale, come usano molti pratici, ammettendo che le parti resistenti alla flessione sieno le sole tavolette, ovverossia se si considera la sola sezione segnata nella **Fig. 27**, allora basta porre nella (37) $s = o$ e diventa

$$I = \omega_c\,c_0^2 + \omega_t\,t_0^2 \qquad (39)$$

Affine di soddisfare alla condizione che l'asse neutro **N N** passi per il centro di figura, conviene che sia $\omega_c\,c_0 = \omega_t\,t_0$, e ricor-

dando che $c_0 + t_0 = H_0$ sostituendo nella (39) si ottiene

$$I = \omega_c \, c_0 \, H_0 = \omega_t \, t_0 \, H_0 \qquad (39a)$$

e se la sezione è simmetrica rispetto all'asse neutro, cioè le due tavolette fra loro eguali, allora $\omega_c = \omega t = \omega$ e $c_0 = t_0 = \frac{H_0}{2}$ e quindi

$$I = \frac{\omega}{2} H_0^2 \qquad (40)$$

il quale valore si avrebbe ottenuto anche dalla (38) ponendo $s = o$.

Paragonando le (38) e (40) si scorge che nel caso di sezioni simmetriche rispetto all'asse neutro, volendo tener conto della resistenza del gambo, basta aggiungere $^1/_6$ dell'area del medesimo a quella di una nervatura e calcolare il momento di inerzia come se si trattasse di una sezione senza gambo.

Nervatura. — Per nervatura si intende tutto il complesso di parti componenti una mezza sezione, astrazione fatta dal gambo.

Allo scopo di vedere quanto piccolo sia l'errore che si commette nell'adottare le formule approssimative, si dà un esempio, riferendosi alla sezione rappresentata nella **Fig. 28** della quale si calcola il relativo momento di inerzia, prima rigorosamente e poi colle formule approssimative. Si cominci dal determinare la quantità x, affine di precisare la posizione del centro di gravità, e si prenda per asse di riferimento dei momenti di figura la retta **XX**; l'equazione determinatrice di x sarà:

$$x = \frac{\left[\left\{ a\,b + (b_I - b)\,a_I \right\} d_I + a_{II}\, b_{II}\, d_{II}\right] + \left[a_{III}\, b_{III}\, d_{III} + a_{IV}\, b_{II}\, d_{IV} \right]}{\left[a\,b + (b_I - b)\,a_I + a_{II}\, b_{II} \right] + \left[a_{III}\, b_{III} + a_{IV}\, b_{II} \right]} \qquad (I)$$

nella quale si sono tenuti separati i momenti di figura e le aree delle due nervature, onde valersene in seguito.

Supponendo la sezione alta 3 metri; i 4 cantonali della nervatura superiore con l'ala di 150 millimetri e lo spessore di 12 millimetri e la relativa lamiera verticale alta metri 0,50 e grossa 15 millimetri; le 3 lamiere verticali della nervatura inferiore

aventi l'eguale grossezza di 15 millimetri ed alte rispettivamente, quelle di mezzo metri 0,40, le due laterali metri 0,20, riesce facile determinare i valori delle quantità contenute nella (I), i quali sono annotati nella **Fig. 29** e quindi esprimendo tutto in centimetri si ottiene

$$x = \frac{\left[\left\{30\times3{,}9+(31{,}5-3{,}9)\,2{,}4\right\}15+20\times1{,}5\times40\right]+\left[20\times4{,}5\times290+20\times1{,}5\times270\right]}{\left[30\times3{,}9+(31{,}5-3{,}9)\,2{,}4+20\times1{,}5\right]+\left[20\times4{,}5+20\times1{,}5\right]}$$

$$x = \frac{\left[3948{,}6\right]+\left[34200\right]}{\left[213{,}24\right]+\left[120\right]} \qquad \text{(II)}$$

$$x = 114{,}48 \text{ cm.}$$

Il momento di inerzia esatto di tutta la sezione si ottiene nella somma dei momenti di inerzia delle due nervature. Si scompone perciò tanto la nervatura superiore che la inferiore nei parziali rettangoli segnati nella **Fig. 30**, e ricorrendo alla (36) si avrà il momento di inerzia I_1 della nervatura superiore

$$I_1 = \frac{1}{12}\,b_{,}\,a_{,}^{3} + b_{,}\,a_{,}\,g_{,}^{2} + \frac{1}{12}\,(b-b_{,})\,a^{3} + (b-b_{,})\,a\,g_{,}^{2} + \frac{1}{12}\,b_{,,}\,a_{,,}^{3} + b_{,,}\,a_{,,}\,g_{,,}^{2}$$

$$I_1 = \frac{1}{12}\left\{b_{,}\,a_{,}^{3} + (b-b_{,})\,a^{3} + b_{,,}\,a_{,,}^{3}\right\} + \left\{b_{,}\,a_{,} + (b-b_{,})\,a\right\} g_{,}^{2} + b_{,,}\,a_{,,}\,g_{,,}^{2}$$

e quello I_2 della nervatura inferiore

$$I_2 = \frac{1}{12}\left\{b_{,,,}\,a_{,,,}^{3} + b_{,,}\,a_{\text{IV}}^{3}\right\} + b_{,,,}\,a_{,,,}\,g_{,,,}^{2} + b_{,,}\,a_{\text{IV}}\,g_{\text{IV}}^{2}$$

Per ottenere i valori numerici di I_1 ed I_2 devonsi fare i seguenti valori

$$g_{,} = x - d_{,} = 114{,}48 - 15{,}00 = 99{,}48$$
$$g_{,,} = x - d_{,,} = 114{,}48 - 40{,}00 = 74{,}48$$
$$g_{,,,} = d_{,,,} - x = 290{,}00 - 114{,}48 = 175{,}52$$
$$g_{\text{IV}} = d_{\text{IV}} - x = 270{,}00 - 114{,}48 = 155{,}52$$

mentre tutti gli altri furono calcolati precedentemente, come scorgesi dalla **Fig. 29**. Esprimendo tutto in centimetri risulta

$$I_1 = \frac{1}{12}\left\{3{,}9\times\overline{30}^3+(31{,}5-3{,}9)\,\overline{2{,}4}^3+1{,}5\times\overline{20}^3\right\}+\left\{3{,}9\times 30+(31{,}5-3{,}9)\,2{,}4\right\}\overline{99{,}48}^2+1{,}5\times 20\times\overline{74{,}48}^2$$

$$I_1 = 1990383$$

$$I_2 = \frac{1}{12}\left\{4{,}6\times\overline{30}^3+1{,}5\times\overline{20}^3\right\}+4{,}5\times 20\times\overline{175{,}52}^2+1{,}5\times 20\times\overline{155{,}52}^2$$

$$I_2 = 3502257$$

per cui sarà il momento di inerzia totale di I dell'intera sezione

$$I = I_1 + I_2 = 1990383 + 3502257 = 5492640 \qquad \text{(III)}$$

Si applichi ora la formula approssimativa (39a). Supponendo che la nervatura superiore sia soggetta a compressione e la inferiore a trazione si ha

$$\omega_c = b_I\, a_I + (b - b_I)\, a + b_{II}\, a_{II}$$

$$\omega_t = b_{III}\, a_{III} + b_{II}\, a_{IV}$$

Per avere c_0 e t_0, ossia le distanze dei baricentri delle nervature dall'asse neutro, bisogna determinare la posizione di questi baricentri e lo si fa valendosi della (II). Riferendosi all'asse **X X**, **Fig. 28** e **30**, e chiamando rispettivamente x_1 ed x_2 le distanze dei centri di gravità della nervatura superiore ed inferiore dal detto asse si ha

$$x_1 = \frac{3948,6}{213,24} = 18{,}52$$

$$x_2 = \frac{34200}{120} = 285$$

per cui noti i valori di x, x_1 ed x_2 si potranno determinare anche quelli di c_0 e t_0 col mezzo delle equazioni

$$c_0 = x - x_1$$

$$t_0 = x_2 - x$$

e sostituendo i valori numerici si ottiene

$$\omega_c = 3{,}9 \times 30 + (31{,}5 - 3{,}9)\,2{,}4 + 1{,}5 \times 20 = 213{,}24 \text{ cm. q.}$$
$$\omega_t = 4{,}5 \times 20 + 1{,}5 \times 20 = 120 \text{ cm. q.}$$

$$c_0 = 114{,}48 - 18{,}52 = 95{,}96 \text{ cm.}$$
$$t_0 = 285 - 114{,}48 = 170{,}52 \text{ »}$$
$$H_0 = 95{,}96 - 170{,}52 = 266{,}48 \text{ »}$$

e quindi sarà, applicando la (39*a*)

$$I = 213{,}24 \times 95{,}96 \times 266{,}48 = 5452840$$
$$I = 120 \times 170{,}52 \times 266{,}48 = 5452820$$

e prendendo la media fra questi valori, che differiscono alcun poco fra loro, per non aver tenuto conto di un maggior numero di decimali, si ottiene il valore da adottarsi per I, cioè

$$I = 5452830 \qquad \text{(IV)}$$

Paragonando il valore approssimativo, dato dalla (IV), con quello esatto, dato dalla (II), vedesi che la differenza è piccola, ammontando essa a 0,7 per cento, ciò che in pratica può essere tollerato.

Bisogna d'altronde avvertire che l'esempio considera un caso dei più sfavorevoli (ciò che si è fatto espressamente), poichè le due nervature sono molto differenti fra loro, mentre ordinariamente esse variano poco l'una dall'altra, sia nella forma che nell'area e quindi in quest' ultimo caso tanto minore sarà l'errore che si commetterà adoperando le formule approssimative.

Introducendo rispettivamente nelle (31) e (31*a*) i valori approssimativi di I dati dalle (39*a*) e (40) e ricordando che in questo caso il valore di d della (31*a*) è $d = \frac{H}{2}$, si ottiene

$$M = \frac{c_0}{c}\,\omega_c\,R_c\,H_0 = \frac{t_0}{t}\,\omega_t\,R_t\,H_0 \qquad (41)$$

$$M = R\,\omega\,\frac{H_0^2}{H} \qquad (41a)$$

e se la sezione è molto alta, siccome H_0 diventa di assai poco

minore di H, si può fare

$$M = R \omega H_0 \qquad (41b)$$

dove ω rappresenta l'area di una sola nervatura.

40. Determinazione grafica dei momenti d'inerzia. — La determinazione del momento di inerzia si può fare anche graficamente, e questo processo è generalmente opportuno quando il perimetro della sezione sia composto di parecchie curve, per modo che essa sezione non sia scomponibile nelle forme semplici considerate nella tabella XVII, oppure quando la forma della sezione, benchè presenti un contorno rettilineo, sia molto complicata.

Affine di vedere come si proceda col metodo grafico si fa applicazione alla sezione segnata nella Fig. 31.

Dovendo il momento di inerzia essere sempre riferito, nelle seguenti applicazioni, all'asse neutro della sezione considerata, si comincierà dal determinare la posizione del medesimo. Perciò si scompone la sezione nelle figure semplici di cui è formata, cioè nei 5 rettangoli I, II, III, IV, V, mediante tante rette parallele alla direzione dell'asse neutro il quale, dovendo essere normale al piano di sollecitazione, che si suppone verticale, sarà evidentemente orizzontale. Determinati i baricentri di quelle singole figure, si conducono per essi delle parallele alla direzione dell'asse neutro, le quali in questo caso risultano orizzontali. Si riducono quelle figure ad una base comune (che si è presa eguale all'altezza h del rettangolo IV), col metodo indicato al § **33** - β, e prendendo le rette che ne rappresentano le aree come forze, si costruisce il poligono delle forze 0, 1, 2, 3, 4, 5. Scelto un polo P, di cui sia b la distanza polare, e condotti i raggi polari P 0, P 1, P 2, P 3, P 4, P 5, mediante tante rette parallele ai medesimi, che si intersechino successivamente nelle linee dei baricentri, si costruisce il poligono funicolare O I II III IV V VI. Prolungando il primo e l'ultimo lato O I e V VI, e condotta per il punto di intersezione la retta N N normale al piano di sollecitazione, e quindi in questo caso orizzontalmente, essa rappresenta l'asse neutro. Prolungati tutti i lati del poligono funicolare fino all'incontro dell'asse neutro, i segmenti 0′1′, 1′2′, 2′3′, 3′4′, 4′5′ rappresentano rispettivamente i *momenti di figura* o *momenti statici* dei 5 rettangoli in cui si è supposta divisa l'intera sezione, riferiti questi

momenti all'asse neutro e ridotti alla base comune b. Perciò il poligono funicolare O I II III IV V VI si chiama *poligono dei momenti statici*.

Presi i momenti statici come forze, si consideri il poligono 0′ 1′ 2′ 3′ 4′ 5′ e scelto un polo P′, di cui sia b' la distanza polare, si guidino i raggi polari P′0′, P′1′, P′2′, P′3′, P′4′, P′5′. Sè ora, mediante tante rette condotte parallelamente a questi raggi, in modo che si intersecassero successivamente nelle linee dei baricentri, si costruisce un poligono funicolare, e se si prolungassero i lati di questo fino ad incontrare l'asse neutro, i risultanti segmenti rappresenterebbero dei momenti di secondo ordine e precisamente i prodotti delle aree dei 5 rettangoli, per il quadrato della distanza dei baricentri di queste aree dall'asse neutro. Per le aree che hanno poca altezza e molta distanza dall'asse neutro si può prendere, senza errore sensibile, questo prodotto come rappresentante il momento di inerzia delle aree medesime, locchè vale lo stesso come supporre tutta l'area concentrata nel proprio baricentro. Ma per le aree che hanno molta altezza e poca distanza dall'asse neutro, l'assumere i suddetti prodotti come rappresentanti i rispettivi momenti di inerzia, ossia l'ammettere l'accennata ipotesi, condurrebbe ad errori troppo grossolani. Ecco per queste aree come si procede.

Si consideri, per esempio, il rettangolo IV, di cui si ponga l'area $a\,h = \omega$, la distanza della linea baricentrica dall'asse neutro eguale a d, e sia K il *raggio di inerzia* relativo alla linea baricentrica stessa.

Il momento di inerzia I_0 di quel rettangolo riferito all'asse neutro N N, si può scrivere in due modi: ricorrendo alla (36), cioè

$$I_0 = I + \omega\, d^2 = \frac{1}{12}\, a h^3 + a h\, d^2 = a h \left(\frac{h^2}{12} + d^2 \right) \qquad \text{(I)}$$

oppure

$$I_0 = \omega\, (d^2 + K^2) = a h\, (d^2 + K^2) \qquad \text{(II)}$$

e confrontando la (I) e (II) risulta

$$K = \frac{h}{\sqrt{12}} = 0,\ 2887\ h \qquad (42)$$

Di questo rettangolo si ha già determinato il momento statico rispetto all'asse neutro, cioè

$$\omega d = h \times b \times \overline{3'4'}$$

Per averne il momento di inerzia I_0, osservando la (II), vedesi che basta moltiplicare il momento statico ωd per

$$d + \frac{K^2}{d}$$

vale a dire il punto in cui si può supporre concentrato il momento statico ωd, considerato come forza, dista dall'asse neutro della quantità $d + \frac{K^2}{d}$, e perciò bisogna spostare la linea baricentrica del rettangolo IV, che dista dal detto asse della quantità d, allontanandola dalla primitiva sua posizione della quantità $\frac{K^2}{d}$. Per fare questo spostamento si osservi che $\frac{K^2}{d}$ è terza proporzionale fra d e K e quindi si otterrà speditamente questo valore, portando il valore di K, dato dalla (42), sulla linea baricentrica a partire dal baricentro in **g m**, unendo il punto **m** col punto **G** e conducendo una normale alla **G m** dal punto **m**, finchè essa incontra l'asse di simmetria nel punto **n**. La retta **g n** ha per valore $\frac{K^2}{d}$, come risulta confrontando i triangoli simili **G g m** ed **m g n**, e quindi conducendo per **n** una parallela all'asse neutro, essa rappresenta la direzione secondo cui si deve supporre che agisca il momento statico ωd preso come forza.

Nel caso considerato lo spostamento della linea baricentrica si è fatto per il IV e V rettangolo e si è tralasciato di farlo per gli altri 3 rettangoli I, II, III per maggior speditezza e semplicità, essendo la differenza poco sensibile e quindi trascurabile.

Fatto adunque lo spostamento delle linee baricentriche, ove se ne presenta il bisogno, si conducono tante parallele ai raggi polari P′ 0′, P′ 1′, P′ 2′, P′ 3′, P′ 4′, P′ 5′ che intersechino successivamente le linee baricentriche, o quelle spostate, e si ottiene li poligono funicolare 0′ I′ II′ III′ IV′ V′ VI′. Prolungando i lati di questo poligono funicolare finchè incontrano l'asse neutro

N N, i segmenti $\overline{0''1''}$, $\overline{1''2''}$, $\overline{2''3''}$, $\overline{3''4''}$, $\overline{4''5''}$ rappresentano rispettivamente i momenti di inerzia ridotti alla base comune b_1, dei rettangoli I, II, III, IV, V, e quindi la loro somma $\overline{0''5''}$ rappresenta il momento di inerzia dell'intera sezione, il cui valore sarà dato da

$$I = h \times b \times b_1 \times \overline{0''5''}$$

Il poligono O I′ II′ III′ IV′ V′ VI′ si chiama *poligono dei momenti di inerzia.*

Osservazione. — Praticamente è opportuno di collocare il polo **P′** lungo la normale all'asse neutro condotta per il punto di incontro degli estremi lati (O I, V VI) del poligono dei momenti statici, **Fig. 31**, cosicchè si hanno i due estremi raggi polari (**P′** 0′, **P′** 5′) normali all'asse neutro, e quindi i due estremi lati del poligono dei momenti di inerzia (O′ O″, VI′ 5″) pure normali all'asse neutro, con che si ottiene una opportuna disposizione della figura.

Si può anche limitare la prolungazione dei lati del poligono dei momenti di inerzia, ai soli due estremi (O′ O″, VI′ 5″) che danno il segmento 0″ 5″ rappresentante il totale momento di inerzia, poco importando di avere i segmenti parziali 0″ 1″, 1″ 2″, ecc. che rappresentano i momenti di inerzia parziali delle varie parti componenti la intera sezione.

Trattandosi di sezioni a contorno curvilineo, come sarebbe quella indicata nella **Fig. 32**, (che rappresenta la sezione di un arco metallico del ponte di St. Denis, formato con rotaie Barlow), nella quale l'asse neutro è orizzontale, la riduzione ad una medesima base delle varie parti o zone in cui si è scomposta la figura, la si può fare nel modo seguente.

Essendo la sezione simmetrica rispetto all'asse neutro basta operare per mezza figura soltanto, determinandone il rispettivo momento di inerzia, il quale raddoppiato darà quello dell'intera sezione. Condotta la verticale **V V** si proiettano su questa le altezze delle varie zone, e scelto un polo **P**, la cui distanza polare sia eguale alla data base b, si guidano i corrispondenti raggi polari.

Sopra una orizzontale qualsiasi **O M**, partendo sempre dall'origine **O**, si portano come ascisse tante rette che moltiplicate per le altezze delle varie zone diano le corrispondenti aree, le quali rette sono le larghezze mediane delle zone. Nel nostro caso, avendosi diviso la sezione in zone orizzontali di piccolissima altezza, si possono considerare in ogni zona le parti comprese fra le curve, come tanti trapezi e quindi per ogni zona si hanno due trapezi eguali ap-

partenenti alle rotaie ed un rettangolo centrale corrispondente al gambo. La somma delle larghezze mediane di queste 3 figure, fatta per ogni zona, dà la lunghezza delle rispettive ascisse 01, 02, 03, 04, ecc... Per gli estremi 1, 2, 3, 4, 5, ecc... di queste ascisse si tirano altrettante verticali e guidando delle parallele ai raggi polari irradiati dal polo P, in modo che esse si intersechino successivamente nelle corrispondenti verticali anzidette, si ottiene il poligono delle aree, i cui lati prolungati fino ad incontrare la verticale **0 W** passante per l'origine, individuano i segmenti 01, 12, 23, 34, 45, 56... che rappresentano le aree delle varie zone ridotte alla base comune b.

Per avere il poligono dei momenti statici, si individuano i baricentri delle varie zone, per i quali si tirano tante orizzontali; si sceglie un polo P' con distanza polare $b_{'}$ e condotti i corrispondenti raggi polari, si tirano tante perpendicolari a questi raggi, in modo che si intersechino successivamente nelle linee baricentriche, e si ottiene così il cercato poligono. Si fanno poscia gli spostamenti delle linee baricentriche per quelle zone che lo richieggono, ciò che nel nostro caso non occorre di eseguire stante la poca altezza delle varie zone, e prolungando i lati del poligono dei momenti statici, si determinano sull'asse neutro i segmenti proporzionali ai momenti statici delle varie zone, ridotti alla base comune $b_{'}$. Scelto un altro polo P'' con distanza polare $b_{''}$, si guidano i corrispondenti raggi polari e, col processo già indicato, si costruisce il poligono dei momenti di inerzia. Prolungando i lati estremi del medesimo fino ad incontrare l'asse neutro, nel segmento Σi fra essi compreso, si ha una retta rappresentante il momento di inerzia della data sezione, il cui valore è dato da

$$I = b \times b_{'} \times b_{''} \times \Sigma i$$

La **Fig. 32** è disegnata nella scala di $^1/_5$.

Le basi di riduzione furono prese

b = 1 cm. quella delle aree,

$b_{'}$ = 6 cm. quella dei momenti statici,

$b_{''}$ = 6 cm. quella dei momenti di inerzia,

ed essendo risultato

$$\Sigma i = 2{,}03 \text{ cm.}$$

si ricava il seguente valore numerico del momento di inerzia della mezza sezione

$$1 \times 6 \times 6 \times 2{,}03 \times \overline{5}^4 = 45675$$

Il momento di inerzia I della intera sezione sarà quindi

$$I = 2 \times 45675 = 91350$$

41. Raggi di inerzia. — Colla (42) si determina il valore del raggio di inerzia K per una figura rettangolare. Potendo però succedere che qualcuna delle parti in cui viene scomposta la sezione sia triangolare, trapezia o circolare, sarà opportuno determinare il valore di K per queste figure.

α) **Area triangolare.** — **Fig. 33.** Sia b la base, h l'altezza, ω l'area, d la distanza della linea baricentrica dall'asse neutro. Il momento di inerzia rispetto all'asse neutro ha le due espressioni di egual valore, cioè

$$I_0 = I + \omega\, d^2 = \frac{1}{36}\, b\, h^3 + \frac{1}{2}\, b\, h\, d^2 = \frac{b\, h}{2}\left(\frac{h^2}{18} + d^2\right)$$

$$I_0 = \omega\,(d^2 + \mathrm{K}^2) = \frac{b\, h}{2}(d^2 + \mathrm{K}^2)$$

le quali confrontate danno

$$\mathrm{K} = \frac{h}{\sqrt{18}} = 0{,}2357\, h \qquad (43)$$

β) **Area trapezia.** — **Fig. 34.** Sia b la base maggiore, b_r la base minore, h l'altezza, ω l'area, d la distanza della linea baricentrica dall'asse neutro. I due valori del momento di inerzia riferito all'asse neutro sono

$$I_0 = I + \omega\, d^2 = \frac{h^3}{36}\left\{\frac{4bb_r + b^2 + b_r^2}{b + b_r}\right\} + \frac{b + b_r}{2}\, h\, d^2 =$$

$$= \frac{b + b_r}{2}\, h\left[\frac{h^2}{18}\left\{\frac{4bb_r + b^2 + b_r^2}{(b + b_r)^2}\right\} + d^2\right]$$

$$I_0 = \omega\,(d^2 + \mathrm{K}^2) = \frac{b + b_r}{2}\, h\,(d^2 + \mathrm{K}^2)$$

e confrontandoli si ottiene

$$K^2 = \frac{h^2}{18} \left\{ \frac{4bb_r + b^2 + b_r^2}{(b + b_r)^2} \right\}$$

da cui

$$K = \frac{h}{\sqrt{18}} \sqrt{\left(\frac{2bb_r + (b + b_r)^2}{(b + b_r)^2} \right)}$$

$$K = 0{,}2357 \sqrt{\left(\frac{2bb_r}{(b + b_r)^2} + 1 \right)} h \qquad (44)$$

γ) **Sezione circolare piena.** — **Fig. 35.** Sia r il raggio, ω l'area, d la distanza della linea baricentrica dall'asse neutro. I due valori del momento di inerzia rispetto a questo asse sono

$$I_0 = I + \omega d^2 = \frac{1}{4} \pi r^4 + \pi r^2 d^2 = \pi r^2 \left(\frac{r^2}{4} + d^2 \right)$$

$$I_0 = \omega (d^2 + K^2) = \pi r^2 (d^2 + K^2)$$

che confrontati danno

$$K = \frac{r}{2} = 0{,}5\, r \qquad (45)$$

δ) **Sezione circolare vuota.** — **Fig. 36.** Sia R il raggio esterno, r quello interno, ω l'area, d la distanza della linea baricentrica dall'asse neutro. I due valori del momento di inerzia rispetto a questo asse sono

$$I_0 = I + \omega d^2 = \frac{1}{4} \pi (R^4 - r^4) + \pi (R^2 - r^2) d^2 =$$

$$= \pi (R^2 - r^2) \left\{ (R^2 + r^2) + d^2 \right\}$$

$$I_0 = \omega (d^2 + K^2) = \pi (R^2 - r^2) (d^2 + K^2)$$

da cui

$$K = \frac{\sqrt{R^2 + r^2}}{2} = 0{,}5 \sqrt{R^2 + r^2} \qquad (46)$$

Ed osservando che qualsiasi sezione, di quelle che generalmente sono addottate in pratica, è suddivisibile in zone che si possono

considerare o triangolari, o rettangolari, o trapezie, o cerchi pieni e vuoti, i valori del raggio di inerzia K, dati dalle (42) (43) (44) (45) (46), soddisfano in ogni caso.

42. Differenti valori del momento d'inerzia per figure della stessa area, ma di forma diversa. — Dalla (31) si scorge che il momento di resistenza di un solido è direttamente proporzionale al momento di inerzia della sua sezione retta, riferito questo momento all'asse neutro. Se si considerano parecchie sezioni, eguali di area, ma aventi forme diverse, è facile il vedere che i rispettivi momenti di inerzia mutano di valore, anzi per la stessa forma, a seconda che cangi di posizione l'asse neutro, cangia anche il valore del momento di inerzia. Un esempio metterà maggiormente in evidenza tale considerazione.

Si prendano le tre sezioni segnate nelle Fig. 37, 38, 39, colle dimensioni espresse in centimetri, ammettendo che l'asse neutro sia orizzontale. Osservato che il valore del momento di inerzia dipende in generale dal cubo dell'altezza della sezione, come si può rilevare dalla tabella XVII, si sono prese quelle tre sezioni di eguale area e nello stesso tempo di eguale altezza; le aree sono calcolate nel seguente specchio:

Fig. 37 $13{,}5 \times 1{,}5 + (12 - 1{,}5)\ 1{,}5 = 36$ cm. q.

Fig. 38 $12 \times 3 = 36$ »

Fig. 39 $8\ (12 - 10) + 10 \times 2 = 36$ »

Ricorrendo rispettivamente ai casi contemplati dalle Fig. 5*a*, 1, 4*b*, tabella XVII, si formino i momenti di inerzia di quelle tre sezioni e si avrà

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Fig. 37} & I_I = \dfrac{1}{12}\left\{1{,}5 \times 12^3 + (13{,}5 - 1{,}5)\ 1{,}5^3\right\} = 219{,}375 \\ \text{Fig. 38} & I_{II} = \dfrac{1}{12}\ 3 \times 12^3 = 432 \\ \text{Fig. 39} & I_{III} = \dfrac{1}{12}\left\{8 \times 12^3 - (8 - 2)\ 10^3\right\} = 625 \end{array}\right\} \text{(A)}$$

Supponendo ora le sezioni poste nell'altro senso, in modo che gli assi che prima erano verticali diventino orizzontali, come indi-

cano le Fig. 37*a*, 38*a*, 39*a*, ritenendo ancora l'asse neutro orizzontale, ossia essendo quello diretto normalmente al precedente, si calcolino i relativi momenti di inerzia ricorrendo rispettivamente alle Fig. 5*a*, 1, 5*c*, tabella XVII, e risulterà

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Fig. 37}a & I_{'} = \frac{1}{12}\left\{1{,}5 \times \overline{13{,}5}^{3} + (12-1{,}5)\,\overline{1{,}5}^{3}\right\} = 310{,}5 \\ \text{Fig. 38}a & I_{''} = \frac{1}{12}\ 12 \times 3^{3} = 27 \\ \text{Fig. 39}a & I_{'''} = \frac{1}{12}\left\{(12-10)\,8^{3} + 10 \times 2^{3}\right\} = 92 \end{array}\right\} \text{(B)}$$

Dal parallelo fra i valori (A) e (B) vedesi adunque che la forma della sezione e la direzione dell'asse neutro hanno una influenza grandissima sul valore del momento di inerzia, da cui dipende la resistenza del solido, e quindi conchiudesi che nello stabilire le condizioni di stabilità di un solido cimentato alla flessione, onde non incorrere in uno spreco di materia, convien badare non solo alla quantità di area resistente, ma soprattutto alla forma della stessa, ed alla posizione dell'asse neutro rispetto al piano di sollecitazione.

È facile scorgere che quanto più lontana si porterà la materia resistente dall'asse neutro e tanto maggiore diventerà la resistenza inquantochè il valore del momento di inerzia è proporzionale al cubo dell'altezza della sezione del solido. Fu anzi dietro queste considerazioni che si adottarono le forme a I per le travi metalliche.

Questa scelta opportuna della forma, cioè a dire questo impiego razionale della materia resistente, conduce ad un importantissimo risultato nel campo della pratica, quello cioè di economizzare il volume del solido e quindi il suo costo, senza scapito della resistenza.

B) Forze esterne.

Finora si ha considerato il modo col quale si può determinare la resistenza di un solido ad asse rettilineo orizzontale, cimentato alla flessione da forze verticali, ossia il valore delle *forze interne* o *reazioni molecolari*.

Rimane a vedere come si proceda a determinare il valore ed i momenti delle forze esterne, che possono essere prodotte o da

carichi concentrati in dati punti o da pesi uniformemente distribuiti, i quali tutti poi possono essere od invariabili di posizione o mobili, in ogni caso però sono carichi che agiscono verticalmente. Tale ricerca si può fare analiticamente o graficamente.

1. Sforzi di taglio e momenti inflettenti prodotti da carichi di posizione invariabile.

a) Processo analitico.

43. Carichi concentrati. — Nel caso di solidi appoggiati liberamente su due sostegni la ricerca è semplicissima. Per trattare la questione con qualche generalità si considera la trave **A B** di lunghezza l, Fig. 40, caricata di una serie di carichi $P_1\ P_2 \ldots P_m\ P_{m+1} \ldots P_{n-1}\ P_n$ concentrati in alcuni punti. Riferendosi all'appoggio **A** di sinistra, sieno rispettivamente $d_1\ d_2 \ldots d_m\ d_{m+1} \ldots d_{n-1}\ d_n$ le distanze dei carichi dal detto appoggio, e si consideri una sezione qualunque di ascissa x, posta fra il carico P_m e quello P_{m+1}, per la quale si determinerà *lo sforzo di taglio* T_x ed il *momento inflettente* M_x.

Riguardo al senso delle forze si considereranno sempre positive quelle dirette dal basso all'alto, e negative quelle dirette in senso contrario, e riguardo al senso dei momenti, si prenderanno sempre positivi quelli che fanno ruotare il solido all'insù intorno ad una sezione qualunque e negativi quelli che lo fanno ruotare in senso contrario.

Prima di tutto bisogna trovare le reazioni degli appoggi che si denoteranno colle stesse lettere indicanti gli appoggi medesimi. Per l'equilibrio statico del solido deve essere

$$A + B - P_1 - P_2 \cdots - P_m - P_{m+1} \cdots - P_{n-1} - P_n = 0 \qquad (I)$$

$$Bl - P_1 d_1 - P_2 d_2 \cdots - P_m d_m - P_{m+1} d_{m+1} \cdots - P_{n-1} d_{n-1} - P_n d_n = 0 \qquad (II)$$

confrontando le quali si trova

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{(l-d_1)P_1 + (l-d_2)P_2 + \cdots + (l-d_m)P_m + \cdots + (l-d_n)P_n}{l} \\ B &= \frac{P_1 d_1 + P_2 d_2 \cdots P_m d_m + \cdots + P_n d_n}{l} \end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

Ora ricordando che lo sforzo di taglio rispetto ad una data sezione è la somma algebrica di tutte le forze che sollecitano il solido a partire dalla sezione considerata fino ad uno qualunque dei due estremi, e che il momento inflettente è la somma algebrica dei momenti di tutte le forze anzidette riferiti al piano della sezione stessa, risulta che riferendosi all' appoggio A di sinistra si avrà

$$T_x = A - P_1 - P_2 \cdots - P_m \qquad (48)$$

$$M_x = Ax - P_1 (x - d_1) - P_2 (x - d_2) \cdots - P_m (x - d_m) \qquad (49)$$

che servono a determinare lo sforzo di taglio ed il momento inflettente per qualunque sezione.

Esaminando le (48) e (49) vedesi che tanto lo sforzo di taglio, quanto il momento inflettente, vanno variando di valore nelle differenti sezioni del solido. Quando si tratta di solidi prismatici, per garantire la loro stabilità devesi calcolarla relativamente a quella sezione che è la più cimentata di tutte, la quale dicesi *sezione pericolosa*, e le dimensioni che a questa competono si assegnano costantemente a tutto il solido.

Ecco quindi che in ogni caso conviene ricercare per quale sezione diventi massimo sia il valore di T_x che quello di M_x e determinare questo valore, il quale serve di base ai calcoli.

44. Peso uniformemente distribuito. — Si denoti con p il peso uniformemente distribuito sull' unità di lunghezza della trave; il carico totale è $p\,l$, e produce pressioni eguali su entrambi gli appoggi, per cui le reazioni dei medesimi sono

$$A = B = \frac{p\,l}{2} \qquad (50)$$

Lo sforzo di taglio T_x per una qualsiasi sezione di ascissa x, Fig. 41, è

$$T_x = A - p\,x = p\left(\frac{l}{2} - x\right) \qquad (51)$$

il quale diventa massimo per $x = 0$ ed $x = l$ e si hanno perciò rispettivamente i due valori

$$\left.\begin{aligned} +_{mas}\mathrm{T} &= +\frac{p\,l}{2} \\ -_{mas}\mathrm{T} &= -\frac{p\,l}{2} \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

eguali fra di loro, ma di segno contrario; mentre per $x = \frac{l}{2}$, diventa $\mathrm{T} = 0$.

Il momento inflettente M_x rispetto ad una sezione qualunque di ascissa x è

$$\mathrm{M}_x = \mathrm{A}\,x - \frac{1}{2}\,p\,x^2 = \frac{p\,x}{2}\,(l - x) \qquad (53)$$

e scorgesi che il maggior valore ha luogo per $x = \frac{l}{2}$, per cui posto questo valore nella (53) diventa

$$_{mas}\mathrm{M} = \frac{1}{8}\,p\,l^2 \qquad (54)$$

mentre per $x = 0$ ed $x = l$ risulta $\mathrm{M} = 0$.

45. Azione simultanea di un peso uniformemente distribuito, e di carichi concentrati. — In questo caso le reazioni degli appoggi si hanno sommando le (47) e (50), cioè

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{A} &= \frac{p\,l}{2} + \frac{(l-d_1)\mathrm{P}_1 + (l-d_2)\mathrm{P}_2 + \cdots + (l-d_n)\mathrm{P}_n}{l} \\ \mathrm{B} &= \frac{p\,l}{2} + \frac{\mathrm{P}_1 d_1 + \mathrm{P}_2 d_2 + \cdots + \mathrm{P}_n d_n}{l} \end{aligned}\right\} \quad (55)$$

e lo sforzo di taglio ed il momento inflettente per una sezione qualunque di ascissa x, sommando rispettivamente le (48 - 51) e (49 - 53), ossia

$$\mathrm{T}_x = \mathrm{A} - p\,x - \mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_2 - \cdots - \mathrm{P}_m \qquad (56)$$

$$\mathrm{M}_x = \mathrm{A}\,x - \frac{p\,x^2}{2} - \mathrm{P}_1(x-d_1) - \mathrm{P}_2(x-d_2) - \cdots - \mathrm{P}_m(x-d_m) \qquad (57)$$

nelle quali per A si deve porre il valore dato dalla (55).

b) Processo grafico.

46. Carichi concentrati. — Nel caso di carichi di differente intensità, concentrati in vari punti comunque situati, per esempio come nella **Fig. 42**, le reazioni degli appoggi si determinano nel modo seguente:

Costruita la retta-poligono delle forze 0, 1, 2, 3, 4, 5 portando successivamente a partire dal punto 0 i valori dei carichi in una data scala (*scala delle forze*), scelto un polo **P** distante *b* dalla retta 0 5 (*per cui* b *è la base di riduzione, ossia la distanza polare*) e condotti i raggi polari **P** 0, **P** 1, **P** 2, **P** 3, **P** 4, **P** 5, si costruisce il poligono funicolare O I II III IV V VI, detto anche *poligono di tensione*, per la proprietà di cui è dotato, che cioè se si uniscono tutti i suoi vertici con delle aste articolate, vi ha equilibrio sotto l'azione delle forze esterne; e le tensioni di ciascuna asta sono rappresentate, nella scala delle forze, dai rispettivi raggi polari.

Condotta la retta **a b**, che dicesi *linea di chiusa*, si fa passare parallelamente alla stessa, per **P**, la **P K** la quale taglia la retta-poligono delle forze nei due tratti **5 K** e **K 0** che rappresentano rispettivamente il valore delle reazioni degli appoggi B ed A.

Il poligono di tensione presenta altresì la proprietà, utilissima nella pratica, di essere anche il *poligono dei momenti inflettenti*, così chiamato perchè serve a determinare il momento inflettente per qualunque sezione. Per avere cioè il momento inflettente relativo ad una sezione **M** qualunque, basta condurre la verticale dalla sezione considerata, e la parte $\alpha\beta$ di questa verticale, compresa entro il poligono di tensione, è proporzionale al cercato momento inflettente, il cui valore si ottiene moltiplicando l'ordinata $\alpha\beta$, misurata nella assunta scala delle forze, per la base *b* o distanza polare, che per semplicità si prende d'ordinario eguale all'unità. Tale proprietà si dimostra facilmente. Si considerino le forze applicate fra la sezione **M** ed una delle estremità della trave, per esempio, quella di sinistra. Sia R la risultante di queste forze, le quali sono A, P_1, P_2. Come è noto, questa risultante, diretta parallelamente alle forze, passa per il punto **r** di incontro dei due lati II, III ed **a b** del poligono funicolare, esterni alle forze considerate. Questa risultante diretta dal basso in alto è eguale alla reazione dell'appoggio A, diminuita delle forze P_1, P_2, ossia sulla retta-poligono delle forze è eguale a $\overline{K\,7} - \overline{0\,2} = \overline{2\,K}$.

Il momento inflettente per definizione è il momento di R rispetto alla sezione M, cioè $R \times \overline{rs}$. E siccome i triangoli $r\alpha\beta$ del poligono di tensione, e 2 P K del poligono delle forze sono simili, avendo i lati paralleli per costruzione, come pure i triangoli $r\alpha s$ P K Q, si ha

$$\overline{2K} : \alpha\beta = PQ : rs$$

ed essendo

$$\overline{2K} = R \text{ e } PQ = b$$

risulta

$$R \times rs = \alpha\beta \times b$$

cioè l'ordinata $\alpha\beta$ moltiplicata per la base b del poligono delle forze, dà il valore del momento inflettente per la corrispondente sezione in M.

Prendendo $b = 1$, l'ordinata $\alpha\beta$ dà direttamente il valore del momento inflettente.

È evidente poi che la più grande ordinata dà il valore $mas M$, e la sezione a cui corrisponde è la pericolosa.

Osservazione. — Se i carichi concentrati sono disposti simmetricamente rispetto al mezzo della trave tanto per posizione, che per intensità, allora è opportuno scegliere il polo corrispondentemente al punto di mezzo della retta-poligono delle forze, come si è fatto nella Fig. 43, cosicchè il poligono di tensione risulta simmetrico rispetto alla verticale che passa per il punto di mezzo della trave, e la linea di chiusa riesce orizzontale.

La trave viene divisa in $n + 1$ porzioni dai punti di applicazione degli n carichi concentrati, ed osservando la Fig. 42, nonchè l'equazione (48), vedesi che lo sforzo di taglio, per tutte le sezioni appartenenti ad una di queste porzioni, si mantiene costante.

Si chiamino rispettivamente T_1, T_2, T_3... gli sforzi di taglio relativi a ciascuna di queste porzioni, cominciando dalla prima a sinistra, e si avrà

$T_1 = A$ ovvero nel poligono delle forze $T_1 = K\,7$
$T_2 = A - P_1$ » » $T_2 = K\,7 - 01 = 1\,K$
$T_3 = A - P_1 - P_2$ » » $T_3 = K\,7 - 01 - 1\,2 = 2\,K$
. . . . . .

cioè gli sforzi di taglio sono rappresentati dalle distanze dei punti della retta-poligono delle forze dal punto K. Perciò è facile di progettare dal poligono delle forze queste distanze quali ordinate, sulle linee d'azione verticali dei corrispondenti carichi, come si è fatto nella Fig. 42, e queste ordinate misurate nella scala delle forze danno lo sforzo di taglio per qualunque sezione della trave.

47. Peso uniformemente distribuito. — Esaminando le (51) e (53) vedesi che lo sforzo di taglio ed il momento inflettente dipendono dal valore di x e quindi variano per ogni sezione dalla trave. Considerando i successivi valori di T_x e di M_x quali ordinate corrispondenti ai vari valori di x, ed essendo la (51) l'equazione di una retta e la (53) quella di una parabola, ne consegue che si potranno rappresentare gli sforzi di taglio per tutti i punti della trave mediante le ordinate di una retta, ed i momenti inflettenti mediante le ordinate di una parabola. Per quello che si è veduto al § 44, la retta degli sforzi di taglio interseca l'asse della trave nel punto di mezzo, e le sue ordinate estreme hanno per valore $\frac{p\,l}{2}$; e la parabola dei momenti inflettenti ha il vertice in corrispondenza al punto di mezzo della trave Fig. 44, e passa per i punti di appoggio, cioè in questo caso il poligono funicolare diventa una parabola di cui, tirate le tangenti in a e b, sarà facile la costruzione. Il poligono delle forze è dato da una retta F F' che (nella scala delle forze) rappresenta il totale peso $p\,l$ uniformemente distribuito sulla trave; il polo P si sceglie in corrispondenza al punto di mezzo Q della F F', e condotti i raggi polari estremi P F e P F', si guidano parallelamente ai medesimi le due tangenti a l e b l. Divise ambedue le tangenti in numero eguale di parti, numerati i punti di divisione in ordine inverso e congiunti i punti portanti lo stesso numero, l'inviluppo di tutte queste rette congiungenti risulta (per la nota proprietà) la parabola cercata.

Per la somiglianza dei due triangoli a C l e P Q F si ha

$$C\,l : F\,Q = a\,C : P\,Q$$

ed anche

$$C\,l : \frac{p\,l}{2} = \frac{1}{2}\,l : b$$

da cui

$$C\,I = \frac{p\,l^2}{4\,b}$$

e prendendo la base $b = 1$, nel qual caso le ordinate del poligono funicolare danno direttamente i momenti inflettenti, diventa

$$C\,I = \frac{p\,l^2}{4}$$

ossia un valore doppio di $_{mas}M = \frac{p\,l^2}{8}$ (vedi formula 54), cioè il vertice della parabola si trova a metà di C I.

48. Pesi concentrati e peso uniformemente distribuito. — Costruita la retta-poligono delle forze 0 5, Fig. 45, scelto il polo P, condotti i raggi polari P 0, P 1, P 2, P 3, P 4, P 5, e costruito il poligono funicolare 0 I II III IV V VI, si conduce la *linea di chiusa* a b del medesimo, e poi dal polo P la parallela P K alla linea di chiusa, la quale determina le reazioni degli appoggi. Da una parte e dall'altra del punto K, si porta sulla retta-poligono delle forze un segmento $K\,m = K\,m_1 = \frac{p\,l}{2}$, eguale cioè a metà del totale carico uniformemente distribuito, essendo p il carico unitario. Condotti i raggi polari P m e P m_1, e, per i punti estremi a, b della linea di chiusa, due parallele a I e b I ai medesimi raggi, queste rappresentano le tangenti alla parabola dei momenti inflettenti, la quale si costruisce nel noto modo e quindi il poligono di tensione diventa l'area b v a I II III IV V.

Volendo tenere la linea di chiusa orizzontale, dopo di avere formato il poligono delle forze, condotti i raggi polari, costruito il poligono funicolare 0 I II III IV V VI, Fig. 46, e condotta la linea di chiusa a b, si guida la a_1 b_1 orizzontalmente, e sopra la medesima si costruisce un secondo poligono funicolare O_1 I_1 II_1 III_1 IV_1 V_1 VI_1 in modo che le ordinate dei vertici di quest'ultimo, riferite alla a_1 b_1, sieno rispettivamente eguali a quelle del primo poligono riferite alla a b. Poi con una distanza polare $P\,K = P\,Q = b$ si forma un secondo poligono delle forze, portando $K\,m = K\,m_1 = {}^1/_2\,p\,l$, e condotti i raggi polari P m P m_1, si guidano parallelamente ai medesimi dai punti a_1 e b_1 le due rette

a, l e b, l che sono le tangenti della parabola, la quale si costruisce col solito processo.

Nei modi indicati ai §§ **46-47** si costruiscono le linee degli sforzi di taglio relativi ai soli carichi concentrati ed al solo peso uniformemente distribuito, e poi per ogni linea d'azione dei pesi sommando le parziali ordinate, si hanno le ordinate della linea spezzata a tratti inclinati, che rappresenta il modo di variazione dei totali sforzi di taglio; ciò che si è fatto nella **Fig. 45.**

2. Sforzi di taglio e momenti inflettenti prodotti da carichi mobili.

a) Processo analitico.

49. Carico unico concentrato. — Se il carico **P** giace a destra di una qualunque sezione **M** di ascissa x, **Fig. 47**, lo sforzo di taglio relativo è

$$T_x = A$$

e per la (47) $A = \frac{P(l-a)}{l}$ per cui, essendo $l - a = b$, risulta

$$T_x = P\,\frac{b}{l}$$

positivo e massimo quando sia massimo il valore di A, ossia di b, cioè quando il peso P giace sulla sezione considerata, e quindi

$$+ {}^{mas}T_x = P\,\frac{l-x}{l}$$

Il momento inflettente relativamente alla medesima sezione è

$$M_x = A\,x = P\,\frac{b}{l}\,x$$

cioè un valore sempre positivo e che diventa massimo per il massimo valore di A, ossia di b, quando cioè il peso P giace sulla sezione considerata e quindi

$${}^{mas}M_x = P\,\frac{(l-x)}{l}\,x$$

Se il carico giace a sinistra della sezione **M**, **Fig. 48**, allora è relativamente alla medesima

$$T_x = A - P = P\,\frac{b}{l} - P = P\left(\frac{b-l}{l}\right)$$

che, per essere $b < l$, è un valore negativo e tanto maggiore quanto più piccolo è b, cioè massimo quando il peso P si trova sulla sezione **M**, per cui

$$-\,{}_{mas}T_x = -P\,\frac{x}{l}$$

Il momento inflettente è

$$M_x = B\,(l-x)$$

ma per la (47) $B = P\,\frac{a}{l}$ quindi

$$M_x = P\,\frac{a\,(l-x)}{l}$$

cioè un valore sempre positivo e massimo per il massimo valore di B ossia di a, ossia quando il peso P agisce sulla sezione **M** e quindi

$${}_{mas}M_x = P\,\frac{(l-x)\,x}{l}$$

Si conclude adunque che *un carico concentrato produce uno sforzo di taglio positivo o negativo, allorchè esso si trova rispettivamente a destra od a sinistra della sezione considerata, il quale sforzo di taglio diventa massimo quando il peso si trova sulla sezione; e produce un momento inflettente positivo in qualsiasi posizione e per qualunque sezione, il quale momento diventa massimo quando il carico giace sulla sezione considerata.*

50. Sistema di molti carichi concentrati, (nel quale le reciproche distanze dei medesimi rimangono costanti).

α) **Sforzo di taglio.** — Considerata una qualunque sezione **M** di ascissa x, **Fig. 49**, si chiami ΣP_s la somma di tutti i carichi che stanno alla sinistra della medesima, e quindi lo sforzo di taglio T_x in questa sezione sarà

$$T_x = A - \Sigma P_s$$

dove il valore di A è dato dalla (47).

Per ogni nuova posizione che assume il sistema, rimanendo però costante ΣP_s, varia A e quindi varia anche T_x. Ricordando ora che quanto più un carico si avvicina ad un appoggio e tanto maggiore diventa la reazione del medesimo, più si sposterà il sistema verso sinistra, senza però che nessun carico sorpassi la estremità della trave o la sezione considerata, e più aumenterà il valore di A; per conseguenza se $A > \Sigma P_s$, cioè se T_x è positivo aumenterà anche lo sforzo di taglio nella sezione considerata. Se, continuando lo spostamento verso sinistra, uno dei carichi viene a sorpassare l'estremità della trave, allora diminuisce ΣP_s, mentre A aumenta sempre, e quindi T_x continuerà ad aumentare fintantochè uno dei carichi di destra viene a sorpassare la considerata sezione, nel qual caso ΣP_s cresce e quindi T_x diminuisce di valore. Lo stesso dicasi per uno spostamento dei carichi verso destra, essendo T_x negativo, ossia $A < \Sigma P_s$, cioè lo sforzo di taglio aumenterà in valore assoluto fintantochè uno dei carichi di sinistra venga a sorpassare la sezione considerata. Si può adunque stabilire che *lo sforzo di taglio in una sezione M qualunque diviene massimo quando un carico viene a passare sopra questa sezione.*

A seconda poi che sulla sezione si trovi l'uno o l'altro dei carichi del sistema, si avrà per il relativo sforzo di taglio un nuovo valor massimo. E poichè, per quanto si è stabilito al § 49 nel caso di un unico carico concentrato, lo sforzo di taglio è positivo o negativo secondo che questo carico si trova a destra od a sinistra della sezione considerata, nel caso in questione, T_x assumerà il suo massimo possibile valore positivo o negativo solo allora che l'intero sistema di carichi si trovi situato da una medesima parte della sezione, in modo che il primo dei carichi giaccia sulla sezione stessa, ed allorchè inoltre i carichi i più pesanti si trovino i più vicini a questa sezione.

Osservazione. — Se in capo al sistema si trovasse un carico poco considerevole, il valore di T_x potrebbe essere massimo allorchè sulla sezione considerata si trovasse invece il secondo carico del sistema.

Nell'ipotesi che il sistema di carichi si muova da destra verso sinistra, e quindi per valori positivi dello sforzo di taglio, il massimo valore positivo $+ mas T_x$ dello sforzo di taglio per una sezione

qualunque **M** è dato dalla posizione del sistema indicata nella **Fig. 50**, ed ha per valore

$$+ \, mas T_x = A \qquad (58)$$

Nell'ipotesi invece che il sistema di carichi si muova da sinistra verso destra, e quindi per valori negativi dello sforzo di taglio, il massimo valore negativo $- \, mas T_x$, per una sezione qualunque **M**, è dato dalla posizione del sistema indicata nella **Fig. 51** ed ha per valore

$$- \, mas T_x = A - \Sigma P_s$$

Fatto riflesso poi che due sezioni simmetriche della trave raggiunte dal primo carico del sistema, moventesi per l'una in un senso e per l'altra in senso contrario, hanno i relativi sforzi di taglio, abbenchè di segno opposto, eguali di valore, vedesi che basta determinare i soli valori positivi, giacchè i negativi sono ad essi simmetricamente eguali.

Ad ogni sezione corrisponde il relativo $+ \, mas T_x$; e per determinare quella sezione a cui corrisponde il più grande fra questi massimi sforzi di taglio positivi, il quale si indica con $+ \, mas T$, basta osservare, ricorrendo alla (58), che esso corrisponderà al massimo valore che può assumere A per le tante posizioni del sistema. Ora questo massimo valore di A ha luogo per quella posizione nella quale i carichi del sistema sono i più vicini possibile all'appoggio A, quando cioè il primo dei carichi giace sull'appoggio medesimo, (nella **Fig. 50** quando il carico P_1 cade in A) e quindi la sezione corrispondente è la pericolosa. E ricordando che per due sezioni simmetriche, ma cimentate dal sistema moventesi in sensi contrari, i relativi sforzi di taglio di segno opposto sono eguali fra loro, si ha

$$\pm \, mas T = \pm \, mas A$$

e quindi le sezioni sugli appoggi sono entrambe pericolose.

β) **Massimo momento inflettente.** — Al § **49** si è veduto che un unico carico produce in qualunque posizione un momento inflettente costantemente positivo per ogni sezione della trave e quindi per un numero maggiore di carichi i loro parziali mo-

menti, essendo tutti dello stesso segno, si sommano, per cui affinchè il momento inflettente per una qualsiasi sezione diventi massimo, è necessario che la trave sia sollecitata da carichi posti da ciascuna parte della considerata sezione e nel massimo numero possibile. E siccome un carico unico produce un momento tanto maggiore, quanto più esso si trova vicino alla sezione, evidentemente il momento inflettente diventerà massimo allorchè i più pesanti carichi si troveranno i più vicini possibile alla data sezione.

1. **Massimo momento inflettente rispetto ad una data sezione.** — La posizione più sfavorevole del sistema, rispetto ad una data sezione **M**, quella cioè che vi produce il massimo momento inflettente, si determina nel modo seguente: Si chiamino ΣP_s e ΣP_d le risultanti dei carichi giacenti rispettivamente a sinistra ed a destra della sezione, **Fig. 52**, a' ed a'' le distanze dei loro punti d'applicazione dall'appoggio A di sinistra; si ha

$$M_x = A\,x - \Sigma P_s\,(x - a')$$

e ricorrendo alla (47) si trova

$$A = \frac{\Sigma P_s\,(l - a') + \Sigma P_d\,(l - a'')}{l}$$

per cui

$$M_x = \frac{\Sigma P_s\,(l - x)\,a'}{l} + \frac{\Sigma P_d\,(l - a'')\,x}{l}$$

Si supponga ora che il sistema di carichi avanzi verso destra di una quantità δ, senza che nessun carico venga a sorpassare la sezione e senza che alcun nuovo carico venga ad agire sulla trave, nè che alcuno si allontani dalla medesima. Sia M'_x il momento inflettente dopo l'avvenuto spostamento, sarà

$$M'_x = \Sigma P_s \frac{(l - x)\,(a' + \delta)}{l} + \Sigma P_d \frac{(l - a'' - \delta)\,x}{l}$$

e sottraendo da quest'ultima equazione la precedente, si ottiene

$$M'_x - M_x = \left\{ \Sigma P_s\,(l - x) - \Sigma P_d\,x \right\} \frac{\delta}{l} \qquad (59)$$

la quale, supponendo $M'_x > M_x$, rappresenta l'aumento del momento inflettente per uno spostamento del sistema verso destra.

Che se fosse $M'_x < M_x$ (considerando M'_x come il momento inflettente relativo alla primitiva posizione del sistema ed M_x quello relativo ad uno spostamento dello stesso verso sinistra della medesima quantità δ) la (59) coi segni invertiti (ciò che per altro non ne altera il valore assoluto) rappresenterebbe lo aumento del momento inflettente per uno spostamento verso sinistra.

Ora è evidente che, in una qualunque sezione, si avrà il massimo momento inflettente per quella tale posizione del sistema, rispetto alla quale non può avvenire accrescimento nel momento inflettente per verun spostamento del sistema medesimo, la quale condizione è algebricamente soddisfatta eguagliando a zero la (59) da cui risulta

$$\Sigma P_s (l - x) = \Sigma P_d x \qquad \text{ossia} \qquad \frac{\Sigma P_s}{x} = \frac{\Sigma P_s}{l - x} \qquad (60)$$

e siccome le quantità $\frac{\Sigma P_s}{x}$ e $\frac{\Sigma P_d}{l - x}$ rappresentano i carichi ragguagliati all'unità corrente per ciascuna parte della trave, così risulta che *il massimo valore del momento inflettente, per una data sezione, ha luogo quando i carichi ragguagliati all' unità di lunghezza da ciascuna parte della trave sono eguali fra di loro.*

Per trovare quindi il massimo momento inflettente $_{mas}M_x$ per una qualunque sezione, si disporrà prima di tutto il sistema per modo che un carico giaccia sulla medesima. E siccome dallo esame della (59) si scorge che diventa $M'_x > M_x$ per $\Sigma P_s (l - x) > \Sigma P_d x$, ossia per $\frac{\Sigma P_s}{x} > \frac{\Sigma P_d}{l - x}$ e viceversa diventa $M'_x < M_x$ allorchè $\Sigma P_s (l - x) < \Sigma P_d x$, od anche $\frac{\Sigma P_s}{x} < \frac{\Sigma P_d}{l - x}$, si può stabilire che *per ottenere il massimo momento inflettente in una determinata sezione, bisogna spostare il sistema verso destra o verso sinistra, secondochè il carico ragguagliato all'unità di lunghezza sia maggiore sulla parte di trave che sta a sinistra od a destra della sezione considerata;* e ciò fintantochè sia soddisfatta il più prossimamente possibile la condizione data dalla (60).

Se, per ottenere il massimo valore di M_x, si deve spostare il

sistema verso destra, e se, per questo cangiamento di posizione, un nuovo carico entra nella trave (a sinistra), oppure uno ne sorte (a destra), senza che nessuno dei carichi sorpassi la sezione considerata, risulta necessariamente $\frac{\Sigma P_s}{x} > \frac{\Sigma P_d}{l-x}$, per cui bisogna continuare nello spostamento del sistema finchè cessi la disuguaglianza precedente. La regola data, adunque, è esatta anche allora che lo spostamento del sistema conduce un nuovo carico sulla trave o ne fa sortire uno dalla stessa.

Chiamando ΣP la risultante di tutti i carichi sollecitanti è $\Sigma P = \Sigma P_s + \Sigma P_d$ e quindi ricorrendo alla (60) risulta

$$\Sigma P_s = \frac{(\Sigma P - \Sigma P_s)\, x}{l-x} = \Sigma P \frac{x}{l}$$

$$\Sigma P_d = \frac{(\Sigma P - \Sigma P_d)\,(l-x)}{x} = \Sigma P \frac{l-x}{l}$$

Si può dunque stabilire anche la seguente regola: *Si continua a spostare il sistema di carichi a sinistra od a destra della sezione considerata fintantochè risulti rispettivamente*

$$\Sigma P_s < \Sigma P \frac{x}{l} \quad , \quad \Sigma P_d < \Sigma P \frac{l-x}{l} \qquad (60a)$$

ed il carico che rende rispettivamente insoddisfatte queste condizioni nel passare a sinistra od a destra della sezione considerata, è quello che deve insistere sulla stessa, onde l'intero sistema produca ivi il massimo momento inflettente.

2. **Massimo momento inflettente rispetto ad un dato peso.** — Per determinare il massimo valore possibile del momento inflettente rispetto ad un determinato peso del sistema, nella sezione su cui esso insiste, si chiamino d_r, d_{rr} le distanze delle risultanti ΣP_s e ΣP_d da una qualunque sezione di ascissa x, **Fig. 53**, alla quale sia applicato il carico P. Il momento inflettente relativo alla considerata sezione sarà

$$M_x = A\,x - \Sigma P_s\, d_r$$

e per essere

$$A = \Sigma P_s \frac{(l-x+d_r)}{l} + \Sigma P_d \frac{(l-x-d_{rr})}{l} + \frac{P(l-x)}{l}$$

risulta

$$M_x = -\Sigma P_s \frac{(l-x)(x-d_r)}{l} - \Sigma P_d \frac{(l-d_{rr}-x)x}{l} - P\frac{(l-x)x}{l} \qquad (61)$$

la quale espressione diventa massima per il seguente particolare valore di x

$$x = \frac{l}{2} + \frac{\Sigma P_s d_r - \Sigma P_d d_{rr}}{2(P+\Sigma P_s+\Sigma P_d)} \qquad (62)$$

mediante il quale si determina la sezione pericolosa, rispetto ad un determinato peso del sistema, e dove $(P+\Sigma P_s+\Sigma P_d)$ rappresenta la somma di tutti i carichi insistenti sulla trave, $\Sigma P_s d_r$ e $\Sigma P_d d_{rr}$ la somma dei momenti di tutti i carichi giacenti rispettivamente a sinistra ed a destra della sezione considerata, riferiti questi momenti alla medesima sezione. Accontentandosi di un valore di approssimazione si può prendere $x = {}^1/_2\, l$. Sostituendo nella (61) il valore di x dato dalla (62) si ottiene

$$_{mas}M = \frac{1}{2}(\Sigma P_s d_r + \Sigma P_d d_{rr}) - \frac{(\Sigma P_s d_r - \Sigma P_d d_{rr})^2}{4(P+\Sigma P_s+\Sigma P_d)l} - \frac{1}{4}(P+\Sigma P_s+\Sigma P_d)l$$

Essendo il 2° termine piccolissimo si può prendere con molta approssimazione

$$_{mas}M = \frac{1}{2}(\Sigma P_s d_r + \Sigma P_d d_{rr}) - \frac{1}{4}(P+\Sigma P_s+\Sigma P_d)l$$

Chiamando ΣP la risultante di tutti i carichi sollecitanti, e δ la sua distanza dalla sezione di ascissa x su cui insiste il carico P, si ha

$$\Sigma P = P+\Sigma P_s+\Sigma P_d \quad ; \quad \pm\Sigma P\delta = \Sigma P_s d_r - \Sigma P_d d_{rr}$$

ricordando che il momento del peso P è nullo per la sezione su cui insiste. Sostituendo questi valori nella (62) si ha

$$x = \frac{l}{2} + \frac{\pm\Sigma P\delta}{2\Sigma P} \quad ; \quad x = \frac{l}{2} \pm \frac{\delta}{2} \qquad (62a)$$

cioè *quando la mezzaria della trave cade a metà della distanza* δ, *fra la linea d'azione della risultante* ΣP *di tutti i carichi e*

quella del peso P *considerato, si ha il massimo momento per la sezione su cui questo peso* P *insiste.*

51. Carico uniformemente distribuito. — Sia k il carico uniformemente distribuito per unità di lunghezza. Si consideri una sezione qualunque **M** di ascissa x, **Fig. 54**, ed un tratto di trave alla destra della medesima, di lunghezza λ, sopraccaricato. Lo *sforzo di taglio* nella sezione **M** è

$$T_x = A = \frac{k\lambda^2}{2l}$$

positivo e massimo per il massimo valore di A, ossia di λ, quando cioè il carico si estende dall'appoggio di destra **B** fino alla sezione considerata, ed allora è $\lambda = l - x$ e quindi

$$+ {}_{mas}T_x = \frac{k(l-x)^2}{2l} \qquad (63)$$

Se il tratto di trave caricato, di lunghezza qualunque λ, si trova invece alla sinistra della considerata sezione, è

$$T_x = A - k\lambda$$

ed essendo $A = k\lambda\left(\frac{2l-\lambda}{2l}\right)$ diventa

$$T_x = -\frac{k\lambda^2}{2l}$$

cioè negativo, e massimo quando è massimo λ, il che avviene quando il carico si estende dall'appoggio di sinistra **A** fino alla sezione considerata, quando cioè $\lambda = x$, e quindi

$$- {}_{mas}T_x = -\frac{kx^2}{2l} \qquad (64)$$

Si conchiude adunque che *il carico che sta alla destra della sezione considerata produce uno sforzo di taglio positivo, quello che si trova alla sinistra produce uno sforzo di taglio negativo, e questi sforzi sono massimi quando il carico si estende dal rispettivo appoggio di destra o sinistra fino alla sezione considerata.*

Nelle singole sezioni, il relativo valore massimo dello sforzo di taglio, tanto positivo che negativo, va variando, ed esso ac-

quista il più grande valore possibile quando nella (63) diventi $x = 0$, e quando nella (64) sia $x = l$, cioè per le sezioni sugli appoggi quando il carico occupa tutta la trave, e chiamando $_{mas}T$ questo massimo valore è

$$\pm {}_{mas}T = \pm \frac{k\,l}{2}$$

Per un tratto di trave sopraccaricato di lunghezza λ, posto alla destra della sezione **M**, il *momento inflettente* relativo alla stessa sezione è

$$M_x = A\,x = \frac{k\,\lambda^2}{2\,l}\,x$$

e se il tratto di trave sopraccaricato giace alla sinistra basta porre $l - x$ in luogo di x nella precedente, e si ottiene

$$M_x = \frac{k\,\lambda^2}{2\,l}(l - x)$$

Al § **49** si è veduto che qualsivoglia carico applicato ad un punto qualunque della trave, produce un momento inflettente positivo in ciascuna sezione. Ne consegue perciò che il massimo valore del momento inflettente, per ogni sezione, avrà luogo allorchè da ciascuna parte della sezione che si considera vi sarà il maggior carico possibile, quando cioè il carico si estenderà su tutta la lunghezza della trave. Il valore del momento inflettente massimo $_{mas}M_x$, per una qualunque sezione, è allora determinato dalla (53); ed il massimo possibile $_{mas}M$, dalla (54).

52. Azione simultanea di un sistema di carichi concentrati e di un peso uniformemente distribuito. — In questo caso si fa la ricerca, tanto degli sforzi di taglio che dei momenti inflettenti, partitamente per il sistema di carichi e per il peso uniformemente distribuito, e, facendo la somma algebrica dei valori parziali per ogni sezione, se ne deduce il valore complessivo.

53. Azione simultanea di un peso permanente e di un carico mobile, entrambi uniformemente distribuiti. — Si chiami p il peso permanente e k il carico mobile, uniformemente distribuiti sull'unità di lunghezza. In una data sezione **M**

di ascissa x, e per un tratto di trave sopraccaricato di lunghezza $l - x$, posto alla destra della sezione considerata, Fig. 55, si ha lo sforzo di taglio dalla somma delle (51) e (63), cioè *per il carico che si muove da destra verso sinistra*, è

$$_{mas}T_x = p\left(\frac{l}{2} - x\right) + \frac{k\,(l-x)^2}{2\,l} \qquad (65)$$

che può essere positivo e negativo a seconda del valore che assume x; mentre per un tratto di trave sopraccaricato, lungo x e posto alla sinistra della sezione, Fig. 56, cioè *quando il carico si muove da sinistra a destra*, si ha dalla somma delle (51) e (64)

$$_{mas}T_x = p\left(\frac{l}{2} - x\right) - \frac{k\,x^2}{2\,l} \qquad (65a)$$

da cui pure si hanno valori positivi e negativi.

Se si vuole determinare la sezione nella quale lo sforzo di taglio è zero, chiamando a il particolare valore di x che rende $_{mas}T_x = 0$ nella (65a), si ha

$$0 = p\,l\,(l - 2\,a) - k\,a$$

che risolta dà

$$a = \left\{-\frac{p}{k} + \sqrt{\left(\frac{p}{k}\right)^2 + \frac{p}{k}}\right\} l \qquad (66)$$

il quale valore di a manda a zero anche $_{mas}T_x$ nella (65) quando si ponga nella medesima $l - a$ in luogo di x.

Lo sforzo di taglio è positivo per i valori di x compresi fra 0 ed a, negativo per valori compresi fra $(l - a)$ ed l, e tanto positivo che negativo per valori compresi fra a ed $(l - a)$.

Nel mezzo poi della trave, posto $x = \frac{l}{2}$ tanto nella (65) che nella (65a), e chiamando $_{mas}T_o$ questo particolar valore dello sforzo di taglio, diventa

$$_{mas}T_o = \pm\frac{k\,l}{8}$$

Il massimo valore del momento inflettente per una qualunque sezione della trave di ascissa x, viene dato dalla (53) quando in

essa si ponga $p + k$ in luogo di p, cioè

$$_{mas}M_x = \frac{1}{2}(p+k)(l-x)x$$

ed il massimo possibile quando si faccia la medesima sostituzione nella (54), cioè

$$_{mas}M = \frac{1}{8}(p+k)l^2$$

b) **Processo grafico.**

54. Sistema di carichi concentrati.

α) Sforzo di taglio. — Dato il sistema di carichi $P_1, P_2, P_3 \ldots$, Fig. 58, se, per una sezione qualunque della trave, distante x dall'appoggio di sinistra, si vuole determinare lo *sforzo di taglio* $_{mas}T_x$, nell'ipotesi che il sistema si muova da destra verso sinistra, allora il primo carico P_1 del sistema deve trovarsi sulla sezione considerata. Si costruisce allora la retta poligono delle forze 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, e, scelto un polo P, condotti i raggi polari, si costruisce il poligono funicolare corrispondente, indi si determina sul lato estremo m x del poligono funicolare, adiacente al primo carico P_1, un punto a per modo che la sua distanza orizzontale dal punto m sia eguale all'ascissa x, e poi si determina sul poligono funicolare un altro punto b la cui distanza orizzontale dal punto a sia eguale alla lunghezza l della trave. Guidata la retta a b e la P K ad essa parallela si ha, per quanto si è veduto al § 46,

$$_{mas}T_x = \overline{0\,K}$$

Condotta la verticale b c fino ad incontrare il prolungamento del lato estremo m x del poligono funicolare, i triangoli P 0 K ed a c b sono simili perchè hanno i lati paralleli e quindi

$$\overline{0\,K} : \overline{b\,c} = b : l$$

$$\overline{b\,c} = \overline{0\,K}\,\frac{l}{b} = {}_{mas}T_x\,\frac{l}{b}$$

essendo b la distanza polare.

Se si fa $b = l$ risulta

$$\overline{b\,c} = {}_{mas}T_x$$

Se si considera un'altra sezione di ascissa x_1, determinati i punti a_1 e b_1 nel modo antecedentemente accennato, condotta la $a_1 b_1$ e la P K, ad essa parallela, la retta 0 K, rappresenta lo sforzo di taglio $_{mas}T_{x_1}$, e vedesi che la verticale $b_1 c_1$, per quanto si è detto sopra, è proporzionale a questo sforzo di taglio ed è ad esso eguale qualora si prenda la distanza polare $b = l$.

Lo stesso si ripete per qualunque altra sezione, cioè *i massimi sforzi di taglio per le varie sezioni della trave sono proporzionali alle verticali condotte dai punti simili a* b, *del poligono funicolare, fino al prolungamento del lato di quest'ultimo, adiacente al primo carico; ed essi sono eguali a queste verticali, se la distanza polare si fa eguale alla lunghezza della trave* (*ammesso sempre che il primo carico si trovi sulla sezione considerata*).

Quanto più piccolo diventa x, Fig. 58, e tanto più il punto a si avvicina ad m, mentre il punto b se ne allontana, cioè la verticale b c, ossia lo sforzo di taglio, diventa sempre più grande. Il più grande valore che possa assumere $_{mas}T_x$ si verifica adunque per il minimo valore di x, cioè per $x = 0$, ossia quando il punto a coincide col punto m, il che avviene allorquando il primo carico ha raggiunto l'appoggio di sinistra. La verticale $b_0 c_0$ rappresenta adunque il $_{mas}T$, che si verifica per la sezione giacente sull'appoggio di sinistra. Un identico risultato si avrebbe per l'appoggio di destra, supponendo che il sistema si muovesse da sinistra verso destra. Eseguendo la costruzione come nella Fig. 58, si ha l'inconveniente che, a mano a mano che il primo carico del sistema va raggiungendo le successive sezioni della trave, le verticali simili a b c, rappresentanti gli sforzi di taglio, non coincidono colle corrispondenti sezioni.

Si può ottenere questa coincidenza nel modo indicato dalla Fig. 59, nella quale si è presa la distanza polare eguale alla lunghezza A B della trave, acciò gli sforzi di taglio risultino eguali alle verticali sopraccennate, mentre il polo, come si vede, è collocato in B. — Si ha cioè invertito l'ordine del sistema di carichi, facendo coincidere il primo carico coll'appoggio di destra, nonchè l'ordine del poligono delle forze, avendo portato successivamente i pesi dal basso all'alto.

La parte superiore della figura dà, nelle ordinate del poligono funicolare, gli sforzi di taglio massimi delle corrispondenti sezioni, nel caso che il sistema si muova da destra verso sinistra,

e quindi valori positivi; per avere i valori negativi, nel caso cioè che il sistema si muova da sinistra verso destra, siccome essi sono simmetricamente eguali ai positivi, come si è veduto al § 50, basta costruire inferiormente un poligono eguale e disposto in senso contrario al superiore.

β) **Massimo momento inflettente rispetto ad una data sezione.** — Per trovare il *momento inflettente* che ha luogo in una data sezione **M** di ascissa x, **Fig. 60**, sulla quale insiste un peso qualunque del sistema di carichi, si costruisce la retta-poligono delle forze per il sistema di carichi che si considera, nonchè il corrispondente poligono funicolare nella nota maniera e si determinano sul poligono medesimo due punti **a** e **b** per modo, che le loro distanze orizzontali dal peso insistente sulla sezione considerata (per esempio il V) sieno rispettivamente x ed $l - x$. Condotta la linea di chiusa **a b** e la verticale **m c**, questa rappresenta il momento inflettente cercato, ed è eguale allo stesso, qualora si prenda la distanza polare $b = 1$.

Nell'identico modo si procede per determinare il momento corrispondente alle posizioni successive di tutti i vari carichi sopra la sezione considerata (ciò che si è ripetuto per il III), e così si ha il mezzo di precisare la *posizione più sfavorevole del sistema rispetto alla sezione medesima*, che si verificherà per la più grande ordinata (simile ad **m c**) compresa fra un vertice del poligono e la corrispondente linea di chiusa.

γ) **Massimo momento inflettente rispetto ad un dato peso.** — Per trovare, rispetto ad un peso qualunque P del sistema, qual è la posizione del sistema stesso, per la quale si ottiene il massimo momento inflettente fra quelli che si verificano nelle tante sezioni ove il considerato peso può insistere, si fanno scorrere lungo due lati del poligono funicolare le estremità di una retta **a b**, **Fig. 61**, di cui la proiezione orizzontale sia costantemente eguale alla portata della trave. Continuando lo spostamento lungo gli altri lati del poligono, la retta inviluppa nelle sue diverse posizioni una linea spezzata formata da archi di parabola.

Se dal vertice **m** del poligono funicolare, corrispondente al peso considerato P, si conducono delle verticali **m c**, **m c$_1$**, **m c$_{11}$**... fino ad incontrare le tante linee di chiusa, rappresentanti le successive posizioni del sistema, queste verticali sono proporzionali ai

momenti inflettenti che si verificano in quelle sezioni nelle quali successivamente viene a trovarsi il peso P. Vedesi facilmente che la più grande di queste verticali, cioè **m c**, corrisponde a quella tal linea di chiusa **a b** che riesce tangente alla inviluppata suddetta nel punto **c**, e quindi questa particolare posizione della linea di chiusa rispetto al poligono funicolare, determina la ricercata posizione più sfavorevole del sistema relativamente al peso P,, ossia determina la sezione pericolosa fra quelle sulle quali può trovarsi il peso medesimo.

Non occorre poi descrivere il ramo di parabola che viene incontrato dalla verticale **m c** innalzantesi dal vertice **m**, relativo al peso P che si considera, ma basta condurre la tangente **a b** al punto **c** di incontro colla parabola, la quale tangente si può facilmente costruire dietro le seguenti considerazioni. Sia **I** l'intersezione dei lati del poligono funicolare lungo i quali scorrendo la retta **a b** essa inviluppperebbe l'indicato ramo di parabola, e sia $a_0 b_0$ la tangente alla parabola medesima in un punto c_0 che si trova sulla verticale passante per **I**. La tangente $a_0 b_0$, come è noto, gode la proprietà di essere divisa dal punto c_0 per metà, ed inoltre tutte le altre tangenti alla parabola, prolungate fino ai lati **a I** e **b I** del poligono, restano divise da essa pure per metà, per cui chiamando **T** il punto di intersezione delle due tangenti **a b** ed $a_0 b_0$, sarà $a_0 c_0 = c_0 b_0$ ed **a T** = **T b**. Ma in una parabola il punto di intersezione delle due tangenti si trova ad eguale distanza dai due diametri condotti per i punti di tangenza, quindi il punto di mezzo **T** della tangente **a b** si trova ad eguale distanza dalle verticali condotte per il vertice **m** del poligono funicolare relativo al peso P, e per il punto di intersezione **I** del prolungamento dei lati del poligono funicolare sui quali si fa scorrere la retta **a b**.

Si può dunque conchiudere che *in una trave liberamente appoggiata agli estremi lungo la quale si muove un sistema di carichi, fra le infinite sezioni per cui può passare uno qualunque dei pesi del sistema, quella alla quale corrisponde il momento inflettente massimo, coincide con quella tal posizione di questo peso che fa cadere il mezzo della trave ad eguale distanza fra la risultante dell'intero sistema ed il peso medesimo.*

Bisogna poi necessariamente effettuare questa costruzione per

tutti quei vertici del poligono funicolare a cui corrispondono i più grandi carichi e che si trovano nel centro del sistema, affine di trovare il più grande valore assoluto $_{mas}T$ del momento inflettente.

55. Carico uniformemente distribuito. — Supponendo questo carico come il complesso di una serie continua di carichi infinitamente piccoli ed operanti a distanze infinitesime l'uno dall'altro, scorgesi che per determinare gli sforzi di taglio, tanto positivi che negativi, si può usare la costruzione indicata al § **54** per una serie di carichi concentrati. I poligoni funicolari risultano due parabole di cui i vertici si trovavo alle estremità della trave, e le relative ordinate danno il valore di $+ {}_{mas}T_x$ e $- {}_{mas}T_x$, per ciascuna sezione.

Per costruire la parabola degli sforzi di taglio positivi, relativi cioè ad un carico che si muove da destra verso sinistra, sopra la verticale innalzata sull'estremo **A** di sinistra, Fig. 62, si porta una lunghezza $AC = {}^1/_2\, k\, l$ (essendo k il carico unitario, ed l la lunghezza della trave) e si divide la **AC** e la **AB** in uno stesso numero di parti eguali. Prendendo **B** come polo, si conducono i raggi polari **B1**, **B2**, **B3**, **B4**... ai punti di divisione della **AC** e poi si guidano delle verticali dai punti di divisione della **AB**. I punti di intersezione dei raggi colle corrispondenti verticali determinano altrettanti punti della parabola, i quali servono a descriverla. Portando le ordinate di questa parabola in ordine inverso al di sotto, si ottengono i punti che servono a descrivere la parabola degli sforzi di taglio negativi.

Riguardo al momento inflettente, siccome si è veduto che la posizione più sfavorevole per ogni sezione si verifica quando il carico si estende su tutta la trave così per avere $_{mas}M_x$ serve la stessa costruzione indicata al § **47**.

56. Azione simultanea di due pesi uniformemente distribuiti, uno permanente, l'altro mobile. — Lo sforzo di taglio $_{mas}T_x$ per ciascuna sezione si ottiene nella somma algebrica dei due sforzi di taglio prodotti parzialmente dai due carichi. Riguardo al carico permanente p, lo sforzo di taglio è dato dalle ordinate di una *retta* che passa per il punto di mezzo della trave,

Fig. 63, e la quale ha per ordinate estreme $A\,C = B\,D = {}^1/_2\,p\,l$. Rispetto al carico mobile k, gli sforzi di taglio sono dati, per un carico che si muove da destra verso sinistra, dalle ordinate di una parabola che ha il vertice nell'estremo di destra B, e che all'estremo di sinistra A ha per ordinata $A\,C_1 = +\,{}^1/_2\,k\,l$; e per un carico che si muove da sinistra verso destra dalle ordinate di una parabola che ha il vertice nell'estremo A di sinistra, e che all'estremo B di destra ha per ordinata $B\,D_1 = -\,{}^1/_2\,k\,l$. Eseguendo la somma algebrica delle ordinate parziali per ciascuna sezione, tanto sopra che sotto l'asse, si ottengono delle altre ordinate, mediante le quali si individuano due parabole le cui equazioni sono date dalle (65) e (65*a*). Queste parabole tagliano l'asse in un punto dato di posizione dalla (66), hanno il vertice in corrispondenza ad un estremo della trave, ove l'ordinata è ${}^1/_2\,p\,l$, mentre nel mezzo la loro ordinata è ${}^1/_8\,k\,l$, ed all'altro estremo della trave è ${}^1/_2\,(p+k)\,l$, i quali valori si deducono dalle equazioni accennate, ponendo rispettivamente $x = 0$, $x = \frac{l}{2}$, $x = l$ (tenendo conto del valore assoluto di queste ordinate senza considerare i segni).

Siccome poi i due rami $E\,C_{11}$ ed $F\,D_{11}$ hanno pochissima curvatura, si può loro sostituire la rispettiva corda, con errore trascurabile in pratica e perciò, tenendo conto soltanto del valore assoluto degli sforzi e non del loro segno, il ${}^{mas}T_x$ per una sezione qualunque della trave si può rappresentare colle ordinate di una spezzata C F D, Fig. 64, che si costruisce speditamente portando agli estremi due ordinate $A\,F = B\,D = {}^1/_2\,(p+k)\,l$ e nel mezzo una ordinata $E\,F = {}^1/_8\,k\,l$.

57. Relazione fra il momento inflettente e lo sforzo di taglio. — Si dimostrerà ora una relazione importante fra il momento inflettente e lo sforzo di taglio relativi ad una data sezione di un solido. Si consideri il solido A B, Fig. 65, ed una sezione M di ascissa x; e sia P una qualunque delle forze finite (*carichi concentrati*) od infinitamente piccole (*carichi uniformemente distribuiti*) che agiscono alla destra della sezione considerata. Il momento di questa forza rispetto all'asse neutro della sezione M è

$$P\,(d - x) = P\,d - P\,x$$

e quindi la somma algebrica dei momenti di tutte le forze analoghe a P, cioè il momento inflettente M_x relativo alla considerata sezione, sarà

$$M_x = \Sigma P\, d - x \Sigma P$$

la quale differenziata da

$$d M_x = - \Sigma P\, dx$$

e siccome $\Sigma P = T_x$, cioè la somma algebrica di tutte le forze giacenti alla destra della sezione considerata è eguale al relativo sforzo di taglio, così si ha

$$d M_x = - T_x\, dx$$

da cui

$$T_x = - \frac{d M_x}{dx} \qquad (67)$$

cioè *lo sforzo di taglio in una sezione di ascissa* x, *eguaglia la derivata del rispettivo momento inflettente, presa rapporto all'ascissa, e cangiata di segno.*

58. Freccia dipendente dalla flessione. — Interessa di conoscere la natura della curva secondo la quale si dispone l'asse del solido sotto l'azione delle forze esterne, la natura cioè della *curva elastica*, allo scopo di determinare la *massima freccia* dovuta all'incurvamento. A tale oggetto bisogna considerare le condizioni dell'equilibrio elastico del solido, deve cioè essere, per una qualunque sezione del solido di ascissa x, il *momento delle forze esterne* eguale al *momento delle reazioni molecolari* nei limiti di elasticità, dato dalla (28), ossia il momento inflettente eguale al momento resistente

$$M_x = \frac{E I}{\rho} \qquad (68)$$

Dalla geometria analitica si sa, che esprimendo il raggio di curvatura in funzione delle coordinate della curva, esso è dato da

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}$$

per cui quest'ultima espressione fornisce il valore di ρ, contenuto nella (68), purchè si riferisca la linea elastica ad un sistema di assi ortogonali, di cui si assume come asse delle x, l'asse rettilineo orizzontale del solido, e quindi risulta verticale quello delle y, mentre l'origine del sistema si pone nell'estremo di sinistra dell'elastica.

Rimarcando che in pratica i solidi sono così poco cimentati, che il loro incurvamento riesce piccolissimo ed appena sensibile, vedesi che l'angolo formato dalla tangente alla curva elastica coll'asse delle x è tanto piccolo, che il valore della sua tangente trigonometrica, cioè il $\frac{d\,y}{d\,x}$, si può trascurare, e quindi tanto più il $\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2$, per cui il valore di ρ si semplifica e diventa

$$\rho = \frac{1}{\frac{d^2\,y}{d\,x^2}}$$

il quale sostituito nella (68) la cambia nell'altra

$$M_x = E\,I\,\frac{d^2\,y}{d\,x^2} \qquad (69)$$

che è l'*equazione fondamentale della curva elastica.*

Ogni qual volta si potrà integrare ripetutamente la quantità $\frac{M_x}{E\,I}$, si otterrà la forma della linea elastica medesima.

Il calcolo riesce semplice allorchè il momento di inerzia I è costante per tutta la lunghezza del solido, ciò che avviene nei solidi prismatici.

Determinata l'equazione finita dell'elastica, essa serve a determinare la posizione ed il valore della massima inflessione, ossia della massima freccia (ordinata) della curva stessa.

Nel caso di travi incastrate servono gli stessi procedimenti che si usano per le travi liberamente appoggiate, soltanto si deve porre la condizione che la tangente trigonometrica dell'angolo che forma la tangente all'elastica coll'asse delle x, cioè $\frac{d\,y}{d\,x}$, è eguale a zero nella sezione di incastro.

Si mostrerà per un caso particolare semplicissimo come si procede nelle ricerche suddette.

Si consideri una trave incastrata orizzontalmente agli estremi, di lunghezza l, Fig. 66, caricata di un peso P nel suo punto di mezzo, e di un carico p uniformemente distribuito per ogni unità della sua lunghezza. Intanto ai due punti di incastro **A** e **B**, in causa della pressione prodotta dalla trave caricata, si avranno due reazioni verticali, dirette dal basso all'alto, di valore $\frac{P + p\,l}{2}$.

In seguito poi all'incastramento degli estremi della trave, la tangente alla curva elastica nei punti **A** e **B** deve essere orizzontale. Si può immaginare di ottenere tale effetto supponendo la trave libera e considerando, oltrechè le reazioni in **A** e **B**, due forze agenti dall'alto verso il basso (nella stessa direzione dei pesi) applicate ad una certa distanza dai punti di incastro, le quali obbligando l'asse della trave a rimaner orizzontale nella sezione d'incastro, produrranno un momento che si denota con M_0. Considerato un punto qualunque della curva elastica, nella metà di sinistra, di ascissa x, Fig. 66, si ha il momento inflettente relativamente allo stesso espresso da

$$M_x = \frac{1}{2}(P + p\,l)\,x - M_0 - \frac{p\,x^2}{2} \qquad (I)$$

e quindi per la (69) si ha

$$E\,I\,\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = \frac{1}{2}(P + p\,l)\,x - M_0 - \frac{p\,x^2}{2} \qquad (II)$$

Per ottenere il valore di M_0, basta integrare l'equazione (II), e risulta

$$E\,I\,\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{4}(P + p\,l)\,x^2 - M_0\,x - \frac{1}{6}\,p\,x^3 \qquad (III)$$

dove la costante è nulla giacchè, in seguito all'ipotesi fatta, per $x = 0$ anche $\frac{d\,y}{d\,x} = 0$.

Ed essendo i pesi disposti simmetricamente rispetto al punto mediano della trave, l'elastica è pure simmetrica rispetto al punto medesimo, e quindi anche in questo punto la tangente all'elastica deve essere orizzontale, ossia nella (III) per $x = \frac{l}{2}$, deve essere $\frac{d\,y}{d\,x} = 0$, per cui si ottiene

$$0 = \frac{1}{4}(P + p\,l)\,\frac{l^2}{4} - M_o\,\frac{l}{2} - \frac{1}{48}\,p\,l^3$$

dalla quale si ricava il valore di M_o, cioè

$$M_o = \frac{1}{8}P\,l + \frac{1}{12}\,p\,l^2 \qquad (IV)$$

sostituito questo valore nella (III) diventa

$$E\,I\frac{d\,y}{d\,x} = (P + p\,l)\,x^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{P}{2} + \frac{p\,l}{3}\right) l\,x - \frac{1}{6}\,p\,x^3$$

la quale integrata colla condizione che per $x = 0$ sia $y = 0$, somministra l'equazione finita dell'elastica, ossia

$$E\,I\,y = \frac{1}{12}(P + p\,l)\,x^3 - \frac{1}{8}\left(\frac{P}{2} + \frac{p\,l}{3}\right) l\,x^2 - \frac{1}{24}\,p\,x^4 \qquad (V)$$

L'abbassamento al punto mediano della trave, dove la flessione è massima, ossia la freccia f, è somministrata dal particolare valore che assume y, allorchè nella (V) si pone $x = \frac{l}{2}$, e risulta

$$f = -\frac{l^3}{192\,E\,I}\left(P + \frac{p\,l}{2}\right) \qquad (VI)$$

Se sulla trave non vi fosse il carico uniformemente distribuito, allora $p = 0$, e la (VI) diventa

$$f = -\frac{P\,l^3}{192\,E\,I} \qquad (VI\,a)$$

Se invece non vi fosse il peso P applicato nel punto di mezzo, allora $P = 0$, e la (VI) si cangia nell'altra

$$f = -\frac{p\,l^4}{384\,E\,I} \qquad (VI\,b)$$

Se fosse $P = p\,l$, fatta questa sostituzione nella (VI*b*) e confrontata colla (VI*a*), risulterebbe il loro rapporto eguale a 2, ciò

che vuol dire che la massima freccia dell'elastica, nel caso di un peso concentrato nel mezzo della trave, è doppia di quella che si verifica allorquando questo peso è uniformemente distribuito.

59. Ricerca del momento inflettente e dello sforzo di taglio per travi incastrate. — Per vedere come si proceda (in un caso particolare) alla ricerca del *momento inflettente* per qualsiasi sezione, allorchè si tratta di travi incastrate, si prende in esame il caso considerato precedentemente. Sostituendo nella (I) per M_0 il valore dato dalla (IV), si ottiene l'epressione del momento inflettente per un punto qualunque della trave, cioè

$$M_x = \frac{1}{2}(P + p\,l)\,x - \frac{1}{4}\left(\frac{P}{2} + \frac{p\,l}{3}\right)l - \frac{p\,x^2}{2} \quad \text{(VII)}$$

Esaminando la (VII) vedesi che M_x diventa negativo per $x = 0$, e positivo per $x = \frac{l}{2}$, quindi esso diventerà nullo per un particolare valore di x, compreso fra 0 ed $\frac{l}{2}$, che chiamasi x_0, e che si determina coll'equazione

$$0 = \frac{1}{2}(P - p\,l)\,x_0 - \frac{1}{4}\left(\frac{P}{2} + \frac{p\,l}{3}\right)l - \frac{p\,x_0^2}{2} \quad \text{(VIII)}$$

e per la nota relazione $EI\frac{d^2y}{dx^2} = M_x$, il valore di x_0 che rende nullo M_x, manda a zero anche $\frac{d^2y}{dx^2}$, giacchè EI non può annullarsi in nessun punto della trave, e quindi concludesi che la curva presenta due punti di inflessione determinati dalle ascisse x_0 ed $l - x_0$.

Se la trave fosse caricata soltanto da un peso P applicato nel mezzo, allora $p = 0$, e posto questo valore nella (VIII) risulta

$$x_0 = \frac{1}{4}\,l = 0{,}25\,l$$

Se fosse invece la trave caricata col solo peso uniformemente distribuito, allora $P = 0$, per il quale valore dalla (VIII) si ricava

$$x_0 = \frac{l}{2} \pm \frac{l}{\sqrt{12}} = 0{,}212\, l$$

E questi due valori costituiscono due limiti fra i quali è compreso il valore di x_0, nel caso della simultanea applicazione del peso concentrato nel mezzo e del peso uniformemente distribuito.

A partire dunque dai punti di inflessione, dove il momento inflettente è nullo, esso va crescendo di valore tanto verso il mezzo della trave (*positivamente*), quanto verso gli appoggi (*negativamente*) e vedesi manifestamente che i più grandi valori assoluti si verificano per $x = \frac{l}{2}$, e per $x = \begin{cases} l \\ 0 \end{cases}$, e sono rispettivamente

$$\frac{P\,l}{8} + \frac{p\,l^2}{24} \quad ; \quad \frac{P\,l}{8} + \frac{p\,l^2}{12}$$

dei quali l'ultimo è maggiore, per cui il massimo valore assoluto del momento inflettente ha luogo per le sezioni di incastro, dove diventa

$$_{mas}M = \left(\frac{P}{2} + \frac{p\,l}{3}\right)\frac{l}{4}$$

Relativamente agli *sforzi di taglio*, scorgesi facilmente che il massimo valore si verifica per la sezione di incastro, ed esso è

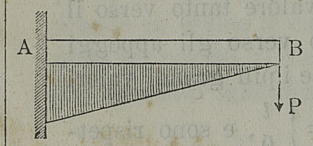
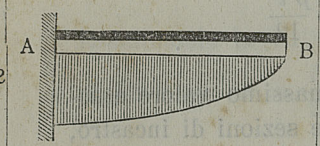
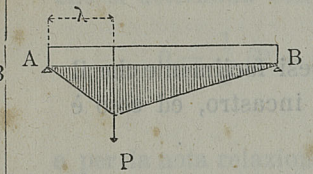
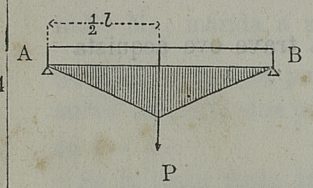
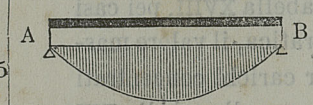
$$_{mas}T = \frac{1}{2}(P + p\,l)$$

mentre va diminuendo verso il mezzo della trave ove acquista il minimo valore

$$_{min}T = \frac{1}{2}P$$

60. Momenti inflettenti e freccie di massimo valore. — A risparmio di calcoli si ha raccolto, nella tabella XVIII, pei casi che più di frequente si possono incontrare in pratica, il valore massimo del momento inflettente e della freccia, per carichi concentrati od uniformemente distribuiti su tutta la trave, e nella tabella XIX il valore delle reazioni degli appoggi e del massimo momento inflettente, per carichi parzialmente distribuiti sulla trave.

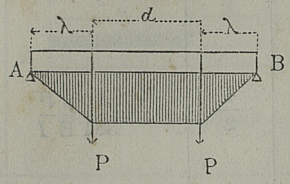
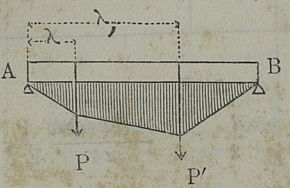
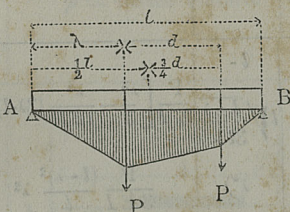
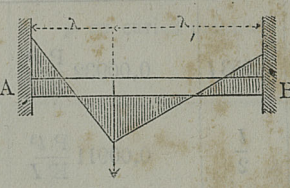
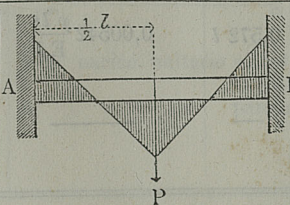
Tabella XVIII.

Num. delle figure	Figure rappresentanti i casi particolari	Valore massimo del momento inflettente		Freccia massima	
		Ascissa contata da A	*mas*M	Ascissa contata da A	*masf*
1		0	Pl	l	$\frac{1}{3}\frac{Pl^3}{EI}$
2		0	$\frac{pl^2}{2}$	l	$\frac{1}{8}\frac{pl^4}{EI}$
3		λ	$P\frac{\lambda}{l}(l-\lambda)$	λ^*)	$\frac{P\lambda^2}{6EI}(l-\lambda)\sqrt{\frac{l-\lambda}{3l-\lambda}}$
4		$\frac{l}{2}$	$\frac{Pl}{4}$	$\frac{l}{2}$	$\frac{1}{48}\frac{Pl^3}{EI}$
5		$\frac{l}{2}$	$\frac{pl^2}{8}$	$\frac{l}{2}$	$\frac{5}{384}\frac{pl^4}{EI}$

p = carico unitario

Nota. I momenti e la freccia non sono massimi per le ascisse con l'asterisco *).

Segue Tabella XVIII.

Num. delle figure	Figure rappresentanti i casi particolari	Valore massimo del momento inflettente: Ascissa contata da A	Valore massimo del momento inflettente: *mas*M	Freccia massima: Ascissa contata da A	Freccia massima: *mas f*
6		λ a $\lambda + d$	$\frac{P(l-d)}{2} = P\lambda$	$\frac{l}{2}$	$\frac{\lambda(3l^2-4\lambda^2)}{24}\frac{P}{EI}$
7		λ λ_1	$P\frac{\lambda}{l}(2l-\lambda-\lambda_1)$ $P\frac{(l-\lambda_1)}{l}(\lambda+\lambda_1)$	— —	——— ———
8	 Caso più sfavorevole per due pesi P eguali. Vedi Fig. 6.	$\lambda =$ $\frac{l}{2}-\frac{d}{4}$	$\frac{P(2l-d)^2}{8l} =$ $\frac{P(l-d)}{2} + P\frac{d^2}{8l}$	— —	——— ———
9	 *mas*M ha luogo in A per $\lambda < \lambda_1$ » B » $\lambda > \lambda_1$	0 λ l	$P\frac{\lambda(l-\lambda)^2}{l^2}$ $P\frac{\lambda^2(l-\lambda)^2}{2l^3}$ $P\frac{\lambda^2(l-\lambda)}{l^2}$	— — —	——— ——— ———
10		0 $\frac{l}{2}$ l	$\frac{Pl}{8}$ ..	$\frac{l}{2}$	$\frac{1}{192}\frac{Pl^3}{EI}$

Segue Tabella XVIII.

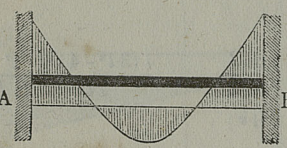
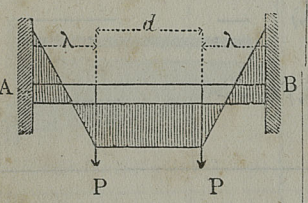
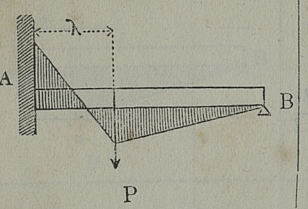
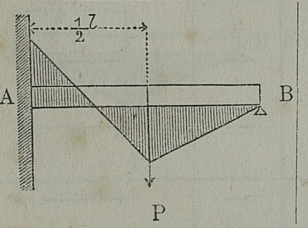
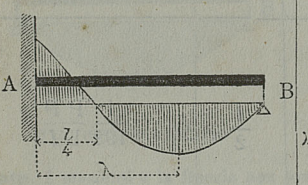
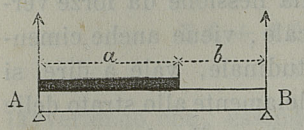
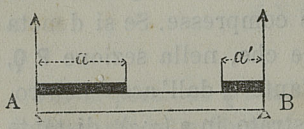
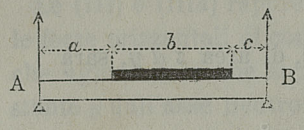
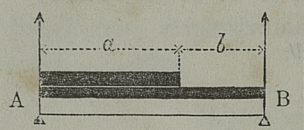
Num. delle figure	Figure rappresentanti i casi particolari	Valore massimo del momento inflettente: Ascissa contata da A	Valore massimo del momento inflettente: $mas M$	Freccia massima: Ascissa contata da A	Freccia massima: $mas f$
11	 p = carico unitario	0 l	$\frac{p\,l^2}{12}$	$\frac{l}{2}$	$\frac{1}{384}\frac{p\,l^4}{E\,I}$
		$\frac{l}{2}$	$\frac{p\,l^2}{24}$		
12		0 l	$P\lambda\,\frac{l-\lambda}{l}$	$\frac{l}{2}$	$\frac{\lambda^2(3l-4\lambda)}{24}\,\frac{P}{E\,I}$
		λ a $\lambda + d$	$P\,\frac{\lambda^2}{2\,l}$		
13		0	$P\,\frac{\lambda\,(2l-\lambda)\,(l-\lambda)}{2\,l^2}$	$l-\sqrt{\frac{l-\lambda}{3l-\lambda}}$	$\frac{P}{E\,I}\left[\frac{\lambda^3}{3}-\frac{\lambda^4}{12\,l^3}\,(3\lambda-l)^2\right]$
		$\lambda^*)$	$P\,\frac{\lambda^2\,(3l-\lambda)\,(l-\lambda)}{2\,l^3}$	$\lambda^*)$	$\frac{P}{3\,E\,I}\,\frac{(l-\lambda)^2}{l}\,\lambda^2$
14		0	$\frac{3}{16}\,P\,l$	$0{,}553\,l$	$0{,}00932\,\frac{P\,l^3}{E\,I}$
		$\frac{l}{2}^*)$	$\frac{5}{32}\,P\,l$	$\frac{l}{2}$	$0{,}00911\,\frac{P\,l^3}{E\,I}$
15		0	$\frac{p\,l^2}{8}$	$0{,}572\,l$	$0{,}00542\,\frac{p\,l^4}{E\,I}$
		$\lambda = \frac{5}{8}\,l^*)$	$\frac{9}{128}\,p\,l^2$	—	———

Tabella XIX.

N. delle fig.	Figure rappresentanti i casi particolari	Reazioni degli appoggi A e B	Momento inflettente massimo $mas M$
1	 p = carico unitario	$A = \frac{p(2l-a)a}{2l}$ $B = \frac{p a^2}{2l}$	$\frac{A^2}{2p}$
2	 p = carico unitario	$A = \frac{p a (2l-a) + p a_1^2}{2l}$ $B = \frac{p a_1 (2l-a_1) + p a^2}{2l}$	per $A < p a$ $mas M = \frac{A^2}{2p}$ per $B < p a_1$ $mas M = \frac{B^2}{2p}$ per $A = B = p a$ ossia per $a = a_1$ $mas M = \frac{p a^2}{2}$
3	 p = carico unitario	$A = \frac{p c (2b + c)}{2l}$ $B = \frac{p c (2a + c)}{2l}$	$A\left(a + \frac{A}{2p}\right)$
4	 p = carico unitario su tutta la trave k » » parziale	$A = \frac{p l}{2} + \frac{k (2l-a) a}{2l}$ $B = \frac{p l}{2} + \frac{k a^2}{2l}$	per $A \gtreqless (p + k) a$ $mas M = \frac{A^2}{2(p+k)}$ per $B \gtreqless p b$ $mas M = \frac{B^2}{2p}$

C) Forze radenti orizzontali.

61. Valore delle forze radenti orizzontali. — In un solido ad asse orizzontale, sollecitato alla flessione da forze verticali, oltre alla rottura per taglio verticale, viene anche cimentata la rottura per scorrimento longitudinale, vale a dire, si sviluppano delle *forze orizzontali* parallelamente allo strato delle fibre invariabili, delle quali si determinerà ora il valore.

Si considerino, in un prisma qualunque, Fig. 67, due sezioni rette infinitamente vicine **P Q** ed **R S**, che comprendono l'elemento **P Q S R** del solido di lunghezza dx. Di questo elemento si consideri la porzione **P R b a**, avente per sezione $\alpha\ p\ \alpha$, distante y dall'asse neutro **N N**, e posta dalla parte delle fibre compresse. Se si denota con R_c lo sforzo unitario di compressione che, nella sezione **P Q**, agisce sullo strato estremo in **P** (**p**), distante c dall'asse neutro, con $R_c^{(y)}$ quello unitario che agisce sullo strato in **a** ($\alpha\ \alpha$), distante y dall'asse neutro, e ricordando che gli sforzi sono proporzionali alla distanza dei rispettivi strati dall'asse neutro, si avrà

$$R_c^{(y)} : y :: R_c : c$$

$$R_c^{(y)} = \frac{R_c\ y}{c}$$

e quindi lo sforzo totale sullo strato $\alpha\ \alpha$, di area $z\ dy$, sarà

$$R_c^{(y)}\ z\ dy = \frac{R_c}{c}\ z\ y\ dy$$

per cui la risultante Σf_c di tutte le forze di compressione che agiscono sopra **P a** (α **p** α) è

$$\Sigma f_c = \frac{R_c}{c} \int_y^c z\ y\ dy$$

ma dalla (31) si ha $\frac{R_c}{c} = \frac{M}{I}$, quindi sostituendo

$$\Sigma f_c = \frac{M}{I} \int_y^c z\ y\ dy \qquad (I)$$

Considerando che in generale il momento inflettente varia di valore da sezione a sezione, e supponendo, nel caso della Fig. 67, che esso aumenti da sinistra verso destra, è evidente che sopra la porzione **R b** (di area $\alpha\, p\, \alpha$) della sezione **R S**, distante $d\,x$ da **P Q**, la risultante delle forze di compressione sarà

$$\Sigma f_c + d\,\Sigma f_c = \frac{M + d\,M}{I} \int_y^c z\,y\,d\,y \qquad (II)$$

(avvertendo che, essendo il solido prismatico, le quantità I ed $\int_y^c z\,y\,d\,y$ sono costanti).

Sottraendo la (I) dalla (II) si ottiene

$$d\,\Sigma f_c = \frac{d\,M}{I} \int_y^c z\,y\,d\,y \qquad (III)$$

Per la porzione **Q S a, b,** del considerato elemento di solido, posta dalla parte delle fibre stirate, con un analogo processo si troverebbe

$$d\,\Sigma f_t = \frac{d\,M}{I} \int_y^t z\,y\,d\,y \qquad (III a)$$

Le (III) e (III*a*) rappresentano rispettivamente la differenza fra le forze orizzontali di compressione e quella fra le forze di trazione che agiscono le une sopra una porzione elementare del solido distante y dall'asse neutro e posta dalla parte delle fibre compresse, le altre sopra una analoga porzione posta dalla parte delle fibre stirate; esse dunque forniscono le corrispondenti forze orizzontali ricercate, che sollecitano il solido sulla lunghezza $d\,x$, e lungo strati distanti y dall'asse neutro.

Chiamando O_c ed O_t le forze orizzontali operanti sull'unità di lunghezza, rispettivamente dalla parte compressa e stirata del solido, si avrà

$$O_c\,d\,x = d\,\Sigma f_c = \frac{d\,M}{I} \int_y^c z\,y\,d\,y$$

$$O_t\,d\,x = d\,\Sigma f_t = \frac{d\,M}{I} \int_y^t z\,y\,d\,y$$

da cui

$$O_c = \frac{d\,M}{d\,x}\,\frac{\int_y^c z\,y\,d\,y}{I}$$

$$O_t = \frac{d\,M}{d\,x}\,\frac{\int_y^t z\,y\,d\,y}{I}$$

e ricordando che $\frac{d\,M_x}{d\,x} = T_x$, come dalla (67), (non tenendo conto del cangiamento di segno, il quale non ha nessuna influenza sul valore assoluto) si ha

$$\left.\begin{aligned} O_c &= T_x\,\frac{\int_y^c z\,y\,d\,y}{I} \\ O_t &= T_x\,\frac{\int_y^t z\,y\,d\,y}{I} \end{aligned}\right\} \quad (70)$$

le quali rappresentano le forze orizzontali riferite all'unità di lunghezza del prisma, operanti ad una distanza y dall'asse neutro, ed il cui effetto è quello di far staccare una porzione qualunque di solido **PRab** o **QSa$_1$b$_1$** lungo il piano **ab**, oppure **a$_1$b$_1$**, per scorrimento longitudinale, e si chiamano *forze radenti orizzontali*.

Considerato che il valore di T_x, ossia dello sforzo di taglio, varia da sezione a sezione verticale, come pure varia il valore dell'integrale da strato a strato orizzontale, a seconda della rispettiva distanza y dall'asse neutro, vedesi che le forze orizzontali non operano uniformemente sulle singole fibre del solido.

Il valore dell'integrale (cioè del momento statico della parte di sezione che si considera, riferito all'asse neutro) assume il suo massimo valore quando si ponga il limite inferiore $y = 0$, e quindi *il valore delle forze radenti orizzontali diventa massimo per lo strato delle fibre invariabili* per le quali si ha

$$\left.\begin{aligned} {}_{mas}O_c &= T_x\,\frac{\int_0^c z\,y\,d\,y}{I} \\ {}_{mas}O_t &= T_x\,\frac{\int_0^t z\,y\,d\,y}{I} \end{aligned}\right\} \quad (71)$$

e chiamando H_f la distanza dei punti d'applicazione delle risultanti delle forze di compressione e di trazione, che si sviluppano nell'intera sezione del prisma, ricorrendo alla (35) si ha

$$H_f = \frac{I}{\int_0^c z\,y\,dy} = \frac{I}{\int_c^t z\,y\,dy}$$

e quindi sostituendo nella (71), ed avvertendo che è $_{mas}O_c = {}_{mas}O_t$, per cui si possono sopprimere gli indici, si ottiene

$$_{mas}O = \frac{T_x}{H_f} \qquad (71a)$$

Il minimo valore dell'integrale ha luogo per $y = c$ od $y = t$ nel qual caso esso va a zero, e quindi anche $O_c = 0$ ed $O_t = 0$ vale a dire *nelle fibre estreme le forze radenti orizzontali sono nulle.*

Così pure, per quelle sezioni nelle quali è massimo lo sforzo di taglio, anche le forze radenti diventano massime, mentre dove lo sforzo di taglio è uguale a zero, sono pure nulle le forze radenti orizzontali.

62. Rappresentazione grafica delle forze radenti orizzontali. — È facile rappresentare graficamente la legge di variazione delle forze radenti orizzontali per ciascuna sezione di un solido e per ciascun strato di fibre.

Dalle (70) scorgesi che, nei vari strati di una sezione qualunque determinati di posizione dall'ordinata y, la forza radente varia coll'integrale, ossia col momento statico della parte di sezione compresa fra le ordinate y e c, od y e t, mentre la quantità $\frac{T_x}{I}$ è costante per la stessa sezione.

Considerando una sezione rettangolare di base b e di altezza a, Fig. 68, ed uno strato $\alpha\beta$, di ordinata y, diventa $I = \frac{1}{12} b a^3$, $z = b$, $c = t = \frac{a}{2}$ e quindi per due strati equidistanti dall'asse neutro, e posti da una parte e dall'altra del medesimo, risulta

$$O_c = O_t = \frac{12}{b\,a^3} T_x \int_y^{\frac{a}{2}} b\,y\,dy$$

da cui integrando e sopprimendo gli indici, poichè $O_c = O_t$

$$O = \frac{6\,T_x}{a^3}\left(\frac{a^2}{4} - y^2\right) \qquad (72)$$

la quale espressione per $y = 0$, cioè per lo strato delle fibre invariabili, diviene massima, e quindi

$$_{mas}O = \frac{3}{2}\,T_x\frac{1}{a} \qquad (73)$$

mentre per $y = \frac{a}{2}$, cioè per lo strato delle fibre esterne, diventa nulla.

Se al variare di y, i corrispondenti valori di O, si prendono come ordinate, vedesi che, essendo la (72) l'equazione di una parabola riferita al proprio asse, *la variazione della forza radente orizzontale nei vari strati della sezione rettangolare, si può rappresentare mediante le ordinate di una parabola che ha per asse l'asse neutro, ed il vertice posto sul medesimo*. Questa parabola si delinea speditamente portando sull'asse neutro, a partire dalla considerata sezione **P Q** del solido, **Fig. 68**, la quantità $_{mas}O$ data dalla (73), con che si determina la posizione del vertice **V**, e poi eseguendo la solita costruzione. Le ordinate di questa parabola danno il valore delle forze radenti orizzontali sui rispettivi strati della sezione considerata.

Per sezioni di forme più accidentate, ma tali da potersi scomporre in rettangoli aventi fra loro i lati paralleli (*come sono le sezioni che di ordinario si incontrano nelle travi metalliche*), quale, ad esempio, quella rappresentata nella **Fig. 69**, la linea delle forze radenti orizzontali si compone di diversi rami di parabole, aventi tutte per asse, l'asse neutro, ed il vertice giacente sul medesimo.

Per la stessa trave poi, in ogni sezione dove varia lo sforzo di taglio T_x, varia anche il perimetro della linea a rami parabolici rappresentante le forze radenti orizzontali.

63. Resistenza alle forze radenti orizzontali. — Le forze radenti orizzontali cimentano il solido allo scorrimento longitudinale. Le forze radenti, date dalle (70), sono riferite alla unità di lunghezza del solido, per cui se è z_y la larghezza della

sezione del solido nello strato di fibre di ordinata y, l'area resistente all'azione delle medesime è $1 \times z_y = z_y$, e quindi se è K_s *il coefficiente di resistenza alla rottura per scorrimento*, ossia lo sforzo di rottura per scorrimento riferito all'unità di superficie, la resistenza del solido riferita all'unità di lunghezza è rappresentata da

$$K_s \; z_y$$

e per la stabilità, prendendo lo sforzo pratico di scorrimento eguale ad una frazione n di quello di rottura, cioè facendo $R_s = n K_s$ (ricordando che n varia fra $^1/_5$ ed $^1/_6$ per i metalli, e fra $^1/_{10}$ ed $^1/_{12}$ per i legnami) si avrà rispettivamente

$$\left.\begin{aligned} O_c &= R_s \; z_y \\ O_t &= R_s \; z_y \end{aligned}\right\} \quad (74)$$

a seconda che si consideri uno strato posto dalla parte delle fibre compresse, o da quella delle fibre stirate.

Dalla (74) si ha

$$\left.\begin{aligned} R_s &= \frac{O_c}{z_y} \\ R_s &= \frac{O_t}{z_y} \end{aligned}\right\} \quad (75)$$

Per una sezione rettangolare di base b e di altezza a, diventa $z_y = b$ per ogni strato di fibre, ed $O_c = O_t = \frac{6\,T_x}{a^3}\left(\frac{a^2}{4} - y^2\right)$, e quindi sostituendo nella (75) si ottiene

$$R_s = \frac{6\,T_x}{b\,a^3}\left(\frac{a^2}{4} - y^2\right) \quad (76)$$

Siccome nella stessa sezione le forze radenti orizzontali variano da strato a strato, mentre la larghezza degli stessi si mantiene costante, è evidente che lo sforzo unitario di scorrimento R_s varia per ognuno degli strati, come si vede anche dalla (76).

Assumendo i valori di y come ascisse, ed i corrispondenti di R_s come ordinate, essendo la (76) l'equazione di una parabola, la legge di variazione dello sforzo di scorrimento, per una sezione

rettangolare, si può rappresentare graficamente mediante le ordinate di una parabola che ha l'asse neutro per asse, ed il vertice situato sopra lo stesso, Fig. 70.

Per sezioni che si possono scomporre in rettangoli, la linea degli sforzi di scorrimento è formata da diversi rami di parabole, tutte dello stesso parametro, coi vertici situati sull'asse neutro, ma a diverse distanze fra loro, come indica la Fig. 71.

A seconda poi che nelle varie sezioni della trave cangiano i valori dello sforzo di taglio T_x, muta anche il valore del parametro degli archi di parabola, e quindi cambia il contorno delle linee degli sforzi di scorrimento.

Nella Fig. 72, si sono rappresentate per una trave di lunghezza l, liberamente appoggiata, e per le sezioni di ascissa 0, $^1/_4\, l$, $^1/_2\, l$ le linee delle forze radenti e degli sforzi unitari di scorrimento.

D) Flessione dei solidi caricati di punta.

Si è di già mostrato al § **14** che allorquando si sottopongono ad una forza premente, diretta secondo il loro asse longitudinale, delle aste la cui lunghezza raggiunga un certo multiplo della minima dimensione della sezione trasversale, in esse viene provocata ad un tempo la resistenza alla compressione e la resistenza alla flessione, quindi può darsi che le medesime si rompano per flessione anzichè per schiacciamento.

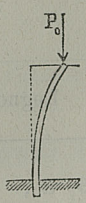
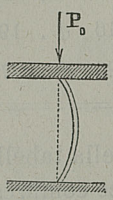
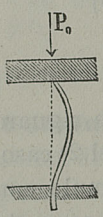
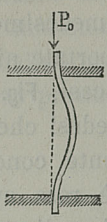
64. Formule teoriche. — La teoria che studia la resistenza di un solido in tali condizioni, svolta dal Navier (alla cui opera magistrale possono ricorrere coloro che volessero acquistare completa conoscenza della teoria medesima) porge la seguente espressione del carico P_0 che produrrebbe rottura per flessione

$$P_0 = \alpha\, \pi^2\, \frac{E\, I}{L^2} \qquad (77)$$

nella quale E ed I rappresentano i soliti valori, L la lunghezza del solido, π il rapporto fra la circonferenza ed il diametro, ed α un coefficiente che dipende dal modo col quale sono fissate le estremità del solido medesimo.

Nella tabella XX sono raccolti i valori di α, e quelli corrispondenti di P_0, per i vari casi che si possono incontrare in pratica.

Tabella XX.

Fig.		
1		1° — Se una delle estremità è incastrata e l'altra libera, $\alpha = 1/4$ e quindi $$P_0 = \frac{\pi^2}{4}\frac{E\,I}{L^2} = 2{,}47\frac{E\,I}{L^2} \qquad (77a)$$
2		2° — Se ambedue le estremità sono libere, ma costrette a rimanere lungo l'asse primitivo del solido, $\alpha = 1$ e quindi $$P_0 = \pi^2\frac{E\,I}{L^2} = 4 \times 2{,}47\frac{E\,I}{L^2} = 9{,}88\frac{E\,I}{L^2} \qquad (77b)$$
3		3° — Se una estremità è incastrata e l' altra libera, ma costretta a rimanere lungo l'asse primitivo, $\alpha = 2$ e quindi $$P_0 = 2\,\pi^2\frac{E\,I}{L^2} = 8 \times 2{,}47\frac{E\,I}{L^2} = 19{,}76\frac{E\,I}{L^2} \qquad (77c)$$
4		4° — Se ambedue le estremità sono incastrate, $\alpha = 4$ e quindi $$P_0 = 4\,\pi^2\frac{E\,I}{L^2} = 16 \times 2{,}47\frac{E\,I}{L^2} = 39{,}52\frac{E\,I}{L^2} \qquad (77d)$$

Queste formule sono da applicarsi soltanto allora che la lunghezza del solido sia maggiore dei valori indicati nella tabella XXI, nella quale d indica il diametro della sezione circolare, e g il lato minore della sezione rettangolare, cioè la grossezza.

Il carico pratico P, ossia il carico di sicurezza, si deve assumere come al solito $P = n\,P_0$, dove si prende d'ordinario $n = 1/5$

per il ferro fucinato, $n = 1/6$ per la ghisa, $n = 1/10$ per il legname.

Tabella XXI.

Figure	Lunghezza del solido		
	Ferro fucinato	Ghisa	Legno
1	12 d , 14 g	5 d , 5,75 g	6 d , 7 g
2	24 d , 28 g	10 d , 11,5 g	11,5 d , 13,5 g
3	33 d , 38 g	14 d , 16 g	16 d , 19 g
4	48 d , 56 g	20 d , 23 g	23 d , 27 g

Se la lunghezza L è minore dei limiti indicati nella tabella XXI, allora non avviene flessione nel solido, ma semplice compressione, ed il valore di P si calcola colla nota formula (9)

$$P = R_c \omega \qquad (78)$$

Una osservazione importante però bisogna fare riguardo alla (77), e cioè i valori di P_o che essa somministra nel 2° caso, Fig. 2, tabella XX, non concordano con quelli delle formule empiriche dedotte da Hodgkinson, in base a molteplici ed accurate esperienze, fatte sopra solidi colle estremità fissate nel medesimo modo della Fig. 2, tabella XX, le quali formule sono riportate ai §§ 15 e 16. Dall'esame poi dei valori di P_o negli altri casi, Fig. 1, 3, 4, tabella XX, essendo essi dedotti dal precedente, vedesi che anche per questi non si avranno risultati che pienamente concordino con quelli sperimentali. L'accennata differenza è resa evidente dal paragone, somministrato dalla tabella XXII, fra gli stessi risultati delle esperienze istituite da Hodgkinson sopra prismi quadrangolari di un pollice inglese di lato, ed i risultati della (77*b*).

La tabella XXII dimostra, che la formula (77*b*) è inesatta tanto per prismi di piccola lunghezza, quanto per quelli di lunghezza maggiore, e non è che per il solo caso di una lunghezza di circa 30 volte il diametro, ch'essa coincide coll'esperienza. È rimarchevole poi che per prismi di molta lunghezza, la (77*b*) for-

nisce dei risultati assai più sfavorevoli di quelli dati dall'esperienza; questo per altro può molto probabilmente dipendere da ciò, che i prismi sperimentati non aveano le estremità completamente libere, come lo suppone la formula, ma le avevano appiattite.

Tabella XXII.

Lunghezza L del prisma	$\frac{L}{g}$	Carico di rottura in libbre inglesi	
		trovato	calcolato
10 piedi inglesi	120	4245	1280
7,5 » »	90	10236	2276
5 » »	60	18106	5121
2,5 » »	30	26530	20480
1,25 » »	15	36162	(81940)
$7\,^1/_2$ pollici »	7,5	50946	(327760)
$3\,^3/_4$ » »	3,75	55200	(1487400)

65. Formule empiriche. — Visto adunque come la soluzione teorica del problema non è rigorosamente attendibile in pratica, alcuni costruttori pensarono di correggere la formula, adottandone una di empirica, basata sulla considerazione che la freccia massima dell'elastica può ritenersi proporzionale al quadrato della lunghezza del prisma. Tale formula che somministra il carico pratico nel caso più comune, Fig. 2, tabella XX, è

$$\left.\begin{aligned} P &= R_c\,\omega\,\frac{1}{1+\alpha\,\frac{\omega\,L^2}{I}} \\ \frac{P}{\omega}\left(1+\alpha\,\frac{\omega\,L^2}{I}\right) &= R_c \end{aligned}\right\} \quad (79)$$

ciò che equivale a prendere lo sforzo ridotto R_0 col seguente valore

$$R_0 = \frac{R_c}{1+\alpha\,\frac{\omega\,L^2}{I}} \qquad (79a)$$

nel quale trovandosi il momento d'inerzia I, si viene a tener conto della forma della sezione retta del prisma, e dove α è un coefficiente che dipende dalla materia costituente il prisma, ed i cui valori sono da prendersi

per il ferro fucinato . . $\alpha = 0{,}00008$
per la ghisa . . . . . $\alpha = 0{,}00025$
per il legno . . . . . $\alpha = 0{,}00016$

mentre le altre quantità conservano i soliti significati.

La frazione $\dfrac{1}{1 + \alpha \dfrac{\omega L^2}{I}}$ rappresenta la porzione dello sforzo R_c di compressione che deve essere adottata per i prismi di grande lunghezza, ed essa diventa tanto più grande quanto minore diventa L, e per piccole lunghezze essa assume valori assai prossimi all'unità, cosicchè la (79) si confonde colla (78). Il valore di I deve essere determinato nel senso secondo il quale tende ad avvenire il piegamento, che si manifesta nel senso della dimensione più piccola della sezione retta, e quindi l'asse neutro deve essere preso normalmente a questa minima dimensione, con che il momento di inerzia ad essa riferito acquista il suo minimo valore.

È da avvertirsi poi che per L si deve introdurre nella (79) la vera lunghezza l del solido, soltanto nel caso indicato dalla Fig. 2, tabella XX, ma che per gli altri tre casi, Fig. 1, 3, 4, tabella XX, deve prendersi per L rispettivamente $2\,l$, $^2/_3\,l$, $^1/_2\,l$.

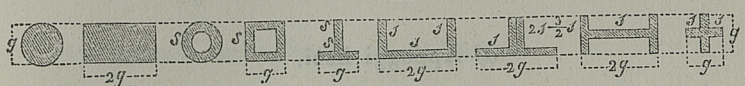
A facilitare l'impiego della formula (79) si sono raccolti nella tabella XXIII i valori del denominatore $1 + \alpha \dfrac{\omega L^2}{I}$, per determinati valori del rapporto $r = \dfrac{L}{g}$, e per le ordinarie forme di sezione adoperate in pratica, riferendosi a prismi che abbiano gli estremi fissati come nella Fig. 2, tabella XX, avendo adoperato per α dei valori ridotti a cui corrisponde uno sforzo $R_c = 15$ chilogrammi per millimetro quadrato, e preso per le Fig. 3, 4, tabella XXIII

$g = 30\,s$ per il ferro fucinato
$g = 10\,s$ per la ghisa.

Tabella XXIII.

Figure

1 2 3 4 5 6 7



$\frac{L}{g}$	Ferro fucinato — Figura						Ghisa (Legno fig. 1, 2) — Figura					
	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	7
5	1,04	1,03	1,02	1,02	1,06	1,05	1,32	1,24	1,19	1,15	1,24	1,44
10	1,16	1,12	1,09	1,06	1,25	1,18	2,28	1,96	1,78	1,58	1,95	2,77
12	1,23	1,17	1,12	1,09	1,36	1,26	2,84	2,38	2,12	1,84	2,37	3,55
14	1,31	1,24	1,17	1,13	1,49	1,36	3,51	2,88	2,53	2,15	2,86	4,48
16	1,41	1,31	1,22	1,16	1,65	1,46	4,28	3,46	2,99	2,50	3,43	5,54
18	1,52	1,39	1,28	1,21	1,82	1,59	5,15	4,11	3,53	2,90	4,07	6,75
20	1,64	1,48	1,34	1,26	2,01	1,73	6,12	4,84	4,12	3,34	4,79	8,10
22	1,77	1,58	1,41	1,31	2,22	1,89	7,19	5,65	4,78	3,83	5,59	9,59
24	1,92	1,69	1,49	1,37	2,46	2,06	8,34	6,53	5,49	4,37	6,43	11,20
26	2,08	1,81	1,58	1,43	2,71	2,24	9,65	7,49	6,27	4,96	7,41	13,00
28	2,25	1,94	1,67	1,50	2,98	2,43	11,00	8,52	7,12	5,59	8,44	14,90
30	2,44	2,08	1,77	1,58	3,28	2,65	12,50	9,64	8,02	6,26	9,54	17,00
32	2,64	2,23	1,88	1,66	3,59	2,88	14,10	10,80	9,00	7,00	10,70	19,20
34	2,85	2,39	1,99	1,74	3,92	3,12	15,80	12,10	10,00	7,77	12,00	21,50
36	3,07	2,56	2,11	1,83	4,28	3,38	17,60	13,40	11,10	8,58	13,30	24,00
38	3,31	2,73	2,23	1,93	4,65	3,65	19,50	14,90	12,30	9,45	14,70	26,60
40	3,56	2,92	2,37	2,03	5,05	3,93	21,50	15,40	13,50	10,40	16,20	29,40
42	3,82	3,12	2,51	2,13	5,46	4,24	23,60	17,90	14,80	11,30	17,70	32,30
44	4,10	3,32	2,65	2,24	5,90	4,55	25,80	19,60	16,10	12,30	19,40	35,40
46	4,38	3,53	2,81	2,36	6,35	4,88	28,10	21,30	17,50	13,40	21,10	38,60
48	4,69	3,76	2,97	2,48	6,83	5,23	30,50	23,10	19,00	14,50	22,90	41,90
50	5,00	4,00	3,14	2,60	7,32	5,59	33,00	25,00	20,50	15,60	24,70	45,40
55	5,84	4,63	3,59	2,94	8,65	6,55	39,70	30,00	24,60	18,70	29,70	54,70
60	6,76	5,32	4,08	3,31	10,10	7,70	47,10	35,60	29,10	22,10	35,20	64,90
65	7,76	6,07	4,61	3,71	11,70	8,75	55,10	41,60	34,00	25,70	41,10	76,90
70	8,84	6,88	5,19	4,14	13,40	9,99	60,40	48,00	39,30	29,70	47,50	88,00
75	10,00	7,75	5,81	4,61	15,20	11,03	73,00	55,00	44,90	33,90	54,40	101,00
80	11,20	8,68	6,47	5,10	17,20	12,70	82,90	62,40	50,90	38,50	61,70	115,00
90	14,00	10,70	7,93	6,19	21,50	15,80	105,00	78,80	64,20	48,40	77,90	145,00
100	17,00	13,00	9,55	7,41	26,30	19,30	129,00	97,00	79,00	59,50	95,90	178,00

E) Trave continua su più appoggi.

a) Appoggi fissi.

66. Generalità. — Se una trave prismatica è collocata sopra $n+1$ appoggi, questi la suddividono in n tronchi che si chiamano *travate*, le cui lunghezze misurate da asse ad asse degli appoggi sieno $l_1, l_2 \ldots, l_m \ldots, l_{n-1}, l_n$, Fig. 73. Si supponga che tutte le travate sieno caricate completamente da un peso uniformemente distribuito, però di intensità differente per ognuna di esse, ed i cui valori riferiti al metro corrente sieno $p_1, p_2 \ldots, p_m \ldots, p_{n-1}, p_n$. Fra le forze esterne sollecitanti la trave vi sono le $n+1$ reazioni incognite degli appoggi, e per determinarle non basta ricorrere alle sole condizioni dell'equilibrio statico, ma bisogna altresì considerare le condizioni dell'equilibrio elastico. Però la ricerca a priori delle dette reazioni, per poi passare a quella dei momenti inflettenti, conduce a calcoli troppo lunghi e laboriosi per le pratiche applicazioni, ed è invece di grande giovamento ricorrere al trovato degli ingegneri Clapeyron e Bertot, di prendere cioè come incognite ausiliari i momenti inflettenti che si verificano per le sezioni che insistono sugli appoggi, i quali si chiamano m_1, $m_2 \ldots, m_m \ldots, m_n$, m_{n+1}. Si riferisca l'elastica ad un sistema di assi ortogonali e si prenda l'asse rettilineo ed orizzontale del solido (prima della flessione) come asse delle x e verticale quello delle y. L'elastica rimane divisa in tanti rami quante sono le travate, e per ogni ramo o travata si prenderà come origine degli assi il corrispondente estremo di sinistra. Si consideri una travata qualunque, per esempio la m^{ma}, compresa fra gli appoggi A_m ed A_{m+1}, per la quale l'origine delle coordinate si deve prendere nel corrispondente estremo di sinistra, cioè in A_m.

67. Espressione generale del momento inflettente. — Si indichi con $M_x^{(m)}$ il momento inflettente per un punto qualunque M di ascissa x della travata m^{ma} ed è

$$M_x^{(m)} = \begin{cases} -A_1(l_1+l_2+\cdots+l_{m-1}+x) - A_2(l_2+\cdots+l_{m-1}+x) - \cdots \\ -A_{m-1}(l_{m-1}+x) - A_m x + p_1 l_1 \left\{\frac{l_1}{2}+l_2+\cdots+l_{m-1}+x\right\} + \\ p_2 l_2\left(\frac{l_2}{2}+\cdots+l_{m-1}+x\right)+\cdots+p_{m-1}\,l_{m-1}\left(\frac{l_{m-1}}{2}+x\right)+\frac{p_m x^2}{2} \end{cases}$$

Sviluppando raccogliendo ed ordinando

$$M_x^{(m)} = \begin{cases} \left\{-A_1(l_1+l_2+\cdots+l_{m-1}) - A_2(l_2+\cdots+l_{m-1}) - \cdots - A_{m-1}\,l_{m-1} + \right. \\ + p_1 l_1\left(\frac{l_1}{2}+l_2+\cdots+l_{m-1}\right)+p_2 l_2\left(\frac{l_2}{2}+\cdots+l_{m-1}\right)+\cdots \\ \left. + p_{m-1}\frac{(l_{m-1})^2}{2}\right\} + \left\{-A_1 - A_2 - \cdots - A_{m-1} - A_m + p_1\,l_1 + \right. \\ \left. + p_2\,l_2 + \cdots + p_{m-1}\,l_{m-1}\right\} x + p_m\,\frac{x}{2} \end{cases}$$

Indicando con C_m il termine costante contenuto nella prima parentesi, e con D_m il coefficiente della variabile x alla prima potenza, si ha semplicemente

$$M_x^{(m)} = C_m + D_m x + \frac{1}{2}\,p_m\,x^2 \qquad (80)$$

Il valore delle costanti C_m e D_m si determina nel modo seguente: Quando nella (80) si pone $x = 0$ si ha il momento inflettente per la sezione sull'appoggio di sinistra della m^{ma} travata, cioè $M_x^{(m)}$ acquista il particolare valore m_m e quindi

$$C_m = m_m \qquad (81)$$

Quando invece nella (80) si pone $x = l_m$ allora si ha il momento inflettente per la sezione sull'appoggio di destra della m^{ma} travata, cioè $M_x^{(m)}$ acquista il particolare valore m_{m+1} e quindi $m_{m+1} = C_m + D_m\,l_m + {}^1/_2\,p_m\,l_m^2$ ed essendo $C_m = m_m$ risulta

$$D_m = \frac{m_{m+1} - m_m}{l_m} - \frac{1}{2}\,p_m\,l_m \qquad (82)$$

e sostituendo i trovati valori nella (80) si ottiene l'espressione del momento inflettente per un punto qualunque di ascissa x di

una qualunque travata, cioè:

$$M_x^{(m)} = m_m + \left(\frac{m_{m+1} - m_m}{l_m} - \frac{1}{2} p_m l_m \right) x + \frac{1}{2} p_m x^2 \qquad (80a)$$

68. Espressione generale dello sforzo di taglio — Lo sforzo di taglio $T_x^{(m)}$ per il punto considerato **M** della m^{ma} travata è

$$T_x^{(m)} = \left\{ \begin{matrix} -A_1 - A_2 - \cdots - A_{m-1} - A_m + \\ + p_1 l_1 + p_2 l_2 + \cdots + p_{m-1} l_{m-1} + p_m x \end{matrix} \right\} = D_m + p_m x \qquad (83)$$

E differenziando la (80) si trova

$$\frac{d M_x^{(m)}}{d x} = D_m + p_m x = T_x^{(m)}$$

cioè anche nel caso di una trave collocata su più appoggi lo sforzo di taglio in una data sezione di ascissa x è la derivata del corrispondente momento inflettente rapporto ad x. Sostituendo nella (83) il valore di D_m dato dalla (82) si trova l'espressione generale dello sforzo di taglio per un punto qualunque di ascissa x di una qualunque travata, cioè

$$T_x^{(m)} = \frac{m_{m+1} - m_m}{l_m} - \frac{1}{2} p_m l_m + p_m x \qquad (83a)$$

69. Espressione generale delle reazioni degli appoggi. — Si consideri l'appoggio A_m, Fig. 73, di cui si indica con A_m la relativa reazione, e sieno T_s e T_d gli sforzi di taglio relativi alle due sezioni che si trovano immediatamente l'una a sinistra e l'altra a destra dell'asse dell'appoggio medesimo. La espressione dello sforzo di taglio è:

Per la travata m^{ma}

$$T_x^{(m)} = \frac{m_{m+1} - m_m}{l_m} - \frac{1}{2} p_m l_m + p_m x \qquad (I)$$

Per la travata $(m-1)^{ma}$

$$T_x^{(m-1)} = \frac{m_m - m_{m-1}}{l_{m-1}} - \frac{1}{2} p_{m-1} l_{m-1} + p_{m-1} x \qquad (II)$$

Ponendo nella (I) $x = 0$ si ha il valore di

$$T_d = \frac{m_{m+1} - m_m}{l_m} - \frac{1}{2} p_m l_m \qquad (Ia)$$

Ponendo nella (II) $x = l_{m-1}$ si ha il valore di

$$T_s = \frac{m_m - m_{m-1}}{l_{m-1}} + \frac{1}{2} p_{m-1} l_{m-1} \qquad (IIa)$$

Ricordando che lo sforzo di taglio è la somma algebrica di tutte le forze che operano sulla trave da una parte o dall'altra della considerata sezione, e riferendosi alla parte che sta a sinistra, si ha anche

$$T_d = (-A_1 - A_2 - \cdots - A_{m-1} - A_m + p_1 l_1 + p_2 l_2 + \cdots + p_{m-1} l_{m-1}) = D_m$$

$$T_s = -A_1 - A_2 - \cdots - A_{m-1} + p_1 l_1 + p_2 l_2 + \cdots + p_{m-1} l_{m-1} = D_m - A_m$$

sottraendo la seconda dalla prima si ottiene l'espressione generale della reazione di un qualsiasi appoggio

$$A_m = T_d - T_s \qquad (84)$$

nella quale T_d e T_s hanno i valori dati rispettivamente dalla (Ia) e (IIa).

Le (80a) (83a) (84) mostrano che essendo noti i momenti inflettenti sugli appoggi $m_1, m_2 \ldots, m_m \ldots, m_{n+1}$ si possono determinare anche i valori del momento inflettente e dello sforzo di taglio per ciaschedun punto della trave continua, nonchè le reazioni dei vari appoggi.

70. Determinazione dei momenti inflettenti sugli appoggi. — I momenti inflettenti sugli appoggi si determinano nel modo seguente. Il momento di resistenza della trave nei limiti di elasticità è (28) $\frac{E I}{\rho}$. Il raggio di curvatura dell'elastica ha per valore $\rho = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}$, e siccome nei piccoli incurvamenti cui vanno soggette le travi il $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ può essere trascurato, così

si può prendere $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{d x^2}$ e quindi il momento di resistenza diventa $E I \frac{d^2 y}{d x^2}$. Per l'equilibrio elastico deve essere nel punto considerato **M** della travata m^{ma} il momento resistente eguale al momento inflettente dato dalla (80) cioè

$$E I \frac{d^2 y}{d x^2} = C_m + D_m x + \frac{1}{2} p_m x^2 \qquad (I)$$

Analogamente per la travata $(m-1)^{ma}$ si avrebbe

$$E I \frac{d^2 y}{d x^2} = C_{m-1} + D_{m-1} x + \frac{1}{2} p_{m-1} x^2 \qquad (II)$$

nella quale è da porsi

$$C_{m-1} = m_{m-1} \quad , \quad D_{m-1} = \frac{m_m - m_{m-1}}{l_{m-1}} - \frac{1}{2} p_{m-1} l_{m-1}$$

Integrando ripetutamente le (I) (II), determinando le rispettive costanti, eguagliando i valori del $\frac{d y}{d x}$ che si ottengono dall'una e dall'altra relativamente alla sezione corrispondente all'appoggio intermedio A_m, sostituendo per C_m, D_m e C_{m-1}, D_{m-1} i loro valori in funzione dei momenti inflettenti sugli appoggi, sommando, riducendo ed ordinando, si arriva alla seguente relazione

$$m_{m-1} l_{m-1} + 2 m_m (l_{m-1} + l_m) + m_{m+1} l_m - \frac{1}{4} (p_{m-1} l_{m-1}^3 + p_m l_m^3) = 0 \qquad (85)$$

conosciuta col nome di *formula dei tre momenti*, la quale dà la relazione che esiste fra i momenti inflettenti sugli appoggi, le lunghezze ed i pesi unitari, relativi a due travate successive qualunque. Chiamando I e II le due travate successive qualunque che si considerano, **Fig. 74**, l_I, l_{II} la loro lunghezza, p_I, p_{II} i pesi unitari che le caricano uniformemente, m_I, m_{II}, m_{III} i momenti inflettenti sui tre appoggi successivi che le sorreggono la (85) diventa

$$m_I l_I + 2 m_{II} (l_I + l_{II}) + m_{III} l_{II} - \frac{1}{4} (p_I l_I^3 + p_{II} l_{II}^3) = 0 \qquad (85a)$$

Si consideri una sezione di ascissa x della prima travata; il

momento inflettente relativo $M_x^{(1)}$ si può esprimere con $M_x^{(1)} = -A_1 x + \frac{p_1 x^2}{2}$ e per $x = 0$, cioè per la sezione che coincide col primo appoggio, diventa $M_x^{(1)} = m_1 = 0$. Si consideri una sezione di ascissa x dell'ultima travata, ossia la n^{ma}; il momento inflettente relativo è $M_x^{(n)} = A_{n+1}(l_n - x) - {}^1/_2 p_n (l_n - x)$ e per $x = l_n$, cioè per la sezione che coincide coll'ultimo appoggio risulta $M_x^{(n)} = m_{n+1} = 0$, vale a dire i momenti inflettenti sugli appoggi estremi (primo ed ultimo) sono nulli, locchè torna di per sè manifesto inquantochè la trave è ivi appoggiata liberamente. Degli $n+1$ momenti inflettenti sugli appoggi ne rimangono dunque di incogniti $n-1$ perchè il primo e l'ultimo, essendo sempre nulli, rimangono determinati pienamente. Per avere il valore degli $n-1$ momenti incogniti basta applicare la (85*a*) successivamente alle travate 1ª e 2ª, 2ª e 3ª, 3ª e 4ª..., $(n-1)^{ma}$ ed n^{ma} con che si ottengono $n-1$ equazioni di primo grado, che contengono questi $n-1$ momenti incogniti, e che servono a determinarli.

74. Rappresentazione grafica dei momenti inflettenti. — La espressione generale del momento inflettente M_x per un punto qualunque di ascissa x di una qualsiasi travata (80) è $M_x = C_m + D_m x + {}^1/_2 p_m x^2$. Ora vedesi che M_x varia da sezione a sezione col variare dell'ascissa x: prendendo come ascisse i successivi valori di x e come ordinate i corrispondenti valori di M_x, si ottiene una curva che rappresenta la legge di variazione dei momenti inflettenti per la considerata travata, e la cui equazione (80) si può porre sotto la forma

$$\frac{1}{2} p_m x^2 + D_m x - M_x + C_m = 0 \qquad (I)$$

Questa equazione del 2° grado fra le ascisse x e le ordinate M_x, non può rappresentare che una conica. L'equazione di una conica in coordinate parallele è della seguente forma generale

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \qquad (86)$$

la quale rappresenta un'elisse, una parabola od un'iperbola secondochè $b^2 - 4ac$ è negativo, nullo o positivo. Applicando al caso presente si completi l'equazione (I) riducendola alla forma

della (86), ponendo eguali a zero i coefficienti dei termini mancanti, cioè $a = {}^1/_2 p_m$, $b = 0$, $c = 0$, $d = D_m$, $e = -1$, $f = C_m$, e mettendo M_x in luogo di y si ha

$$\frac{1}{2} p_m x^2 + 0 \cdot x M_x + 0 \cdot M^2_x + D_m x - 1 \cdot M_x + C_m = 0$$

e quindi l'accennata differenza diventa $0^2 - 4 \cdot {}^1/_2 p_m \cdot 0 = 0$, cioè la (I) è l'equazione di una parabola. Per determinare il vertice basta trovare il massimo valore che può assumere M_x. Si faccia la derivata della (80) rispetto ad x e la si eguagli a zero, e si ottiene $\frac{d M_x}{d x} = D_m + p_m x = 0$ da cui si ricava il valore particolare di x, che rende massimo M_x, il quale chiamato x_0 è $x_0 = -\frac{D_m}{p_m}$ e ponendo per D_m il valore dato dalla (82) e chiamando m_d m_s i momenti inflettenti sugli appoggi rispettivamente di destra e di sinistra della travata che si considera, facendo cioè $m_m = m_s$, $m_{m+1} = m_d$, si ha

$$x_0 = -\frac{D_m}{p_m} = -\frac{m_d - m_s}{p_m l_m} + \frac{1}{2} l_m \qquad (87)$$

sostituendo questo valore nella funzione primitiva (I) si ha il massimo valore di M_x che si denota con M_0, cioè $M_0 = C_m - \frac{D^2_m}{2 p_m}$ e siccome dalla (87) si ricava $D^2_m = p^2_m x_0^2$, così diventa

$$M_0 = C_m - \frac{p_m x_0^2}{2} = m_s - \frac{p_m x_0^2}{2} \qquad (88)$$

ricordano che $C_m = m_m = m_s$.

Riferendo la parabola ad un sistema di assi ortogonali paralleli ai precedenti, Fig. 75, con l'origine nel vertice V, e chiamando x_r ed y_r le coordinate di un punto qualunque n rispetto al nuovo sistema di assi, ed x_0, M_0 le coordinate del vertice riferito al primitivo sistema, si ha che le coordinate x ed M_x del punto considerato n riferito al sistema primitivo, espresse in funzione delle coordinate precedenti, hanno per valore

$$x = x_0 - x_r \quad , \quad M_x = M_0 - y_r$$

sostituendo questi valori nella (I) diventa

$$\frac{1}{2} p_m (x_0 - x_1)^2 + D_m (x_0 - x_1) - (M_0 - y_1) + C_m = 0$$

e ponendo per x_0 ed M_0 i rispettivi valori dati dalle (87) (88) risulta

$$y_1 = -\frac{1}{2} p_m x_1^2 \qquad (II)$$

che è l'equazione della parabola riferita al proprio vertice, dalla quale si ricava il valore del parametro, cioè

$$Parametro = \frac{2}{p_m}.$$

Vedesi che il parametro dipende esclusivamente dal peso che carica la travata che si considera, per cui tutte le travate che sono caricate collo stesso peso hanno, qualunque sia la loro lunghezza, le rispettive parabole dei momenti inflettenti collo stesso parametro, cioè della stessa curvatura. Riassumendo dunque, si trova per ciascheduna travata, col mezzo delle (87) (88), la posizione del vertice della parabola dei momenti inflettenti della quale il parametro ha per valore $\frac{2}{p_m}$, e determinata la distanza focale, nonchè quella della direttrice dal vertice, che sono entrambi eguali ad un $^1/_4$ del parametro, é facile descrivere la parabola dei momenti inflettenti. Difatti condotta una verticale che ne rappresenta l'asse, Fig. 76, segnato un punto V come vertice, e preso $VD = VF = {}^1/_4$ *Parametro*, si tirano delle orizzontali 1 1, 2 2, 3 3, 4 4... (le quali sieno molto vicine in prossimità al vertice, e vadano mano a mano allontanandosi, e ciò per comodo di operazione). Poi centrando in D si prende successivamente la distanza dalle anzidette orizzontali, ed ogni volta con questa apertura centrando in F si taglia la corrispondente orizzontale in due punti, che sono punti della parabola, la quale si completa congiungendo questi punti a mano.

Se nella (80) si pone $M_x = 0$ si ha la seguente equazione di 2° grado in x

$$x^2 + \frac{2 D_m}{p_m} x + \frac{2 C_m}{p_m} = 0 \qquad (89)$$

la quale dimostra che la parabola dei momenti inflettenti taglia l'asse della trave in due punti i determinati di posizione dai due particolari valori che si ricava per x risolvendo la (89); e nei quali punti il momento inflettente è nullo, ossia essi rappresentano due punti di flesso nell'elastica, Fig. 75.

72. Rappresentazione grafica degli sforzi di taglio. — L'espressione generale dello sforzo di taglio per un punto di ascissa x di una qualunque travata (83) è $T_x = D_m + p_m x$ nella quale T_x varia col variare di x, e se si prendono i successivi valori di x come ascisse ed i corrispondenti valori di T_x come ordinate, siccome la (83) è l'equazione di una retta, risulta che gli sforzi di taglio variano come le ordinate di una retta. Questa retta taglia l'asse delle x ad una distanza $\mathbf{a\,v} = x_0 = -\frac{D_m}{p_m}$ dall'origine, Fig. 77, cioè dall'appoggio di sinistra, mentre il valore dell'ordinata, o sforzo di taglio, in corrispondenza all'origine medesima è $\mathbf{a\,c} = D_m$. Difatti, considerato un punto m di ascissa x, la relativa ordinata **m n** rappresenta lo sforzo di taglio T_x, e dalle somiglianza dei triangoli **vmn** e **vac** si ha

$$x_0 : D_m = x_0 - x : T_x$$

da cui

$$T_x = D_m - \frac{D_m x}{x_0} = D_m + p_m x$$

che coincide appunto coll'espressione generale dello sforzo di taglio. Il punto v nel quale la retta degli sforzi di taglio incontra l'asse delle x, ha la stessa ascissa x_0 del vertice della parabola dei momenti inflettenti, mentre le ordinate estreme di questa retta (cioè per $x = 0$ ed $x = l_m$) chiamandole rispettivamente $T_{'}$ e $T_{''}$, e ricorrendo alle (83) e (87) hanno per valore

$$\left.\begin{aligned} T_{'} = D_m &= \frac{m_d - m_s}{l_m} - \frac{1}{2} p_m l_m = -p_m x_0 \\ T_{''} = D_m + p_m l_m &= \frac{m_d - m_s}{l_m} + \frac{1}{2} p_m l_m = p_m (l_m - x_0) \end{aligned}\right\} \quad (90)$$

e quindi è facile descrivere la retta degli sforzi di taglio, inquantochè basta portare un'ordinata di valore $T_{'} = D^m$ in corrispon-

denza all'appoggio di sinistra, e dall'estremo c guidare una retta pel punto v, a cui corrisponde il vertice della parabola dei momenti inflettenti, e che è determinato dall'ascissa x_0.

b) Appoggi mobili.

73. Momenti sugli appoggi ed abbassamenti. — Nella risoluzione del problema della trave continua si è sempre considerato il caso di appoggi fissi. Può però accadere che gli appoggi sotto l'azione del carico mobile abbiano ad abbassarsi in modo che gli abbassamenti siano vincolati ad una determinata legge, tale, per esempio, che essi riescano funzioni delle reazioni dei rispettivi appoggi e viceversa (*).

Nella determinazione degli sforzi esterni a cui è soggetta la trave in questo caso, cioè dei momenti inflettenti e degli sforzi di taglio per un punto qualunque, si procede allo stesso modo tenuto per gli appoggi fissi. Si assumono cioè come incognite ausiliari i momenti inflettenti sugli appoggi ed inoltre gli abbassamenti degli stessi.

La trave resta divisa dagli appoggi in tronchi o *travate*. *Si considerino due qualunque di queste travate però successive*, Fig. 78, e si chiamino

$l, l_{,,}$ le rispettive lunghezze,
$p, p_{,,}$ i carichi unitari uniformemente distribuiti sopra cadauna,
$m, m_{,,}, m_{,,,}$ i momenti inflettenti sui tre appoggi successivi,
$a, a_{,,}, a_{,,,}$ gli abbassamenti di questi appoggi,
$R, R_{,,}, R_{,,,}$ le reazioni dei medesimi.

Si prenda come origine l'appoggio mediano e si chiamino rispettivamente T_s e T_d gli sforzi di taglio di due sezioni poste immediatamente alla sinistra ed alla destra di detto appoggio.

Si considerino i due punti M' M'' rispettivamente di ascissa x ed

(*) Essendosi presentata l'occasione di progettare un ponte a travate metalliche continue sostenute da chiatte galleggianti, si cadeva precisamente nel caso sopraenunciato. Essendomi occupato della soluzione del problema, credo che non sia affatto ozioso di riportare in questa prima parte dell'opera il procedimento generale.

x_r nella 1ª e 2ª travata e si chiamino M'_x ed M''_x i corrispondenti momenti inflettenti. Ricordando che il momento inflettente per una data sezione è eguale alla somma algebrica dei momenti di tutte le forze esterne sollecitanti la trave a partire dalla sezione considerata fino ad uno qualunque degli estremi e che quindi m_{rr}, momento sull'appoggio intermedio, rappresenta la detta somma algebrica a partire da questo appoggio sia fino all'estremo di destra, come fino all'estremo di sinistra della trave continua considerata, ne viene che

$$\left.\begin{aligned} M'_x &= m_{rr} - T_s\, x + \frac{1}{2} p_r x^2 \\ M''_x &= m_{rr} - T_d\, x_r + \frac{1}{2} p_{rr} x_r^2 \end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

Se in luogo di due punti qualunque si considerano nelle due travate i due punti che corrispondono rispettivamente al 1° e 3° appoggio, si ha

$$x = l_r \qquad M'_x = m_r \qquad , \qquad x_r = l_{rr} \qquad M''_x = m_{rrr}$$

e quindi

$$m_r = m_{rr} - T_s\, l_r + \frac{1}{2} p_r l_r^2 \quad , \quad m_{rrr} = m_{rr} - T_d\, l_{rr} + \frac{1}{2} p_{rr} l_{rr}^2$$

d'onde

$$\left.\begin{aligned} T_s &= \frac{m_{rr} - m_r}{l_r} + \frac{1}{2} p_r l_r \\ T_d &= \frac{m_{rr} - m_{rrr}}{l_{rr}} + \frac{1}{2} p_{rr} l_{rr} \end{aligned}\right\} \text{(91)}$$

e siccome il valore assoluto della reazione dell'appoggio intermedio è

$$R_{rr} = T_s + T_d \qquad \text{(92)}$$

e dipendendo d'altronde la reazione dell'appoggio dall'abbassamento e viceversa, essendo cioè

$$R_{rr} = f(a_{rr})$$

per le (91) (92) risulta

$$f(a_{rr}) = \frac{m_{rr} - m_r}{l_r} + \frac{1}{2} p_r l_r + \frac{m_{rr} - m_{rrr}}{l_{rr}} + \frac{1}{2} p_{rr} l_{rr} \qquad \text{(93)}$$

Per l'equilibrio elastico il momento inflettente in un punto qualunque deve eguagliare il momento resistente. Ponendo $EI = \varepsilon$, il momento resistente ha per valore $\varepsilon \frac{d^2 y}{d x^2}$ e quindi per le (I)

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{d x^2} = m_{,,} - T_s x + \frac{1}{2} p_{,} x^2$$

$$\varepsilon \frac{d^2 y_{,}}{d x_{,}^2} = m_{,,} - T_d x_{,} + \frac{1}{2} p_{,,} x_{,}^2$$

Integrando una prima volta

$$\varepsilon \frac{d y}{d x} = m_{,,} x - \frac{1}{2} T_s x^2 + \frac{1}{6} p_{,} x^3 + C_{,}$$

$$\varepsilon \frac{d y_{,}}{d x_{,}} = m_{,,} x_{,} - \frac{1}{2} T_d x_{,}^2 + \frac{1}{6} p_{,,} x_{,}^3 + C_{,,}$$

Integrando nuovamente

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon y &= \frac{1}{2} m_{,,} x^2 - \frac{1}{6} T_s x^3 + \frac{1}{24} p_{,} x^4 + C_{,} x + B_{,} \\ \varepsilon y_{,} &= \frac{1}{2} m_{,,} x_{,}^2 - \frac{1}{6} T_d x_{,}^3 + \frac{1}{24} p_{,,} x_{,}^4 + C_{,,} x_{,} + B_{,,} \end{aligned}\right\} \quad (II)$$

per $x = 0$, $x_{,} = 0$ è $\frac{d y}{d x} = -\frac{d y_{,}}{d x_{,}}$, $C_{,} = -C_{,,}$

per $x = 0$, $x_{,} = 0$ è $y = a_{,,}$, $y_{,} = a_{,,}$

per $x = l_{,}$, $x = l_{,,}$ è $y = a_{,}$, $y_{,} = a_{,,,}$

e quindi

$$\varepsilon a_{,,} = B_{,} \quad , \quad (B_{,} = B_{,,}) \quad , \quad \varepsilon a_{,,} = B_{,,}$$

Fatte le sostituzioni nelle (II) si ottiene

$$\varepsilon a_{,} = \frac{1}{2} m_{,,} l_{,}^2 - \frac{1}{6} T_s l_{,}^3 + \frac{1}{24} p_{,} l_{,}^4 + C_{,} l_{,} + \varepsilon a_{,,}$$

$$\varepsilon a_{,,,} = \frac{1}{2} m_{,,} l_{,,}^2 - \frac{1}{6} T_d l_{,,}^3 + \frac{1}{24} p_{,,} l_{,,}^4 - C_{,} l_{,,} + \varepsilon a_{,,}$$

eliminando C_r per somma

$$\varepsilon a_r l_{r'} = \frac{1}{2} m_{r'} l_r^2 l_{r'} - \frac{1}{6} T_s l_r^3 l_{r'} + \frac{1}{24} p_r l_r^4 l_{r'} + C_r l_r l_{r'} + \varepsilon a_{r'} l_{r'}$$

$$\varepsilon a_{r'} l_r = \frac{1}{2} m_{r'} l_{r'}^2 l_r - \frac{1}{6} T_d l_{r'}^3 l_r + \frac{1}{24} p_{r'} l_{r'}^4 l_r - C_r l_{r'} l_r + \varepsilon a_{r'} l_r$$

$$\varepsilon a_r l_{r'} + \varepsilon a_{r'} l_r = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} m_{r'} (l_r^2 l_{r'} + l_{r'}^2 l_r) - \frac{1}{6} (T_s l_r^3 l_{r'} + T_d l_{r'}^3 l_r) + \\ + \frac{1}{24} (p_r l_r^4 l_{r'} + p_{r'} l_{r'}^4 l_r) + \varepsilon a_{r'} (l_r + l_{r'}) \end{array} \right.$$

da cui

$$6\left(\frac{\varepsilon a_r}{l_r} + \frac{\varepsilon a_{r'}}{l_{r'}} - \frac{\varepsilon a_{r'} (l_r + l_{r'})}{l_r l_{r'}}\right) = 3 m_{r'} (l_r + l_{r'}) - (T_s l_r^2 + T_d l_{r'}^2) + \frac{1}{4} (p_r l_r^3 + p_{r'} l_{r'}^3)$$

e sostituendo per T_s e T_d i valori dati dalle (91) risulta

$$6\varepsilon\left(\frac{a_r}{l_r} - \frac{a_{r'} (l_r + l_{r'})}{l_r l_{r'}} + \frac{a_{r''}}{l_{r'}}\right) = \left\{ \begin{array}{l} m_r l_r + 2 m_{r'} (l_r + l_{r'}) + \\ + m_{r''} l_{r'} - \frac{1}{4} (p_r l_r^3 + p_{r'} l_{r'}^3) \end{array} \right\} \quad (94)$$

la quale è analoga alla formula di CLAPEYRON, e si chiamerà la *formula dei tre momenti e dei tre abbassamenti*. Essa lega in relazione i tre momenti ed i tre abbassamenti su tre appoggi successivi, nonchè le due lunghezze ed i due pesi unitari relativi alle due travate successive corrispondenti.

Se è $n+1$ il numero degli appoggi, e quindi n il numero delle travate, quello delle incognite ausiliarie risulta:

(*) Momenti inflettenti sugli appoggi . . .	$n-1$
Abbassamenti	$n+1$
Numero totale delle incognite	$2n$

(*) I momenti sugli appoggi estremi sono nulli per effetto del libero appoggio.

Applicando le (93) e (94) successivamente ai vari appoggi ed alle varie coppie di travate risultano alcune equazioni, cioè:

Dalla formula dei 3 momenti (94) . . . . $n - 1$

Dall'equazione generale delle reazioni (93) . $n + 1$

Numero totale delle equazioni . . . . . $2n$

e quindi il problema è completamente determinato. Risolte le $2n$ equazioni e determinati così i momenti sugli appoggi, nonchè gli abbassamenti, si ha mezzo di determinare il momento inflettente e lo sforzo di taglio per un punto qualunque di una qualunque travata. Supponendo gli appoggi fissi, gli abbassamenti $a_r\ a_{r'}\ a_{r''}$ diventano nulli e quindi la (93) si annulla e la (94) si trasforma nell'altra

$$m_r\, l_r + 2\, m_{r'}\, (l_r + l_{r'}) + m_{r''}\, l_{r'} - \frac{1}{4}\, (p_r\, l_r^3 + p_{r'}\, l_{r'}^3) = 0$$

che è la formula di Clapeyron.

V.

SISTEMI RETICOLARI

STATICAMENTE DETERMINATI.

a) Processo analitico.

74. Metodo dei momenti statici pel calcolo delle tensioni. — In un sistema reticolare le tensioni delle varie sbarre che lo compongono si possono facilmente determinare colle sole leggi dell'equilibrio statico allorchè si conosca l'*intensità*, la *direzione* ed il *punto d'applicazione* di tutte le forze esterne sollecitanti, comprese le reazioni degli appoggi. Questo procedimento di calcolo è dovuto al Ritter, si chiama *metodo dei momenti statici* e si fonda sul seguente teorema di meccanica:

In un sistema in equilibrio di punti contenuti in un piano, fra loro invariabilmente uniti, la somma algebrica dei momenti delle forze esterne sollecitanti, rispetto ad un punto qualunque del piano, è eguale a zero.

Il punto di riferimento dei momenti si chiama *polo*.

In una trave reticolare i nodi rappresentano il sistema dei punti collegati invariabilmente dalle sbarre. Fra le forze esterne sollecitanti la trave, oltre i pesi sui vari nodi, si devono considerare anche le reazioni degli appoggi.

Immaginando di sezionare la trave reticolata in modo da tagliare tre sole sbarre, si può prendere in considerazione o la sola parte di trave che sta a sinistra del piano di sezione, oppure quella che sta a destra, ed allora, qualunque sia la parte che si considera, bisogna sostituire alle sbarre sezionate la loro tensione, onde non alterare le condizioni di equilibrio. Si suppone a priori che le tensioni sieno sforzi di trazione, i quali poi devono essere diretti nella direzione delle sbarre. Se il calcolo darà valori positivi per queste tensioni allora esse rappresenteranno sforzi di trazione, se invece si avranno valori negativi allora esse rappresenteranno sforzi di compressione. Per valutare la tensione di una qualunque delle tre sbarre sezionate si prende per polo il punto di incontro delle altre due. Ponendo allora eguale a zero la somma algebrica dei momenti di tutte le forze esterne sollecitanti la parte di trave considerata (comprese le tensioni delle tre sbarre sezionate) si ha una equazione che contiene una sola incognita, cioè la tensione cercata, poichè il momento delle altre due tensioni è nullo, passando esse per il polo. Questa equazione, che si chiama l'*equazione dei momenti statici*, serve dunque a determinare pienamente la cercata tensione.

Si prenderanno positivi i momenti che fanno girare il sistema intorno al polo secondo il movimento della sfera dell'orologio, e negativi quelli che producono una rotazione in senso contrario.

75. Travature poligonali. — Per vedere come si applica il metodo, si considera un qualunque sistema poligonale, per esempio, quello rappresentato dalla Fig. 79, nella quale le sbarre verticali sono tutte equidistanti, cosicchè se è l la lunghezza totale della travata, risulta $^1/_7\, l$ la comune distanza fra esse. I nodi

inferiori intermedi sieno caricati dei pesi P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6. Le reazioni degli appoggi hanno per valore

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{6}{7}P_1 + \frac{5}{7}P_2 + \frac{4}{7}P_3 + \frac{3}{7}P_4 + \frac{2}{7}P_5 + \frac{1}{7}P_6 \\ B &= \frac{1}{7}P_1 + \frac{2}{7}P_2 + \frac{3}{7}P_3 + \frac{4}{7}P_4 + \frac{5}{7}P_5 + \frac{6}{7}P_6 \end{aligned}\right\} \quad (95)$$

Si considerino le sbarre **a b**, **c d**, **a d**, **b d** e si indichi rispettivamente con S ed *I* le porzioni di nervatura superiore ed inferiore, con D la diagonale, e con V la verticale. Colle stesse lettere si denotano anche le tensioni delle rispettive sbarre e con *s*, *i*, *d*, *v*, i corrispondenti bracci di leva. Si taglino con un piano di sezione **m n** le tre sbarre S, *I*, D.

Per determinare la tensione S si sceglie per polo il punto **d** di incontro delle altre due sbarre cointersecate D ed *I*, e si scrive l'equazione dei momenti statici

$$S s + A\frac{3}{7}l - P_1\frac{2}{7}l - P_2\frac{1}{7}l = 0$$

dalla quale, sostituito il valore di A, risulta

$$S = -\frac{l}{49\,s}(4P_1 + 8P_2 + 12P_3 + 9P_4 + 6P_5 + 3P_6) \quad (96)$$

Per determinare la tensione *I* si sceglie per polo il punto **a** di incontro delle altre due sbarre cointersecate S e D e si scrive la equazione dei momenti statici

$$-Ii + A\frac{2}{7}l - P_1\frac{1}{7}l = 0$$

dalla quale, sostituendo per A il suo valore, si ottiene

$$I = \frac{l}{49\,i}(5P_1 + 10P_2 + 8P_3 + 6P_4 + 4P_5 + 2P_6 \quad (97)$$

Dall'esame del valore delle tensioni S ed *I* si vede che *avendo tutti i termini il medesimo segno, tutti i pesi operano nello stesso modo e quindi le sbarre componenti le nervature, ossia le sbarre di contorno, ricevono il massimo sforzo quando sono*

caricati tutti i nodi, mentre la nervatura superiore è sempre compressa e la inferiore sempre stirata.

La tensione D si determina prendendo per polo il punto **o** di incontro delle altre due sbarre cointersecate S ed I e scrivendo l'equazione dei momenti statici

$$D\,d - A\,a + P_1\left(a + \frac{1}{7}\,l\right) + P_2\left(a + \frac{2}{7}\,l\right) = 0$$

d'onde, sostituendo il valore di A, risulta

$$D = \frac{-(a+l)\,P_1 - 2\,(a+l)\,P_2 + 4\,a\,P_3 + 3\,a\,P_4 + 2\,a\,P_5 + a\,P_6}{7\,d} \qquad (98)$$

La tensione V si determina prendendo per polo il punto **o**, di incontro delle due sbarre cointersecate S e **de**, scrivendo l'equazione dei momenti statici

$$-V\,v - A\,a' + P_1\left(a' + \frac{1}{7}\,l\right) + P_2\left(a' + \frac{2}{7}\,l\right) + P_5\left(a' + \frac{3}{7}\,l\right) = 0$$

dalla quale, sostituito il valore di A, si ottiene

$$V = \frac{(a'+l)\,P_1 + 2(a'+l)\,P_2 + 3(a'+l)\,P_3 - 3\,a'\,P_4 - 2\,a'\,P_5 - a'\,P_6}{7\,v} \qquad (99)$$

Dall'esame del valore delle tensioni D e V si vede che i termini hanno segni differenti; non tutti i carichi sui nodi operano dunque allo stesso modo: alcuni producono sforzi di trazione (quelli affetti dal segno +), altri producono sforzi di compressione (quelli affetti dal segno —). Se si considerano caricati tutti i nodi, siccome lo sforzo complessivo è la somma algebrica dei parziali, ne viene che la sbarra non riceve il massimo sforzo. Si scorge inoltre che se nelle espressioni (98) (99) si tien conto o dei soli termini positivi, o dei soli termini negativi, locchè vale lo stesso di trascurare l'azione di quei pesi i cui termini si trascurano, ne risultano per la sbarra due sforzi particolari che rappresentano rispettivamente il massimo sforzo di trazione, ed il massimo sforzo di compressione a cui essa può essere soggetta. Questi sforzi massimi si verificano dunque a *carico parziale*, quando cioè non sieno caricati quei nodi i cui pesi furono trascurati. E siccome un carico mobile può agire parzialmente ne

viene che il carico mobile origina nelle diagonali e verticali, ossia nelle sbarre del traliccio, due sforzi per cadauna e cioè uno sforzo massimo di trazione ed uno sforzo massimo di compressione a seconda della posizione ch'esso prende.

Il massimo sforzo di trazione è una tensione positiva e si chiama *tensione* (*mas*), ed il massimo sforzo di compressione è una tensione negativa e si chiama *tensione* (*min*). Tali denominazioni sono giustificate perciò che una quantità considerata algebricamente è maggiore di zero se è positiva e minore di zero se è negativa, col crescere del valore numerico tanto più grande diventa se è positiva, mentre tanto minore diventa se è negativa. Vedesi dunque che la tensione (*min*) può essere in valore numerico maggiore della tensione (*mas*).

76. Posizione del carico mobile per le tensioni (*mas*) **e** (*min*). — È facile poi stabilire a priori la posizione che deve avere il carico mobile, ossia quali nodi devono essere caricati, onde originare le tensioni (*mas*) e (*min*).

α) **Diagonale.** — Dall'esame delle (98) e (99), nonchè della **Fig. 79**, si vede che condotto il piano di sezione **m n**, allorquando sono carichi tutti i nodi dalla parte del piede la diagonale riceve il massimo sforzo di trazione, ossia è soggetta alla tensione (*mas*) mentre quando sono caricati tutti i nodi dalla parte del capo la diagonale riceve il massimo sforzo di compressione, ossia è soggetta alla tensione (*min*). Per la diagonale considerata le due differenti posizioni del carico mobile sono rappresentate nella **Fig. 80**, ed i valori delle rispettive tensioni sono

$$D_{(mas)} = \frac{4a\,P_3 + 3a\,P_4 + 2a\,P_5 + a\,P_6}{7d}$$

$$D_{(min)} = \frac{-(a+l)\,P_1 - 2(a+l)\,P_2}{7d}$$

β) **Verticale.** — Per la verticale le posizioni del carico mobile che originano rispettivamente le tensioni (*mas*) e (*min*) sono inverse di quelle stabilite per le diagonali.

Per la verticale considerata le due differenti posizioni del carico mobile sono rappresentate nella **Fig. 81**, ed i valori delle ri-

spettive tensioni sono

$$V_{(mas)} = \frac{(a' + l)\,P_1 + 2(a' + l)\,P_2 + 3(a' + l)\,P_3}{7v}$$

$$V_{(min)} = \frac{-3a'\,P_4 - 2a'\,P_5 - a'\,P_6}{7v}$$

Se si considera la travatura sotto l'azione del peso permanente da essa sopportato, allora è evidente che tutti i nodi rimangono sempre carichi, cosicchè bisogna considerare tutti i termini delle (98) e (99) e quindi a seconda che preponderano i termini positivi od i negativi le sbarre del traliccio sono o soltanto stirate o soltanto compresse con uno sforzo continuo.

77. Travature diritte. — Allorchè le sbarre di contorno, ossia le nervature, sono fra loro parallele allora i poli per le diagonali e verticali cadono a distanza infinita. Ciò non pertanto è ancora applicabile il metodo dei momenti statici pel calcolo delle tensioni di queste travature, anzi il metodo si semplifica.

Per vedere come si procede a determinare le tensioni delle sbarre verticali e diagonali è opportuno di considerare la trave reticolare con nervature parallele come un caso speciale di una trave reticolare avente la nervatura inferiore orizzontale e la superiore comunque inclinata ed incontrantesi colla precedente nel punto o, alla distanza a dell'appoggio corrispondente, Fig. 82. I vari nodi abbiano l'eguale distanza λ fra loro e si indichi con $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \ldots$ gli angoli formati dalle diagonali coll'orizzonte; si suppongano applicati ai nodi superiori i carichi $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$. Il valore della reazione A dell'appoggio di sinistra è

$$A = P_0 + \frac{4}{5}P_1 + \frac{3}{5}P_2 + \frac{2}{5}P_3 + \frac{1}{5}P_4$$

Per determinare la tensione di una verticale qualunque, per esempio V_3, si immagini la sezione m'n', si scriva l'equazione dei momenti statici prendendo per polo o, e si ha

$$-V_3(a + 3\lambda) + P_0\,a + P_1(a + \lambda) + P_2(a + 2\lambda) - A\,a = 0$$

da cui

$$V_3 = \frac{-A\,a + P_0\,a + P_1(a + \lambda) + P_2(a + 2\lambda)}{a + 3\lambda}$$

e dividendo per a sopra e sotto

$$V_3 = \frac{-A + P_0 + P_1\left(1 + \frac{\lambda}{a}\right) + P_2\left(1 + \frac{2\lambda}{a}\right)}{1 + \frac{3\lambda}{a}} \qquad (100)$$

Per determinare la tensione della diagonale corrispondente D_3, condotta la sezione **m n** e preso per polo il punto **o**, si scriva l'equazione dei momenti statici

$$D_3\, d + P_0\, a + P_1\,(a + \lambda) + P_2\,(a + 2\lambda) - A\, a = 0$$

ed essendo $d = (a + 3\lambda)$ sen ϕ_3 risulta

$$D_3 = \frac{A\, a - P_0\, a - P_1\,(a + \lambda) - P_2\,(a + 2\lambda)}{(a + 3\lambda)\ \text{sen}\ \phi_3}$$

ossia dividendo per a

$$D_3 = \frac{A - P_0 - P_1\left(1 + \frac{\lambda}{a}\right) - P_2\left(1 + \frac{2\lambda}{a}\right)}{\left(1 + \frac{3\lambda}{a}\right)\text{sen}\ \phi_3} \qquad (101)$$

Immaginando ora che il punto **o** cada a distanza infinita, la travata trapezia si trasforma in un'altra a nervature parallele, **Fig. 83**, e quindi per avere i valori delle tensioni della verticale V_3 e della diagonale D_3 basta porre nelle (100) (101) $a = \infty$ e si ottiene

$$V_3 = \frac{-A + P_0 + P_1\left(1 + \frac{\lambda}{\infty}\right) + P_2\left(1 + \frac{2\lambda}{\infty}\right)}{1 + \frac{3\lambda}{\infty}},$$

$$D_3 = \frac{A - P_0 - P_1\left(1 + \frac{\lambda}{\infty}\right) - P_2\left(1 + \frac{2\lambda}{\infty}\right)}{\left(1 + \frac{3\lambda}{\infty}\right)\text{sen}\ \phi_3}$$

e ricordando che una quantità divisa per l'infinito è eguale a zero diventa

$$\left.\begin{aligned} V_3 &= -A + P_0 + P_1 + P_2 \\ D_3 &= \frac{A - P_0 - P_1 - P_2}{\text{sen}\ \phi_3} \end{aligned}\right\} \qquad (102)$$

vale a dire la tensione di una verticale è eguale alla somma algebrica di tutte le forze esterne poste da una parte del relativo piano di sezione, e quella di una diagonale è eguale all'anzidetta somma algebrica divisa per il seno dell'angolo d'inclinazione della sbarra all'orizzonte. Confrontando le (102) e trascurando gli indici si trova

$$D \operatorname{sen} \varphi = -V \qquad (102a)$$

cioè le tensioni delle verticali si possono determinare mediante quelle delle corrispondenti diagonali, e viceversa, per cui basta calcolare soltanto le tensioni delle une o delle altre, e moltiplicare o dividere rispettivamente le medesime per *sen* φ (essendo φ l'angolo di inclinazione della sbarra che si considera). Questa regola si può anche annunciare nel modo seguente: *le diagonali e verticali hanno, dove esse si incontrano in un nodo non caricato, tensioni verticali di egual valore e di segno contrario.*

Nel caso dunque dei sistemi reticolari con nervature parallele, per calcolare le tensioni delle diagonali e verticali, i cui poli vanno all'infinito, basta ricorrere al seguente teorema di meccanica: *la somma algebrica delle forze verticali che sollecitano un sistema rigido in equilibrio di punti in un piano è uguale a zero.* E quindi condotto il piano di sezione in modo da tagliare la sbarra che si considera (e con essa non più di altre due), si pone eguale a zero la somma algebrica delle forze verticali che si trovano da una parte qualunque del piano di sezione. L'equazione risultante si chiama *equazione dell'equilibrio statico.* Fra le forze esterne va compresa la reazione dell'appoggio relativo alla porzione di travatura che si considera, nonchè la tensione della sbarra sezionata (*per le verticali*), oppure la componente verticale di questa tensione (*per le diagonali*).

Sostituendo nelle (102) il valore della reazione A si ottiene

$$V_3 = \frac{1}{5}(P_1 + 2P_2 - 2P_3 - P_4)$$

$$D_3 = \frac{-P_1 - 2P_2 + 2P_3 + P_4}{5 \operatorname{sen} \varphi_3}$$

Dall'esame delle quali si vede che anche in questo caso non tutti i pesi operano allo stesso modo, per cui, *se si tratta di un*

carico mobile il più sfavorevole cimento ha luogo per carico parziale e cioè si ha per ogni sbarra due sforzi, uno massimo di trazione, tensione (*mas*) tenendo conto dei soli termini positivi, l'altro massimo di compressione, tensione (*min*) tenendo conto dei soli termini negativi, e le rispettive posizioni del carico sono rappresentate dalla Fig. 84, e per determinarle servono le stesse regole stabilite per le travature poligonali al § 26.

In quanto al valore delle tensioni (*mas*) e (*min*) per le sbarre D_3 e V_3 considerate, diventa

$$V_{3(mas)} = \frac{1}{5}(P_1 + 2P_2)$$

$$V_{3(min)} = -\frac{1}{5}(2P_3 + P_4)$$

$$D_{3(mas)} = \frac{-V_{3(min)}}{\operatorname{sen}\phi_3} = \frac{1}{5\operatorname{sen}\phi_3}(2P_3 + P_4)$$

$$D_{3(min)} = \frac{-V_{3(min)}}{\operatorname{sen}\phi_3} = -\frac{1}{5\operatorname{sen}\phi_3}(P_1 + 2P_2)$$

Siccome le sbarre delle nervature hanno i poli a distanza finita, valgono per queste le stesse conclusioni esposte al § 25, per una travatura poligonale qualunque, di cui la rettilinea non è che un caso speciale.

In quanto al carico permanente a cui è soggetta la travatura rettilinea, esso non dà che un unico valore per la tensione di qualunque sbarra sia delle nervature che delle diagonali o delle verticali, inquantochè esso agisce costantemente sopra ogni nodo, e questo valore risulta o positivo o negativo a seconda della posizione della sbarra, ed indica rispettivamente uno sforzo di trazione od uno sforzo di compressione.

b) Formule generali.

28. Formule generali per il calcolo delle tensioni nelle travate reticolari. — Il calcolo delle tensioni per le varie sbarre costituenti una trave reticolare si può istituire per ciascheduna sbarra a sè, formando e risolvendo la relativa equa-

zione dei momenti statici. È assai utile di seguire tale procedimento da chi per la prima volta ne fa applicazione, in quanto conduce ad impadronirsi bene del metodo ed a comprenderne lo spirito.

Però si possono dedurre delle formule generali mediante le quali coi soli dati del problema, e col sussidio di altre quantità facilmente determinabili, si possano calcolare speditamente le tensioni delle varie sbarre.

Si passa alla ricerca di queste formule in via tutt'affatto generale, senza cioè aver particolar riguardo alla forma della trave. Si vedrà nella parte pratica come le formule generali si possono semplificare nei vari casi.

Considerato lo scomparto m^{mo} della travatura reticolare, Fig. 79*b*, si denota con S_m, I_m, D_m, V_m le tensioni delle corrispondenti sbarre, con s_m, i_m, d_m, v_m i rispettivi bracci di leva, con λ l'ampiezza degli scomparti tutti eguali fra loro, e con N il loro numero.

α) **Nervature.** — Il carico permanente per ogni nodo si indica con P, con K quello accidentale e con $Q = P + K$ il totale. Le nervature sono sollecitate nel massimo modo per carico mobile completo, cioè con tutti i nodi caricati di Q, dunque le reazioni degli appoggi sono costanti ed eguali a metà del carico totale.

Condotto il piano di sezione **m n** si considera la porzione di travatura che sta alla sinistra del medesimo, e la reazione del corrispondente appoggio ha per valore $A = \frac{N-1}{2} Q$.

Per la sbarra S_m il polo è il punto **d** rispetto al quale si ha la seguente equazione dei momenti statici

$$S_m s_m + A m\lambda - Q[\lambda + 2\lambda + \cdots + (m-1)\lambda] = 0$$

da cui, sostituito per A il suo valore, ottiensi

$$S_m = -\frac{Q\lambda}{2} \frac{m(N-m)}{s_m} \qquad (103)$$

Per la sbarra I_m il polo è il punto **a**, e l'equazione dei momenti statici è

$$-I_m i_m + A(m-1)\lambda - Q[\lambda + 2\lambda + \cdots + (m-2)\lambda] = 0$$

'onde, fatta la sostituzione del valore di A, si deduce

$$I_m = \frac{Q\,\lambda}{2}\,\frac{(m-1)(N-m+1)}{i_m} \qquad (104)$$

β) **Traliccio.** — Il carico permanente per ogni nodo è ancora P, quello accidentale si chiami K', ed il totale $Q^1 = P + K'$. Le sbarre del traliccio sono sollecitate nel massimo modo dal carico mobile per azione parziale, che origina le due tensioni (*mas*) e (*min*) a seconda che esso si trova da una parte o dall'altra del piano di sezione. Il carico permanente è invece un carico completo che sollecita continuamente le sbarre con un'unica tensione. La tensione totale si ottiene nella somma algebrica delle parziali e si chiamerà ancora *tensione* (*mas*) quella totale che si ottiene dalla somma della tensione (*mas*) dovuta al carico accidentale con la tensione del carico permanente, e *tensione* (*min*) quella totale che risulta dalla somma della tensione (*min*) prodotta dal carico accidentale con la tensione del carico permanente.

Assunti i piani di sezione **m n** per la diagonale D_m ed **m' n'** per la verticale V_m si prende in considerazione la parte di travatura che sta alla loro sinistra. La reazione d'appoggio dipendente dal carico permanente si indica con A_p ed è costante, quella dovuta al carico occidentale con A_k ed è variabile per ogni sbarra, e la reazione totale si denota con $A_m = A_p + A_k$. È facile dedurre il valore della reazione $A_p = \frac{N-1}{2}\,P$, mentre quello di A_k si determinerà per i vari casi.

1) **Diagonali.** — Per la diagonale D_m il polo è il punto **o** distante a_m dall'estremo **A** di sinistra della trave. Per determinare la tensione (*mas*) bisogna supporre carichi di K' tutti i nodi posti dalla parte del piede, cioè alla destra del piano di sezione **m n**, e quindi l'equazione dei momenti statici è

$$D_{m\,(mas)}\,d_m - A_m\,a_m + P\Big\{(a_m+\lambda)+(a_m+2\lambda)+\cdots + [a_m+(m-1)\lambda]\Big\} = 0 \qquad (I)$$

Si ha inoltre

$$A_k = \frac{K'}{N}\,[1+2+3+\cdots+(N-m)]$$

e quindi

$$A_m = A_p + A_k = \frac{N-1}{2} P + \frac{K'}{2N} (N-m)(N-m+1)$$

e sostituendo nella (I) e riducendo

$$D_{m(mas)} = \left\{ \begin{aligned} &\frac{P}{2}\left\{(N+1-2m)\,a_m - \lambda m (m-1)\right\} + \\ &+ \frac{K'}{2} \frac{(N-m)(N-m+1)}{N} a_m \end{aligned} \right\} \frac{1}{d_m} \qquad (105)$$

Per determinare la tensione (*min*) bisogna supporre carichi di K′ tutti i nodi posti dalla parte del capo, cioè quelli a sinistra del piano di sezione **m n** e quindi l'equazione dei momenti statici è

$$\left. \begin{aligned} &D_{m(min)}\, d_m - A_m a_m + (P+K')\left\{(a_m+\lambda)+(a_m+2\lambda)+\cdots \right. \\ &\left. + \left[a_m + (m-1)\lambda\right]\right\} \end{aligned} \right\} = 0 \qquad (II)$$

Ed essendo

$$A_k = \frac{K'}{N}\left\{(N-1)+(N-2)+\cdots+(N-m+1)\right\}$$

diventa

$$A_m = A_p + A_k = \frac{N-1}{2} P + \frac{K'}{2N} (m-1)(2N-m)$$

sostituendo il qual valore nella (II) e riducendo risulta

$$D_{m(min)} = \left\{ \begin{aligned} &\frac{P}{2}\left\{(N+1-2m)\,a_m - \lambda m (m-1)\right\} - \\ &- \frac{K'}{2} \frac{m(m-1)(a_m + N\lambda)}{N} \end{aligned} \right\} \frac{1}{d_m} \qquad (106)$$

2) **Verticali.** — Per la verticale V_m il polo è il punto **o′** distante a'_m dell'estremo **A** di sinistra della trave.

Supponendo carichi di K′ tutti i nodi posti dalla parte del capo della corrispondente diagonale, cioè quelli a sinistra del piano di sezione **m′ n′**, si ha la tensione (*mas*) della verticale e quindi l'equazione dei momenti statici è

$$\left. \begin{aligned} &-V_{m(mas)}\, v_m - A_m a'_m + (P+K')\left\{(a'_m+\lambda)+(a'_m+2\lambda)+\cdots \right. \\ &\left. + (a_m + m\lambda)\right\} \end{aligned} \right\} = 0 \qquad (III)$$

ed anche

$$A_k = \frac{K'}{N}\left\{(N-1)+(N-2)+\cdots+(N-m)\right\}$$

per cui

$$A_m = A_p + A_k = \frac{N-1}{2}P + \frac{K'}{N}\frac{m(2N-m-1)}{2}$$

posto il qual valore nella (III) ottiensi

$$V_{m(mas)} = \left\{\begin{array}{l}\frac{P}{2}\left\{\lambda m(m+1)-(N-1-2m)a'_m\right\}+ \\ +\frac{K'}{2}\frac{m(m+1)(a'_m+N\lambda)}{N}\end{array}\right\}\frac{1}{v_m} \qquad (107)$$

Supposti invece caricati di K', tutti i nodi posti dalla parte del piede della corrispondente diagonale, cioè quelli a destra del piano di sezione **m' n'**, si ha la tensione (*min*) della verticale, per cui si ha la seguente equazione dei momenti statici

$$\left.\begin{array}{l}-V_{m(min)}v_m - A_m a'_m + P\left\{(a'_m+\lambda)+(a'_m+2\lambda)+\cdots\right. \\ \left.+(a'_m+m\lambda)\right\}\end{array}\right\} = 0 \qquad (IV)$$

essendo poi

$$A_k = \frac{K'}{N}\left\{1+2+3+\cdots+(N-m-1)\right\}$$

ne viene che

$$A_m = A_p + A_k = \frac{N-1}{2}P + \frac{K'}{N}\frac{(N-m)(N-m-1)}{2}$$

e ponendo questo valore nella (IV) risulta

$$V_{m(min)} = \left\{\begin{array}{l}\frac{P}{2}\left\{\lambda m(m+1)-(N-1-2m)a'_m\right\}- \\ -\frac{K'}{2}\frac{(N-m)(N-m-1)}{N}a'_m\end{array}\right\}\frac{1}{v_m} \qquad (108)$$

c) Processo grafico.

Carichi fissi.

79. Metodo delle figure reciproche. — Se i nodi sono soggetti all'azione di carichi fissi allora le reazioni degli appoggi sono costanti. In questo caso il calcolo delle tensioni si fa speditamente ricorrendo al metodo delle figure reciproche, dovuto al CREMONA.

Due figure si dicono reciproche quando soddisfano alle seguenti condizioni:

1° Quando hanno un egual numero di lati rispettivamente paralleli.

2° Quando ai lati concorrenti in ciascun nodo della prima figura, corrispondono altrettanti lati rispettivamente paralleli e formanti poligono chiuso nella seconda figura.

3° Quando ai lati formanti poligono chiuso nella prima figura corrispondono altrettanti lati rispettivamente paralleli e concorrenti in un nodo nella seconda figura.

Se si ha una figura costituita:

a) da una rete triangolare rappresentante una travatura reticolare,

b) dalle linee d'azione delle forze applicate nei nodi di questa rete, comprendendo tra queste forze le resistenze de' punti fissi e degli appoggi,

c) da un poligono funicolare di questo sistema di forze,

siccome il sistema di tutte le forze applicate alla travatura deve esser in equilibrio, così una qualunque delle forze stesse, sarà eguale e direttamente contraria alla risultante di tutte le altre, ed un poligono funicolare qualunque dello stesso sistema di forze sarà chiuso. Tale figura dicesi *completa*, si può riguardare come la proiezione piana di un poliedro, epperò ammette delle figure reciproche. Costruendo la figura reciproca della figura completa si avrà rispettivamente a ciascun nodo della figura completa un poligono chiuso della reciproca, i cui lati paralleli alle aste della travatura saranno di grandezze proporzionali agli sforzi rispettivi di trazione o di compressione a cui le aste della travatura me-

desima sono soggette. La figura *reciproca* della completa poi è costituita dal poligono delle forze, dai raggi polari irradiati dal polo dal quale dipende il poligono funicolare della completa, e da un sistema di rete rispettivamente parallele ai lati della travatura e così disposte che a tutti i lati che concorrono in un nodo della completa corrisponde un poligono chiuso di egual numero di lati rispettivamente paralleli nella reciproca.

Per vedere come si applica il metodo si consideri un sistema reticolare qualunque, per esempio quello rappresentato dalla Fig. 85, il quale sui nodi n_2, n_3 è sollecitato rispettivamente dai pesi P_1, P_2.

α) **Reazioni degli appoggi.** — Prima di tutto bisogna determinare le reazioni A e B degli appoggi che corrispondono rispettivamente ai nodi n_1, n_4. Per ciò si costruisce la retta poligono delle forze $0\,P_1\,P_2$ e preso un polo qualunque P e tirati i raggi polari $P\,0$, $P\,P_1$, $P\,P_2$ si costruisce il corrispondente poligono funicolare O I II III sulle linee d'azione dei pesi P_1, P_2. Condotte le linee d'azione delle reazioni (che naturalmente devono essere verticali) fino ad incontrare i lati estremi del poligono funicolare nei punti a e b si conduce la linea di chiusa a b, ed una parallela alla stessa dal polo P, cioè P B, la quale taglia la retta poligono delle forze $0\,P_2$ nei due segmenti $P_2\,B$ e B A che rappresentano rispettivamente le reazioni cercate B ed A.

β) **Valore delle tensioni.** — Trovate le reazioni si passa a determinare le tensioni, che si denotano coi numeri posti accanto a ciascheduna sbarra.

Al nodo n_1 concorrono le tre forze A, 1, 6. Nella figura reciproca dovrà corrispondere un triangolo coi lati rispettivamente paralleli; il segmento B A rappresenta la reazione A in intensità e direzione, se dunque per A e per B si conducono due rette rispettivamente parallele alle sbarre 6 ed 1 il triangolo risultante risolve il problema, cioè i lati 6 ed 1 rappresentano nella scala delle forze le tensioni delle corrispondenti sbarre.

In corrispondenza al nodo n_2 agiscono le quattro forze P_1, 6, 7, 5 e quindi il poligono delle tensioni sarà un quadrangolo coi lati rispettivamente paralleli a queste quattro forze. Un lato del quadrangolo è il segmento $0\,P_1$, un altro lato è la tensione 6 già costruita, il terzo ed il quarto si ottengono conducendo rispettivamente pel punto P_1 e per l'estremo della tensione 6 due parallele alle sbarre 5 e 7. Questi due lati rappresentano nella scala

delle forze le tensioni 5 e 7, di cui si determina la natura nel modo anzidetto.

Al nodo n_3 concorrono le cinque forze P_2, 5, 8, 9, 4 e siccome non se ne conoscono che due, cioè P_2 e 5 non sarebbe possibile costruire il corrispondente pentagono.

Passando però al nodo n_4, ove concorrono le tre forze B, 3, 4 si può senz'altro costruire il relativo triangolo delle tensioni, i cui due lati 3 e 4 rappresentano nella scala delle forze le tensioni delle corrispondenti sbarre.

Determinata così anche la tensione 4 si può senz'altro costruire il poligono corrispondente al nodo n_3 conducendo per gli estremi dei lati 5 e 4 rispettivamente due parallele alle sbarre **8** e **9**, e questi due ultimi lati rappresentano nella scala delle forze le tensioni 8 e 9 delle corrispondenti sbarre.

Al nodo n_5 concorrono le tre forze 3, 9, 2 di cui le due prime note; per determinare la 2 si completa il corrispondente triangolo delle tensioni 2, 3, 9 conducendo per **B** una parallela alla sbarra **2**, che deve passare per il punto d'incontro dei lati 8 e 9, e che nella scala delle forze rappresenta la tensione 2 della corrispondente sbarra.

Al nodo n_6 finalmente concorrono le quattro forze 1, 7, 8, 2 tutte conosciute, alle quali corrisponde il quadrangolo delle tensioni 1, 7, 8, 2.

γ) **Natura delle tensioni.** — Per stabilire poi la natura delle tensioni si suppone tagliato il sistema intorno al nodo considerato e nel poligono delle tensioni si considera quella forza che è nota di direzione. Seguendo allora il contorno del poligono delle tensioni nella direzione stabilita, si osserva in corrispondenza al nodo della travatura se le successive sbarre sono sollecitate dal nodo verso l'esterno, ed allora sono stirate, oppure dall'esterno verso il nodo, ed allora sono compresse.

Relativamente al nodo n_1 il poligono delle tensioni è il triangolo prima costruito, nel quale la forza nota di direzione è la reazione A che cospira all'insù, cioè da **B** verso **A**. Il contorno dunque del triangolo deve essere seguito nel senso indicato dalle freccie.

Si vede allora che la tensione 6 stira la sbarra **6**, perchè agisce dal nodo verso l'esterno, mentre la tensione 1 comprime la sbarra **1** perchè agisce dall'esterno verso il nodo. Nel poligono delle

tensioni si tira in linee grosse quei lati che rappresentano sforzi di compressione, ed in linee sottili quei lati che rappresentano sforzi di trazione, onde mettere in evidenza la natura delle tensioni.

La natura delle altre tensioni si stabilisce nodo per nodo nel modo indicato pel nodo n_1.

Osservazione. — Se i pesi sui nodi hanno una disposizione simmetrica rispetto agli appoggi, allora le reazioni degli stessi sono eguali fra loro e precisamente sono eguali alla metà del carico totale. Perciò costruita la retta poligono delle forze, basta dividerla per metà ed i due eguali segmenti rappresentano le due reazioni, che restano così determinate senz'altra speciale costruzione. In questo caso si possono tralasciare il fascio di raggi polari nella figura *reciproca*, ed il poligono funicolare nella *completa*, inquantochè non si rendono necessari per la costruzione del diagramma delle tensioni. Si può supporre cioè il polo posto a distanza infinita.

Carichi mobili.

80. Generalità. — Un carico mobile può agire o meno sui nodi. Per le sbarre di contorno delle travature reticolari si è già visto che il modo più sfavorevole di cimento ha luogo per carico completo. Si ricade allora nel caso dei carichi fissi sui nodi, colle reazioni degli appoggi costanti, e quindi *per determinare le tensioni delle sbarre di contorno si ricorre al metodo delle figure reciproche.*

Per le sbarre del traliccio invece è più sfavorevole il carico parziale che origina due sforzi massimi cioè la tensione (*mas*), ossia il massimo sforzo di trazione, e la tensione (*min*), ossia il massimo sforzo di compressione, a seconda che sono carichi i nodi posti da una parte o dall'altra del piano di sezione. In questo caso varia la posizione del sopraccarico per ogni sbarra e quindi le reazioni degli appoggi sono variabili. *Per determinare le tensioni delle sbarre del traliccio giova allora ricorrere al metodo delle sezioni o dei momenti statici.*

81. Metodo delle sezioni o dei momenti statici. — Questo metodo consiste nell'usare il seguente artificio: Condotto il piano di sezione per una certa sbarra, si considera la porzione di travatura che è scarica; allora le forze esterne che la solle-

citano sono le sole tensioni delle sbarre sezionate, che non devono essere più di tre, e la reazione del corrispondente appoggio. E siccome la risultante delle tensioni di due delle sbarre sezionate deve passare per il loro punto d'incontro, nonchè per quello di intersezione della terza sbarra colla reazione d'appoggio, così essa risultante resta determinata di direzione. Conoscendo allora la reazione d'appoggio in grandezza e direzione, nonchè la direzione della risultante delle tensioni di due sbarre, e della tensione della terza, si ha modo di costruire un triangolo che serve a determinare quest'ultima.

α) **Diagonali.** — Considerata una diagonale qualunque, per esempio D, Fig. 86a, e condotto il piano di sezione **m n**, così da tagliare non più di tre sbarre, supponendo carichi soltanto i nodi posti dalla parte del piede, cioè alla destra di **m n**, si considera la porzione scarica di travatura, cioè quella di sinistra, la quale è soggetta alle tensioni S, D, I ed alla reazione A dipendente dai pesi sui nodi carichi. Prolungando le due tensioni S ed I s'incontrano in **o**, che è il polo per la diagonale, ed è facile vedere che per **o** deve passare la loro risultante R. Prolungando la D finchè incontra la linea d'azione della reazione A nel punto **r** è facile vedere che per questo punto deve passare la loro risultante. E siccome il sistema è equilibrato sotto l'azione delle quattro forze S, D, I, A, la risultante R delle due S ed I deve essere eguale e direttamente contraria a quella delle due D ed A, cioè essa deve passare anche per **r** e quindi la retta **o r** ne rappresenta la direzione.

Preso allora un segmento verticale proporzionale alla reazione A nella scala delle forze, Fig. 86b, e condotte per gli estremi due parallele rispettivamente alla **r o** ed alla diagonale D considerata, si ha un triangolo di cui un lato rappresenta il valore della risultante R, e l'altro quello della tensione D. Percorso poi il noto ciclo lungo il perimetro del triangolo si vede che la D è stirata, come difatti deve essere per la fatta supposizione di sopracarico, cosicchè il lato D del triangolo rappresenta nella scala delle forze la tensione $D_{(mas)}$ cioè il massimo sforzo di trazione.

Se si suppongono carichi i nodi posti dalla parte del capo della diagonale, cioè quelli a destra del piano di sezione **m n**, allora si considera la porzione di travatura che sta alla sinistra, la quale è soggetta alle tensioni S, D, I ed alla reazione B che dipende dai

pesi sui nodi carichi. Pel polo **o** deve passare la risultante R′ delle due tensioni S, *I* per questo modo di sopraccarico, mentre prolungata la tensione D fino ad incontrare la linea d'azione della reazione B nel punto **r′**, per questo punto deve passare la loro risultante, la quale dovendo essere equilibrata dalla R′ questa deve passare per **r′**. La **o r′** rappresenta dunque la direzione di R′.

Preso un segmento verticale proporzionale alla reazione B, nella scala delle forze, **Fig. 86***c*, e condotte per gli estremi due parallele rispettivamente alla **o r′** ed alla diagonale D, ne risulta un triangolo di cui un lato rappresenta il valore della risultante R′ e l'altro quella della tensione D. Ricorrendo al noto ciclo si vede che la D è compressa, come deve essere per la fatta supposizione di carico, per cui il lato D del triangolo rappresenta nella scala delle forze la tensione $D_{(min)}$, cioè il massimo sforzo di compressione.

β) **Verticali.**—Si consideri una verticale qualunque, per esempio V, **Fig. 87**, e si conduca la linea di sezione **m′ n′**; supposti carichi i nodi alla destra, si considera la porzione scarica di travata, cioè quella a sinistra di **m′ n′**, che è sollecitata dalle tensioni S, V, *I* e della reazione A dipendente dai pesi sui nodi carichi. Le due tensioni S ed *I* passando per il polo **o′** danno un momento nullo, cosicchè deve essere

$$A\,a = -V\,v \quad , \quad V = -\frac{A\,a}{v} \qquad (109)$$

ossia

$$\frac{A}{v} = \frac{V}{a} \qquad (109a)$$

e quindi condotta l'orizzontale **M N**, progettato il polo **o′** in **M** basta portare il valore della reazione A sulla linea d'azione della tensione V a partire dalla **M N** in **c a** e completare il triangolo **M c a**; prolungata allora la linea d'azione della reazione A, la parte intercetta dell'anzidetto triangolo rappresenta nella scala delle forze la tensione V, poichè per la somiglianza dei triangoli rettangoli aventi per cateti verticali rispettivamente V ed A, e per cateti orizzontali *a* e *v*, si soddisfa alla (109*a*). Questo segmento poi, rappresenta la tensione (*min*) per la fatta ipotesi di sopraccarico, come mostra anche la (109).

Se invece si suppongono carichi soltanto i nodi alla sinistra del piano di sezione **m′ n′**, allora si considera la porzione di tra-

vatura scarica, cioè quella che sta alla destra di m' n' la quale è sollecitata dalle tensioni S, V, I e dalla reazione B dipendente dai pesi sui nodi carichi. Siccome le due tensioni S ed I danno un momento nullo rispetto al polo o', così deve essere

$$B\,b = V\,v \quad , \quad V = \frac{B\,b}{v} \qquad (110)$$

ossia

$$\frac{B}{v} = \frac{V}{b} \qquad (110a)$$

Se dunque si porta il valore della reazione B sulla linea d'azione della tensione V a partire dalla M N in c b e partendo da M si fa passare una retta per b formante angolo colla M N, prolungando la linea d'azione della reazione B, la parte intercetta dal detto angolo rappresenta il valore della tensione V nella scala delle forze. Difatti per la somiglianza dei triangoli rettangoli aventi rispettivamente per cateti verticali B e V e per cateti orizzontali v e b si deduce la (110a). Questo segmento rappresenta la tensione (*mas*) per la fatta ipotesi di sopraccarico, come mostra anche la (110).

Osservazione. — Le reazioni A e B devono essere determinate sbarra per sbarra, a priori, nel modo già indicato al § 79, sia per le diagonali come per le verticali.

VI.

DETERMINAZIONE DEI COEFFICIENTI DI LAVORO

SECONDO LA LEGGE DI WÖHLER.

82. Generalità. — Determinato che si abbia lo sforzo massimo cimentante una sbarra, trave o prisma qualunque, onde proporzionarvi le dimensioni della riquadratura bisogna assumere il così detto *coefficiente di lavoro* od anche *carico di sicurezza*, oppure *sforzo unitario di tensione, o di torsione, o di taglio*, vale a

dire lo sforzo massimo con cui potranno tutto al più essere cimentate le fibbre del solido sull'unità di sezione, il quale coefficiente venne indicato rispettivamente con R_t, R_c, R_s, R a seconda che si tratta di trazione, compressione, scorrimento o flessione; in passato tale coefficiente si assumeva costante per una determinata qualità di materiale e non aveasi nessun riguardo al modo particolare di agire dello sforzo esterno, se cioè esso fosse permanente od accidentale; ed in quest'ultimo caso se esso agisse sempre in un senso od anche in sensi opposti (*), o finalmente se esso agisse ripetutamente un numero più o meno grande di volte.

Quanto poco razionale fosse l'antico modo di procedere lo mostrarono con tutta evidenza le ben note esperienze di WÖHLER (**) il quale, in seguito alle molteplici e diligenti ricerche esperimentali intraprese, ha potuto stabilire le seguenti leggi:

1° La rottura dipendente da uno sforzo ripetuto avviene per un carico minore di quello che corrisponde ad uno sforzo fisso; ed il carico di rottura è tanto minore quanto maggiore è il numero delle ripetizioni.

2° Cimentando una sbarra con uno sforzo iniziale fisso ed inoltre con uno sforzo accidentale ripetuto, il numero delle ripetizioni necessarie a produrre rottura è minore quanto più grande è la differenza fra i due sforzi limiti, ossia quanto più grande è lo sforzo ripetuto.

Il limite del carico di rottura non è dunque costante, ricordando che per carico di rottura si intende quello che agisce sulla unità di sezione:

a) Quel tal limite pel quale la rottura avviene in seguito all'azione di uno sforzo fisso, che agisce dunque una sola volta, si chiama *Resistenza assoluta* (Ted. *Tragfestigkeit*) e si indica con K. È precisamente quel limite che unicamente venne considerato in passato.

b) Se il corpo è cimentato ripetutamente, e se dopo ogni sollecitazione il corpo ritorna inerte, esiste un limite massimo di

---

(*) Gli americani però, allorchè trattavasi di sforzi agenti alternativamente in senso contrario, determinavano il massimo valore dello sforzo in un senso, quello massimo nel senso opposto, e prendevano come valore assoluto dello sforzo esterno la somma di questi due massimi parziali.

(**) *Zeitschrift für Bauwesen*, 1860, 1863, 1866, 1870, *Die Festigkeitsversuche mit Eisen un Stahl.*

carico il quale non può mai produrre rottura per quanto illimitatamente venga ripetuto. Questo limite si chiama *Resistenza originaria* (Ted. *Ursprungfestigkeit*) e si denota con ^{r}O.

Se, relativamente all'impiego che si fa dell'asta, l'uso non è perenne, ma temporario, e se quindi il *numero delle ripetizioni è limitato*, il carico massimo che per questo limitato numero di ripetizioni non è capace di produrre rottura, viene a costituire la resistenza originaria dell'asta per quel determinato modo di impiego. È evidente allora che la resistenza originaria varia col variare del numero limitato di ripetizioni, cosicchè essa sarà tanto più grande quanto minore sarà il numero delle ripetizioni possibili in un determinato caso.

c) Se una sbarra è soggetta all'azione di uno sforzo fisso, e quindi costante, vi è un tale sforzo accidentale massimo corrispondente, che per quanto sia ripetuto illimitatamente non produce rottura. A differenti valori dello sforzo fisso corrispondono naturalmente differenti valori dello sforzo accidentale. Lo sforzo fisso, e quello risultante dalla somma del fisso coll'accidentale rappresentano i due limiti fra cui viene cimentata la sbarra. Quando dunque il corpo è cimentato ripetutamente fra due limiti, per i quali si ha una determinata differenza, a tale differenza degli sforzi corrisponde un carico limite massimo pel quale non può mai avvenire la rottura per quanto illimitatamente ripetuta sia la cimentazione del corpo. Questo carico limite si chiama *Resistenza al lavoro* (Ted. *Arbeitsfestigkeit*) e si denota con ^{r}L.

Fra la resistenza al lavoro e la differenza degli sforzi limiti che la cimentano esiste un tale rapporto, secondo la legge di Wöhler, che *tanto più piccola è la resistenza al lavoro quanto maggiore è la differenza degli sforzi*, cioè a dire lo sforzo fisso deve diminuire più di quanto aumenta lo sforzo accidentale, e viceversa.

Il Wöhler nelle sue esperienze ha determinato il valore della *resistenza assoluta* K e della *resistenza originaria* ^{r}O pel ferro e per l'acciaio.

Pel valore della resistenza originaria ^{r}O si fa però un addebito al Wöhler, e cioè di aver proceduto alla sua determinazione mediante un apparecchio che ripeteva rapidamente gli sforzi, cosicchè i pezzi esperiti non avevano tempo di ritornare alla quiete assoluta dopo ogni singola ripetizione dello sforzo, mentre alle

reazioni interne occorre un certo tempo perchè raggiungano la loro intensità.

Non per questo resta meno vero il principio del WÖHLER sulla influenza nociva della ripetizione degli sforzi, nonchè le leggi sperimentali che ne ha dedotto; vuol dire che i valori numerici da esso ottenuti non si prenderanno come assoluti, ma come provvisori da usarsi con convenienti coefficienti di riduzione. D'altronde è da notarsi che i valori del WÖHLER non sono che valori medî per le qualità di ferro ed acciaio da esso sperimentate; mentre poi è certo che *per una data qualità di materiale, tanto la resistenza assoluta* K, *come la originaria* ^{r}O *sono costanti.*

La resistenza al lavoro ^{r}L *invece varia per la stessa qualità di materiale, da caso a caso,* dipendentemente dalla differenza degli sforzi limiti cimentanti il corpo che si considera.

Molti autori, cioè LAUNHARDT, GERBER, SCEFFER, WINKLER, RITTER, cercarono di dedurre delle formule empiriche determinatrici della resistenza al lavoro in ogni caso, in base alle leggi ed ai numeri di WÖHLER. Si dà la preferenza a quella del LAUNHARDT che più si approssima ai risultati numerici del WÖHLER.

83. Determinazione della resistenza al lavoro. — Si suppone sempre una sbarra di sezione uno, cosicchè gli sforzi cimentanti rappresentano anche il carico unitario, quello cioè che cimenta le resistenze unitarie K, ^{r}O, ^{r}L. La differenza degli sforzi poi si chiama *d*.

α) **Formula di Launhardt per sforzi della stessa natura.** — Se una sbarra non è soggetta ad alcun sforzo iniziale, ma soltanto ad uno sforzo accidentale limite massimo A che per quanto venga ripetuto non produce rottura, ed il quale rappresenta la resistenza originaria ^{r}O, allora è

$$d = {}^{r}O - 0 = {}^{r}O \qquad (111)$$

Se invece la sbarra è soggetta ad uno sforzo iniziale fisso J, nonchè ad un accidentale massimo A, che per quanto ripetuto non produce rottura, allora sono J ed J + A i limiti degli sforzi cimentanti; la resistenza al lavoro è $^{r}L = J + A$, mentre la differenza degli sforzi è

$$d = {}^{r}L - J = A \qquad (112)$$

e quindi $${}^{r}L = J + d \qquad (113)$$

Ora, secondo la legge di Wöhler, ${}^{r}L$ è tanto più piccolo quanto più grande è d, ossia deve sempre più diminuire lo sforzo iniziale fisso J col crescere dell'accidentale (A ricordando che $d = A$) acciocchè la resistenza al lavoro ${}^{r}L = J + A$ possa venire illimitatamente cimentata senza produrre la rottura.

Se non vi è sforzo iniziale fisso, cioè $J = 0$, ma soltanto lo sforzo accidentale limite massimo A, allora per la (111) (112) (113)

$${}^{r}L = A = {}^{r}O \quad , \quad d = {}^{r}L = {}^{r}O$$

Se non vi ha sforzo accidentale, cioè $A = 0$, ma soltanto uno sforzo fisso J, limite massimo che non produce rottura, allora

$${}^{r}L = J = K \quad , \quad d = 0$$

d'onde si vede che la *resistenza originaria* ${}^{r}O$ e la *resistenza assoluta* K sono casi speciali della resistenza al lavoro ${}^{r}L$ e precisamente ${}^{r}O$ ed ${}^{r}L$ sono rispettivamente i due limiti minimo e massimo fra cui oscilla ${}^{r}L$.

Si tratta ora di stabilire il valore della resistenza al lavoro ${}^{r}L$ pel caso che la sbarra sia sollecitata da due sforzi limiti qualunque, però della stessa natura, cioè agenti nello stesso senso. Si è già veduto che ${}^{r}L$ dipende da d (113) e si potrà porre

$${}^{r}L = \alpha\, d \qquad (114)$$

Trattasi di stabilire il valore di α. — Siccome

per $d = 0$ ${}^{r}L = K$ e quindi $\alpha = \infty$

per $d = {}^{r}O$ ${}^{r}L = {}^{r}O$ » $\alpha = 1$

così Launhardt ha stabilito per α un tale valore che soddisfa appunto a queste due condizioni, e precisamente

$$\alpha = \frac{K - {}^{r}O}{K - {}^{r}L} \qquad (115)$$

Questo valore di α, che soddisfa pei due valori limiti della resistenza al lavoro, cioè ${}^{r}L = K$, ${}^{r}L = {}^{r}O$, soddisfa anche per valori intermedi?

Ciò non si può verificare che in via sperimentale. — Per le (114) (115) e (102) si ha

$$ {}^{r}L = \frac{K - {}^{r}O}{K - {}^{r}L}\, d = \frac{K - {}^{r}O}{K - {}^{r}L}\,({}^{r}L - J) $$

da cui

$$ {}^{r}L = {}^{r}O\left(1 + \frac{K - {}^{r}O}{{}^{r}O} \cdot \frac{J}{{}^{r}L}\right) \qquad (116) $$

e quindi risolvendo rispetto ad ${}^{r}L$

$$ {}^{r}L = \frac{{}^{r}O}{2} + \sqrt{\left(\frac{{}^{r}O}{2}\right)^{2} + J\,(K - {}^{r}O)} \qquad (117) $$

osservando che davanti alla radice quadrata si deve porre il segno + poichè ${}^{r}L$ deve essere positiva e maggiore di ${}^{r}O$.

Tanto K, ${}^{r}O$, come, per un determinato valore di J, anche ${}^{r}L$ variano a seconda che cambia la qualità del materiale e la natura dello sforzo cimentante, cosicchè per assumere risultati sperimentali attendibili bisogna che provengano da esperienze della stessa natura, eseguite sullo stesso materiale.

I risultati che ebbe Wöhler nelle sue esperienze e che meglio si prestano a confronti sono quelli ottenuti coll'acciaio fuso Krupp non temperato per molle: Questo materiale assoggettato alla flessione diede per pollice quadrato renano

$$ K = 1100 \text{ quintali} \quad , \quad {}^{r}O = 500 \text{ quintali} $$

e quindi sostituendo nella (117) si ha

$$ {}^{r}L = 250 + \sqrt{62500 + 600\,J} \qquad (117a) $$

Prendendo per J i successivi valori indicati nella tabella XXIV si trovano in essa i corrispondenti valori di ${}^{r}L$ dati rispettivamente dalle esperienze di Vöhler e dalla (117*a*).

Tabella XXIV.

Per . . . . . J =	0	250	400	600	1100
${}^{r}L$ dalle esperienze . . .	500	700	800	900	1100
${}^{r}L$ dalla formula	500	711	800	900	1100

Visto ora come i risultati della formula corrispondano in modo così sorprendente con quelli sperimentali, si può con fiducia accettare la (116) per valutare la resistenza al lavoro in ogni caso, perchè essa sussiste colla (117) che ha servito per i confronti.

È poi da osservare che mentre pel passato si riteneva capace di produrre rottura il solo carico $K = 1100$ quintali, possono invece produrla carichi ben minori, cioè fino a soli 500 quintali.

Chiamando $_{min}F$ lo sforzo limite di minor valore numerico e $_{mas}F$ lo sforzo limite di maggior valore numerico, con cui può venire cimentata una sbarra qualunque di una costruzione, si deduce la seguente relazione

$$\frac{J}{{}^{r}L} = \frac{{}_{min}F}{{}_{mas}F}$$

cosicchè la (116) diventa

$${}^{r}L = {}^{r}O\left(1 + \frac{K - {}^{r}O}{{}^{r}O} \cdot \frac{{}_{min}F}{{}_{mas}F}\right) \qquad (116a)$$

che è la formula di Launhardt, da applicarsi soltanto allora che gli sforzi $_{min}F$ e $_{mas}F$ sieno della stessa natura, cioè operanti nello stesso senso.

β) **Formula di Weyrauch per sforzi di natura contraria.** — Se una sbarra è soggetta a sforzi alternati di trazione e compressione, in allora la formula di Launhardt non vale più per determinare la resistenza al lavoro.

Il Weyrauch, basandosi sulle leggi di Wöhler e seguendo un procedimento analogo a quello di Launhardt, dedusse una formula per determinare la resistenza al lavoro anche in questo caso.

Il Wöhler fece delle esperienze per il solo caso che gli sforzi agenti in direzioni contrarie fossero eguali. Quel carico limite massimo che per quanto illimitatamente ripetuto alternativamente nei due sensi contrari non produce rottura, origina la *Resistenza alla vibrazione* e si denota con ${}^{r}V$.

Trattasi di determinare, nel caso generale, che i due sforzi di natura contraria sieno di differente valore numerico, il carico di rottura, che si chiama *Resistenza al lavoro di vibrazione e si indica con* ${}^{r}L_{v}$. Sia una sbarra soggetta alternativamente alla trazione ed alla compressione. Per un determinato valore del mag-

giore di questi sforzi accidentali A corrisponderà un particolare valore massimo dell'altro sforzo accidentale A_0 tale che la rottura non avviene per il massimo numero di vibrazioni che si possono verificare fra $\pm A$ e $\pm A_0$, relativamente al modo di impiego che si fa dell'asta. Per esser poi A il maggiore sforzo, esso rappresenta anche la resistenza al lavoro di vibrazione ${}^rL_v$ cioè $A = {}^rL_v$. La differenza degli sforzi è dunque in questo caso

$$d = {}^rL_v + A_0 \qquad (118)$$

da cui

$${}^rL_v = d - A_0 \qquad (119)$$

purchè le quantità vengano sostituite semplicemente col loro valore numerico. Ricordando che per la legge di WÖHLER la resistenza al lavoro è tanto più piccola quanto d è maggiore ne viene che ${}^rL_v$ dipende da d e si potrà ancora mettere

$${}^rL_v = \alpha\, d \qquad (120)$$

Se lo sforzo $A_0 = 0$ allora vi ha sollecitazione in un solo senso e si cimenta quindi la resistenza originaria ${}^rO$ cosicchè per

$$A_0 = 0 \quad , \quad {}^rL_v = {}^rO \quad , \quad d = {}^rL_v = {}^rO$$

Se invece lo sforzo A_0 è eguale alla resistenza alla vibrazione ${}^rV$, allora necessariamente è $A_0 = A$ e quindi $A_0 = {}^rV = {}^rL_v$ sicchè per

$$A_0 = {}^rV \quad , \quad {}^rL_v = {}^rV \quad , \quad d = {}^rV + {}^rV = 2\,{}^rV$$

Si scorge poi per la (120) che

per ${}^rL_v = {}^rO$ è $\alpha = 1$

per ${}^rL_v = {}^rV = \frac{1}{2}\, d$ è $\alpha = \frac{1}{2}$

cosicchè il valore di α che soddisfa a queste due condizioni è il seguente

$$\alpha = \frac{{}^rO - {}^rV}{2\,{}^rO - {}^rV - {}^rL_v}$$

d'onde per le (118) e (120)

$$ {}^{r}L_v = \frac{{}^{r}O - {}^{r}V}{2\,{}^{r}O - {}^{r}V - {}^{r}L_v}\,d = \frac{{}^{r}O - {}^{r}L_v}{2\,{}^{r}O - {}^{r}V - {}^{r}L_v}\,({}^{r}L_v + A_0) $$

da cui si deduce

$$ {}^{r}L_v = {}^{r}O\left(1 - \frac{{}^{r}O - {}^{r}V}{{}^{r}O}\,\frac{A_0}{{}^{r}L_v}\right) \qquad (121) $$

Se dunque si indica con ^{mas}F lo sforzo di maggior valore assoluto in un senso e con $^{mas}F_0$ lo sforzo di maggior valore assoluto in senso opposto, sempre inteso che sia $^{mas}F > {}^{mas}F_0$, sussiste la relazione

$$ \frac{A_0}{{}^{r}L_v} = \frac{{}^{mas}F_0}{{}^{mas}F} $$

e quindi

$$ {}^{r}L_v = {}^{r}O\left(1 - \frac{{}^{r}O - {}^{r}V}{{}^{r}O}\,\frac{{}^{mas}F_0}{{}^{mas}F}\right) \qquad (121a) $$

che è la formula di Weyrauch, nella quale si devono porre soltanto i valori numerici, senza badare al segno. È da avvertire poi che $^{r}L_v$ è la resistenza al lavoro nel senso del massimo sforzo assoluto ^{mas}F.

84. Carico di sicurezza o coefficiente di lavoro. — Per garantire la stabilità delle costruzioni metalliche bisogna che le varie parti sieno cimentate con un carico effettivo, detto *carico di sicurezza* o *coefficiente di lavoro*, minore di quello rappresentato dalla resistenza al lavoro ^{r}L. Questo carico verrà più o meno diminuito a seconda della destinazione dell'opera ed a seconda specialmente dell'entità degli effetti dinamici dipendenti dall'azione del sopraccarico accidentale, dei quali di solito non si può tener conto altrimenti.

Basandosi ai risultati delle esperienze di Wöhler ecco come si procede a determinarlo.

α) **Ferro.**

1) **Sbarre cimentate in un solo senso.** — Dalle esperienze di Wöhler risultò per molte qualità di ferro la resistenza originaria $^{r}O = 22$ chilogrammi per millimetro quadrato, e la resistenza assoluta per

qualità scadenti K = 33 chilogrammi per millimetro quadrato. Ne risulta

$$\frac{K - {}^{r}0}{{}^{r}0} = \frac{33 - 22}{33\,?\,?} = \frac{1}{2}$$

e quindi la resistenza al lavoro (116*a*) diventa

$${}^{r}L = 22\left(1 + \frac{1}{2}\frac{{}^{min}F}{{}^{mas}F}\right)$$

e prendendo il carico di sicurezza, o coefficiente di lavoro, R compreso fra $^1/_3$ ed $^1/_4$ della resistenza al lavoro risulta per valore medio

$$R = 6\left(1 + \frac{1}{2}\frac{{}^{min}F}{{}^{mas}F}\right) \text{ Kg. per mm. } \square \qquad (122)$$

2) **Sbarre cimentate in sensi contrari.** — Dalle esperienze di Wöhler risultò ${}^{r}0 = 22$ chilogrammi per millimetro quadrato, ${}^{r}V = 12$ chilogrammi per millimetro quadrato, da cui

$$\frac{{}^{r}0 - {}^{r}V}{{}^{r}0} = \frac{22 - 12}{22} = \frac{5}{11}$$

ed arrotondando in favore della stabilità si può prendere

$$\frac{{}^{r}0 - {}^{r}V}{{}^{r}0} = \frac{1}{2}$$

per cui la resistenza al lavoro di vibrazione (121*a*) diventa

$${}^{r}L_{v} = 22\left(1 - \frac{1}{2}\frac{{}^{mas}F_{0}}{{}^{mas}F}\right)$$

ed il valor medio del coefficiente del lavoro di vibrazione

$$R_{v} = 6\left(1 - \frac{1}{2}\frac{{}^{mas}F_{0}}{{}^{mas}F}\right) \text{ Kg. per mm. } \square \qquad (123)$$

β) **Acciaio.** — Le rilevantissime differenze che si riscontrarono nella resistenza dell'acciaio a seconda che varia il tenore in fosforo ed in carbonio, nonchè il processo di fabbricazione, non permettono di dare un valore medio del carico di sicurezza da adottarsi in ogni caso e per qualunque qualità di questo materiale.

Si danno perciò alcuni valori della resistenza al lavoro per varie qualità basandosi sui risultati di Wöhler.

1) **Sbarre cimentate in un solo senso.** — Per acciaio fuso Krupp non temperato per molle risultò

$$^{r}L = 36{,}5 \left(1 + \frac{6}{5} \frac{min F}{mas F} \right)$$

per lo stesso materiale temperato

$$^{r}L = 43{,}9 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{min F}{mas F} \right)$$

Per acciaio fuso Krupp da alberi, avendosi trovato $K = 73{,}4$ chilogrammi per millimetro quadrato ed $^{r}O = 35{,}1$ chilogrammi per millimetro quadrato, risultò

$$\frac{K - {}^{r}O}{{}^{r}O} = \frac{7}{6}$$

e quindi

$$^{r}L = 35{,}1 \left(1 + \frac{7}{6} \frac{min F}{mas F} \right)$$

Trattandosi di ponti per altro, per i quali devesi usare la massima prudenza nell'assumere il carico di sicurezza, il Weyrauch consiglia di prendere :

Per l'acciaio di ordinaria durezza

$$^{r}L = 35 \left(1 + \frac{9}{11} \frac{min F}{mas F} \right)$$

Per l'acciaio molto tenero

$$^{r}L = 35 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{min F}{mas F} \right)$$

Assumendo dunque il coefficiente di lavoro compreso fra $^{1}/_{3}$ ed $^{1}/_{4}$ della resistenza al lavoro risulta mediamente :

Per l'acciaio di ordinaria durezza

$$R = 11 \left(1 + \frac{9}{11} \frac{min F}{mas F} \right) \text{ Kg. per mm. } \square \qquad (124)$$

Per l'acciaio molto tenero

$$R = 10 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{minF}{masF} \right) \text{ Kg. per mm.} \square \qquad (124a)$$

2) **Sbarre cimentate in sensi contrari.** — Per lo stesso acciaio fuso da alberi il Wöhler trovò ${}^{r}V = 20,5$ e quindi

$$\frac{{}^{r}O - {}^{r}V}{{}^{r}O} = \frac{35,1 - 20,5}{35,10} = \frac{5}{12}$$

da cui

$${}^{r}L_v = 35,1 \left(1 - \frac{5}{12} \frac{masF_0}{masF} \right)$$

Trattandosi di ponti, Weyrauch consiglia di prendere:

Per acciaio di ordinaria durezza

$${}^{r}L_v = 33 \left(1 - \frac{5}{11} \frac{masF_0}{masF} \right)$$

Per acciaio molto tenero

$${}^{r}L_v = 33 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{masF_0}{masF} \right)$$

d'onde, se si prende il coefficiente del lavoro di vibrazione compreso fra $^1/_3$ ed $^1/_4$ della resistenza al lavoro di vibrazione, risulta:

Per acciaio di ordinaria durezza

$$R_v = 10 \left(1 - \frac{5}{11} \frac{masF_0}{masF} \right) \text{ Kg. per mm.} \square \qquad (125)$$

Per acciaio molto tenero

$$R_v = 9 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{masF_0}{masF} \right) \text{ Kg. per mm.} \square \qquad (125a)$$

VII.

SPINTA DELLE TERRE.

85. Generalità. — La terra è costituita da minutissime particelle, le quali sono tenute aderenti le une alle altre più o meno fortemente, in modo da formare delle grandi masse, in virtù di una forza naturale detta *coesione*.

Praticando nella terra naturale un taglio con inclinazione anche ripida, esso, per effetto della coesione, si mantiene equilibrato; anzi ciò succede anche quando il taglio sia a piombo, purchè però non si abbia sorpassato un certo limite di profondità. Ma, siccome gli agenti atmosferici distruggono rapidamente la coesione, per poco che il taglio rimanga esposto, la coesione della terra va affievolendosi sempre più così che, perduta la forza che ne tiene collegate le particelle, le terre franano, ed il taglio va disponendosi secondo una inclinazione sempre più dolce. Viene un momento però che le terre, abbenchè prive di coesione, cessano di franare, ed il taglio si regge permanentemente dopochè ha raggiunto una certa inclinazione. Allora è l'attrito che sottentra alla coesione e che impedisce un ulteriore scoscendimento del masso di terra.

L'angolo formato dalla superficie secondo cui si dispone naturalmente la terra priva di coesione coll'orizzonte, si dice *angolo di attrito* od anche *scarpa naturale*.

Se si deve adunque praticare nel terreno un taglio **A B** verticale, o quasi, **Fig. 88**, non si può fare nessun assegnamento sulla coesione delle terre, e bisogna quindi sostenere il taglio mediante un muro, il quale impedisca lo smottamento delle stesse.

Ammettendo che la coesione del terreno sia affatto distrutta, è certo che, se non si pone il muro, il terrapieno smotta, disponendosi da per sè secondo la scarpa naturale, prendendo cioè quella tale inclinazione **B C**, per la quale l'attrito è capace di impedire un'ulteriore discesa delle particelle di terra lungo la medesima. Addossato il muro, vedesi che suo ufficio è quello di sostenere il prisma di terra che avrebbe tendenza a scoscendere ed il quale evidentemente esercita una pressione sul muro stesso.

E siccome il muro oppone una resistenza al movimento del detto prisma, la quale altera le condizioni d'attrito, nei vari piani che possono immaginarsi condotti dal punto B nell'ammasso, ne consegue che il piano di rottura non coincide più col piano della scarpa naturale, ma prende un'altra posizione qualunque B C'.

Il problema che ora interessa di risolvere, è quello di determinare questo piano di rottura, e la massima pressione che sopporta il muro per effetto del prisma sostenuto, la quale pressione dicesi in pratica *spinta delle terre*.

La risoluzione del problema si può fare tanto per via analitica che grafica, e lo si risolverà nei due modi. Si premette però che non verrà studiata la questione sotto l'aspetto il più generale, ma sarà limitata soltanto a quei casi che trovano applicazione nelle ricerche di stabilità dei piedritti dei ponti metallici.

Le ricerche che si devono fare, si basano sulle seguenti ipotesi.

1) **La superficie di rottura è un piano.** — Siccome generalmente ciò non avviene in fatto, ma anzi il più delle volte la superficie di rottura si presenta curva, così i risultati ottenuti in base alla suddetta ipotesi, possono essere considerati soltanto come valori di approssimazione, ma che stante le esperienze espressamente istituite, rispondono abbastanza esattamente per i bisogni della pratica.

2) **La terra non ha coesione.** — Coesione ed attrito entro una massa di terra non vengono simultaneamente in pieno effetto, anzi l'ultimo viene ad agire soltanto allora che la prima sia distrutta tutta o nella massima parte. Perciò, quando si presenti il caso di dover determinare la massima spinta sopra un muro di sostegno, prodotta da un terrapieno appena smosso ed affatto sciolto, nei quali casi la coesione è piccolissima e trascurabile, l'ipotesi suddetta non è minimamente esagerata.

a) Processo analitico.

86. Terrapieno spianato di livello colla sommità del muro che deve sostenerlo, e caricato superiormente di un peso uniformemente distribuito. — Si considera per primo la faccia premuta del muro inclinata alla

verticale, e siccome il sistema mantiene costantemente lo stesso profilo su tutta la lunghezza, si considera, per semplicità, una porzione che abbia per lunghezza l'unità lineare.

Sia **BC** il piano di rottura del prisma che ha tendenza a scoscendere, **Fig. 89,** sia **AA′ CC′** la porzione di sopraccarico che smotterebbe insieme col prisma e quindi quella che influenza il medesimo; si chiami

k il peso uniformemente distribuito sull'unità superficiale,
h l'altezza del muro e del terrapieno,
α l'angolo che fa colla verticale la faccia premuta del muro, a cui corrisponde il rapporto m di inclinazione,
ω l'angolo che fa il piano di rottura **BC** colla faccia premuta del muro,
P il peso del prisma smottante **ABC**, compreso quello del sopraccarico **AA′ C′C**
p il peso dell'unità di volume della terra costituente il terrapieno,
f il coefficiente d'attrito della terra sopra la terra,
f' il coefficiente d'attrito della terra sopra la faccia del muro.

Si può ritenere che il prisma smottante agisca come un cuneo che tende ad addentrarsi fra il muro ed il terrapieno, per cui esso preme e striscia sopra i due piani **AB** e **BC**. Le pressioni normali ai detti due piani sieno rispettivamente S ed R, per cui le corrispondenti resistenze d'attrito, dirette in senso inverso al movimento del prisma, sono f'S ed fR. Le forze che operano adunque sul prisma **ABC** sono il peso P, le resistenze o reazioni opposte dai due piani, eguali e contrarie alle pressioni, cioè S ed R, e le resistenze d'attrito f'S ed fR.

Scomposte queste forze orizzontalmente e verticalmente, è necessario per l'equilibrio del prisma che, tanto la somma delle componenti verticali, quanto quella delle componenti orizzontali, sia eguale allo zero. Si avranno perciò le due equazioni

$$R\,\mathrm{sen}(\omega-\alpha)+f\,R\cos(\omega-\alpha)+S\,\mathrm{sen}\,\alpha+f'S\cos\alpha-P=0 \qquad (I)$$

$$R\cos(\omega-\alpha)-f\,R\,\mathrm{sen}(\omega-\alpha)-S\cos\alpha+f'S\cos\alpha=0 \qquad (II)$$

Dalla (I) si ottiene

$$R=\frac{P-S(\mathrm{sen}\,\alpha+f'\cos\alpha)}{\mathrm{sen}(\omega-\alpha)+f\cos(\omega-\alpha)} \qquad (Ia)$$

è dalla (II)

$$R = \frac{S(\cos\alpha - f' \operatorname{sen}\alpha)}{\cos(\omega - \alpha) - f \operatorname{sen}(\omega - \alpha)} \qquad (IIa)$$

Ed eliminando R fra la (I*a*) e (II*a*) risulta

$$S\left[\begin{array}{l}(\cos\alpha - f'\operatorname{sen}\alpha)\{\operatorname{sen}(\omega-\alpha) + f\cos(\omega-\alpha)\} \\ +(\operatorname{sen}\alpha + f'\cos\alpha)\{\cos(\omega-\alpha) - f\operatorname{sen}(\omega-\alpha)\}\end{array}\right] =$$

$$= P\{\cos(\omega-\alpha) - f\operatorname{sen}(\omega-\alpha)\} \qquad (III)$$

ossia

$$S\left[\begin{array}{l}(1 - ff')\{\cos\alpha\operatorname{sen}(\omega-\alpha) + \operatorname{sen}\alpha\cos(\omega-\alpha)\} \\ +(f+f')\{\cos\alpha\cos(\omega-\alpha) - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(\omega-\alpha)\}\end{array}\right] =$$

$$= P\{\cos(\omega-\alpha) - f\operatorname{sen}(\omega-\alpha)\} \qquad (III a)$$

Si chiami x la distanza **A C** che determina la posizione del piano di rottura, ed h_r l'altezza fittizia di uno strato di terra che, distribuito sopra il terrapieno, dia un peso eguale a quello del sopraccarico h, la quale altezza è determinata dalla formula $h_r = \frac{h}{p}$; si ha

$$P = \frac{1}{2} p h x + p h_r x = \frac{1}{2} p (h + 2h_r) x$$

$$\mathbf{AB} = h\sqrt{1+m^2}$$

$$\mathbf{BC} = \sqrt{h^2(1+m^2) + x^2 - 2mhx}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$$

$$\operatorname{sen}(\omega-\alpha) = \frac{x - mh}{\sqrt{\{h^2(1+m^2) + x^2 - 2mhx\}}}$$

$$\cos(\omega-\alpha) = \frac{h}{\sqrt{\{h^2(1+m^2) + x^2 - 2mhx\}}}$$

Sostituendo nella (III*a*) questi valori, ed eseguendo le opportune riduzioni si ha

$$S\left[\frac{(1-ff')\,x+(f+f')\left\{h\,(1+m^2)-m\,x\right\}}{\sqrt{1+m^2}}\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\,p\,(h+2h_1)\,x\left\{h-f\,x+f\,m\,h\right\}$$

da cui

$$S=\frac{1}{2}p(h+2h_1)\sqrt{1+m^2}\,\frac{x(1+fm)h-fx^2}{x\left\{1-ff'-(f+f')m\right\}+(f+f')(1+m^2)h} \qquad (IV)$$

e ponendo per semplicità

$$1+fm=a \quad , \quad 1-ff'-(f+f')m=b \quad , \quad (1+m^2)(f+f')=c \qquad (V)$$

nella (IV), essa diventa

$$S=\frac{1}{2}\,p\,(h+2h_1)\,\sqrt{1+m^2}\,\frac{a\,h\,x-f\,x^2}{b\,x+c\,h} \qquad (Va)$$

la quale dà il valore della spinta S, ma in funzione della incognita x, per cui essa rimane indeterminata. Allo scopo di determinarla si osservi che x individua la posizione del piano di rottura, e che al variare di x varia anche la grandezza del prisma smottante, e quindi la intensità delle pressioni che esso esercita sui piani di scorrimento **AB** e **BC**. E siccome interessa conoscere quale sia la *massima pressione* S che il prisma esercita sulla faccia **AB** del muro, si deve determinare quel tale valore della variabile x che rende massimo il valore di S.

Si fa perciò la derivata della parte variabile della (V*a*), cioè della frazione $\frac{a\,h\,x-f\,x^2}{b\,x-c\,h}$, e ponendo questa derivata eguale allo zero, si ottiene l'equazione di condizione per il massimo valore di S. Così operando si ha

$$-b\,f\,x^2-2f\,h\,c\,x+c\,a\,h^2=0$$

che risolta rispetto ad x, ne determina pienamente il valore, cioè

$$x=\frac{h\,c}{b}\left\{-1+\sqrt{1+\frac{a\,b}{f\,c}}\right\} \qquad (126)$$

Col mezzo della (126) si può quindi precisare *la posizione del piano di più facile rottura.*

Bisogna adesso sostituire il valore di x dato dalla (126) nella (V*a*), ma per semplificare l'operazione, invece che introdurlo nella frazione $\frac{a\,h\,x - f\,x^2}{b\,x + c\,h}$, lo si sostituisce nel rapporto delle derivate del numeratore e del denominatore, giacchè si ottiene lo stesso risultato. Tale rapporto è

$$\frac{a\,h - 2\,f\,x}{b} = \frac{a\,h}{b} - \frac{2\,f}{b} \cdot \frac{h\,c}{b}\left\{-1 + \sqrt{1 + \frac{a\,b}{f\,c}}\right\}$$

ossia riducendo

$$\frac{a\,h - 2\,f\,x}{b} = h\left(\frac{\sqrt{f\,c + a\,b} - \sqrt{f\,c}}{b}\right) \qquad \text{(VI)}$$

e quindi il massimo valore di S si ottiene sostituendo nella (126), in luogo della frazione variabile, il suo massimo valore dato dalla (VI), cioè

$$S = \frac{1}{2}\,p\,(h + 2h_1)\sqrt{1 + m^2}\,h\left(\frac{\sqrt{f\,c + a\,b} - \sqrt{f\,c}}{b}\right)^2$$

ed introducendo in luogo di a, b e c i valori dati dalla (V) ed operando alcune riduzioni, si ottiene definitivamente il massimo valore della spinta esercitata dal terrapieno sulla faccia premuta del muro, nella

$$S = \frac{1}{2}\,p\,h\,(h + 2h_1)\sqrt{1 + m^2}\left\{\frac{\sqrt{(1 - f'\,m)(1 + f^2)} - \sqrt{(1 + m^2)(f + f')f}}{1 - f\,f' - (f + f')\,m}\right\}^2 \qquad (127)$$

Se la faccia premuta del muro è verticale allora è $m = 0$ e la (127) diventa

$$S = \frac{1}{2}\,p\,h\,(h + 2h_1)\left\{\frac{\sqrt{1 + f^2} - \sqrt{f\,(f + f')}}{1 - f\,f'}\right\}^2 \qquad (128)$$

Considerando che negli anfratti e nelle scabrosità, che presenta la faccia greggia del muro a contatto della terra, si insinua la terra stessa e vi aderisce fortemente in modo da costituire una

specie di incamiciatura o crosta terrosa sulla faccia del muro, si può ritenere che, nello stato prossimo al moto, anche sulla faccia del muro si produca la resistenza di attrito della terra sulla terra, e perciò si può porre $f = f'$ e quindi le (127) e (128) diventano

$$S = \frac{1}{2} p h (h + 2h_1) \sqrt{1+m^2} \left\{ \frac{\sqrt{(1-fm)(1+f^2)} - f\sqrt{2(1+m^2)}}{1-f^2-2fm} \right\}^2 \quad (127a)$$

$$S = \frac{1}{2} p h (h + 2h_1) \left\{ \frac{\sqrt{1+f^2} - f\sqrt{2}}{1-f^2} \right\}^2 \quad (128a)$$

Nel caso di terre ordinarie, l'angolo d'attrito è di 45°, e quindi il coefficiente d'attrito f, che ne è la cotangente, diventa eguale all'unità. Per $f = 1$ la quantità fra parentesi della (128a) prende la forma indeterminata $0/0$. Si può evitare questo inconveniente ponendo la (128a) sotto la seguente forma

$$S = \frac{1}{2} p h (h + 2h_1) \left\{ \frac{(\sqrt{1+f^2} - f\sqrt{2})(\sqrt{1+f^2} + f\sqrt{2})}{(1-f^2)(\sqrt{1+f^2} + f\sqrt{2})} \right\}^2$$

che ridotta diventa

$$S = \frac{1}{2} p h (h + 2h_1) \frac{1}{(\sqrt{1+f^2} + f\sqrt{2})^2}$$

e nella quale posto $f = 1$ si ottiene

$$S = \frac{p h}{16} (h + 2h_1) \quad (128b)$$

In pratica però si usa, dalla generalità dei costruttori, di trascurare la resistenza d'attrito prodotta dallo strisciamento del prisma smottante sulla faccia del muro, per viemeglio favorire la stabilità. In questo caso basta porre $f' = 0$ nelle (127) e (128) che diventano rispettivamente

$$S = \frac{1}{2} p h (h + 2h_1) \sqrt{1+m^2} \left\{ \frac{\sqrt{1+f^2} - f\sqrt{1+m^2}}{1-fm} \right\}^2 \quad (129)$$

$$S = \frac{1}{2} p h (h + 2h_1) \left\{ \sqrt{1+f^2} - f \right\}^2 \quad (130)$$

87. Terrapieno spianato di livello colla sommità del muro, senza sopraccarico. — Per avere in questo caso i valori della spinta, basta porre nelle (127) (128) (127*a*) (128*a*) (128*b*) (129) (130) $h_1 = o$, e si ottiene rispettivamente:

Per il muro con la faccia premuta inclinata

$$S = \frac{1}{2} p h^2 \sqrt{1+m^2} \left\{ \frac{\sqrt{(1-f'm)(1+f^2)} - \sqrt{(1+m^2)(f+f')f}}{1-ff'-(f+f')m} \right\}^2 \qquad (131)$$

Per il muro con la faccia premuta verticale, e quindi per $m = o$

$$S = \frac{1}{2} p h^2 \left\{ \frac{\sqrt{1+f^2} - \sqrt{f(f+f')}}{1-ff'} \right\}^2 \qquad (132)$$

Quando è $f' = f$, la (131) e (132) diventano

$$S = \frac{1}{2} p h^2 \sqrt{1+m^2} \left\{ \frac{\sqrt{(1-fm)(1+f^2)} - f\sqrt{2(1+m^2)}}{1-f^2-2fm} \right\}^2 \qquad (131a)$$

$$S = \frac{1}{2} p h^2 \left\{ \frac{\sqrt{1+f^2} - f\sqrt{2}}{1-f^2} \right\}^2 \qquad (132a)$$

la qual'ultima si può porre sotto la forma

$$S = \frac{1}{2} p h^2 \frac{1}{(\sqrt{1+f^2} + f\sqrt{2})}$$

e quindi per $f = 1$ diventa

$$S = \frac{1}{16} p h^2 \qquad (132b)$$

e trascurando di valutare la resistenza d'attrito della terra sul muro, ponendo $f' = o$, la (131) e (132) diventano

$$S = \frac{1}{2} p h^2 \sqrt{1+m^2} \left\{ \frac{\sqrt{1+f^2} - f\sqrt{1+m^2}}{1-fm} \right\}^2 \qquad (133)$$

$$S = \frac{1}{2} p h^2 \left\{ \sqrt{1+f^2} - f \right\}^2 \qquad (134)$$

88. Centro di pressione. — In luogo di considerare la pressione del terrapieno diffusa, come è realmente, su tutta la faccia premuta del muro, interessa nelle pratiche applicazioni di supporla tutta raccolta e concentrata in un unico punto, tale, che se ne abbia il medesimo effetto. Questo punto dicesi *centro di pressione*, od anche *punto d'applicazione della spinta*, ed ora si vedrà come si procede a determinarlo.

89. Terrapieno spianato orizzontalmente e sopraccaricato di un peso uniformemente distribuito.

α) **Muro profilato a scarpa.** — In questo caso il valore della spinta, che si esercita sulla faccia **A B**, **Fig. 90**, è dato rispettivamente dalle (127) (127*a*) e (129) a seconda che si tenga conto del coefficiente f', o che lo si eguagli ad f, oppure che lo si trascuri. Considerato che per una data natura di terra, e per una data scarpa del muro, le quantità f, f', p ed m rimangono costanti, si può porre, per semplicità, quella parte del valore della spinta che è espresso in funzione delle quantità medesime, eguale ad un coefficiente costante C, e quindi ciascuno dei suddetti tre valori della spinta può essere rappresentato da

$$S = C\,h\,(h + 2h_r) \qquad (I)$$

Si consideri ora una porzione di muro di altezza z, la di cui faccia **A D** viene premuta da una spinta σ che ha per valore

$$\sigma = C\,z\,(z + 2h_r)$$

e sull'elemento infinitesimo **D d** della faccia premuta, a cui corrisponde un' altezza infinitesima $d\,z$ di muro, il valore della spinta è

$$d\sigma = C \cdot d\,(z^2 + 2h_r\,z) = 2C\,(z + h_r)\,dz$$

ed il momento di questa spinta riferito al punto **B**, cioè il momento elementare, che si indica con $d\mu$, è

$$d\mu = d\sigma\,\mathbf{D\,B}$$

ed essendo $\mathbf{D\,B} = \dfrac{h - z}{\cos\alpha}$, sostituendo si ha

$$d\mu = \frac{2C}{\cos\alpha}\left\{(h - h_r)\,z - z^2 + h\,h_r\right\}dz$$

e quindi il momento totale sull'intera faccia **A B**, si ottiene integrando la precedente, cioè

$$\mu = \frac{2\,C}{\cos\alpha}\int_{z=0}^{z=h}\left\{(h-h_1)\,z - z^2 + h\,h_1\right\} dz$$

ed eseguendo l'integrazione risulta

$$\mu = \frac{C\,h^2}{3\cos\alpha}(h+3h_1) \qquad \text{(II)}$$

Chiamando Δ il braccio di leva della spinta S rispetto al punto **B**, supposto che essa sia concentrata nel suo punto d'applicazione, si ha

$$\Delta = \frac{\mu}{S}$$

ossia sostituendo i valori dati dalle (I) e (II) si ottiene

$$\Delta = \frac{1}{3}\,\frac{h}{\cos\alpha}\cdot\frac{h+3h_1}{h+2h_1} \qquad (135)$$

β) **Per un muro colla faccia premuta verticale** diventa $\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$ e quindi

$$\Delta = \frac{h}{3}\cdot\frac{h+3h_1}{h+2h_1} \qquad (136)$$

cioè il centro di pressione viene determinato dal valore di Δ ricavato dalla (135) o dalla (136) a seconda dei casi.

90. Terrapieno senza sopraccarico. — In questo caso il valor di Δ viene dedotto dalle formule precedenti ponendo in esse $h_1 = 0$; sostituendo si ha:

α) **Per un muro profilato a scarpa**

$$\Delta = \frac{1}{3}\,\frac{h}{\cos\alpha} \qquad (137)$$

β) **Per un muro a paramento verticale**

$$\Delta = \frac{1}{3}\,h \qquad (138)$$

cioè, in entrambi i casi, il punto d'applicazione della spinta si trova ad un terzo della facciata premuta, a partire dal piede.

Esaminando le (135) e (136) relative ad un terrapieno sopraccaricato, siccome la frazione $\frac{h + 3h_t}{h + 2h_t}$ è maggiore dell'unità, si scorge che in questo caso il centro di pressione si trova distante dal piede della faccia premuta di una quantità maggiore di $\frac{1}{3}$ della faccia stessa, per cui la spinta è applicata più in alto che non nel caso del terrapieno senza sopraccarico, e quindi essa opera con maggior intensità per rovesciare il muro.

b) Processo grafico.

91. Generalità. — Dei vari metodi coi quali si può procedere alla determinazione grafica della spinta delle terre, (fra i quali quelli del Culmann, Winkler, Mohr), si è data la preferenza a quello del Wittmann (*) come quello cui, alla semplicità del metodo, va unita la semplicità della teoria dalla quale esso deriva, e che generalmente viene applicata in pratica. — D'altronde questo metodo grafico si informa alle stesse ipotesi, agli stessi principî del metodo analitico antecedentemente esposto, cosicchè i risultati di questo coincidono pienamente coi risultati di quello. Senonchè, mentre le formule analitiche da (127) a (134) porgono il valore della pressione che si esercita normalmente alla faccia premuta del muro, l'accennato metodo grafico conduce invece a trovare la *risultante* della pressione normale alla faccia premuta e della corrispondente resistenza d'attrito, ovverossia la pressione che si esercita obliquamente alla faccia premuta del muro.

Sarebbe troppo lungo (in questo breve *Riassunto*) il riportare la teoria del Wittmann, che serve a dimostrare l'esattezza nonchè il procedimento della relativa risoluzione grafica; si riassume invece brevemente soltanto le modalità del processo grafico, e ciò rispetto a quei soli casi che possono trovare applicazione nei piedritti dei ponti metallici. Coloro che volessero studiare l'accennata teoria, possono ricorrere al suddetto periodico, oppure

(*) Pubblicato nella *Zeitschrifts des Bayerischen Architekten und Ingenieur-vereins* nel 1877.

ad un separato opuscolo da esso estratto, e pubblicato sotto il titolo *Beitrag zur Theorie des Erdruckes auf Stuetzmauern und Stabilitaets-bestimmung derselben* (*).

Con questo metodo prima si procede a determinare la posizione del piano di più facile rottura, cioè quello che origina il prisma di massima spinta, e poi si determina il valore di questa massima spinta.

92. Terrapieno spianato di livello colla sommità del muro, senza sopraccarico, e col muro profilato a scarpa.

α) **Determinazione del piano di rottura.** — Si disegna con tutta esattezza il profilo del muro e del terrapieno A B N, Fig. 91, osservando che quanto più grande è la scala che si assume, e tanto più esatti sono i risultati, e poi si opera come segue:

1° Da A si conduce la retta A N la quale formi coll'orizzonte l'angolo di attrito ϕ delle terre, nonchè la retta A D la quale formi colla faccia A B del muro l'angolo $\phi + \phi_1$, essendo ϕ_1 l'angolo d'attrito della terra che striscia sul muro.

2° Si costruisce la media proporzionale geometrica fra D B e D N; perciò si descrive sopra D N un semicerchio, si eleva in B la B C', perpendicolare a D N e si fa D C = D C'. La retta A C determina il piano di più facile rottura, e quindi A B C è il prisma di massima spinta.

Osservazione. — Al medesimo risultato pervennero Poncelet, Rebhan e Winkler, però in base a differenti principî.

β) **Determinazione della spinta.**

1° Si conduce N N' perpendicolare ad A B, si forma N E = N N', si tira E E' parallela ad A B, e si fa A F = E E' conducendo E' F parallela ad A N.

2° Si conduce per F una parallela F G alla D N, ed una parallela F K ad A C, si congiunge K con O, e per il punto *I* di intersezione della K O con A B, si tira la retta *I* L parallela a K F. Il tratto A L rappresenta il volume del prisma di massima spinta

(*) L'opuscolo fu pubblicato dall'editore Teodoro Ackermann di Monaco.

ridotto alla doppia base A B, ed il valore della spinta si ottiene moltiplicando il tratto A L, per metà della lunghezza A B della faccia premuta del muro e per il peso p dell'unità cubica di terra, per cui chiamata S la spinta si ha

$$S = AL \times \frac{AB}{2} \times p \qquad (139)$$

Osservazione. — Siccome si può ritenere in generale $\varphi_1 = \varphi$, come si è già veduto nel processo analitico, così di solito si conduce A D in modo che formi l'angolo 2φ con la scarpa A B del muro.

Un processo che poco differisce dal precedente e che forse risulta più semplice in confronto del primo è il seguente: Condotta la normale N N′ ad A B, **Fig. 91**, fatta N E = N N′, tirata la E E′ parallela ad A B, ed individuato il punto F guidando E′ F parallela ad A N, per il detto punto F si fa passare la F′ F O parallela a D N, individuando così il punto F′ sulla A D. Prolungata la E′ F, fino ad incontrare la A D nel punto W, si costruisce la media proporzionale geometrica F′ K, fra F′ W ed F′ A. Tirata la K F, ed una parallela alla medesima dal punto A, cioè la A C, quest'ultima determina il piano di rottura; mentre guidando la K O, e poscia da I la I L, pure parallela a K F, si ottiene in L A il segmento proporzionale alla spinta S, il cui valore si ottiene egualmente col mezzo della (139).

93. Terrapieno sopraccaricato. — Se la superficie superiore orizzontale del terrapieno è sopraccaricata da un peso uniformemente distribuito, il quale corrisponda a k chilogrammi per metro quadrato, si può sostituire a questo carico un prisma di quella stessa terra di cui è costituito il terrapieno. L'altezza h_1 che deve avere questo prisma equivalente al sopraccarico è data dalla nota relazione.

$$h_1 = \frac{k}{p}$$

dove p rappresenta il peso di un metro cubo di terra. Nella **Fig. 92**, B B$_1$ N$_0$ N rappresenta il prisma fittizio di carico ridotto a terra, per cui A B$_1$ N$_0$ può essere considerato come il terrapieno sostenuto, di cui è da determinare la spinta che agisce obbliquamente sulla faccia A B del muro. A tale scopo si conduce la retta A D

in modo che formi l'angolo 2ϕ colla A B, e poscia si costruisce la media proporzionale geometrica D C fra D N e D B nel modo indicato precedentemente, ed A C rappresenta il piano di rottura. Prolungata la scarpa naturale fino in N_0, e condotta la normale N_0N' sulla A B, si fa $N_0E = N_0N'$, e condotta E E' parallelamente ad A B, si forma A F = E E', e per F si conduce la F O parallela a B N. Per il punto di intersezione O di quest'ultima col prolungamento di A C, si tira O *I* parallela ad A N, e per *I* la *I* L parallela ad A C. Il segmento A L dà la *risultante* S della spinta delle terre sopra la faccia del muro, ridotta alla doppia base A B, per cui il suo valore si determina colla

$$S = AL \times \frac{AB}{2} \times p \qquad (140)$$

94. Casi particolari. — Si ritiene $\phi_1 = \phi$ come viene usato generalmente.

α) **Profilo del muro che forma l'angolo 2ϕ coll'orizzonte.** — Se si ritiene invariabile la posizione della scarpa naturale delle terre e si immagina che il profilo A B del muro ruoti intorno ad A da destra a sinistra, Fig. 92, vale a dire si suppongano profili con inclinazione all'orizzontale sempre più dolce, il punto di intersezione D_1 della retta A D col profilo del terreno, si va allontanando dal ciglio B del muro, ed il piano di rottura A C si fa tanto più vicino al profilo A B quanto più questo ruota nel senso indicato. Può avvenire che il profilo del muro assuma una tale inclinazione da formare coll'orizzonte l'angolo 2ϕ.

In questo caso vedesi che per individuare la retta A D, bisogna disporla parallelamente al profilo B N del terrapieno, ed il punto D cade a distanza infinita, e quindi non è più possibile la ricerca del piano di rottura, nel modo indicato, cioè mediante la media proporzionale geometrica fra D N e D B.

Il Wittmann nel considerare questo caso, dopo parecchie osservazioni, dimostra che il piano di rottura A C, Fig. 93, taglia per metà il tratto B N. Una semplicissima considerazione però conduce brevemente al medesimo risultato e cioè: se si fa riflesso che i 4 punti D, B, C ed N, Fig. 92, formano un sistema armonico, nel quale i due punti D e C sono fra loro coniugati armonici, è evidente che quando uno di essi, per esempio D, cade a distanza infinita, il suo coniugato C deve essere situato a metà

della distanza che separa gli altri due punti coniugati armonici B ed N.

Nota poi che sia la posizione del piano di rottura, la spinta che si esercita nel muro si ottiene come nei casi precedenti.

β) **Profilo del muro che forma coll'orizzonte un angolo minore di** 2φ. — Se il profilo del muro ruota ancora da destra a sinistra, allora il punto D di intersezione della retta A D col profilo B N del terreno, non si trova più a sinistra del punto B, ma a destra.

Sembra che il WITTMANN ponga il caso precedente come limite per determinare, col mezzo della media proporzionale geometrica, il piano di rottura A C, mentre ciò non è veramente. In ogni modo ci pare che meriti di esser chiarita questa circostanza, e tanto più nei riguardi delle applicazioni che si dovranno fare, inquantochè se si considera che in generale le terre addossate alle testate dei ponti sono terre ordinarie, il cui angolo d'attrito è $\varphi = 45°$, e quindi diventa l'angolo $2\varphi = 90°$, ne viene che, se la faccia premuta del muro è verticale, la retta A D si dispone parallelamente al piano di rottura, mentre se la faccia interna del muro è conformata a scarpa, allora di solito si cade nel caso che ora si contempla.

Il piano di rottura A C, **Fig. 94**, si determina ancora col mezzo della media proporzionale geometrica, e cioè descritto un semicerchio sopra B D, si innalza la N C′ normalmente a B D, si fa D C = D C′, con che il problema è risolto, poichè la A C determina la posizione del piano di rottura.

Circa alla determinazione del valore della massima spinta essa si fa con entrambi i modi indicati in (β) § **92**. Riguardo all'ultimo di questi modi bisogna poi osservare, che quando si abbiano individuati i punti F′ ed W, per costruire la media proporzionale geometrica fra F′ A e F′ W, si descrive un semicerchio sopra F′ W, si innalza la A A′ perpendicolarmente alla F′ W e si fa F′ A′ = F′ K. Condotta per A la A C parallela alla K F, si ottiene in A C il piano di rottura, e tirata la K O, conducendo da I la I L parallela ad A C, risulta in A L un segmento che moltiplicando per $\frac{A B}{2}$ e per il peso unitario p, dà il valore della spinta.

95. Determinazione del centro di pressione.

α) Terrapieno senza sopraccarico. — In questo caso si è già veduto nel processo analitico, che il centro di pressione si trova ad un terzo della faccia premuta a partire dal piede, e per individuarlo graficamente, non occorre dunque altro che dividere in 3 eguali parti la faccia suddetta. Si soggiunge però che nella teoria del WITTMANN, esso arriva alla stessa conclusione in base a procedimenti puramente geometrici.

β) Terrapieno sopraccaricato. — Trovato che si abbia il segmento A L che serve a determinare la spinta sull'intera faccia A B del muro, Fig. 95, se si vuole trovare la spinta sopra una porzione qualunque di questa faccia, come, per esempio, A_1B, A_2B, A_3B... si guida la retta $B_/$ L e si conducono le rette A_1L_1, A_2L_2 A_3L_3..., parallele ad A L. Il VITTMANN dimostra che queste rette rappresentano le spinte sulle corrispondenti porzioni A_1B, A_2B, A_3B..., le quali spinte poi risultano ridotte rispettivamente alle doppie basi $A_1B_/$, $A_2B_/$, $A_3B_/$... Per facilitare la ricerca del centro di pressione, bisogna ridurre tutte queste spinte parziali alla medesima base $AB_/$. Come si operi tale riduzione, lo si indica per la spinta rappresentata dalla retta A_1L_1, e che agisce sulla porzione A_1B della faccia del muro, ed analogamente si procede per tutte le altre: si conduce la retta AL_1, indi la A_1a ad essa parallela, e la ab_1 parallela ad A B ed *il segmento* A_1b_1 *rappresenta la spinta sull'altezza* A_1B, *ridotta alla doppia base* $AB_/$.

Fatto $Ab = A_1b_1$, il segmento $bL = AL - A_1b_1$ rappresenta la pressione sull'elemento AA_1 di muro cioè, *la differenza fra due spinte ridotte alla stessa base, e relative a due differenti altezze di muro, è eguale alla pressione sul tratto di muro compreso fra i piedi di dette altezze.* In questo modo si possono adunque determinare le pressioni sui singoli tratti AA_1, A_1A_2, A_2A_3.

Dopo quanto si è premesso, ecco come si opera per individuare il centro di pressione. Si divide la faccia A B del muro, Fig. 96, in un numero eguale di parti (le quali quanto più piccole saranno, e tanto maggiore esattezza si avrà nei risultati) e poi costruito nella maniera già nota il segmento A L, che rappresenta la spinta totale, e trovato il valore della medesima col mezzo della (140), è opportuno assumere una tale scala, per rappresentare le forze, che la totale spinta sia data da una retta AL_o di

lunghezza doppia del segmento A L. Poi guidata la retta $B_1 L_0$, e dai punti A_1, A_2, A_3... altrettante parallele alla $A L_0$, servendosi del processo indicato antecedentemente, si riducono tutte le spinte relative alle successive altezze $A_1 B$, $A_2 B$, $A_3 B$... alla medesima base $A B_1$, le quali sono date dai segmenti $A_1 b_1$, $A_2 b_2$ $A_3 b_3$...

Ciò fatto si trasportano tutte quelle spinte parallelamente alla loro linea d'azione, in modo cioè che esse formino colla normale ad A B l'angolo φ d'attrito delle terre, come si è fatto nella **Fig. 97**, e dai punti b_1, b_2, b_3... si guidano tante parallele alla faccia A B del muro. I segmenti L_0 1, 1 2, 2 3, 3 4..., così determinati rappresentano rispettivamente le spinte sulle porzioni $A A_1$, $A_1 A_2$, $A_2 A_3$... della faccia del muro. Siccome i punti A, A_1, A_2... si prendono molto vicini fra loro, si può ammettere che le pressioni sui singoli elementi della faccia A B, possano ritenersi come applicate nei punti mediani degli stessi, e quindi da questi punti mediani si tirano delle parallele alla linea d'azione delle spinte, le quali determinano la direzione ed il punto d'applicazione delle spinte parziali. Scelto un polo qualunque L_2, condotti i raggi polari ai vertici L_0, 1, 2, 3, 4... del poligono delle forze, e costruito il corrispondente poligono funicolare O I II III IV V..., nell'intersezione J dei lati estremi, si ottiene il punto per il quale deve essere condotta, parallelamente alla linea d'azione, la risultante delle spinte parziali, cioè la spinta totale, la quale incontra la faccia del muro nel centro di pressione O, che in tal guisa viene determinato. Le operazioni indicate separatamente, per maggior chiarezza, nelle **Fig. 120, 121**, si possono eseguire tutte nella figura che ha servito a determinare il segmento A L rappresentante la spinta totale.

Osservazione. — L'applicazione delle semplicissime formule (89) (90), trovate nel metodo analitico, conduce alla determinazione del *centro di pressione* molto più speditamente che non valendosi del metodo grafico, il quale d'altronde, in causa delle ipotesi su cui si fonda, conduce ad un risultato di approssimazione, per cui in pratica è da preferirsi il metodo analitico a quello grafico.

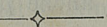
PARTE SECONDA

PONTI METALLICI

COSTRUZIONE E CALCOLI DI STABILITÀ

PONTI METALLICI

COSTRUZIONE E CALCOLI DI STABILITÀ



PREMESSE GENERALI

96. Diversi tipi di ponti metallici. — Un ponte metallico si può costruire con membrature di forme svariatissime, collegate fra loro in modi diversi, così che è possibile ottenere buon numero di speciali conformazioni. In ogni caso però queste membrature metalliche, astrazione fatta dai piedritti, che possono essere di struttura muraria o metallica, sono di due sorta : *le membrature principali*, che si estendono da un piedritto all'altro sorreggendo tutta la costruzione, e si chiamano anche *armature ; le membrature secondarie*, che sopportano direttamente il suolo, e costituiscono l'ossatura dell'impalcato.

Sono le *armature principali* quelle che hanno forme essenzialmente differenti le une dalle altre, per modo da dare origine a delle conformazioni affatto speciali e distinte. È quindi da esse che si fa dipendere la classificazione dei ponti metallici in tipi caratteristici.

Le *parti costituenti l'impalcato*, differenti esse pure di forma, ed alcune anche di struttura, siccome si possono adattare a tutti i tipi di armature principali, senza alterarne la caratteristica, non si prestano ad una classificazione principale, servono invece ad una suddivisione dei tipi caratteristici, originandone numero-

sissime varianti. Avuto riguardo adunque alla forma caratteristica delle armature principali, si classificano i ponti metallici in cinque tipi ben distinti fra loro, cioè:

1° **Ponti a travata con travi diritte.**

2° **Ponti a travata con travi poligonali** (paraboliche, cioè i *Bow-Strings*, elittiche, ecc.)

3° **Ponti ad archi.**

4° **Ponti sospesi.**

5° **Ponti girevoli.**

Avuto poi riguardo alla destinazione dei ponti, per ognuno dei cinque tipi principali si distinguono:

i *ponti pedonali* detti anche *passerelle*,

i *ponti per strada ordinaria*,

i *ponti per ferrovia*.

Si prenderanno partitamente in esame questi cinque tipi, coll'ordine nel quale sono elencati, senza entrare in preliminari considerazioni circa alla loro caratteristica conformazione, riserbandosi di farlo dettagliatamente, mano a mano che si procederà a studiarli.

Col variare poi del dettaglio delle armature principali, e della particolare conformazione e disposizione dell'impalcato, per ogni tipo principale si hanno molte varianti, che si indicheranno in seguito nel trattare particolarmente di ciascun tipo.

93. Più opportuna collocazione del ponte. — Qualunque sia il tipo di ponte che si deve costruire, è necessario premettere la ricerca del sito più opportuno per la collocazione del medesimo. Essa dipende esclusivamente dalle condizioni locali, e quindi non si possono stabilire dei dati precisi in proposito, soltanto si indicano le norme generali che conviene seguire.

Bisogna anzitutto cercare che la costruzione del ponte sia fatta in località dove il corso d'acqua è pienamente stabilito, altrimenti, ove ciò non sia, nei mutamenti causati dalle piene, oltrecchè essere seriamente compromessa la stabilità del manufatto, questo potrebbe anche rendersi inservibile.

Bisogna evitare le risvolte dei corsi d'acqua, ed anche possibilmente l'obbliquità del ponte rispetto all'andamento della corrente.

Bisogna inoltre evitare i tratti delle sponde e del fondo nei quali, per la cattiva loro costituzione, non è possibile piantare le fondazioni dei piedritti con sicurezza di stabilità e di buon esito, o per lo meno è molto difficile e dispendioso di conseguirlo.

Siccome però, specialmente nei ponti per ferrovia, le esigenze del tracciato della linea stradale costringono molte volte a lasciar da parte la scelta della più conveniente collocazione, bisogna allora studiare a quali provvedimenti d'arte convenga appigliarsi per vincere in modo efficace gli ostacoli naturali che si incontrano, ricorrendo alle norme dell'idraulica pratica o della architettura stradale, secondochè si cada nel dominio dell'una o dell'altra.

98. Luce libera. — Lo spazio esistente fra i piedritti dicesi *luce libera del ponte*. Questa deve esser tale che la corrente, specialmente in tempo di piena, possa trovare uno sfogo sufficiente e regolare, e che il rigurgito causato dal manufatto non alteri in modo dannoso il regime del corso d'acqua nel tronco superiore. Precedentemente allo studio del ponte si dovrebbe dunque determinare la *minima luce libera* tollerabile. Tale ricerca però, mentre ha la massima importanza nei ponti in muratura per la grossezza e quantità dei loro piedritti, si può generalmente tralasciare nello studio dei ponti metallici, inquantochè il numero e le dimensioni dei piedritti, relativamente alla larghezza della corrente, sono tali di solito da garantire sotto questo riguardo. — Che se si vuole effettuare questa ricerca, basta attenersi alle prescrizioni che vengono all'uopo suggerite dalla idraulica pratica.

99. Altezza libera. — Si chiama comunemente *altezza libera* lo spazio compreso fra il livello delle massime piene, ed il piano praticabile del ponte (quello della carreggiata nei ponti per strada ordinaria, quello del ferro nei ponti per ferrovia).

100. Altezza della costruzione. — Per *altezza della costruzione* si intende quella compresa fra il piano praticabile sopraccennato, e la faccia inferiore della più bassa fra le membrature costituenti il ponte, e non è dunque da confondersi con l'*altezza delle armature principali*, la quale ultima può essere

maggiore o minore della precedente, a seconda della posizione dell'impalcato.

101. Franco. — Si avrà sempre riguardo che fra la parte più bassa della costruzione metallica ed il livello della massima piena, vi sia una distanza verticale non inferiore a metri 0,50, la quale in pratica dicesi *franco*, e ciò allo scopo che i galleggianti, convogliati impetuosamente nelle turgidezze del corso d'acqua, non abbiano a portare urti violenti al manufatto compromettendone la stabilità.

In caso di un corso d'acqua navigabile il franco sarà molto maggiore, e verrà proporzionato ai bisogni della navigazione.

102. Travi principali ed impalcato. — Il *palco del ponte*, detto anche *impalcato*, è costituito da travi secondarie (trasversali e longitudinali) che ne formano l'*ossatura*, e si attaccano alle armature principali, e da altre membrature che formano il *suolo*, le quali o sono sovrapposte alle travi secondarie, od alcune volte, in mancanza di queste, direttamente alle travi principali.

La Fig. 98 rappresenta planimetricamente l'ossatura di un ponte.

P P sono le *travi principali* che sono sopportate direttamente dai piedritti,

t t sono le *travi trasversali* o *traversoni* che si attaccano alle principali e possono essere sovrapposte alle stesse od anche frapposte,

l l sono le *travi longitudinali secondarie* o *lungoni*, che si chiamano anche *correntini* se servono per strada carrettiera, *lungarine metalliche* se servono per ferrovia ; queste si attaccano alle trasversali, e possono essere o frapposte o sovrapposte alle stesse.

Sopra dei lungoni sta il *suolo*.

Possano però mancare i lungoni ed allora il suolo riposa direttamente sui traversoni. Possono mancare anche i traversoni, ed in questo caso il suolo riposa direttamente sulle travi principali, che allora ordinariamente sono in numero maggiore di due. I lungoni, e, se questi non vi sono, anche i traversoni potrebbero essere di legno, nel qual caso anche il suolo è di legno, cosicchè le travi principali soltanto sono metalliche. Ciò non pertanto il

ponte appartiene egualmente alla categoria dei ponti metallici inquantochè, come si è già veduto, sono le travi principali quelle che caratterizzano la costruzione.

Nei *ponti per strada carrettiera* si può disporre *un unico piano* servibile tanto al passaggio dei pedoni come a quello dei carri, ma se detti ponti sono di qualche importanza e specialmente quelli costruiti nell'interno delle città, si conformano in modo che resti un largo spazio centrale pel passaggio dei carri, che si chiama *carreggiata* e due spazi laterali più stretti per il passaggio dei pedoni, che si chiamano *marciapiedi*, Fig. 99.

Lo scopo dei marciapiedi è di procurare un passaggio sicuro ai pedoni, deve dunque esser impedito ai carri di occuparli, e di conseguenza si deve tenere il loro livello più alto di quello della carreggiata.

Nei *ponti per ferrovia*, essendo proibito il pubblico transito, basterebbe provvedere al passaggio dei treni, cioè al sostegno delle rotaie, e non necessiterebbe il suolo; è però conveniente di mettere il suolo almeno esternamente alle rotaie, per provvedere al passaggio dei guardiani e degli operai adetti alla manutenzione, ed allora si viene a formare come due marciapiedi, il cui livello può essere più alto o più basso di alcuni centimetri dal piano del ferro, Fig. 100.

Tanto nei ponti carrozzabili, come nei ponti per ferrovia, i marciapiedi possono essere posti internamente fra le travi principali ed allora sono sostenuti dalle travi trasversali, ma possono anche essere posti esternamente alle travi principali ed in questo caso sono ordinariamente sorretti da *mensole*. Queste mensole ben di spesso sono collegate da *travi frontali* e tanto le une che le altre si comprendono fra le travi secondarie costituenti l'ossatura dell'impalcato.

A queste travi secondarie, se sono metalliche, si dà ordinariamente la forma di I semplice o composto, simmetrico o dissimetrico, col gambo pieno od a traliccio a seconda delle circostanze, Fig. 163 a 176.

Differenti disposizioni dunque può prendere l'ossatura dell'impalcato nonchè la forma delle rispettive travi, ed in tanti modi inoltre si può conformare il suolo coll'impiego di materiali di differente qualità.

I tanti tipi di impalcato considerati nell'ossatura delle travi

secondarie e nella conformazione del suolo, possono adottarsi indifferentemente per qualunque tipo di trave principale; conviene dunque premettere uno studio generale e completo di queste *membrature dell'impalcato* per passare poi a quello dei vari tipi di *travi principali* e dell'insieme dei ponti corrispondenti a ciaschedun tipo delle medesime.

IMPALCATO

1. Costruzione.

103. Generalità. — Nell'impalcato si distinguono le *travi dell'ossatura* o *travi secondarie* ed il *suolo* sovrapposto il quale eventualmente potrebbe esser posto direttamente sulle travi principali, nel qual caso l'impalcato sarebbe costituito dal solo suolo. Le membrature costituenti il suolo vanno distinte in quelle che riposano direttamente sulle travi metalliche e formano il *tavolato* ed in quelle sovrapposte al medesimo e che formano il vero piano praticabile del ponte, ossia la coperta, quelle cioè destinate a ricevere immediatamente i carichi accidentali, le quali tutti si possono disporre in vari modi, usando materiali di diversa natura. Tanto le une che le altre si applicano egualmente sia per la forma che per la struttura alle differenti ossature di impalcato; si premette adunque il loro studio in generale, considerando separatamente i ponti pedonali, quelli per strada ordinaria e gli altri per ferrovia.

A) Suolo per ponti pedonali.

104. Legname. — La struttura di più facile impiego e più economica, da adottarsi nella formazione del suolo di questi ponti, è il *legname*. È preferibile il legname di essenza forte (larice, quercia) per la sua maggior resistenza e durata, onde non essere

costretti a cambiarlo troppo di frequente, attesochè l'azione continua e distruggitrice dell'umido e del secco e dello strisciamento dei passanti, rende il legname rapidamente inservibile. Il legname viene adoperato in forma di tavoloni, che si uniscono costa a costa e si sovrappongono, o direttamente alle travi principali, quando esse sieno in numero maggiore di due, Tav. 3 (Fig. 6), oppure sopra le travi secondarie, quando esse diventino necessarie per esservi due sole travi principali poste alle fronti del ponte, od anche un numero maggiore, ma molto distanti fra loro. Questi tavoloni si fissano di solito sulle travi che li sorreggono, soltanto ai loro estremi, mediante bolloni, Fig. 152, la loro grossezza dipende dalla distanza delle travi medesime, essa però non si farà mai inferiore a 5 centimetri.

105. Pietra da taglio. — Delle sottili lastre di pietre da taglio possono sostituire con vantaggio i tavoloni, in quei ponti di poca luce che si costruiscono nell'interno delle città, ed in località molto frequentate. Queste lastre si dispongono d'ordinario col lato maggiore nel senso della larghezza del ponte, ed è opportuno che abbraccino tutta questa larghezza, quando ciò sia possibile, Fig. 178. La loro grossezza deve essere proporzionata alla distanza delle travi su cui esse si appoggiano, e dipende altresì dalla qualità più o meno resistente della pietra; non deve essere soverchia, onde non caricare il ponte di troppo peso permanente, nè mai inferiore a 10 centimetri, acciò non abbiano a fendersi facilmente.

Circa alla qualità, la pietra deve essere molto resistente allo strisciamento ed al gelo, e si preferirà quella che si ritrae naturalmente dalla cava in lastre sottili.

106. Lamiera di ferro rigata. — Quando è necessario che l'altezza della costruzione sia la minima possibile, allora si impiegano delle lastre di ferro rigate, laminate espressamente. Queste lamiere sono conformate nella loro superficie superiore come lo rappresenta la Fig. 101, acciò il piede possa trovare saldo appoggio senza pericolo che, specialmente in tempo di pioggia, si abbia facilmente a sdrucciolare. Esse vengono fissate con piccoli chiodi alle travi dell'impalcato, misurano in larghezza da metri 0,90 a metri 1,00 ed in lunghezza da metri 2,00 a metri 4,00, Tav. 3 (Fig. 12).

107. Coperta d'asfalto. — L'asfalto naturale può venire utilmente impiegato come coperta nelle località molto frequentate, ed allora, sopra uno strato di tavoloni, si dispone uno strato di pianelle in malta di calce idraulica, e sopra queste si distende l'asfalto.

Il costo dell'asfalto dipende dalla grossezza dello strato, la quale quindi deve essere la minima possibile nei riguardi dell'economia, non mai inferiore però ai 15 millimetri, e viene tanto più accresciuta, quanto più frequente e numeroso è il passaggio sul ponte.

All'asfalto, per ragioni di economia, può essere sostituita la *lava metallica*, meno costosa, ma anche di minor durata, e di non sicura riuscita.

L'asfalto può venire anche disteso sopra un letto di *béton* o *smalto idraulico*, il quale si può far sopportare o da tavoloni in legno, oppure da membrature metalliche, Fig. 242, come in seguito si vedrà per i ponti carrozzabili.

B) Suolo per ponti carrozzabili.

Si fa distinzione fra lo spazio destinato al passaggio dei veicoli, detto *carreggiata*, e quello riservato ai pedoni, detto *marciapiede*.

1) Carreggiata.

a) Legname.

108. Tavolato semplice (Ted. *Bohlenbelag*). — Questa è la più economica e semplice conformazione. I tavoloni possono essere disposti o sopra le travi principali, o sopra le secondarie, in un *unico strato* di grossezza molto maggiore che non nei ponti pedonali (come si preciserà meglio in seguito, trattando dei calcoli di stabilità), Tav. 4 (Fig. 3, 4), od anche in *doppio strato* con tavoloni di grossezza minore, disposti l'uno in senso normale all'altro, Tav. 5 (Fig. 3, 7), allo scopo di diminuire le spese di manutenzione, le quali, in causa del rapido deterioramento della superficie esposta al roteggio, sono notevoli. Con quest'ultima

disposizione si può rinnovare il solo strato superiore, di poca grossezza, prima dell'inferiore, che si conserva buono più a lungo, mentre colla prima disposizione, dovendosi rinnovare ogni volta uno strato di grossi tavoloni, resi inservibili per le solcature della superficie e non già per mancanza di resistenza, si ha un maggiore spreco.

109. Tavolato con ghiaia (Ted. *Bohlenbelag mit Beschotterung*). — Volendo che la carreggiata abbia una *massicciata in ghiaia*, il modo più economico è quello di disporre la medesima sopra uno strato di tavoloni, i quali, difesi in questo caso dall'azione diretta dell'umido e del secco e da quella dei carichi hanno più lunga durata, purchè però sopra ai medesimi si distenda prima uno strato di buon calcistruzzo dai 4 ai 5 centimetri di grossezza, altrimenti, imbevendosi essi dell'acqua attraversante l'inghiaiata, che li mantiene umidi in causa della presenza della ghiaia, si infracidiscono molto più rapidamente che se fossero affatto scoperti. L'inghiaiata si dispone ordinariamente colla superficie superiore profilata a schiena, cioè ad arco circolare, prendendo il rapporto fra la freccia e la corda fra $^1/_{40}$ ed $^1/_{50}$, e ciò allo scopo di facilitare lo scolo dell'acqua, la quale molte volte si raccoglie in cunette che corrono lateralmente alla carreggiata. In questo caso la grossezza dello strato di ghiaia sull'asse, varia da 20 a 30 centimetri. Si può anche spianare la ghiaia, in uno strato di grossezza costante, provvedendo allo scolo dell'acqua mediante gl'intervalli che si lasciano fra tavolone e tavolone, ed allora la grossezza dello strato si riduce al minimo, cioè fra 10 e 15 centimetri; questa maniera però è da sconsigliarsi del tutto.

Talvolta si distende la ghiaia in uno strato di spessore uniforme, e la convessità la si ottiene disponendo il tavolato sopra forme arcuate di legname, Fig. 102.

È da avvertirsi poi che tanto nel caso di tavoloni semplici, quanto allora che si ricoprono con ghiaia, ordinariamente essi vengono posti sopra correntini di legno, e di rado invece sopra correntini di ferro laminato; la distanza di questi correntini, da asse ed asse, varia fra metri 0,60 e metri 1, ed insistono direttamente sulle travi metalliche dell'impalcato, od anche sulle travi principali. Qualche volta si pongono direttamente i tavoloni sopra

le travi metalliche dell'impalcato, Fig. 103, ma allora essi richiedono grosse riquadrature, mentre le travi che li sorreggono dovendo essere poco distanti fra loro, risultano numerose, e quindi in generale questa disposizione riesce poco economica.

110. Coperta a dadi (Ted. *Holzpflaster*). — Essa consta di tanti dadi di legno di eguale riquadratura posti in opera in file regolari, ben serrati uno accanto all'altro, e colle fibre in senso verticale. Si possono mettere direttamente sopra un semplice tavolato di legno, oppure si può interporvi uno strato di sabbia, Fig. 104. In quest'ultimo caso è meno facile di poter mantenere piana la superficie stradale; si presenta invece il vantaggio che si possono non solo adoperare dadi di altezza ineguale, ma si possono essi anche capovolgere, dove si manifesta un ineguale logoramento.

Il tavolato può anche essere di ferro, conformato nei vari modi che si vedranno in seguito, ed allora sopra di esso si distende un letto di calcistruzzo, che si ricopre con un sottile strato di asfalto, su cui si mettono i dadi di legno, Fig. 120.

Questa coperta venne adottata, ad esempio, nel ponte ad archi tubulari di ghisa in Lubiana.

I dadi di legno presentano il vantaggio di rendere molto meno bruschi gli urti e di dare una coperta la più leggera, fra quelle che devono avere una qualche durata. Però, mentre questa coperta è di buona riescita nei luoghi riparati, la esperienza ha dimostrato che ben altrimenti si comporta allo scoperto, in causa del gonfiamento dei dadi prodotto dall'acqua, e delle fenditure prodotte dal secco. È opinione quindi di alcuni costruttori di non adottarla nei ponti, a meno che non si tratti di ponti sospesi, nei quali la si può impiegare vantaggiosamente per il solo motivo della grande leggerezza.

Questo genere di pavimentazione è usitatissimo in America, anche nelle strade di città, e recentemente si studiarono dei miglioramenti, portando parecchie modificazioni nella forma dei dadi e nel modo di collegarli. Si possono citare, ad esempio, i sistemi Ballard, Waddel, Miller, Adam, Nikolson, Paul, Keistom, fra i quali si rappresentano i più semplici nella Fig. 105. Non si danno però maggiori dettagli inquantochè, sia per il costo rilevante, sia per la speciale mano d'opera, non trovarono nè troveranno facilmente applicazione da noi, che possiamo adoperare tante altre buone coperte stradali.

b) **Pietra.**

111. Volte in mattoni (Ted. *Ziegelgewölbe*). — Le volte a botte in mattoni, molto ribassate ed impostate sopra travi metalliche, che si usano nelle impalcature degli edifici, si possono anche adottare nei ponti, Fig. 106. Le prime applicazioni si trovano nei ponti inglesi di ghisa. In Francia poi diventarono le consuete costruzioni del tavolato nei piccoli ponti, non però nei grandi, in cui si usarono dovunque assai di rado. Si possono fare le volte con cemento, e per diminuire il peso della costruzione, possono anche venir costruite con mattoni cavi.

Ordinariamente sopra alle volte si fanno dei timpani in calcistruzzo, spianati con un certo declivio al disopra delle travi trasversali su cui sono impostate le volte, in modo che lo scolo delle acque sia facilitato, e lo smaltimento di esse si ottiene o col mezzo di cunette che corrono parallelamente alle travi principali e portano l'acqua agli estremi della travata, o col mezzo di tubi che attraversano le volte. Questi timpani si ricoprono con uno strato impermeabile, che può essere in *cemento*, con una grossezza da 3 a 5 centimetri, od in *asfalto* con una grossezza da 12 a 20 millimetri.

Se non si pongono timpani, ciò che però non sarebbe consigliabile, allora lo strato impermeabile si distende direttamente sopra le volte.

Il suolo viene completato con una coperta, che può essere un'inghiaiata, una betonata, od un lastricato qualunque. Un esempio lo si vede nella Tav. 7 (Fig. 3, 8).

La corda delle volte varia fra metri 0,90 e metri 2 ed il rapporto della freccia colla corda fra $^1/_5$ ed $^1/_{12}$. Coll'aumentare di questo rapporto diminuisce la grossezza della volta, ma aumenta l'altezza dei timpani; possibilmente si deve cercare che l'estradosso delle volte in chiave sia spianato colle tavolette superiori delle travi di imposta.

Contro questo genere di costruzioni si porterebbe la facilità di avvenire dei distacchi o nel corpo delle volte, o fra le volte e le travi di imposta, in causa della grande differenza nella dilatazione del metallo e dei mattoni, nonchè delle sconnessioni nella

muratura, per i piegamenti ed i brandimenti delle travi. L'esperienza però ha pienamente dimostrato che i timori sono esagerati, giacchè non si ha esempio di gravi sconcerti avvenuti per questi soli motivi.

Un vantaggio sarebbe la notevole diminuzione degli urti in causa della pesantezza delle volte, ma questa però costringe ad un aumento di spesa, necessitando delle travi più robuste.

112. Lastre in pietra da taglio (Ted. *Steinplatten*). — Abbenchè per apparenza, facilità di impiego e durata, le lastre in pietra da taglio siano da anteporsi a qualsiasi altro genere di tavolato, pure il loro uso nei ponti metallici è poco frequente, a motivo del molto loro peso e della maggior quantità di metallo che perciò si richiede nella formazione della travi dell'impalcato, e specialmente poi per la poca resistenza agli urti, i quali d'altronde sono trasmessi bruscamente.

Le lastre di pietra si possono adagiare soltanto su due lati, oppure su quattro, ed in quest'ultimo caso, se si ha il vantaggio di poter tenere le lastre più leggere, si ha però anche l'inconveniente di dover adoperare un numero maggiore di travi nella ossatura dell'impalcato.

Queste lastre non si fissano alle travi mediante bolloni, ma si ottiene il loro collegamento facendo sporgere all'insù il gambo delle travi su cui esse appoggiano, per cui si ottengono come delle incassature entro le quali si pongono le lastre a perfetto contatto. Alle lastre si dà forma rettangolare o quadrata, coi lati di lunghezza non maggiore di un metro, ed il loro spessore dipende dalla loro ampiezza, nonchè dalla loro qualità e dalla intensità dei carichi che devono sopportare.

Il loro impiego è da consigliarsi in quei siti nei quali le lastre si estraggono direttamente dalla cava, in strati di uniforme ed opportuna grossezza, e vi si possono inoltre acquistare a prezzi molto limitati.

Si ha un esempio di questa costruzione nella Fig. 107, che rappresenta l'impalcato del ponte sull'Ise presso Ghifhorn, nel quale il tavolato dei marciapiedi è formato da lastre in pietra da taglio, mentre nella carreggiata vi è una coperta di ghiaja sopra le lastre.

È da osservarsi che l'impiego delle lastre di pietra sopra membrature di legno si deve affatto evitare.

c) Ghisa.

113. Piastre a costole — Si adoperarono di spesso come tavolato di ponti, specialmente in Inghilterra, delle piastre di ghisa, poste fra una trave e l'altra dell'impalcato, da principio piane, poi leggermente arcuate. Per raggiungere la voluta resistenza, queste piastre sono robustate con delle *costole* o *nervature*, poste sia al di sopra che al di sotto di esse. Le costole poste al di sotto sono opportune per poter avere la massicciata stradale piana quanto è più possibile, mentre quelle poste al di sopra soddisfano meglio nei riguardi di resistenza, inquantochè la ghisa resiste molto meno alla distensione che non alla compressione, alla quale, in quest'ultimo caso, sono soggette le costole.

Si fecero costole di uniforme altezza, altre di altezza variabile per soddisfare alla condizione della uniforme resistenza.

Le piastre di ghisa sono ordinariamente di forma rettangolare e si appoggiano alle travi dell'impalcato o soltanto per due lati, oppure per tutti quattro. Nel primo caso le costole corrono normalmente ai lati d'appoggio. Si ha un esempio nella Fig. 108, che mostra in sezione longitudinale e trasversale il tipo adottato nel ponte di Unterspree in Berlino. La piastra di grossezza costante è terminata superiormente da due superficie inclinate che si incontrano al basso con un tratto orizzontale frapposto, lungo il quale sono aperti dei fiori per lo scolo delle acque. Questi fiori sono coperti con piccole calotte di terra cotta. Le costole equidistanti fra loro, portano un rigonfiamento all'orlo superiore allo scopo di renderle atte ad una più vantaggiosa resistenza. Quando le piastre appoggiano per 4 lati, hanno le costole in due direzioni, disposte cioè o soltanto parallelamente ai lati, od anche secondo le diagonali. Le Fig. 109, 110 mostrano alcuni tipi di queste piastre, in sezione longitudinale e trasversale, e quella rappresentata nella Fig. 111 venne usata nel ponte presso Bilancourt sulla Senna. Vi sono anche esempi di piastre sagomate in forma di volta, alla somiglianza delle lamiere in ferro laminato, di cui si parlerà in seguito.

114. Le piastre a celle (Ted. *Zellenplatten*). — Di queste piastre (simili alle Americane) si indicano quelle del sistema John e Langer. Esse sono costituite da una piastra di ghisa

quadrata del lato di circa metri 0,60 e coll'altezza di 52 millimetri; in questa piastra sono praticate delle cavità esagonali (celle) di 50 millimetri di diametro, addossate le une contro le altre in modo da avere lungo ogni lato una parete comune di grossezza uniforme di 5 millimetri, Fig. 112. Il fondo di queste piastre a celle viene congiunto con una lamiera di ferro, ad esso sottoposta, e collegata nel modo seguente. Nella lamiera di ferro grossa 2 millimetri, ed avente le stesse dimensioni della piastra di ghisa, si praticano diversi fori, e poi la si introduce nella *forma* che serve a fare la fusione, cosicchè ne consegue un collegamento fra la lamiera e la ghisa che viene gettata nello stampo.

Le celle si riempiono con béton o sabbia, ed in quest'ultimo caso ognuna è forata sul fondo per lo smaltimento dell'acqua.

L'elegante aspetto e la molta leggerezza di questa costruzione, la quale non richiede una particolare coperta, la renderebbero superiore agli ordinari tavolati stradali; in causa però dell'azione diretta dei carichi, per la quale si produce facilmente la rottura nella ghisa, essa riesce pochissimo sicura, e quindi il suo uso non è da consigliarsi.

Riguardo alla messa in opera dei tavolati in ghisa, o si sovrappongono semplicemente alle travi di ferro, senza verun collegamento, sagomandoli in modo che non possano avvenire spostamenti laterali, oppure se, ad ottenere questo intento, si vogliono adoperare dei bolloni, si avrà cura di porre i medesimi entro fori elittici e di non stringerli fortemente, onde le parti costituite dai due differenti metalli, si mantengano indipendenti per provvedere alla differente dilatazione.

Del resto in vista del cattivo modo di comportarsi della ghisa rispetto agli urti, sicchè il suo impiego nei tavolati dei ponti riesce poco rassicurante, oggidì essa è quasi totalmente fuori di uso, il quale è veramente da sconsigliarsi.

d) Ferro.

115. Lamiera ondulata (Franc. *Tôle ondulée*, Ted. *Wellenblech*). — La lamiera ondulata è costituita da lamiera di ferro cilindrato, ripiegata a scanalature od onde fra loro eguali e parallele,

come è rappresentata nella Fig. 114, che è la sezione fatta normalmente all'andamento delle onde. Le onde ordinariamente hanno per sezione archi di cerchio con angoli al centro da 120° a 180°. Si hanno anche esempi, però rarissimi, di lamiera ondulata con le onde di forma trapezia, Fig. 113. Le onde hanno l'ampiezza da millimetri 130 a millimetri 250, l'altezza da millimetri 27 a millimetri 125, e lo spessore da 1 a 6 millimetri. La lunghezza delle lastre può arrivare fino a metri 3 e la larghezza fino ad 1 metro, avvertendo che le scanalature sono disposte normalmente al lato maggiore.

D'ordinario le onde sono disposte normalmente all'asse longitudinale del ponte; però in alcuni casi la disposizione delle travi costituenti l'ossatura dell'impalcato obbliga a porre le onde in senso longitudinale. Ogni onda viene fissata su ciascuna trave con un chiodo di piccolo diametro, ed i margini si fanno sovrapporre l'uno sull'altro circa un quarto della larghezza dell'onda, e si collegano mediante chiodi.

Per lo smaltimento delle acque, qualora sopra le onde si pone un'inghiaiata, si praticano dei fori nei punti più bassi, i quali devono essere sempre piccoli per non portar nuocimento alla stabilità della lamiera.

Si difende la lamiera dalla ruggine galvanizzandola mediante un sottile strato di zinco.

I vantaggi della lamiera ondulata sono: la facile ed opportuna congiunzione colle travi dell'impalcato, imperocchè se ne ottiene la reciproca unione ed il rinforzo delle travi medesime; il peso proporzionatamente leggero della massicciata, per il risparmio di volume che si consegue in causa delle onde, e finalmente un buon concatenamento della massicciata col mezzo delle onde stesse.

I difetti che le vengono attribuiti sono: l'impossibilità di lasciare aperto al transito il ponte durante le riparazioni della massicciata; la difficoltà di ottenere un perfetto scolo delle acque, inquantochè se si apre un solo foro per onda questo non è sufficiente, mentre invece se si aprono moltissimi fori, oppure un lungo taglio, si porta un indebolimento troppo grande. A questo riguardo anzi si preferisce di fare la massicciata impermeabile, cioè di smalto idraulico o béton; però è da avvertire che si manifestano nel béton delle screpolature causate dai brandimenti

della costruzione metallica, attraverso alle quali l'acqua può penetrare fino alla lamiera.

116. Lamiere cilindriche (Ted. *Zilinderbleche*).

α) **Lamiere curve sospese** (Ted. *Hängebleche*). — Queste sono lamiere incurvate secondo una superficie cilindrica, aventi due orli piani per poterle chiodare sulle travi che devono sorreggerle, e disposte in modo da presentare la concavità verso l'alto, come mostra la **Fig. 115.**

La loro lunghezza libera, ossia la corda dell'arco, può giungere fino a metri 2, ed alla freccia si assegna da $^1/_{12}$ ad $^1/_8$ della corda. In quanto alla lunghezza si può arrivare a metri 2,50. Ad esempio, in un cavalcavia sbieco sopra la ferrovia Dalmata, le lamiere sospese hanno la lunghezza di metri 2,20, e la larghezza o corda di metri 1,70, **Fig. 115.**

Si fissano con chiodi, mediante gli orli piani, alle travi dell'impalcato, mentre gli orli incurvati si sovrappongono e si chiodano l'uno sull'altro per circa 4 centimetri. Si può anche porre gli orli curvi a contatto ed unirli mediante una lamiera di coprigiunto, **Fig. 115.**

Bisogna poi, nel caso di una coperta in ghiaia, praticare nei punti più bassi dei fori di piccolo diametro e non molto uniti, onde non affievolire di troppo la resistenza, per provvedere allo scolo delle acque. È opportuno però di lasciare invece un intervallo da 2 fino a 4 centimetri fra l'una e l'altra lamiera, e di tenerle non molto lunghe. In questo caso si collegano fra loro le varie lamiere sospese mediante una o più liste di ferri piatti, chiodati alle medesime nel senso degli orli piani, come nella **Fig. 116.** Tale disposizione venne adottata nel ponte Tegetthof a Vienna, dove le lamiere sospese hanno la corda di millimetri 1,89, distano fra loro millimetri 13 e sono collegate da due liste di lamiera.

Un esempio lo si trova nella **Tav. 1** (Fig. 3, 4).

Sopra a queste lamiere si può disporre uno strato di ghiaia, oppure un primo strato di smalto idraulico in modo da riempiere la concavità, sopra al quale si distende una coperta o di ghiaia, o di dadi di legno, od anche un selciato o lastricato.

Evidentemente esse sono soggette alla trazione, ed esercitano uno sforzo di trazione orizzontale sulle travi ove sono chiodate.

che tende a rovesciar quest'ultime, le quali quindi devono essere collegate rigidamente fra loro.

I vantaggi di queste lamiere sospese sono: una grande semplicità di costruzione, la possibilità di adottarle per qualsiasi disposizione delle travi dell'impalcato, e soprattutto di poterle impiegare sempre, anche in quei siti dove vi ha difficoltà a procurare qualunque altro genere di membrature metalliche destinate allo stesso scopo. Si presentano come difetti: la necessità dei rinforzi di rigidezza, contro la trazione orizzontale, alle travi che le sostengono, e lo scolo dell'acqua non sufficientemente procurato.

β) **Lamiere a volta** (Ted. *Blechgewölbe*). — In luogo di disporre le lamiere cilindriche colla concavità all'insù, si possono anche mettere in senso contrario, cosicchè assumono la forma di una volta a botte molto ribassata, e conseguentemente sono soggette alla compressione. Le travi su cui si impostano devono quindi essere robuste, affine di ben resistere alla spinta orizzontale a cui vanno soggette. Migliore di questa però è la disposizione precedente, inquantochè la sottile lamiera non resiste abbastanza allo sforzo di compressione che tende a contorcerla, ed è necessario un particolare rinforzo, il quale, oltrecchè aumentare la quantità di materiale, rende la costruzione più complicata. Nella Fig. 117 si dà un esempio del modo col quale la lamiera viene rinforzata, il quale venne adottato nel ponte sul Lech presso Schongau. La corda dell'arco è di metri 2,70, la freccia ha il rapporto di $^1/_{16}$, e la lamiera lo spessore di millimetri 6. — Gli orli piani riposano su travi trasversali, mentre la lamiera è sostenuta da travicelli ricurvi posti alla distanza di metri 1,20 uno dall'altro e composti da una coppia di cantonali *a*, foggiati secondo la curvatura della volta: da due ferri piatti inclinati *b*: e da un montante *d* formato con due cantonali accoppiati. Lungo la groppa della volta la lamiera si appoggia sopra un traverso, fatto con una lamiera verticale ed un cantonale, che viene portato dai montanti dei travicelli ricurvi.

117. Lamiere gobbe (Franc. *Tôles bombées*, Ted. *Bukelplatten*).

α) **Lamiere gobbe impostate** (Franc. *La plaque en bosse*, Ted. *Stehende Bukelplatten*). — Queste lamiere furono inventate nel 1860 dal Mallet, hanno la forma di una volta a schifo molto

schiacciata, con ribordi piani tutto all'ingiro, mediante i quali si invitano o si chiodono alle travi dell'impalcato, **Fig. 118.** Il loro perimetro è rettangolare od anche quadrato col lato da metri 0,70 a metri 1,60, la freccia od altezza varia tra $^1/_8$ ed $^1/_{18}$ del lato minore, ed in media questo rapporto misura $^1/_{10}$, mentre la larghezza degli orli sta fra 40 a 100 millimetri.

Queste lamiere vengono incurvate mediante pressione sopra una forma speciale, la quale è scelta in modo che il metallo sia soggetto solo a compressione e mai a trazione. Ciò veramente a rigore non è possibile, in causa della variabile posizione del sopraccarico; però la forma della volta si sceglie in modo che l'accennata condizione sia raggiunta per un carico uniformemente distribuito.

Queste lamiere gobbe, specialmente quelle d'acciaio, hanno una grande resistenza. Una lamiera imbollonata tutto all'ingiro del lato di metri 0,91, colla freccia di 44 millimetri, grossa 6 millimetri sopportò un carico concentrato nel vertice del peso di 18 tonnellate.

È opportuno di chiodare le lamiere lungo tutti i quattro lati, giacchè così richiedono uno spessore minore, ossia presentano una maggior resistenza. A tale effetto due lati paralleli si chiodano sopra due travi, e gli altri due lati sopra ferri a ⊤, **Fig. 119,** o sopra cavalletti formati con ferri a ⅂ o ⊓ che vengono attaccati normalmente alle travi medesime. Nell'ultimo caso gli orli rispettivi delle lamiere non sono sostenuti che in parte dai cavalletti, **Tav. 7** (Fig. 12, 13, 15), a menochè non si dispongano sopra questi orli dei ferri a ⊤, i quali si chiodano cogli orli medesimi.

È difficile di far scolare l'acqua dagli intervalli che rimangono fra gli orli delle lamiere, perciò si riempiono con diligenza queste insenature con smalto idraulico, disponendone la superficie con una pendenza. Un riparo completo non lo dà però nemmeno il béton, in causa delle fenditure a cui va soggetto. Viene suggerito di galvanizzare il ferro, oppure di coprirlo con uno strato di asfalto e poi di soprapporvi il béton; l'esperienza soltanto però dimostrerà l'utilità di tale ripiego. L'inventore propone anche di immergere le piastre roventi in polvere di carbon fossile caldissimo, ben mescolato con calce viva e di colorirle poi con olio. Sopra le piastre così preparate va sparso uno strato di polvere di carbon fossile mescolato con calce sul quale si distende la massicciata.

Le ferriere del Creusot forniscono delle *lamiere gobbe* il cui spessore varia da 5 a 15 millimetri, la larghezza da metri 0,486 a metri 1,392, la lunghezza da metri 0,897 a metri 1,552, non compreso un ribordo la cui larghezza può variare fra 60 e 100 millimetri, mentre tutte hanno una freccia di 70 millimetri.

β) **Lamiere gobbe sospese** (Ted. *Hängende Bukelplatten*). — Queste sono le lamiere precedentemente considerate, ma poste in opera in senso inverso, cioè colla concavità rivolta verso l'alto. Tale disposizione venne adottata di recente, ed è riconosciuta più opportuna nei riguardi della resistenza, cosicchè essa richiede lamiere più deboli e quindi più economiche.

Nella **Fig. 120** si dà un esempio di questa disposizione, la quale venne applicata nel ponte costruito a Berlino sopra la linea Berlino-Postdam. Riguardo alle dimensioni di queste piastre ed al modo di collocarle in opera, valgono le stesse considerazioni del § **117** α).

118. Ferri sagomati (Franc. *Fer façon*, Ted. *Formeisen*). — Sotto questa denominazione si comprendono alcune forme di ferri adoperati da principio come rotaie o come traversine nelle ferrovie, ed applicati in seguito anche alle strade ordinarie. Tali sono le *rotaie* Brunel o rotaie canale, quelle Barlow od a sella, le *traversine* Wautherin, ed i *ferri* Zores.

α) **Rotaie Brunel.** — Nella **Fig. 121** si vede rappresentata in sezione trasversale la forma delle rotaie, il modo con cui si dispongono sulle travi dell'impalcato, ed il genere di massicciata stradale che sopra esse si può usare, cioè inghiaiata con o senza sottostrato di béton, oppure lastricato sopra letto di ghiaia con soprapposta sabbia.

Le dimensioni medie espresse in millimetri sono quotate nella **Fig. 122**, e tenuto calcolo delle stesse risulta che un metro corrente di rotaia pesa chilogrammi 25,7 e che il loro peso ragguagliato al metro quadrato è di 170 chilogrammi.

Un ponte ove si trovano applicate è quello ad archi sul Lahn in Ems.

β) **Rotaie Barlow.** — La **Fig. 123***a* mostra in sezione trasversale la loro forma e disposizione, colla sovrapposta massicciata, precisamente come si trovano nel ponte d'Arcole a Parigi. La media dimensione in millimetri risulta dalla **Fig. 123**, relativa-

mente alla quale il peso di 1 metro corrente di rotaia è 47,6 chilogrammi ed il peso per metro quadrato 146 chilogrammi.

γ) **Traversine Vautherin.** — La loro forma in sezione trasversale si vede nella **Fig. 124**, e la loro posizione in opera nella **Tav. 23** (Fig. 13) e nella **Fig. 256**. Frequentissimo ne è ora il loro impiego; furono adoperate, ad esempio, in moltissimi ponti del Veneto di recente costruzione; cioè quelli sull'Adige a Verona e sull'Alpone a S. Bonifacio, nel ponte ad archi sul Bacchiglione a Padova, in quelli sulle Brentelle ed a Tencarola presso Padova, ecc., nonchè in altre parti d'Italia, come nel ponte sull'Arno in Pisa.

Questi ferri si ritirano dalle ferriere francesi e belghe in parecchi calibri colle dimensioni segnate nella tabella XXV ed espresse in millimetri. Nella tabella stessa, per facilitare i calcoli di stabilità, sono indicati il peso ed il valore del rapporto $\frac{I}{d}$.

Tabella XXV.

Num.	b	b_1	a	s	s_1	s_2	Peso	$\frac{I}{d}$
1	226	78	66	8	5,5	7,5	14,6	35419
2	260	80	66	7,5	4,5	6,5	14	37380
3	240	90	120	8	5	7	18,5	81227
4	260	130	67	8	6	7,5	17,5	42647

Il peso per metro quadrato varia fra 54 e 60 chilogrammi.

Quelli che più di frequente vengono impiegati sono i tipi N. 1 e 2,

δ) **Ferri Zores.** — Sono conformati come lo rappresenta la **Fig. 125** in sezione trasversale, e si pongono in opera alla stessa guisa delle traversine WAUTHERIN.

Questi ferri sono laminati principalmente nelle officine della Società anonima presso Besançon, nella contea francese dell'Alta Borgogna, le quali ne producono di quattro calibri di cui si danno le dimensioni nella tabella XXVI, espresse in millimetri, e nella stessa si indicano i valori del peso e del rapporto $\frac{I}{d}$.

Tabella XXVI.

Num.	b	b_1	a	s	s_1	s_2	Peso	$\frac{I}{d}$
1	110	30	43	3,5	2,5	3,5	3,5	5177
2	170	52	62	6	4	5,5	8	20824
3	220	65	83	8	5	7,5	13,7	42123
4	310	100	112	12	10	12	35	134876

Il peso per metro quadrato è rispettivamente chilogrammi 28, 42, 55, 105. Se ne trova un esempio nella **Tav. 7** (Fig. 8, 9, 11).

ε) **Ferri in forma di V ed U.** — Degli altri ferri si trovano in commercio, sotto la denominazione di ferri ZORES, in forma di V ed U.

Tabella XXVII.

Num.	b	b_1	a	s	s_1	s_2	Peso	$\frac{I}{d}$
	Tipo (*a*) ferri a V							
1	60	—	60	4,5	3	6	4	7253
2	80	—	80	5	3	7,5	6	14599
3	90	—	90	5,5	3,5	9	8	26214
	Tipo (*b*) ferri a U							
1	100	30	80	5	3,5	6	7	18796
2	120	30	110	6	4	8	11	38260
3	140	40	120	9	5	11	15,5	59607
4	160	45	140	10	6	10	20	89086
5	180	50	160	10	7	12	25,5	135393
6	200	55	180	11	7	14	32	183080
7	220	80	200	13	7	16	39,5	301100

Nella Fig. 126 sono rappresentati i due profili normali (*a*) (*b*), e nella tabella XXVII sono indicate le relative dimensioni in millimetri, il peso per metro corrente in chilogrammi, ed il valore del rapporto $\frac{I}{d}$.

Ordinariamente questi ferri si adoperano come travi di imposta, allorchè si adottano le volte in mattoni, ed allora vi si chioda alla parte inferiore una tavoletta. Siccome però l'attaccatura di questi ferri alle altre travi dell'impalcato presenta qualche difficoltà e riesce poco economica, il loro uso nei ponti non è frequente, mentre invece trovano estesa applicazione nelle impalcature degli edifici, dove vengono semplicemente internati nelle murature.

In ciascuna delle tre tabelle XXV, XXVI, XXVII, nel rapporto $\frac{I}{d}$, con I si indica il momento di inerzia del ferro sagomato riferito all'asse neutro, e con *d* la distanza delle fibre più cimentate dal medesimo asse. Nell'adottare poi i valori numerici di questo rapporto, forniti dalle dette tabelle, si deve prendere per unità di misura il millimetro.

La lunghezza dei ferri sagomati può essere qualunque fino ai 7 metri col prezzo normale, e si può arrivare al massimo fino ai 9 metri, con un aumento sul prezzo.

φ) **Ferri a T.** — Anche questi ferri si possono adoperare nella formazione del tavolato di ponti, ma sono poco economici, e quindi da sconsigliarsi.

In ogni modo volendo adoperarli sarebbe più opportuno, nei riguardi della resistenza, di porli colla tavoletta superiormente e col gambo all'ingiù, mentre d'ordinario le esigenze della costruzione richiedono la disposizione contraria, come si vede nella Tav. 1 (Fig. 3, 4), ed in quest'ultimo caso, se è necessario di rinforzare questi ferri a T, si chiodano dei ferri piatti al di sotto della tavoletta.

Le dimensioni ed il peso per metro corrente dei ferri a T, quali provengono dalle ferriere del Creusot, si trovano indicati nella tabella XXXII.

119. Tipi da preferirsi e posizione in opera dei ferri speciali. — Circa alla forma di questi *ferri sagomati*, importa che il metallo sia distribuito convenientemente, acciocchè per una

data resistenza richiedasi la minima sezione, bisogna cioè che il materiale sia raccolto il più lontano possibile dall'asse neutro, ma al tempo stesso la larghezza deve essere la più grande possibile, affine di raggiungere la massima economia nel peso del ferro ragguagliato all'unità superficiale.

I ferri a T e le rotaie BRUNEL soddisfano troppo poco ad ambedue le condizioni; essenzialmente più adatte sono le rotaie BARLOW, ma sopratutto raggiungono lo scopo i ferri ZORES e WAUTHERIN, per quanto lo permetta il processo di laminazione.

È sufficiente di saldare ciascun ferro sagomato su ciascheduna trave col mezzo di un chiodo leggero. Siccome però in questo modo si indeboliscono i piedi dei ferri nelle sezioni di incastro, si preferisce il collegamento indicato nella Fig. 127, cioè i chiodi, o viti, si pongono negli intervalli fra i ferri, e col mezzo di una piastrina questi sono stretti alle travi.

Si lascia ordinariamente un intervallo fra i ferri dai 2 ai 3 centimetri, avendo cura di mettere sopra le fessure dei grossi ciottoli, i quali oltre d'impedire lo spandimento della ghiaia minuta, facilitano lo scolo dell'acqua fra le loro intercapedini.

Però si è tenuta alcune volte, specialmente in Francia, una distanza maggiore, cioè di 10 a 12 e fino a 30 centimetri, come nel viadotto della stazione di St-Jean a Parigi, ricoprendo gli intervalli con pietre regolari; in questo caso bisogna adoperare ferri più forti e ciò non ostante si raggiunge un risparmio di ferro di circa il 16 per 100, in causa del minor numero di essi.

L'impiego dei ferri sagomati ha il vantaggio, rispetto alle lamiere, di una più facile applicazione, potendo essere impiegati questi ferri in lunghezze qualsivoglia, e soprattutto perchè con piccole variazioni degli intervalli fra ferro e ferro, essi si possono distribuire regolarmente su qualsiasi larghezza di tavolato. Anche lo scolo dell'acqua attraverso le fessure tra i ferri risulta migliore.

All'incontro è più sfavorevole la distribuzione della pressione, giacchè ogni ferro agisce per sè. Si può rimediare a tale inconveniente collegando fra loro i singoli ferri sagomati col mezzo di altri ferri in forma di ⊓ T ⊓ imbolonati normalmente al di sotto dei primi, come si è usato in alcuni dei ponti del Veneto sopraccennati.

2) Marciapiedi

120. Varie strutture di suolo. — Il suolo dei marciapiedi può essere sostenuto o mediante le travi dell'impalcato del ponte, o mediante mensole collocate lateralmente all'impalcato; però le varie forme e strutture di tavolato e di coperta si possono adattare indifferentemente in ambedue queste disposizioni, e quindi riguardo alle medesime non occorre fare alcuna distinzione.

Il suolo dei marciapiedi si può fare: con un semplice strato di tavoloni, **Tav. 3** (Fig. 7), od anche con un doppio strato: con lastre di pietra, **Fig. 107** e **128**: con coperta d'asfalto sopra letto di pianelle e sottosuolo di tavoloni, **Tav. 6** (Fig. 7): con asfalto sopra uno strato di béton, disteso sopra un tavolato che può essere o di legname, **Tav. 3** (Fig. 9), o di lamiere ondulate **Fig. 133** e **Tav. 4** (Fig. 3, 4, 5), o di piastre gobbe, **Fig. 129**: oppure finalmente con lamiera rigata di ferro, **Tav. 5** (Fig. 1), **Tav. 7** (Fig. 8), seguendo le stesse norme indicate precedentemente per la carreggiata. Rispetto al suolo con tavoloni è da avvertire che è bene congiungere i medesimi esattamente costa a costa, e collegarli fra loro con listelli di legno duro o di ferro, **Fig. 130**, mentre, per ottenere lo scolo delle acque si assegna al tavolato una leggera pendenza di circa il 2 per 100. Volendo tenere il suolo orizzontale, allora si provvede allo scolo lasciando un intervallo di 5 o 6 millimetri fra i tavoloni, **Fig. 138**.

Se la distanza fra le travi traversali o le mensole è piccola, si pongono i tavoloni longitudinalmente sopra le stesse, o direttamente o coll'interporsizioni di zoccoli di legno, ma se la distanza è grande, si dispongono sopra esse dei correntini di legno o di ferro e su questi i tavoloni per traverso, **Fig. 131** e **132**.

Alcune volte sopra i detti correntini si pongono delle traverse di legno e sopra queste i tavoloni disposti per lungo, **Fig. 130** e **138**.

121. Sopraelevazione dei marciapiedi e scolo dell'acqua. — È opportuno di tener il suolo dei marciapiedi sopraelevato su quello della carreggiata da 10 a 20 centimetri, affine di impedire che l'acqua scorrente sulla medesima scoli sui marciapiedi, e che i veicoli possano passarvi sopra. Allorchè però i

marciapiedi sono posti al di fuori delle armature principali, queste servono naturalmente alla separazione dei marciapiedi dalla carreggiata, senza bisogno dell'indicato dislivello.

Si può tenere il tavolato del marciapiede affatto disgiunto dal piano della carreggiata, con che si ottiene lo scolo diretto della medesima lateralmente, **Tav. 3** (Fig. 7), **Tav. 6** (Fig. 7), **Tav. 7** (Fig. 8, 12), come mostrano le **Fig. 130, 131, 138**. Oppure, quando specialmente la carreggiata sia lastricata, od in ghiaia, si terminano lateralmente i marciapiedi con un corrente di fianco che può essere di legno, **Tav. 3** (Fig. 9) e **Fig. 132**, o metallico, **Tav. 4** (Fig. 5) e **Fig. 133**, o di pietra, **Fig. 107** e **135**, contro il quale va a terminare il suolo della carreggiata, che d'ordinario è profilato trasversalmente in pendenza, e quindi nell'incontro si origina una cunetta più o meno pronunciata, che serve allo smaltimento dell'acqua. Questa cunetta si può fare di pietra, **Fig. 134**, o con ferri sagomati, quale, ad esempio, si vede nelle **Fig. 136, 137, 139**, od anche semplicemente lastricarla, **Fig. 135**.

È da avvertire che le cunette, quando specialmente sono larghe e profonde, presentano l'inconveniente che le ruote dei veicoli vi cadono entro facilmente con pericolo di rovesciamento e di guasti nel suolo. Ciò si può evitare, facendo che il tavolato del marciapiede sporga sopra la cunetta, in modo da coprirla interamente, come mostra la **Fig. 137**, con che si ha anche il vantaggio di guadagnare in larghezza utile lo spazio della cunetta, che altrimenti anderebbe perduto.

122. Scansaruote. — Sta bene poi di collocare lungo i bordi dei marciapiedi dei *scansaruote* (Ted. *Radabweiser*) i quali si fanno con ferri continui a ⌊ o ad ⊏ che orlano questi bordi, **Fig. 130, 132, 137**, e nello stesso tempo preservano dallo spigolamento il suolo del marciapiede, se esso è in legno, in béton, o con coperta di asfalto, **Tav. 4** (Fig. 4, 5), **Tav. 7** (Fig. 12). Gli scansaruote possono essere anche di pietra, **Fig. 107**, di legno **Fig. 138**, o di ghisa, a liste continue.

Poco oppurtuni sono in generale quei scansaruote isolati di pietra, di ghisa o di ferro, **Fig. 139**, in forma di corno, contro i quali possono facilmente urtare i veicoli, e sono del tutto da preferirsi gli scansaruote continui.

C) Suolo per ponti di ferrovia

I ponti per ferrovia devono principalmente servire per il passaggio dei treni, e quindi a tutto rigore sarebbe bastevole di provvederli delle sole rotaie, ma è opportuno altresì provvedere al passaggio dei pedoni, cioè del personale di servizio che deve continuamente camminare lungo la linea pei bisogni della sorveglianza e della manutenzione. Perciò lateralmente alle rotaie del binario, e d'ordinario anche fra le rotaie stesse, si dispone un suolo continuo, sostenuto dalle travi principali o da travi secondarie, a seconda della conformazione dell'impalcato del ponte.

123. Rotaie (Franc. *Rails*, Ted. *Schienen*).— Le rotaie dei ponti devono generalmente essere quelle stesse che si adoperano nell'armamento della strada. Dei vari tipi di rotaie adottati finora nelle ferrovie, fu riconosciuto il migliore quello delle *rotaie a suola*, dette anche *americane* o *Vignolle*, Fig. 140, il cui uso si è oramai esteso in tutta Europa, non soltanto nelle linee di recente costruzione, ma anche nelle primitive, avendosi in esse, nella rinnovazione dell'armamento, sostituito ai vecchi tipi di rotaia quello americano. In conseguenza si può dire che in generale sono le *rotaie a suola* quelle che si impiegano comunemente.

Le rotaie si possono appoggiare sopra travi di legname, cioè *traversine* o *lungherine*, oppure sopra le varie travi metalliche del ponte, cioè principali, trasversali e longitudinali secondarie, escludendo affatto quelle di legname.

La prima disposizione offre il vantaggio di menomare l'effetto degli urti, e di poter fissare le rotaie come nell'armamento stradale, facilitandone la posizione in opera, nonchè il livellamento.

Colla seconda invece si ha il vantaggio di diminuire il peso permanente di quella parte dovuta al legname, che monta dal 3 al 4 per 100 del peso totale, nonchè l'altro vantaggio di una maggior sicurezza, e di poter diminuire l'altezza della costruzione.

124. Traversine (Franc. *Traverse*, Ted. *Querschwellen*). — L'impiego delle traversine riesce assai vantaggioso allorchè

il binario giace al di sopra delle travi principali, poichè esse si dispongono con grande facilità direttamente al di sopra di queste travi, e nel tempo stesso portano i marciapiedi, senza bisogno di particolari rinforzi, di più si ottiene l'uniformità coll'armamento della strada e l'intera costruzione è meglio riparata dalle influenze esterne.

Se il binario è posto alla parte inferiore delle travi principali, o fra le stesse, le traversine con svantaggio sulle lungherine esigono l'impiego di *lungherine d'appoggio* metalliche (Ted. *Schwellenträger*), e quindi si richiede una maggior quantità di metallo. Però le travi trasversali, a parità di condizioni, essendo cimentate meno coll'impiego delle traversine, che non con quello delle lungherine (come si vedrà in seguito nei calcoli di stabilità) si possono fare più leggere, e quindi si ha in ciò un compenso.

Le traversine furono specialmente adoperate in Austria ed in Germania, dove il loro uso è frequentissimo; di rado invece trovarono applicazione in Francia ed in Italia, ma presentemente anche qui il loro uso va estendendosi.

Le traversine si fissano alle tavolette superiori delle travi che le sorreggono con uno o due bolloni del diametro da 18 a 22 millimetri. In questo caso si fanno espressamente i fori per i bolloni, nelle tavolette, ma più spesso si approfitta di quelli che servono alla chiodatura delle tavolette stesse; si ha però allora l'inconveniente che la ripartizione dei chiodi deve essere coordinata a quella delle traversine. Entrambi questi due modi possono presentare degli inconvenienti, poichè la mancanza di un solo chiodo spesso costituisce un difetto, mentre se i bolloni sono frapposti ai chiodi, ne nasce sovente un indebolimento troppo forte. Meglio è di usare i *bolloni ad uncino* (Ted. *Hakenschrauben*) **Fig. 141**, conformati in modo che non possano girare, oppure dei pezzi di cantonale e di lamiera chiodati alle travi metalliche, i quali portano i fori per i bolloni e servono a fissare i medesimi **Tav. 9** (Fig. 4, 5).

Si potrebbe anche fissare le traversine, mediante bolloni orizzontali, a dei cantonali chiodati sulle travi metalliche, **Tav. 15** (Fig. 2), **Tav. 20** (Fig. 4, 5), ma questa congiunzione, adottata specialmente per le lungherine, non è molto usata.

È opportuno poi in ogni modo di far addentrare le travi metalliche da 1 fino a 3 centimetri nelle traversine, affine di impedire

gli spostamenti laterali, e mediante questi intagli più o meno approfonditi si può anche regolare la sopraelevazione delle rotaie nei ponti in curva.

125. Lungherine (Franc. *Longrines*, Ted. *Langschwellen*). — Esse portano il vantaggio di una diminuzione nel carico del ponte, richiedono minor quantità di materiale, mentre si possono sovrapporre direttamente alle travi trasversali, purchè queste sieno sufficientemente vicine. La loro unione colle travi metalliche deve essere molto solida ed accurata, poichè bisogna impedire, nel miglior modo possibile, lo spostamento laterale, nonchè il rovesciamento.

Allorchè le lungherine si collocano sopra travi longitudinali, si può ottenere questo duplice intento mediante due bolloni verticali che attraversano le lungherine e le travi di ferro, Tav. 9 (Fig. 11), Tav. 13 (Fig. 9), oppure usando due bolloni posti esternamente alle lungherine, e resi solidali fra loro con delle traverse di ferro come mostra la Fig. 142. Quando invece le lungherine si appoggiano soltanto sulle travi trasversali, allora da ciascun lato delle lungherine si addossano due pezzi di cantonale che si chiodano sulle travi metalliche, e si fissano le lungherine mediante un bollone orizzontale che le attraversa in un ai cantonali, Fig. 143.

È da preferirsi però l'altra disposizione nella quale esternamente si pone un cantonale alto, ed internamente uno basso, usando due bolloni, uno orizzontale che si fissa al solo cantonale esterno, l'altro verticale che attraversa le lungherine e si fissa alla tavoletta della trave metallica, Tav. 13 (Fig. 12). Si ha con ciò anche il mezzo di collegare fra loro i singoli pezzi delle lungherine, la cui giuntura si fa cadere in corrispondenza alle travi trasversali, mentre per rendere più ampio il loro appoggio si mette sotto al giunto una lamiera lunga circa 30 centimetri che si chioda coi pezzi di cantonale anzidetti, Tav. 13 (Fig. 12).

Si può ommettere il cantonale interno e basso, fare di ghisa quello esterno più alto, ed anche collegare fra loro le rotaie con un tirante orizzontale, come mostra la Fig. 144.

I cantonali possono essere rimpiazzati da ritegni di ghisa i quali servono contemporaneamente a sostegno del tavolato, come si fece in un ponte della ferrovia Kreuz-Frankfurt, Fig. 145.

Altro modo di impedire lo spostamento ed il rovesciamento delle lungherine, è quello usato nelle ferrovie austriache del Sud di cui si trova un esempio nella **Tav. 15** (Fig. 6).

Allorchè le lungherine sono sostenute da travi gemelle, si collegano alle stesse con bolloni verticali quando vi sono delle traverse metalliche, **Tav. 10** (Fig. 12), **Tav. 11** (Fig. 2), **Tav. 12** (Fig. 1), e con bolloni orizzontali quando mancano le traverse, **Tav. 12** (Fig. 3), **Tav. 22** (Fig. 4), oppure quando queste sono di legname, come si vede nella **Fig. 146**.

126. Lungherine armate. — In alcuni ponti delle ferrovie italiane, costruiti dall'Ingegnere COTTRAU nelle officine di Castellamare di Stabia presso Napoli, le lungherine si rinforzarono o mediante soli cantonali, **Tav. 13** (Fig. 5), o con lamiere e cantonali. Una simile costruzione la si trova nel ponte sul Cervaro, **Tav. 22** (Fig. 4, 8), ma in questo le parti in ferro più che come rinforzi, devono considerarsi come travi gemelle soprapposte alle trasversali, e sorreggenti le lungherine. A questo uso anzi si adoperarono nelle dette officine delle travi espressamente laminate, aventi la forma della **Fig. 147**. Colla disposizione ultimamente accennata, tenendo i gambi dei rinfianchi di ferro più alti delle lungherine, **Tav. 22** (Fig. 8), si ha il vantaggio di impedire il deragliamento.

127. Appoggio diretto delle rotaie sulle travi metalliche. — Allorchè interessa di ridurre al minimo l'altezza della costruzione, si appoggiano direttamente le rotaie sulle travi metalliche, senza l'interposizione delle travi di legname.

Nei ponti di piccola portata questo appoggio diretto ha luogo di frequente al di sopra delle travi principali, le quali perciò devono distare quanto è largo il binario, **Tav. 9** (Fig. 11), oppure sopra le traverse delle travi gemelle, **Tav. 10** (Fig. 5, 6, 11), ma nei ponti di grande portata lo si usa assai di rado, e soltanto sopra le travi secondarie. In quest'ultimo caso l'appoggio diretto si può fare sulle travi trasversali quando esse sieno poco discoste l'una dall'altra (dai 70 ai 90 centimetri), in modo che il tratto libero di rotaia abbia sufficiente resistenza, **Tav. 12** (Fig. 6, 7, 8, 9) e **Tav. 13** (Fig. 1), o sulle travi longitudinali secondarie, **Tav. 19** (Fig. 10), o finalmente sopra traverse metalliche costituite da

ferri a T od a ⊔, disposti sulle travi longitudinali secondarie alla stessa guisa delle traversine di legname, **Tav. 14** (Fig. 2, 3, 5*b*). Nella **Tav. 14** le traversine in forma di T sono controssegnate colle lettere *a*. — Se con questa disposizione si ha il vantaggio di risparmiare il legname, si ha però l'inconveniente di avere degli urti assai bruschi con danno del manufatto e del materiale mobile ferroviario, e di incontrare qualche difficoltà nel livellamento delle rotaie, e nell'effettuarne la sopraelevazione, quando esse vanno disposte in curva. È necessario poi di ottenere un saldo collegamento delle rotaie colle travi su cui insistono, e ciò si raggiunge, fissandole ordinariamente con due bolloni e coll'interposizione di speciali piastre d'appoggio di ghisa, **Tav. 10** (Fig. 5) e **Tav. 13** (Fig. 1, 3). Viene impedito lo spostamento laterale di queste piastre o mediante ribordi, quando esse insistono sopra lungherine, **Fig. 148**, o con due chiodi che si alternano coi due bolloni serventi a fissare le rotaie, **Fig. 150**. Allo scopo di togliere gl'inconvenienti che presenta questo collegamento delle rotaie, il quale per poco che i bolloni non sieno ben serrati, riesce difettoso, si fanno i bolloni con doppia madrevite ordinaria, **Fig. 148**, o con due madreviti addossate, ma giranti in senso contrario, **Fig. 149**, o finalmente con due madreviti poste agli estremi del bollone, **Fig. 150**.

Nelle travi gemelle si usarono anche dei cuscinetti di ghisa frapposti ed imbollonati ai gambi delle medesime, rinforzati con costole, i quali servono contemporaneamente al sostegno delle rotaie, ed al loro collegamento mediante biette di legno, **Tav. 12** (Fig. 4), come si è fatto nei cavalcavia della linea Venezia-Padova.

128. Tavolato. — Di solito esso si estende a tutta la larghezza del ponte, cioè fra il binario ed anche lateralmente alle rotaie, ma alcune volte, sebbene di rado, si tralasciò di metterlo fra il binario.

Ordinariamente esso consta di tavoloni i quali si pongono in opera alla distanza di circa 2 centimetri l'uno dall'altro, affine di provvedere allo scolo delle acque, ed anzi per facilitarlo si profilano i tavoloni nella loro faccia superiore in pendenza d'ambo i lati, **Fig. 162**, oppure si smuzzano i loro spigoli superiori, **Fig. 169**.

Se vi sono traversine, i tavoloni si appoggiano direttamente sulle medesime, **Fig. 157, 158, 159, 162**, e **Tav. 16** (Fig. 3, 5).

Alcune volte le traversine non abbracciano l'intera larghezza del ponte, ed allora i tavoloni si sovrappongono parte alle traversine e parte alle travi trasversali, **Tav. 15** (Fig. 1).

Se invece vi sono lungherine, i tavoloni si appoggiano direttamente alle travi trasversali, **Tav. 19** (Fig. 1), **Tav. 15** (Fig. 6) e **Fig. 156**; se però si vuole che superiormente i tavoloni sieno spianati colle lungherine, allora si mettono parallelamente alle medesime dei correnti e sopra questi dei tavoloni trasversali. Si sovrappongono anche alle travi trasversali dei zoccoli di legno sui quali si distendono longitudinalmente i tavoloni, **Fig. 151, 155, 157**.

Se finalmente le rotaie riposano direttamente sopra le travi metalliche, il tavolato si appoggia sulle travi trasversali e sulle traverse secondarie, sia direttamente, **Tav. 13** (Fig. 1), sia coll'interposizione dei zoccoli di legno, **Tav. 14** (Fig. 5*b*).

Alcune volte poi si tenne il tavolato negli spazi laterali al binario riserbati al passaggio dei pedoni, a più alto livello dello spazio centrale, disponendo i tavoloni per traverso sopra altri correntini di legname, **Tav. 21** (Fig. 6, 15), **Tav. 22** (Fig. 8) e **Fig. 154, 158, 159**.

I tavoloni o si fissano ciascheduno ai loro estremi con bolloni, oppure se ne imbollonano alcuni soltanto e gli altri si tengono a posto o con un ferro piatto incassato superiormente per traverso in corrispondenza agli estremi, **Fig. 152**, o con correntini di legno chiodati al di sotto, **Fig. 154** e **158**.

Col tavolato di legno vi è sempre pericolo di incendio, specialmente nella parte interposta al binario, in causa delle faville e dei carboni accesi che cadono dal ceneratoio delle locomotive, e quindi è da consigliarsi l'uso di quelle particolari strutture adoperate per ovviare a questo inconveniente. Tali sono: una coperta di ghiaia della grossezza da 8 a 10 centimetri, posta al di sopra dei tavoloni lasciando affatto libere le rotaie, **Tav. 11** (Fig. 2), **Tav. 12** (Fig. 3), oppure estendentesi fino alle stesse, **Fig. 155** e **Tav. 24** (Fig. 11, 12): un tavolato in lamiera di ferro semplice o rigata, robustata da ferri a ⌊ od a T, che d'ordinario si dispone soltanto fra il binario al disopra delle travi trasversali, mentre lateralmente si lascia il tavolato di legname, **Tav. 9** (Fig. 11), **Tav. 12** (Fig. 1, 2), **Tav. 13** (Fig. 5): un suolo di lamiera conformata a volta, come si trova nei cavalcavia della linea

Venezia-Padova, Tav. 12 (Fig. 4), nei quali le lamiere sono sostenute da traversi di ferro arcuati, formati con semplici ferri a T; e si trovano sia fra il binario, che lateralmente: finalmente anche le lamiere ondulate si possono usare, purchè la larghezza delle onde non impedisca il cammino e cioè non sia maggiore di 10 centimetri.

129. Provvedimenti contro il deragliamento. — Si può provvedere in due modi contro il deragliamento, cioè:

1° Impedendolo;

2° Cercando di premunirsi contro gli effetti nocevoli del medesimo.

Il primo modo lo si usa generalmente quando si impiegano le lungherine, od armandole di rinfianchi metallici più alti delle stesse, come si è veduto al § **126**, Tav. 22 (Fig. 8), o col mezzo di rinfianchi di legname e cantonali di ferro, Fig. 156, come si è usato nel ponte presso Trieste sulla ferrovia Vienna-Pottendorf.

Se si impiegano le traversine, allora si fissano dei correnti di legname, Fig. 157 e 158, o delle contro rotaie, poste internamente meglio che esternamente al binario, distante da $5\,^1/_2$ a 7 centimetri dall'orlo della rotaia. Questa disposizione però non è opportuna nei paesi settentrionali dove abbonda la neve, perchè impedirebbe il lavoro dei spazzaneve, ed allora si ricorre alla seconda maniera, che si raggiunge:

α) Costruendo un tavolato solido, che possa resistere al peso del convoglio, e che può essere in legname con grossi tavoloni, come mostra la Fig. 159 e la Tav. 21 (Fig. 6, 15), oppure metallico con ferri sagomati, come si vede nella Fig. 160, che rappresenta la disposizione adottata nel viadotto Iglava, nel quale le rotaie sono fissate sopra un tavolato di ferri Wautherin insistenti sopra correntini metallici.

La Fig. 161, mostra un'altra disposizione adottata in un progetto di un viadotto in acciaio che si trova nell'album dell'ingegnere Cottrau, dove le rotaie insistono direttamente sopra lungherine di legname fra le quali, e lateralmente alle stesse, sta un tavolato di ferri Wautherin sostenuti da correntini metallici a I. Nei tratti esterni al binario, un robusto ferro Wautherin, posto longitudinalmente, limita lo spazio entro cui può avvenire il deragliamento. Il suolo dei marciapiedi è formato con tavoloni di legname longitudinali

posti sopra travi trasversali coll'interposizione di zoccoli di legno;

β) Obbligando le ruote a cadere fra le traversine ed a rimanervi interposte, nel qual caso le traversine devono essere così robuste da poter resistere all'urto delle ruote cadenti, ed allora il suolo deve distare per lo meno 15 centimetri dall'orlo interno della testa della rotaia, affine di permettere l'infossamento delle ruote, Fig. 162. Nelle travi gemelle si tiene il gambo delle travi metalliche più alto delle lungherine.

130. Coperta di ballast. — Nei primi ponti che si costruirono in Inghilterra ed in Francia si fece continuare lo stesso armamento della strada al di sopra dell'impalcato metallico, disponendo le traversine o lungherine, su cui si appoggiano le rotaie, fra il ballast. — Il ballast poi veniva disteso sopra un tavolato che si può conformare nei tanti modi indicati nei ponti carrozzabili. Abbenchè questo sistema porti parecchi vantaggi, cioè: l'omogeneità coll'armamento stradale; la diminuzione dei brandimenti, sia per il maggior peso della costruzione, sia per la indiretta trasmissione degli urti, giacchè il ballast fa come da cuscino elastico; la sicurezza contro l'incendio ed il deragliamento, pure, essendo necessario l'impiego di travi assai più robuste in causa del notevole aumento del peso permanente, che ammonta per lo meno a 400 chilogrammi per metro quadrato, oggidì l'uso del ballast è abbandonato. Il maggior peso delle travi metalliche per l'impiego del ballast si può ritenere dal 15 al 20 per cento.

D) Travi dell'impalcato.

131. Travi trasversali e longitudinali. — Si è già detto che tanto le une che le altre possono essere in *legname*, nel qual caso la loro riquadratura si tiene rettangolare, disposta sempre col lato maggiore verticale. Qualora invece si usino travi di *ferro*, queste possono essere conformate in vari modi e cioè *massiccie* o *composte*, e quest'ultime col *gambo pieno* o col *gambo reticolato*.

a) **Travi massiccie.** — Queste sono le più semplici travi, e vengono laminate tutte di un pezzo con la sezione in forma di T I]. La massima altezza di queste travi è di metri 0,15 per quelle a T, di metri 0,40 per quelle a I, e di metri 0,25 per quelle ad].

La lunghezza ordinaria di queste travi è da metri 4 a metri 6, ed eccezionalmente arriva fino ai metri 8 e metri 10.

Nelle tabelle seguenti sono indicate le dimensioni dei vari tipi di travi che si trovano in commercio, ed in esse *a* indica l'altezza della trave, *b* la larghezza delle tavolette, *s* lo spessore del gambo, *s,* quello delle tavolette espressi in millimetri, e *p* il peso per metro corrente espresso in chilogrammi, Fig. 163.

Tabella XXVIII.

I — *Ferriere Dupont e Fould* (Francia)

Num.	*a*	*b*	*s*	*s,*	*p*	Num.	*a*	*b*	*s*	*s,*	*p*
1	100	43	6	6	8,25	20	158	124	14	14	41,78
2	100	47	10	6,5	12,45	21	160	48	6,5	7	14,10
3	116	75	11	12	22,30	22	160	59	16	8	26,70
4	116	85	21	12	31,31	23	160	80	8	10	22,24
5	118	70	9	10	18,17	24	160	90	16	10	34,72
6	118	80	19	10	27,36	25	160	120	10	12,5	34,50
7	120	45	4,5	6	9,20	26	178	124	14	14	45,60
8	120	54	12,5	7	17,30	27	180	55	7	9	18,10
9	120	65	6,5	9	14,85	28	180	100	9	12	32 —
10	120	75	17	9	24,18	29	180	109	18	12	45 —
11	136	90	12	14	31,54	30	180	120	10	12,5	36 —
12	136	100	22	14	42,10	31	200	60	8	9	22 —
13	138	85	10	12	25,75	32	200	110	10	12	35,65
14	138	95	20	12	35,49	33	200	120	20	12	51,25
15	140	47	5,5	7	11,80	34	200	130	12	12,5	41,34
16	140	56	13,5	8	21,30	35	205	100	10	12,5	39,15
17	140	76	8	10	20,93	36	220	64	8,5	10	25,20
18	140	86	18	10	31,84	37	255	140	18	20	75 —
19	158	85	10	12	27,39	38	260	120	10	12,5	43,60

Tabella XXIX.

I — *Ferriere Chatillon e Commentry* (Francia).

Num.	*a*	*b*	*s*	s_1	*p*	Num.	*a*	*b*	*s*	s_1	*p*
1	80	40	3,5	7	6,5	23	170	105	15	11	35 —
2	80	46,5	10	8	7,5	24	175	80	8	9	19,50
3	80	55	3,5	8	7,5	25	175	85	13	9	26,20
4	80	60	8,5	8	10,50	26	180	55	7,5	10	20 —
5	100	43	5	7	8,25	27	180	63,5	16	10	31 —
6	100	48	10	7	12,45	28	180	70	8	12	22 —
7	100	60	4	9	10 —	29	180	78	16	12	33 —
8	100	65	9	9	14 —	30	180	100	8	13	29 —
9	120	45	5	6	9,50	31	180	104	12	13	34,5
10	120	52,5	12,5	7	17 —	32	200	60	8	12	23 —
11	120	70	7	10	16 —	33	200	68	16	12	37,50
12	120	77	14	11	22,5	34	200	110	10	13	38 —
13	140	47	6	7	12,5	35	200	117	17	13	50 —
14	140	54,5	13,5	8	21,30	36	220	64	8	11	25 —
15	140	80	9	13	22,24	37	220	72	16	13	40 —
16	140	84	12	13	26,52	38	220	95	9	14	33,50
17	160	48	6,5	7	13 —	39	220	100	14	14	40,50
18	160	57,5	16	8	26,70	40	235	95	10	10,5	5 —
19	160	80	8	11	22 —	41	235	100	15	10,5	44 —
20	160	84	12	11	27 —	42	248	127	10	15	46 —
21	160	120	10	13	35 —	43	260	69	10	18	31,50
22	170	100	10	11	28,9	44	260	79	20	13	50 —

Tabella XXX.

I — *Ferriere Decazeville* (Francia)

Num.	*a*	*b*	*s*	s_1	*p*	Num.	*a*	*b*	*s*	s_1	*p*
1	80	40	4	5	7 —	7	160	48	5,5	6	14,50
2	80	46,5	10	6	11 —	8	160	58	16	7	26,70
3	100	48	10	5	12,45	9	180	55	7	7	18 —
4	120	52,5	12,5	6	17,50	10	180	63	16	9	31 60
5	140	47	5,5	7	12 —	11	200	65	8,5	9,5	25 —
6	140	54,5	13,5	6,5	21,30	12	200	67	9,5	9,5	30 —

Tabella XXXI.

I — *Ferriere de la Providence* (Belgio)
Marchienne-au-Ponte.

Num.	*a*	*b*	*s*	s_1	*p*	Num.	*a*	*b*	*s*	s_1	*p*
1	80	41	3	»	6,25	25	200	65	12	»	21 —
2	80	45	7	»	9,07	26	200	70	16	»	35 —
3	98	98	20	30	50 —	27	200	100	10	»	31 —
4	100	43	5	6	9 —	28	200	110	10	»	38 —
5	100	45	7	6	12 —	29	200	117	17	»	50 —
6	120	45	5	6	11 —	30	200	153	11	»	42 —
7	120	50	9	7	15 —	31	202	103	12	»	50 —
8	120	75	9	»	20 —	32	205	100	10	»	42 —
9	120	82	16	»	27 —	33	220	64	8	10	25 —
10	140	47	6	7	14 —	34	220	71	16	10	40 —
11	140	53	12	7	20 —	35	235	95	11	»	35 —
12	140	76	8	10	20 —	36	250	115	11	»	45 —
13	140	80	12	10	24 —	37	250	122	18	»	62 —
14	153	76	15	»	33,20	38	260	130	12	13	52 —
15	160	48	8	7	15 —	39	260	138	20	13	68 —
16	160	53	12	8	25 —	40	264	84	18	»	62 —
17	160	80	8	11	22 —	41	266	79	15	»	48,80
18	160	84	12	11	27 —	42	268	74	13	»	42,50
19	180	55	3	9	20 —	43	270	70	12	15	40 —
20	180	62	5	9	30 —	44	270	74	16	15	40,50
21	180	100	9	9	31 —	45	300	120	12	14	65 —
22	198	133	15	»	50 —	46	300	128	20	15	85 —
23	200	62	8	»	21 —	47	350	140	15	»	80 —
24	200	62	9	»	22 —	48	400	142	14	20	90 —

Tabella XXXII.

T — *Ferriere del Creusot* (Francia) (Saône et Loire).

Num.	*a*	*b*	*s*	s_1	*p*	Num.	*a*	*b*	*s*	s_1	*p*
1	44	40	6	9	4,80	12	82	150	10	11	22 —
2	52	80	6	6	6,85	13	83	163	12	11,50	25,50
3	53	80	6	7	7,50	14	90	170	11	10	23 —
4	60	100	8	8	10,60	15	90	170	13	13	26,75
5	61	100	8	9	11,35	16	90	170	14	14	28,60
6	70	130	9	9	15 —	17	100	150	11	11	22,80
7	71	130	8	9	16 —	18	100	200	16,5	15	35,50
8	80	100	8	8	13 —	19	105	200	19	18,50	43 —
9	81	100	8	9	14 —	20	115	100	10	10	19 —
10	80	150	10	9	19 —	21	117	100	10	12	20,50
11	80	165	12	11,50	24,50	22	150	130	23	14	39 —

Tabella XXXIII.

I — *Ferriere del Creusot* (Francia).

Num.	*a*	*b*	*s*	s_1	*p*	Num.	*a*	*b*	*s*	s_1	*p*
1	80	40	4,5	8,5	7 —	18	200	67	15	11,75	32,50
2	80	45,5	10	5,5	10,50	19	200	90	9	10,75	28 —
3	100	43	5	7,5	9 —	20	200	96	15	10,75	37,50
4	100	48,5	10,5	7,5	13 —	21	200	102	10	12	34 —
5	120	45	5,5	8,75	10 —	22	200	107	15	12	42 —
6	120	50,5	11	9	15 —	23	220	64	8,5	11,75	25,50
7	125	75	7	8,50	16 —	24	200	71	15,5	12	37 —
8	125	78	10	8,50	19 —	25	235	95	9	12	32 —
9	140	49	6	9	13 —	26	235	100	14	12	41 —
10	140	55	12	9,25	19 —	27	235	106	10	13	38 —
11	160	54	8,5	9,75	15 —	28	235	111	15	13	47 —
12	160	59,5	12	9,75	22 —	29	250	100	10	12,50	37 —
13	175	80	8	11	22,50	30	250	105	15	12,50	46,50
14	175	87	15	11	32 —	31	250	115	10	12,50	38 —
15	180	58	8	10,5	19,50	32	250	120	15	12,50	48 —
16	180	65	15	10,75	29 —	33	250	130	11	13,50	46 —
17	200	60	8	11,5	22 —	34	250	135	16	13,50	56 —

Tabella XXXIV.

I — *Ferriere del Creusot* (Francia).

Num.	*a*	*b*	*s*	s_1	*p*	Num.	*a*	*b*	*s*	s_1	*p*
1	30	13	3	4	1,50	21	120	51	9	6	15 —
2	30	15	5	4	1,65	22	120	55	13	6	18,70
3	35	15	5	5,5	1,82	23	120	58	10	10	16,80
4	35	17	8,5	5	2,35	24	120	62	14	10	20,50
5	40	18	5	5,5	2,60	25	140	45	7	10	13 —
6	40	20	7	5,5	3,22	26	140	50	12	10	18 —
7	50	25	5	6	4 —	27	140	52	8	10	16 —
8	50	27	7	6	5 —	28	140	57	13	10	21 —
9	60	24	5	6,5	4,25	29	175	55	12	16	26,50
10	60	25	6	6	5 —	30	175	59	16	16	31,85
11	60	28	6	6,5	5,50	31	175	60	8	10	19,25
12	60	30	8	6,5	6 —	32	175	67	15	10	28,75
13	80	31	8	7,5	7,58	33	175	67	17	17	33,20
14	80	34	11	7,5	9,41	34	175	70	20	17	38,50
15	100	41	11	12	14 —	35	235	85	10	12,5	33,65
16	100	44,5	14,5	12	17 —	36	235	90	15	12,5	42,80
17	120	37	7	10,5	11,50	37	235	50	10	13,5	27 —
18	120	42	12	10,5	16 —	38	235	55	15	13,5	36 —
19	120	43	8	11,5	14 —	39	250	80	10	11,5	32,75
20	130	48	13	11,5	18,50	40	250	85	15	11,5	42 —

Qualche volta, allo scopo di ottenere una maggior resistenza, oppure per comodità di costruzione, si congiungono a dette travi dalle lamiere come lo mostra la **Fig. 164.**

β) **Travi composte.** — Quando occorrono travi con altezze superiori a quelle dei limiti dati per le travi massiccie, bisogna formare le così dette *travi composte*, le quali in generale presentano nella loro sezione retta la forma di un doppio T col gambo pieno, oppure col gambo reticolato.

1) **Travi composte col gambo pieno.** — Per formare queste travi occorrono delle lamiere (Franc. *Tôle*, Ted. *Bleche*), dei ferri piatti, e dei cantonali o ferri d'angolo (Franc. *Cornières*, Ted. *Winkeleisen*). Le più semplici forme sono quelle rappresentate nella **Fig. 165**, nelle quali una lamiera serve da gambo, ed agli orli inferiore e superiore della medesima sono chiodati dei ferri piatti, o dei cantonali che funzionano da nervature (Franc. *Nervure*, Ted. *Gurten*).

Allo scopo di aumentare la resistenza, si aggiunge alle nervature una o più lamiere orizzontali, che si chiamano tavolette, le quali sono unite al gambo mediante i cantonali come indica la **Fig. 166.**

Oltre di queste forme simmetriche, che sono le più comunemente usate, altre se ne possono adottare per comodità di costruzione, quali, ad esempio, si vedono nella **Fig. 167.**

Nelle tabelle seguenti si danno espresse in millimetri le dimesioni delle lamiere, dei ferri piatti, e dei ferri ad ⅂, che vengono laminati nelle ferriere del Creusot.

Lamiere. — Le lamiere variano:

in *larghezza*, di 100 in 100 millimetri, cominciando da 400 millimetri fino a metri 2;

in *grossezza*, di millimetro in millimetro cominciando da 3 millimetri fino a 18 millimetri.

La lunghezza poi è proporzionata alla larghezza e grossezza delle lamiere ossia alla sezione, e cioè quanto più questa è grande, tanto minore è la lunghezza, i cui limiti sono da 2 a 10 metri.

Tabella XXXV.

Ferri piatti.

Larghezza	Grossezza	Larghezza	Grossezza	Larghezza	Grossezza
40	3 a 30	70	3 1/2 a 40	140	8 a 30
42	3 » 30	73	3 1/2 » 40	150	8 » 50
44	3 » 30	75	3 1/2 » 40	160	8 » 50
46	3 » 30	80	3 1/2 » 70	165	8 » 100
48	3 » 30	85	4 » 42	170	8 » 40
50	3 » 30	90	4 » 75	175	8 » 50
52	3 » 30	95	4 » 40	180	8 » 20
54	3 » 30	100	4 » 70	190	8 » 50
56	3 » 30	105	4 » 40	200	8 » 50
58	3 1/2 » 30	110	4 » 80	210	8 » 50
60	3 1/2 » 40	115	4 » 45	220	8 » 50
63	3 1/2 » 40	120	5 » 50	230	8 » 20
66	3 1/2 » 40	130	6 » 50	250	8 » 30
68	3 1/2 » 40	135	8 » 50	300	9 » 20

Tabella XXXVI.

⅂ — *Ferri ad angolo ad ale eguali e facce parallele.*

Larghezza delle ale	Grossezza	Peso per metro corrente	Larghezza delle ale	Grossezza	Peso per metro corrente
20 × 20	3 1/2	0,96	80 × 80	7 1/2	9,25
40 × 40	7	3,95	80 × 80	11	12,60
40 × 40	11	5,85	80 × 80	13	14,70
55 × 55	9	7 —	80 × 80	16	17,75
55 × 55	13	9,80	90 × 90	10	13,17
60 × 60	5	4,54	90 × 90	15	18,83
60 × 60	7	6,14	90 × 90	19	24,09
70 × 70	13	12,70	100 × 100	15	21,88
70 × 70	16	15,30	100 × 100	19	17,05
75 × 75	7 3/4	8,50	125 × 125	11	20,50
75 × 75	11	12 —	125 × 125	17	30,50

Tabella XXXVII.

⌐ — *Ferri ad angolo ad ale eguali con rastremazione.*

Larghezza delle ale	Grossezza media	Peso per metro corrente	Larghezza delle ale	Grossezza media	Peso per metro corrente
20 × 20	3 1/4	0,88	45 × 45	5 3/4	3,60
20 × 20	4 1/4	1,20	45 × 45	7 1/4	4,40
22 1/2 × 22 1/2	3 1/4	1,10	50 × 50	6	4,25
22 1/2 × 22 1/2	4 1/4	1,45	50 × 50	8	5,60
25 × 25	3 3/4	1,30	55 × 55	6 1/4	5 —
25 × 25	4 3/4	1,70	55 × 55	8 1/4	6,25
27 × 27	3 3/4	1,55	65 × 65	7 1/4	6,50
27 × 27	4 3/4	1,95	65 × 65	9 1/4	8,50
30 × 30	4 1/4	1,80	70 × 70	7 1/4	7,25
30 × 30	5 1/4	2,25	70 × 70	10 1/4	10,75
35 × 35	4 1/2	2,35	100 × 100	11 1/4	16,50
35 × 35	5 1/2	3,10	100 × 100	16 1/2	23,25
40 × 40	5	2,85	110 × 110	11 1/2	18,56
40 × 40	6	3,45	110 × 110	15 1/2	24,50

Tabella XXXVIII.

⌐ — *Ferri ad angolo ad ale disuguali e facce parallele*

Larghezza delle ale	Grossezza	Peso per metro corrente	Larghezza delle ale	Grossezza	Peso per metro corrente
25 × 40	4	1,90	80 × 120	9	13 —
25 × 40	5 1/2	2,60	80 × 120	16	22,70
35 × 55	5 1/2	3,50	90 × 150	12	21,20
35 × 55	9	5,50	90 × 150	18	30,50
50 × 80	8	7,50	110 × 160	14 1/2	28,79
50 × 80	10	9 —	110 × 160	17 1/2	34,05
60 × 95	8	9 —	140 × 160	13	28,70
60 × 95	10	11,20	140 × 160	20	43 —

Tabella XXXIX.

┐ — *Ferri ad angolo ad ale disuguali con rastremazione.*

Larghezza delle ale	Grossezza media	Peso per metro corrente	Larghezza delle ale	Grossezza media	Peso per metro corrente
30 × 45	4 3/4	2,50	90 × 130	11	17,75
30 × 45	6 3/4	3,60	90 × 130	15	24 —
40 × 50	5 1/2	3,75	90 × 135	11	18,50
40 × 50	7 1/2	4,75	90 × 135	15	25 —
40 × 60	5 1/2	4 —	70 × 150	11	17,90
40 × 60	7 1/2	5 —	70 × 150	15	24,50
45 × 65	6 1/2	5,10	110 × 140	12 1/2	23 —
45 × 65	8 1/2	6 —	110 × 140	15 1/2	28 —
60 × 80	7	7,25	90 × 160	14 1/2	26 —
60 × 80	11	11 —	90 × 160	17 1/2	30,50
70 × 110	8 1/2	11 —	120 × 130	10 1/2	20,25
70 × 110	11 1/2	14,20	120 × 130	19	34 —
80 × 100	9	12 —	120 × 135	14	26,30
80 × 100	13	16,50	120 × 135	19	34,25

2) **Travi composte col gambo reticolato.** — Lamiere, ferri piatti, cantonali, ferri a T, ferri ad] sono le parti che si adoperano per formare queste travi.

La più semplice è quella rappresentata nella **Fig. 168**, ed è composta di due cantonali, uno superiore e l'altro inferiore, che servono da nervature, e da aste piatte chiodate all'ala verticale degli stessi, e precisamente da una parte quelle inclinate in un senso e dall'altra quelle inclinate in senso opposto, in guisa da formare una rete di triangoli, sempre isosceli, preferibilmente equilateri, tutti eguali fra loro, i quali formano il gambo.

Le aste piatte del gambo possono essere chiodate ai cantonali anche nel modo indicato della **Fig. 169**, cioè col mezzo di piastrine di congiungimento (Franc. *Gousset*, Ted. *Laschen*).

Nella trave rappresentata dalla **Fig. 170**, le nervature sono formate da ferri a T ed il gambo si compone di aste piatte chiodate da una parte e dall'altra dei medesimi, così da formare una doppia rete di triangoli. Dove le aste piatte si incontrano, sono chiodate coll'interposizione di una piastrina rettangolare, il cui spessore deve essere eguale a quello del gambo dei ferri a T,

e la quale si può ommettere quando la trave è piuttosto alta, ciò che per altro non è consigliabile.

In entrambi questi tipi si può formare il gambo reticolato della trave, invece che con semplici aste piatte, con dei cantonali, onde renderlo più rigido. Se ne ha un esempio nella **Fig. 171.**

Le **Fig. 172, 173,** rappresentano travi nelle quali le due nervature sono formate da una coppia di cantonali, e le aste piatte del gambo sono chiodate fra le ali verticali degli stessi, nella prima in guisa da formare una sola rete di triangoli, nella seconda formando una doppia rete, la quale rete volendo potrebbe essere tripla, quadrupla, ecc., e cioè sempre più fitta mano a mano che l'altezza della trave va aumentando, come mostrano i tipi schematici delle **Fig. 174** *a b c*,

E se si vuole rinforzare maggiormente le nervature, basta chiodare alle ali orizzontali dei cantonali sopra e sotto una od anche più lamiere, che formano le tavolette, come indica la **Fig. 175.**

Altra forma di traliccio usato specialmente per le travi trasversali dei ponti ferroviari, è quella indicata dalla **Fig. 176,** dove le diagonali possono essere tanto dei ferri piatti come dei ferri rigidi, mentre i montanti verticali sono sempre formati con ferri rigidi, **Tav. 19** (Fig. 1, 10), **Tav. 25** (Fig. 4).

132. Travi per marciapiedi. — Tanto nei ponti per strada ordinaria, quanto in quelli per ferrovia, sieno di piccola o di grande portata, allorchè i marciapiedi sono posti esternamente alle travi principali, bisogna ricorrere a delle travi speciali per sostenerne il tavolato.

α) **Prolungamento delle travi trasversali.** — Se il piano stradale è posto superiormente alle travi principali e se i marciapiedi hanno poca sporgenza dalle medesime, allora il modo più conveniente per sostenerne il tavolato è quello di prolungare le travi trasversali fino alle fronti dei marciapiedi, **Fig. 177.**

Nei ponti per ferrovia sono le traversine quelle che si fanno sporgere a sostegno del tavolato come mostrano le **Tav. 16** (Fig. 5), **Tav. 20** (Fig. 4), **Tav. 21** (Fig. 15), **Tav. 24** (Fig. 5, 6).

β) **Travi frontali** (Ted. *Ortträger*). — Quando i marciapiedi hanno larghezza notevole, e sono posti totalmente all'esterno delle travi principali, allora il tavolato si sorregge dalla parte interna

mediante le medesime, e dalla parte esterna col mezzo di travi frontali, purchè però si tratti di ponti di piccola portata. Queste travi possono essere in legno, **Tav. 9** (Fig. 5), **Tav. 10** (Fig. 5), o metalliche, e quest'ultime o massiccie, **Tav. 4** (Fig. 4, 5), o composte, **Fig. 178** e **Tav. 11** (Fig. 2), **Tav. 12** (Fig. 1), **Tav. 13** (Fig. 5, 9).

γ) **Mensole** (Franc. *Consoles*, Ted. *Konsolen*). — Se le travi principali hanno notevole altezza, e specialmente poi nei ponti di grande portata, si preferisce l'impiego delle mensole, le quali ordinariamente hanno la forma triangolare, quella cioè che prossimamente soddisfa alla uniforme resistenza. I lati perimetrali del triangolo, di cui l'inferiore può essere rettilineo ed anche incurvato, sono costituiti da ferri a ⊐ ⊤ ⊤ ⊐ che formano le nervature della mensola e che possono essere fra loro congiunti o direttamente o col mezzo di piastrine.

1) **Mensole col gambo pieno.** — Il gambo può esser pieno ed allora è formato da una lamiera ritagliata secondo il contorno della mensola, **Tav. 6** (Fig. 7), **Tav. 7** (Fig. 8), **Tav. 12** (Fig. 4), **Tav. 14** (Fig. 5*b*). Alcune volte quando la mensola è di breve lunghezza, si tralascia di rinforzare con ferri rigidi il bordo inferiore per economia di metallo; si deve però verificare col calcolo se è possibile di fare tale risparmio senza scapito della resistenza.

2) **Mensole col gambo vuoto.** — Il gambo si può del tutto omettere, **Tav. 5** (Fig. 1), **Tav. 9** (Fig. 11), **Tav. 10** (Fig. 12), **Tav. 13** (Fig. 1), **Tav. 15** (Fig. 6); oppure si possono rinforzare le nervature con dei montanti verticali, **Tav. 22** (Fig. 11), **Tav. 24** (Fig. 12).

3) **Mensole col gambo reticolato.** — Nelle mensole molto lunghe e notevolmente alte il gambo si fa reticolato, specialmente nei ponti per strada carrettiera, onde rendere la costruzione di apparenza più leggera. Il traliccio può essere simmetrico con sole diagonali, **Fig. 179**, oppure dissimetrico, cioè con diagonali e verticali **Tav. 7** (Fig. 12), **Tav. 24** (Fig. 11).

4) **Mensole con ornamentazione.** — Onde ottenere delle mensole che presentino una qualche decorazione, specialmente nei ponti per strada ordinaria, si fa il gambo o con lamiera a traforo, o con ferri piatti ed anche con cantonali, foggiati in guisa da dare degli ornati per lo più di forma geometrica a contorno curvi-

lineo, **Tav. 15**, (Fig. 12). Se si vuole poi avere una decorazione più elegante, bisogna ricorrere alle mensole di ghisa, di cui si vede un esempio nella **Tav. 29** (Fig. 3) e nella **Fig. 180**. Nell'intento di controventare le mensole, specialmente quando sono molto lunghe, o di potervi fissare facilmente i parapetti, o di applicare una qualche decorazione si collegano di solito le medesime con delle travi frontali che possono essere di legno sagomato a modo di cornice, oppure metalliche fatte con ferri a ⅂ T ⅃ I semplici o composti come si vede nelle figure e tavole sopra indicate.

5) **Attacco delle mensole.** — Le mensole si devono attaccare alle travi principali in continuazione delle travi trasversali onde evitare che in causa di esse possa avvenire un ripiegamento laterale nelle travi principali. Se poi quest'ultime sono fornite di montanti verticali si deve approfittare dei medesimi tanto per l'attacco delle mensole quanto per quello delle travi trasversali. Le mensole di ghisa si fissano di solito mediante chiavarde.

2. Calcoli di stabilità.

133. Generalità. — I calcoli di stabilità hanno per iscopo di determinare le più opportune dimensioni da assegnarsi alle varie parti della costruzione, in modo che essendo garantita la loro stabilità durevole, sia anche conseguita l'economia.

Bisogna quindi ricercare quali sieno i carichi cimentanti le singole membrature, quale sia la loro intensità, ed in che modo essi agiscono. Circa alla natura dei carichi cimentanti, ossia delle forze esterne, essi sono pesi, e precisamente il peso stesso della costruzione che gravita sulle varie parti della medesima e che dicesi *carico permanente* od anche *peso morto*, ed il peso dipendente dalle persone, carri o treni che devono transitare sul ponte e che dicesi *carico accidentale* od *avventizio*.

134. Carico permanente. — Il carico permanente è facilmente determinabile una volta che si conoscano le dimensioni delle varie parti del ponte, ed il peso del metro cubico dei vari materiali che le compongono. Ma a priori non sono note le dimensioni

di tutte le membrature, e quindi il carico permanente resta indeterminato. Se si volesse esprimerlo in funzione delle dimensioni incognite, si andrebbe incontro a dei calcoli assai complicati e non di rado impossibili a risolversi. Allo scopo dunque di poter eseguire speditamente questi calcoli si procede per falsa posizione, cioè si assumono a priori per le varie membrature certe dimensioni, e queste non a caso, ma tali che possano soddisfare sì alla resistenza che all'economia, giovandosi nella scelta di dati pratici e di confronti con altre membrature poste in analoghe condizioni, ed in base a tali dimensioni si calcola il peso permanente e si istituiscono i calcoli di stabilità. Se le assunte dimensioni soddisfano sotto ogni riguardo nulla resta più a farsi, se invece sono esuberanti o deficienti si modificano opportunamente e si ripetono i calcoli.

Si può anche valersi di *formule pratiche*, che danno il peso permanente con sufficiente approssimazione. Queste formule saranno date nello studio di dettaglio dei vari casi. Qualora si proceda per falsa posizione, onde determinare il peso delle varie parti della costruzione, occorre conoscere quello dell'unità di volume. Nella tabella XL si sono raccolti i pesi unitari dei materiali ordinariamente usati nella costruzione dei ponti metallici.

Tabella XL.

Materiali	Peso di un m. c.	Materiali	Peso di un m. c.
Ghisa	7200	Pietre arenarie	2200
Ferro	7800	» calcari	2400
Acciaio	8000	Graniti	2600
Bronzo	9000	Sabbia	1600
Abete	460	Terra leggera	1400
Larice	650	» forte	1800
Quercia	800	» ghiaiosa	1600
Muratura di laterizi pieni	1600	Calcistruzzo	2200
» » cavi	1100	Inghiaiata	2000
» pietrame	2400	Asfalto	1300

135. Carico accidentale. — Nella ricerca di questo carico si fa distinzione fra *ponti pedonali*, *ponti carrettieri* e *ponti ferroviari*.

α) **Ponti pedonali o passerelle.** — Nel caso che le passerelle debbano servire per uso privato, fatto riflesso che generalmente è molto limitato il numero delle persone che transitano contemporaneamente, e che avviene affatto eccezionalmente che sul ponte si trovi un agglomeramento di persone, si può valutare un carico di 250 chilogrammi per metro quadrato, corrispondente al peso medio di 4 persone, precisamente come si usa per le impalcature delle fabbriche comuni.

Se invece le passerelle sono di uso pubblico, si deve considerare il passaggio di una folla stipata di persone, prendendo 450 chilogrammi per metro quadrato per i ponti che si costruiscono entro città, e 400 chilogrammi per metro quadrato per gli altri.

β) **Ponti carrozzabili.** — Il carico accidentale è prodotto tanto dal passaggio di una folla stipata di persone, come da quello di un seguito di pesanti carri che occupino tutto il ponte. Siccome nei calcoli di stabilità si deve tener conto del massimo carico che può cimentare la costruzione, bisogna stabilire a quale delle due specie di carichi conviene ricorrere, e perciò si comincia dal precisare l'intensità di questi carichi.

1) **Folla stipata di persone.** — Nel caso di folla stipata, tale cioè che possa appena avanzare, sopra ogni metro quadrato di suolo si possono trovare 6 persone, per cui sul dato del peso medio di 66 chilogrammi per uomo, si hanno su ogni metro quadrato circa 400 chilogrammi di peso prodotto dalla folla. Questo è il dato medio usato ordinariamente in pratica.

Però qualora trattasi di ponti da costruirsi in aperta campagna, dove il passaggio di questa folla compatta non avviene che eccezionalmente, si può limitarsi dai 350 ai 300 chilogrammi per metro quadrato a seconda dell'importanza del ponte, mentre nei ponti che si trovano nell'interno delle grandi città, in situazioni molto frequentate, è consigliabile di arrivare fino ai 450 chilogrammi per metro quadrato.

Alcuni pratici poi, e specialmente i costruttori tedeschi, hanno uno speciale riguardo per le membrature dei marciapiedi, quando questi sono posti esternamente alle travi principali e nei calcoli di stabilità delle medesime membrature (cioè *mensole*, *correntini*, *tavolato*) elevano il carico prodotto da una folla di persone da 550 chilogrammi a 600 chilogrammi per metro quadrato. È da ritenersi però che piuttosto dell'intensità, si voglia tener conto dell'effetto

dinamico del peso, si voglia cioè tener conto delle grandi oscillazioni prodotte dalla folla in movimento, che in queste parti del ponte si fanno dannosamente sentire, più che in quelle della carreggiata.

2) **Carri pesanti.** — I carri carichi destinati al trasporto delle mercanzie e derrate, sono i più pesanti veicoli che possono transitare sul ponte, e ve ne sono di due specie, cioè: a due sole ruote ed a quattro ruote. Nelle **Fig. 181-82-83-84-85**, si danno i tipi di questi carri col relativo attiraglio, dai quali si può desumere il peso sopportato da ogni ruota, quello dei cavalli, nonchè la rispettiva distanza dei punti d'applicazione di questi pesi parziali, e la lunghezza dei carri compreso l'attiraglio. Circa al peso dei cavalli gli ingegneri Leissle e Schuebler (*) danno 300 chilogrammi per ognuno, ed il prof. Winkler 400 chilogrammi, mentre nel manuale del prof. Colombo è indicato il peso massimo dei nostri cavalli in 450 chilogrammi.

Queste differenze sono affatto trascurabili nei calcoli che si dovranno istituire; in ogni modo per i nostri cavalli si può fissare in cifra rotonda, il peso di 400 chilogrammi.

D'ordinario i carri a due ruote si usano nelle strade montane, quelli a quattro nelle strade di pianura, e quindi si ricorre agli uni od agli altri a seconda della strada lungo la quale si deve costruire il ponte.

Nello studio del progetto di un ponte si avrà cura di verificare quali sono i tipi di carri più pesanti che avranno passaggio sul medesimo, acciò non avvenga che nei calcoli di stabilità si prendano a considerare carichi più o meno grandi del vero, con scapito della resistenza o dell'economia.

Nelle ordinarie circostanze possono valere le seguenti norme:

Strade di pianura. — Per ponti posti lungo strade vicinali e secondarie basta considerare *i carri leggeri da* 6 *tonnellate*, **Fig. 183**, per quelli situati nelle strade di ordinaria importanza *i carri pesanti da* 10 *a* 12 *tonnellate*, **Fig. 184**, e finalmente per i ponti in prossimità o nell'interno delle città *i carri pesantissimi da* 18 *a* 20 *tonnellate*, **Fig. 185**. Ora poi che l'uso delle locomobili nei lavori agricoli va sempre più estendendosi

(*) *Der Bau der Brückenträger* ecc. — Stuttgart.

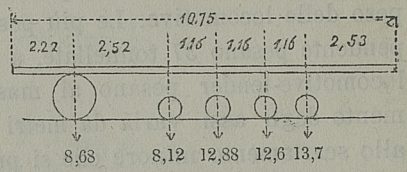
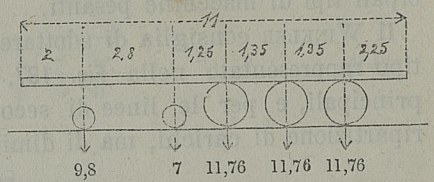
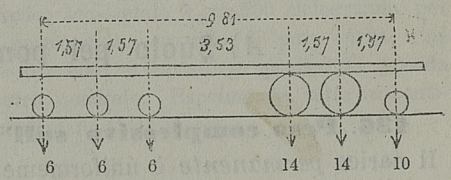
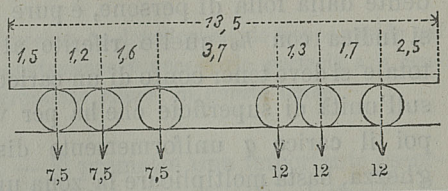
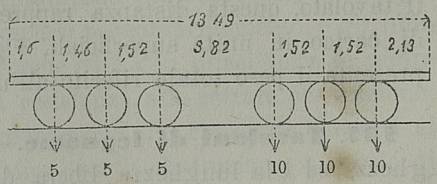
è conveniente cosa di considerare il tipo da 6 tonnellate con molta riserva, e di non valersene altro che nel caso della massima economia, e per ponti di secondaria importanza. Qualora poi si abbia a considerare i pesantissimi carri da 20 tonnellate, è sufficiente di supporre il ponte carico di uno solo di questi, ed il resto del ponte tutto occupato da carri da 12 tonnellate. La *larghezza* dei carri, compreso il carico, è rispettivamente per i carri leggeri, pesanti e pesantissimi di metri 2, 2,30 e 2,50.

Strade di montagna. — Analoghe considerazioni sono da farsi per ponti posti su queste strade, e soltanto si aggiunge che tenuto fermo il peso massimo dei carri, la lunghezza dell'attiraglio va diventando sempre maggiore mano a mano che crescono le pendenze, vale a dire nelle forti rampe si aumenta il numero dei cavalli, e quindi nei ponti a queste vicini è minore il numero dei carri che vi si possono contemporaneamente trovar sopra.

Nel caso di larghi ponti nei quali possono trovar posto due o più file di carri, si può a rigore ritenere che esse passino una rasente all'altra per cui chiamando Δ_0 la larghezza di un carro compreso il carico, e Δ la distanza fra le due ruote di un medesimo asse, risulta che la distanza fra le ruote corrispondenti di due carri vicini è $\Delta_0 - \Delta$, Fig. 186.

γ) **Ponti ferroviari.** — Nei ponti per ferrovia il carico accidentale è dovuto al passaggio dei treni ed è molto considerevole in confronto del permanente. L'azione dei treni ferroviari va considerata come quella di un sistema mobile di carichi concentrati, la cui reciproca distanza si conserva invariabile. L'intensità di questi carichi singoli dipende dal peso portato da ogni ruota, e la loro distanza è quella stessa degli assi delle ruote corrispondenti. Un treno si compone della locomotiva, del tender, dei carri merci o di quelli per viaggiatori, e siccome le membrature dell'impalcato non possono essere interessate per ogni binario che dalle ruote di due veicoli al massimo, è evidente che nei calcoli di stabilità si dovranno considerare i più pesanti, cioè la locomotiva col tender, nei quali poi ordinariamente le ruote sono anche più vicine che non negli altri veicoli. Tanto i pesi per ogni asse, quanto le reciproche distanze sono variabilissimi da tipo a tipo, anzi anche per lo stesso tipo essi sono differenti a seconda delle viste particolari del costruttore, e siccome per una

Tabella XLI.

Tipo delle macchine	Peso totale	Distanze degli assi e distribuzione dei pesi
Locomotiva Tender (SEMMERING)	56	Fig. 1. 
Locomotiva Tender (ENGHERT)	52, 08	Fig. 2. 
Locomotiva delle ferrovie renane	38	Fig. 3. 
Tender	18	
Macchina Würtenberghese	36	Fig. 4. 
Tender	22,5	
Macchina bavarese . . .	30	Fig. 5. 
Tender	15	

stessa linea si adoperano macchine di vari tipi, così nei calcoli si deve considerare quella che cimenta la costruzione metallica nel modo più sfavorevole. Per non restare poi imbarazzati nella scelta del tipo da considerare nei calcoli di stabilità, in generale è sufficiente di attenersi alla locomotiva più pesante che fa servizio sulla linea lungo la quale il ponte viene costruito. In generale non si hanno delle prescrizioni precise relativamente al peso delle locomotive. Le più pesanti a tre assi ed a tender indipendente pesano 37 tonnellate, a quattro assi 48 tonnellate, e le locomotive-tender pesano al massimo 68 tonnellate. Lo scartamento degli assi varia da metri 1,15 a 2,60, e bisogna tenersi allo scartamento minore che si presenta.

Nella tabella XLI sono indicati i dati relativi ed alcuni principali tipi di macchine pesanti.

Il WINKLER consiglia di adottare nello studio dei progetti il tipo rappresentato nella Fig. 187, allorchè si tratta di ferrovie principali, e per le linee di second'ordine di tener la stessa ripartizione di carichi, ma di diminuire i pesi del 20 per cento.

A) Suolo per ponti pedonali.

136. Peso complessivo sull'unità di lunghezza. — Il carico *permanente* è uniformemente distribuito sul suolo, e si chiama p_0 quello riferito al metro quadrato; l'*accidentale* dipendente dalla folla di persone, è pure uniformemente distribuito, e si indica con k_0 quello riferito al metro quadrato, quindi in totale si deve tener conto di un carico q_0 uniformemente distribuito sull'unità di superficie che ha per valore $q_0 = p_0 + k_0$. Per avere poi il carico q uniformemente distribuito sull'unità di lunghezza, basta moltiplicare la zona unitaria di carico per q_0. Chiamando δ la distanza fra asse ed asse delle membrature costituenti il tavolato, questa distanza rappresenta anche la zona unitaria di carico in unità superficiali, Fig. 188, e quindi $q = q_0 \delta$ rappresenta il peso totale riferito all'unità di lunghezza.

137. Tavoloni di legname. — Sia s lo spessore, b la larghezza ed l la lunghezza libera del tavolone. In questo caso è

$b = \delta$, e quindi $q = q_0 b$ è il carico uniformemente distribuito sull'unità di lunghezza. Il massimo momento inflettente prodotto da questo carico è $^1/_8 q_0 b l^2$ e quindi per la stabilità deve essere

$$\frac{1}{8} q_0 b l^2 = \frac{R I}{d}$$

ma è

$$I = \frac{1}{12} b s^3, \; d = \frac{s}{2}$$

e quindi

$$\frac{1}{8} q_0 b l^2 = \frac{R b s^2}{6}$$

da cui

$$s = l \sqrt{\frac{3}{4} \frac{q_0}{R}} \qquad (141)$$

Esempio.

Sia $l = 1$ metro, si valuti il carico accidentale $k_0 = 500$ chilogrammi per metro quadrato, e si trascuri il permanente, essendo di poca entità, cioè sia $p_0 = 0$, per cui è $q_0 = 500 + 0 = 500$, e lo sforzo pratico si prenda $R = 60$ chilogrammi per centimetro quadrato. Esprimendo tutto in centimetri è $l = 100$, $q_0 = 0{,}05$ e quindi dalla (141) si ha

$$s = 100 \sqrt{\frac{3}{4} \frac{0{,}05}{60}} = 2{,}5 \text{ cm.}$$

Con questa grossezza però si avrebbe un deterioramento troppo rapido nel legname, e nei riguardi della manutenzione è necessario portarla a 5 centimetri; nè si adotteranno mai grossezze minori di questo limite.

138. Lastre di pietra. — Si premette una importante osservazione riguardo al valore dello sforzo pratico da adottarsi. Le lastre del tavolato sono cimentate alla flessione, vale a dire gli strati superiori tendono a rompersi per schiacciamento, e gli inferiori per strappamento, e siccome vi ha in quasi tutte le pietre una enorme differenza fra la resistenza alla rottura per trazione, e quella alla rottura per compressione, ne consegue che non si può prendere per sforzo pratico quello di trazione, o quello di

compressione, ma bisogna introdurre nei calcoli quel particolare sforzo pratico che è relativo alla rottura per flessione. Per determinare quest'ultimo in via generale, conviene tenersi ai risultati delle esperienze istituite dal prof. BAUSCHINGER, e cioè fra gli sforzi di rottura per trazione K_t, per compressione K_c, e per flessione K, esistono mediamente i seguenti rapporti

$$K_t = \frac{1}{26} K_c \quad , \quad K = \frac{1}{6} K_c$$

mentre poi si sa che lo sforzo pratico di sicurezza R si deve prendere al massimo $^1/_{10}$ di quello di rottura K, e quindi lo sforzo pratico di flessione è

$$R = \frac{1}{10} K = \frac{1}{60} K_c$$

Nelle pietre ordinariamente adoperate nelle costruzioni, il valore di R oscilla fra 6 e 25 chilogrammi per centimetro quadrato, e sarà perciò conveniente istituire apposite esperienze sulla resistenza della pietra alla rottura per flessione, ogni qual volta non si hanno dati certi sulla resistenza di una data qualità di pietra che si vuole adoperare.

α) **Lastre che appoggiano su due soli lati.** — Per queste serve la stessa formula (141), trovata per i tavoloni.

Il peso proprio per metro quadrato si può prendere:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Per le pietre molto resistenti} & p_0 = 120\, l \\ \text{» » meno » } & p_0 = 200\, l \\ \text{» » mediamente » } & p_0 = 160\, l \end{array}\right\} \qquad (142)$$

esprimendo l in metri.

Esempio.

Sia $l = 1$ metro e si supponga una pietra di media resistenza, cioè pietra calcare assai dura, per la quale nella tabella XIV si trova $K_c = 750$ chilogrammi per centimetro quadrato, e quindi è da prendersi $R = {}^1/_{60}\, 750 = 12{,}5$ chilogrammi, mentre la (142) fornisce $p_0 = 160 \times 1 = 160$ chilogrammi. Il carico accidentale si prenda $k_0 = 600$ chilogrammi per metro quadrato; risulta $q_0 = 160 + 600 = 760$ chilogrammi per metro quadrato. Esprimendo tutto in centimetri è $l = 100$, $q_0 = 0{,}076$. Dalla (141) si ottiene

$$s = 100 \sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{0{,}076}{12{,}5}} = 6{,}75 \text{ cm.}$$

la quale grossezza però si dovrebbe portare a 10 centimetri nei riguardi della manutenzione (inquantochè la pietra deve essere di frequente battuta), nè mai si terrà inferiore a questo limite.

β) **Lastre che appoggiano su quattro lati.** — In questo caso non si possono dare formule rigorose, ma soltanto formule d'approssimazione, ed il WINKLER porge le seguenti :

1° *Lastre rettangolari*, essendo l ed l_1 le lunghezze dei lati, ed $l < l_1$

$$s = l \sqrt{\frac{9}{8} \frac{q_0}{R} \frac{l_1^4}{l^4 + l_1^4}} \qquad (143)$$

2° *Lastre quadrate*, cioè $l = l_1$

$$s = l \sqrt{\frac{9}{16} \frac{q_0}{R}} \qquad (143a)$$

Osservazione. — La (143) è da adoperarsi soltanto allora che se ne ottengano per s valori inferiori a quelli somministrati dalla (141), cioè fintantochè risulti

$$\frac{9}{8} \frac{l_1^4}{l^4 + l_1^4} < \frac{3}{4} \qquad \text{ossia} \qquad \frac{l_1^4}{l^4 + l_1^4} < \frac{2}{3} .$$

Esempio.

Tenendo gli stessi dati dell'esempio precedente, e supponendo $l' =$ metri 1,15 si ha per *lastre rettangolari* dalla (143)

$$s = 100 \sqrt{\frac{9}{8} \frac{0{,}076}{12{,}5} \frac{115^4}{100^4 + 115^4}} = 6{,}6 \text{ cm.}$$

e supponendo lastre quadrate dal lato di 1 metro, mediante la (143a) si ottiene

$$s = 100 \sqrt{\frac{9}{16} \frac{0{,}076}{12{,}5}} = 5{,}9 \text{ cm.}$$

per i quali risultati si ripete l'osservazione del caso precedente, e cioè si dovrebbe prendere nei riguardi della manutenzione almeno $s = 10$ centimetri.

139. Lamiera di ferro rigata. — Per s si intende lo spessore della lamiera, non tenuto conto delle striscie salienti, le quali non si considerano nei calcoli a tutto vantaggio della stabilità.

α) **Lamiere che appoggiano su due soli lati.** — In questo caso serve ancora la formula (141), ed il peso proprio di queste lamiere per metro quadrato si può valutare mediamente con

$$p_0 = 54\, l \qquad (144)$$

esprimendo l in metri.

Per il calcolo dello spessore può servire anche la formula

$$s = 0{,}007\, l \qquad (145)$$

esprimendo l in centimetri e nell'ipotesi che sia R = 800 chilogrammi per centimetro quadrato.

Esempio.

Sia l = metri 1,20, per cui risulta $p_0 = 54 \times 1{,}2 = 64{,}8$ e si prenda $k_0 = 600$ chilogrammi per metro quadrato; allora è $q_0 = 64{,}8 + 600 = 664{,}8$ chilogrammi per metro quadrato. Riferendosi al centimetro è $l = 120$, $q_0 = 0{,}0665$ e si assuma R = 800 chilogrammi. Dalla (141) si ottiene

$$s = 120 \sqrt{\frac{3}{4}\,\frac{0{,}0665}{800}} = 0{,}9 \text{ cm. } (9 \text{ mm.})$$

e dalla (145)

$$s = 0{,}007 \times 120 = 0{,}84 \text{ cm. } \left(8\,\frac{1}{2} \text{ mm.}\right)$$

α) **Lamiere che appoggiano su quattro lati.** — Per questa disposizione, più vantaggiosa per la resistenza, servono egualmente le formule (143) (143a) date per le lastre di pietra. Il peso proprio per metro quadrato si ha mediamente dalla

$$p_0 = 46\, l \qquad (144a)$$

Per il calcolo degli spessori si può anche adoperare per lamiere rettangolari, la formula

$$s = 0{,}0084\, l \sqrt{\frac{l_r^4}{l^4 + l_r^4}} \qquad (146)$$

e per lastre quadrate l'altra

$$s = 0{,}006\ l \qquad (146a)$$

esprimendo l in centimetri, le quali formule corrispondono ad uno sforzo pratico di 8 chilogrammi per millimetro quadrato. Riguardo alla (146) si fa la stessa osservazione fatta per la (143).

Esempio.

Sia $l =$ metri 0,90, $l_1 =$ metri 1,20, si prenda $k_0 = 600$ chilogrammi e quindi risulta $p_0 = 46 \times 0{,}9 = 41{,}4$ e $q_0 = 41{,}4 + 600 = 641{,}4$ chilogrammi per metro quadrato. Riferendosi al centimetro è $l = 90$, $l_1 = 120$, $q_0 = 0{,}0641$, e si assuma R = 600 chilogrammi.

Siccome risulta $\frac{l_1^4}{l^4 + l_1^4} = 0{,}76$, cioè maggiore di $^2/_3$, per avere il valore di s bisogna ricorrere alla (141) della quale si ha

$$s = 90 \sqrt{\frac{3}{4}\frac{0{,}0641}{600}} = 0{,}9 \text{ cm. } (9 \text{ mm}).$$

Per *lastre quadrate* del lato di 90 centimetri, tenendo i dati precedenti, dalla (143a) si ha

$$s = 90 \sqrt{\frac{9}{16}\frac{0{,}0641}{600}} = 0{,}78 \text{ cm. } (8 \text{ mm}).$$

Osservazione. — Gli stessi procedimenti, che servono per il calcolo di stabilità del tavolato dei ponti pedonali, sono applicabili anche al *tavolato dei marciapiedi.*

Per *tavolati metallici e voltine in laterizio,* basta porre nelle formule trovate per i ponti carrozzabili (153, 155a, 160a, 169a) la pressione di una ruota P = 0, e sostituire al peso p uniformemente distribuito (che in quelle è il solo permanente) il carico complessivo q.

B) Suolo per ponti carrozzabili.

1) Carreggiata.

Si è veduto nel relativo capitolo in quanti modi può essere conformato il tavolato dei ponti carrozzabili. Ora interessa di conoscere come si procede a calcolare od a verificare le condizioni di stabilità delle varie membrature colle quali si può costruire il tavolato medesimo.

Prima però è opportuno di considerare quale azione produca l'inghiaiata riguardo alla trasmissione della pressione delle ruote sulle membrature del tavolato.

140. Distribuzione della pressione col mezzo della ghiaia. — La pressione delle ruote può essere trasmessa al tavolato del ponte o direttamente, o col mezzo della ghiaia, nel qual ultimo caso è certo che essa agisce con minore intensità, giacchè in virtù dell'attrito e della coesione della ghiaia, la pressione si diffonde sopra una superficie più ampia di tavolato. La determinazione di questa più ampia superficie è difficile a conseguire esattamente coi soli procedimenti teorici, volendo contemporaneamente tener conto dell'attrito e della coesione, inquantochè manca la conoscenza del coefficiente di coesione. Si è tentato bensì di farlo in via approssimativa ammettendo l'ipotesi che agisca soltanto l'attrito, ma i risultati analitici sono ben lontani dal corrispondere a quelli che si ottennero sperimentalmente, i quali provarono che la coesione ha una influenza assai notevole, specialmente se viene adoperata una ghiaia forte, a spigoli acuti. ben cilindrata, in modo che i pezzi si adattino e combacino per bene gli uni cogli altri.

Il prof. Fränkel istituì delle esperienze in proposito. Egli ha operato su strati di ghiaia dell'altezza di 25 centimetri, posti sopra lamiera ondulata, e mediante i risultati ottenuti diede le seguenti regole, alle quali si può attenersi in pratica.

Sia a, l'altezza dello strato di ghiaia, $AB = z$ la larghezza della superficie sulla quale agisce direttamente la pressione P di una ruota, **Fig. 189.** Questa pressione va diffondendosi su superficie sempre più ampie, mano a mano che si discende entro lo strato di ghiaia, e sul fondo, la larghezza della superficie premuta, secondo le esperienze accennate, si può rappresentare con

$$CD = Z = z + 2{,}70\, a, \qquad (I)$$

Siccome la quantità Z dipende dall'altezza dello strato di ghiaia, in pratica è prudente cosa di tener conto del logoramento di quest'ultimo, sicchè si prende $1{,}50\, a$, in luogo di $2{,}70\, a$,, per cui la (I) diventa

$$Z = z + 1{,}50\, a, \qquad (147)$$

nella quale espressione si può porre mediamente $z = 10$ centimetri e quindi

$$Z = 10 + 1{,}50\, a, \qquad (147a)$$

essendo tutto da esprimersi in centimetri.

Si può però prendere il coefficiente 2 in luogo del coefficiente 1,50 qualora si tratti di ghiaia buona e ben cilindrata. Quando sopra lo strato di ghiaia si trova un lastricato, allora per $a,$ si prende la sola altezza dello strato di ghiaia, e per z la larghezza minima di una lastra di pietra. Se invece la ghiaia è soprapposta a ferri sagomati, per $a,$ si deve prendere l'altezza di quella parte che sta sopra dei ferri, trascurando la ghiaia che sta fra le insenature dei medesimi.

In base a queste regole se si chiama δ la distanza da asse ad asse delle membrature costituenti il tavolato, nel caso di coperta con ghiaia, si può stabilire;

1° Che ogni qual volta è $Z \leqq \delta$, la pressione P della ruota viene trasmessa per intero coll'intermezzo della ghiaia sulla membratura che si considera;

2° Che ogni qual volta è $Z > \delta$, allora la pressione P viene trasmessa alla membratura del tavolato soltanto in parte, e questa minore pressione, chiamata P′, viene data dalla relazione

$$P : P' = Z : \delta$$

da cui

$$P' = P \frac{\delta}{Z} \qquad (148)$$

dove per Z si devono porre i lavori dati dalle (147) e (147a).

Esempio.

La distanza δ fra asse ed asse delle membrature del tavolato (tavoloni di legno, lamiere ondulate, ferri sagomati) sia $\delta = 25$ centimetri.

Per altezze differenti dello strato di ghiaia, cioè

$$a, = 15, 20, 25, 30 \text{ cm.}$$

il valore della larghezza Z di quella superficie su cui si diffonde la pressione sul fondo dello strato di ghiaia, cioè sopra la membratura del tavolato, ricorrendo alla (147a) è

$$Z = 32\frac{1}{2},\ 40,\ 47\frac{1}{2},\ 55 \text{ cm.}$$

e quindi le pressioni P′ trasmesse alle membrature dalla ghiaia, date dalla (148), sarebbero rispettivamente

$$P' = 0{,}77,\ 0{,}63,\ 0{,}52,\ 0{,}45\ P$$

Vedesi facilmente che quanto maggiore è l'altezza dello strato di ghiaia, e quindi anche Z, e tanto minore è la pressione che si trasmette al tavolato, per cui sembra a prima vista che si debba tenere questa altezza piuttosto rilevante; ma se si considera che col crescere della medesima aumenta notevolmente il peso della ghiaia (per ogni centimetro di altezza, circa 20 chilogrammi sopra un metro quadrato) scorgesi che mentre si diminuisce l'azione del carico accidentale, si aumenta l'intensità del peso morto, e quindi concludesi che l'altezza dello strato di ghiaia deve esser compreso fra i 15 ed i 30 centimetri, come suggerisce la pratica, onde rispondere tanto alle condizioni di durata del suolo, come a quelle di una opportuna economia di metallo.

La distanza δ, da asse ad asse, delle membrature del tavolato influisce pure sul valore di P, e si può verificare facilmente che questo valore diminuisce col diminuire di δ. Ma se col diminuire di δ si rende minore l'azione del carico accidentale sulle dette membrature, e quindi si possono fare proporzionatamente più leggere, si deve per lo contrario aumentare il loro numero, ciò che, rispetto specialmente ai ferri sagomati, accresce il peso del metallo per unità quadrata di suolo, in danno dell'economia. Nello stabilire adunque la distanza δ si avrà cura di stare entro quei limiti coi quali si può conciliare la leggerezza delle membrature colla diminuzione del loro numero.

141. Tavoloni di legname.

α) **Senza ghiaia.** — Siccome i tavoloni si trovano nella condizione di prismi collocati su più appoggi, sia che si trovino sopra correntini di legno o sopra travi metalliche, a tutto rigore

si dovrebbe calcolarli applicando le teorie dei solidi sostenuti da n appoggi. In pratica però, per maggior speditezza nei calcoli, e d'altronde per favorire la stabilità, si prende a considerare il tratto di tavolone che sta fra un corrente e l'altro, considerandolo come se fosse liberamente appoggiato. Sia l la lunghezza di questo tratto di tavolone, valutata da asse ad asse dei correnti o travi su cui insiste, b la larghezza ed s lo spessore dello stesso. Non essendovi ghiaia, il peso morto si può trascurare in confronto dell'accidentale. Ciò posto, si può a priori determinare se sia più sfavorevole il passaggio di una folla stipata di persone in ragione di k_0 chilogrammi per metro quadrato, od il passaggio di pesanti carri, sul dato che la pressione di una ruota sia di P chilogrammi.

Essendo $b \times 1 = b$ la zona unitaria di carico, **Fig. 190**, il peso k uniformemente distribuito sull'unità di lunghezza, e dipendente dalla folla, è $k = k_0\, b$ ed il relativo momento inflettente è $^1/_8\, k_0\, b\, l^2$, tabella **XVIII, Fig. 5**; e siccome sulla lunghezza l, che tutto al più è di 1 metro, non può insistere che una sola ruota, e questa si deve supporre nella posizione più sfavorevole, cioè nel mezzo, ne consegue che il carico dipendente dai carri è una pressione P concentrata nel mezzo, che dà un momento inflettente $^1/_4$ P l, tabella **XVIII, Fig. 4**.

L'azione della folla e quella dei carri saranno eguali quando i momenti inflettenti da esse prodotti si eguagliano, ciò che si verifica allorchè

$$\frac{1}{8}\, k_0\, b\, l^2 = \frac{1}{4}\, \mathrm{P}\, l$$

ossia quando

$$k_0 = \frac{2\,\mathrm{P}}{b\, l} \qquad \text{(I)}$$

Ora il valore di k_0 ricavato dalla (I) è minimo quando sia minimo il valore di P e massimo quello del prodotto bl. — Il minimo valore di P = 1500 chilogrammi, la massima larghezza dei tavoloni è b = metri 0,25, la massima distanza delle travi su cui insistono i tavoloni è stabilita dalla pratica di l = 1 metro e quindi

$$_{min}k_0 = \frac{2 \times 1500}{0{,}25 \times 1{,}00} = 12000$$

così bisogna che per lo meno il carico per ogni metro quadrato sia $k_0 = 12000$ chilogrammi perchè l'azione della folla sia la medesima di quella dei carri. Ma il massimo valore che realmente può avere in pratica k_0 è appena di 450 chilogrammi, dal che vedesi manifestamente che i tavoloni sono sempre cimentati molto più sfavorevolmente dai pesanti carri, che non dalla folla stipata di persone.

La grossezza da assegnarsi ai tavoloni si determina ponendo la condizione che il momento inflettente, il quale per quanto si è veduto è $^1/_4 \, P\,l$, sia eguale a quello resistente nei limiti di stabilità, cioè $\frac{R\,I}{d}$ (formula 29*a*) e quindi

$$\frac{1}{4} P\,l = \frac{R\,I}{d}$$

ed essendo

$$I = \frac{1}{12} b s^3 \quad , \quad d = \frac{b s}{2}$$

si ha

$$\frac{1}{4} P\,l = \frac{R\,b s^2}{6}$$

da cui

$$s = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{P\,l}{R\,b}} \qquad (149)$$

nella quale, esprimendo tutto in centimetri, il valore di R è da prendersi mediamente di 60 chilogrammi, tabella XVI, mentre per il larice di buona qualità si può arrivare fino ad 80, e per la quercia fino a 100 chilogrammi.

α) **Con ghiaia.** — In questo caso bisogna tener conto anche del peso della ghiaia. Sia a_1 l'altezza dello strato, e π il peso di un metro cubo di ghiaia; allora il carico riferito all'unità di lunghezza è $b\,a_1\,\pi$, e produce un momento inflettente $^1/_8 \, b\,a_1\,\pi\,l^2$. Circa al carico accidentale, la pressione delle ruote per l'intermezzo della ghiaia diventa P′, il qual valore si ricava dalla (148) seguendo le norme indicate al § 140. Questa pressione P′ dà un momento inflettente $^1/_4 \, P'\,l$. E siccome l'azione totale di carichi operanti simultaneamente si ottiene sommando le azioni parziali,

si ha che il totale momento inflettente è

$$\frac{1}{8} b a_r \pi l^2 + \frac{1}{4} P' l$$

quindi per la stabilità

$$\frac{1}{8} b a_r \pi l^2 + \frac{1}{4} P' l = \frac{R b s^2}{6}$$

da cui

$$s = \sqrt{\left\{\frac{\frac{3}{2} P' l + \frac{3}{4} b a_r \pi l^2}{R b}\right\}}$$

e ponendo per P′ il valore dato dalla (148) e ricordando che in questo caso è $\delta = b$, si ottiene

$$s = \sqrt{\left\{\frac{\frac{3}{2} \frac{P l}{Z} + \frac{3}{4} a_r \pi l^2}{R}\right\}} \qquad (150)$$

dove Z è da valutarsi colla (147*a*)

Se i tavoloni sono robustamente chiodati sulle travi su cui insistono, si può ammettere che il tratto considerato di lunghezza l sia incastrato invece che liberamente appoggiato ed allora, siccome in questo caso il momento inflettente relativo al carico accidentale ha per valore $^1/_8 P l$, tabella XVIII, Fig. 10, e quello relativo al peso della ghiaia $^1/_{12} b a_r \pi l^2$, risulta :

α) *Per tavoloni semplici*

$$s = \sqrt{\frac{3}{4} \frac{P l}{R b}} \qquad (149a)$$

β) *Per tavoloni con soprapposta ghiaia*

$$s = \sqrt{\left\{\frac{\frac{3}{4} \frac{P}{Z} l + \frac{1}{2} a_r \pi l^2}{R}\right\}} \qquad (150a)$$

ma queste formule non sono da adoperarsi altro che quando si tratta di ponti di importanza affatto secondaria, e nei quali si vuole usare la massima economia.

Esempio.

Sia $l = 75$ centimetri la distanza fra asse ed asse dei correntini o travi metalliche su cui insistono i tavoloni, e la larghezza di questi sia $b = 22$ centimetri. Nell'ipotesi del passaggio di carri pesanti, di cui la pressione delle ruote è $P = 3000$ chilogrammi, e dell'impiego di legname larice di buona qualità, per cui sia da prendersi $R = 80$ chilogrammi per centimetro quadrato, si ottiene la grossezza dei tavoloni:

α) Nel caso di *tavolato semplice*, ricorrendo alla (149)

$$s = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{3000 \times 75}{80 \times 22}} = 14 \text{ cm.}$$

β) Nel caso di *inghiaiata* dell'altezza $a_1 = 25$ centimetri, e del peso $\pi = 2000$ chilogrammi per metro cubo, e quindi chilogrammi 0,002 per centimetro quadrato, siccome dalla (147a) si ricava

$$Z = 10 + 1{,}50 \times 25 = 47{,}5 \text{ cm.}$$

si ha ricorrendo alla (150)

$$s = \sqrt{\frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{3000}{47{,}5} 75 + \frac{3}{4} 25 \times 0{,}002 \times 75^2}{80}} = 9{,}6 \text{ cm.}$$

142. Lamiere ondulate. — Sopra queste lamiere la pressione di una ruota si distribuisce su d'una superficie maggiore, non soltanto per l'attrito e la coesione della ghiaia, ma ben anco per il consolidamento che in questa viene prodotto dalle onde, e difatti l'esperienza ha dimostrato che si può prendere nella (147) $z = 30$ centimetri per cui essa diventa

$$Z = 30 + 1{,}50\, a_1 \qquad (147b)$$

ed esprimendo tutto in metri

$$Z = 0{,}30 + 1{,}50\, a_1 \qquad (147c)$$

e quindi la pressione ridotta P' data dalla (148) (essendo in questo caso la distanza fra asse ed asse delle onde eguale alla loro lar-

ghezza, cioè $\delta = b$) diventa

$$P' = \frac{P\,b}{0{,}30 + 1{,}50\,a_1} \qquad (148a)$$

Considerato che la massima larghezza di un'onda è $b = 25$ centimetri, e che la minima altezza dello strato di ghiaia sopra il vertice delle onde è $a_1 = 10$ centimetri, risulta che la pressione di una ruota si distribuisce sopra una superficie che per lo meno è larga $Z = 30 + 1{,}50 \times 10 = 45$ centimetri, ossia sopra due onde circa. Ma ordinariamente b è minore di 25 centimetri, ed a_1 maggiore di 10 centimetri, per cui mediamente Z acquista un tal valore, che abbraccia tre onde. E difatti questo è il dato pratico, a cui sogliono tenersi i costruttori.

È facile scorgere che, anche per queste lamiere, è più sfavorevole il passaggio dei carri che non quello della folla stipata. Infatti chiamando l la distanza fra le travi d'appoggio delle lamiere, si ottiene la condizione per la eguaglianza degli effetti, analogamente a quanto si è fatto al § **141**, dalla

$$\frac{1}{8}\,b\,k_0\,l^2 = \frac{1}{4}\,\frac{P\,b}{0{,}30 + 1{,}50\,a_1}\,l \qquad (I)$$

dove k_0 è il carico per metro quadrato dovuto alla folla, e P la pressione di una ruota. Dalla (I) si ha

$$k_0 = \frac{2\,P}{(0{,}30 + 450\,a_1)\,l}$$

Il minimo valore di $P = 1500$ chilogrammi, il massimo di $a_1 = 25$ centimetri, il massimo di $l =$ metri 1,20 e quindi il minimo valore di k_0 che soddisfa la (I) è

$$k_0 = \frac{2 \times 1500}{(0{,}30 + 1{,}50 \times 0{,}25)\,1{,}20} = 3703{,}7$$

il qual valore di k_0 è ben superiore a quello massimo di 450 chilogrammi che realmente si ammette in pratica, e quindi si deve tener conto del passaggio dei carri come più sfavorevole. E precisamente si deve supporre una ruota posta nel mezzo del tratto libero di un'onda, lungo l, tenendo conto della pressione

ridotta P' che dà un momento inflettente di valore

$$M_P = \frac{1}{4} P' l$$

Bisogna poi tener conto anche del peso morto. Chiamando p_r quello delle lamiere ondulate, p_{rr} quello della ghiaia e p_0 il totale per unità di superficie, risulta

$$p_0 = p_r + p_{rr} \qquad (151)$$

Il peso delle lamiere per metro quadrato si può valutare secondo il WINKLER colla formula

$$p_r = 15 + 0{,}0184\, P\, l \qquad (152)$$

dove P indica la pressione di una ruota in chilogrammi, ed l la portata libera delle lamiere in metri. Il peso p_r varia fra 35 e 70 chilogrammi per metro quadrato, e mediamente si può prendere nei calcoli di stabilità di 60 chilogrammi.

Il peso della ghiaia per metro quadrato è dato mediamente da

$$p_{rr} = (a_r + \frac{1}{2} a)\, 2000 \qquad (152a)$$

dove a indica l'altezza delle onde, e tanto a che a_r sono da esprimersi in metri; od anche dall'altra

$$p_{rr} = (a_r + 0{,}05)\, 2000 \qquad (152b)$$

Essendo la distanza fra asse ed asse delle onde $\delta = b$, b rappresenta la zona unitaria di carico, e quindi il peso morto riferito all'unità di lunghezza ha per valore $p_0\, b$, e produce un momento inflettente

$$M_p = \frac{1}{8} p_0\, b\, l^2$$

Il momento inflettente totale è dunque

$$M_p + M_P = \frac{1}{8} p_0\, b\, l^2 + \frac{1}{4} P' l$$

e quindi per la stabilità della lamiera deve essere

$$\frac{1}{4} P' l + \frac{1}{8} p_0 b l^2 = \frac{R I}{d}$$

nella quale I rappresenta il momento di inerzia di un'onda.

Il rapporto $\frac{I}{d}$ si può esprimere mediamente e speditamente secondo il WINKLER, con

$$\frac{I}{d} = \left(0{,}21 + 0{,}30 \frac{a}{b}\right) b a s$$

e siccome ordinariamente si assume a priori la larghezza b e l'altezza a delle onde, e si lascia indeterminato lo spessore s, questo si ricava mediante la

$$s = \frac{\frac{1}{4} P' l + \frac{1}{8} p_0 b l^2}{R \left(0{,}21 + 0{,}30 \frac{a}{b}\right) b a} \qquad (153)$$

dove P′ e p_0 hanno i valori dati rispettivamente dalle (148a) e (151), e per unità di misura si deve prendere il metro.

Col mezzo della (153) si può anche determinare la distanza l fra le travi d'appoggio, o la pressione P che possono sopportare lamiere ondulate di dato spessore.

Esempio.

La distanza delle travi su cui insiste la lamiera sia l = metri 0,90, la larghezza e l'altezza delle onde rispettivamente b = metri 0,20 ed a = metri 0,08, l'altezza della ghiaia sopra il vertice delle onde a_1 = metri 0,15, la pressione delle ruote P = 2500 chilogrammi e si assuma lo sforzo pratico di sicurezza di 8 chilogrammi per millimetro quadrato (8,000,000 per metro quadrato) essendo le lamiere fatte con ferro di buona qualità.

Si comincia dal formare le quantità P′ e p_0.

Dalla (148a) $\quad P' = 2500 \frac{0{,}20}{0{,}30 + 1{,}50 \times 0{,}15} = 952{,}3$ Kg.

» (152) si ha il peso della lamiera $p_1 = 15 + 0{,}0184 \times 2500 \times 0{,}9 = 56{,}4$ Kg.

» (152a) » » della ghiaia $p_{11} = (0{,}15 + {}^1/_2\ 0{,}08)\ 2000 = 380$ »

e quindi $p_0 = p_1 + p_{11} = 436{,}4$ Kg.

e quindi lo spessore s della lamiera ondulata ricorrendo alla (104) è

$$s = \frac{\frac{1}{4}\,952{,}3 \times 0{,}90 + \frac{1}{8}\,436{,}4 \times 0{,}20 \times \overline{0{,}90}^2}{8000000\left(0{,}21 + 0{,}30\,\frac{0{,}08}{0{,}20}\right) 0{,}20 \times 0{,}08} = \text{m. } 0{,}005$$

143. Lamiere cilindriche.

α) Lamiere sospese. — Se la pressione delle ruote si distribuisse uniformemente su queste lamiere tanto nel senso della larghezza, quanto in quello della lunghezza, esse sarebbero soggette semplicemente a trazione ed il calcolo di stabilità riescirebbe facile e spedito. Ciò invece non avviene, ed in conseguenza le lamiere tendono anche ad inflettersi, perlocchè non è possibile l'istituire calcoli esatti i quali riescirebbero troppo difficili e complicati. D'altronde non è nemmeno consigliabile di considerare le lamiere solamente cimentate o da carichi uniformemente distribuiti o da carichi concentrati, inquantochè nel primo caso risulterebbero spessori troppo esigui, nel secondo troppo forti. Il problema si può risolvere con sufficiente approssimazione considerando la lamiera come un arco soggetto alla pressione di una ruota applicata nel mezzo, calcolando la relativa tensione massima e diminuendo opportunamente la medesima secondo i risultati esperimentali, onde tener conto della circostanza che questa pressione, se non si distribuisce uniformemente su tutta la lamiera, pure si diffonde su una zona abbastanza larga.

Si chiami l la portata o corda, f la freccia, s lo spessore della lamiera, e P la pressione di una ruota. Secondo il WINKLER il massimo sforzo unitario prodotto dal carico accidentale sulla sezione retta della lamiera, e ridotto nell'ipotesi che la pressione P si distribuisca lungo l'asse della superficie cilindrica sulla lunghezza Z, è dato dall'espressione

$$0{,}12\,\frac{P\,l}{Z\,f\,s} + 0{,}05\,\frac{P\,l}{Z\,s^2}$$

Devesi poi tener conto anche del *carico permanente*, il quale si considera uniformemente distribuito sulla corda in ragione di p chilogrammi per unità corrente: e siccome si prende a considerare l'unità di lunghezza della lamiera (nel senso dell'asse

della superficie cilindrica), ne consegue che p rappresenta anche il carico p_0 per unità superficiale. Lo sforzo unitario di tensione sulla sezione retta della lamiera, considerata come fune sospesa, è dato dall'espressione

$$\frac{p\,l^2}{8\,f\,s}$$

L'azione del carico accidentale e quella del carico permanente si sommano, e quindi per la stabilità della lamiera deve essere questa somma, che rappresenta il reale sforzo complessivo che cimenta la lamiera, eguale allo sforzo pratico di tensione R_t, cioè

$$0{,}12\,\frac{P\,l}{Z\,f\,s} + 0{,}05\,\frac{P\,l}{Z\,s^2} + \frac{p\,l^2}{8\,f\,s} = R_t \qquad (154)$$

da cui

$$s^2 - \left(\frac{0{,}12\,P}{Z} + \frac{p\,l}{8}\right)\frac{l}{R_t\,f}\,s = 0{,}05\,\frac{P\,l}{Z\,R_t} \qquad (155)$$

la quale serve a determinare lo spessore da assegnarsi alla lamiera.

Si ponga per semplicità

$$\left(\frac{0{,}12\,P}{Z} + \frac{p\,l}{8}\right)\frac{l}{R_t\,f} = A \quad , \quad 0{,}05\,\frac{P\,l}{Z\,R_t} = B \qquad (156)$$

e sostituendo nella (155) si ottiene

$$s = \frac{A}{2} + \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + B} \qquad (155a)$$

Ordinariamente l'altezza a, dell'inghiaiata sopra la lamiera, non tenuto conto della freccia, si prende $a_1 = 15$ centimetri, per cui ricorrendo alla (147) è $Z = z + 1{,}5 \times 15$ e siccome l'esperienza ha dimostrato potersi assumere $z = 30$ centimetri, ne viene che $Z = 30 + 1{,}5 \times 15$ ossia approssimativamente $Z = 50$, mentre la freccia mediamente è $^1/_{10}$ della corda, cioè $f = \frac{l}{10}$. Per R_t poi si adotta il valore di 800 chilogrammi per centimetro quadrato. Sostituiti questi valori nella (156) si ha

$$\left.\begin{aligned} A &= \left(\frac{0{,}12\ P}{50} + \frac{p\ l}{8}\right) \frac{l}{800 \times \frac{1}{10}\ l} = 0{,}00003\ P + 0{,}00156\ p\ l \\ B &= 0{,}05\ \frac{P\ l}{50 \times 800} = 0{,}00000125\ P\ l \end{aligned}\right\} \quad (156a)$$

nelle quali si deve esprimere l in centimetri, P in chilogrammi e p in chilogrammi per centimetro quadrato.

Il peso p_1 della lamiera per metro quadrato si può valutare approssimativamente secondo il WINKLER colla formula

$$p_1 = 31 + 0{,}0056\ P\ l\ \text{Kg.} \qquad (157)$$

esprimendo P in chilogrammi ed l in metri; ed il peso p_2 della ghiaia per metro quadrato colla formula

$$p_2 = \left(a_1 + \frac{1}{3} f\right) 2000\ \text{Kg.} \qquad (158)$$

esprimendo a_1 ed f in metri.

β) **Lamiere a volta.** — Per queste lamiere servono egualmente le formule (155), (156), (155a), colla sola differenza che lo sforzo pratico di tensione (che in questo caso è di compressione) si deve prender minore, e cioè $R_c = 600$ chilogrammi per centimetro quadrato, e colla condizione che vi sieno i robustamenti necessari per impedire l'incartocciamento, § **116** — β).

Le quantità A e B diventano perciò

$$\left.\begin{aligned} A &= \left(\frac{0{,}12\ P}{50} + \frac{p\ l}{8}\right) \frac{l}{600 \times \frac{1}{10}\ l} = 0{,}00004\ P + 0{,}00208\ p\ l \\ B &= 0{,}05\ \frac{P\ l}{50 \times 600} = 0{,}00000166\ P\ l \end{aligned}\right\} \quad (156b)$$

Il peso per metro quadrato della lamiera, tenendo conto anche dei robustamenti, diventa maggiore del 20 per cento, ed è dato dalla formula

$$p_1 = 38 + 0{,}0068\ P\ l\ \text{Kg.} \qquad (157a)$$

mentre il peso della ghiaia è dato ancora dalla (158) dove a indica l'altezza dello strato sopra il vertice della lamiera.

Esempio.

La corda della lamiera sia $l =$ metri 1,50, la freccia $^1/_{10}$ della corda, cioè $f =$ metri 0,15, la pressione di una ruota P = 3000 chilogrammi, l'altezza della ghiaia, non tenuto conto della freccia, $a_1 = 15$ centimetri.

α) Lamiere sospese. — Si comincia dal formare il valore del carico permanente p_0 per metro quadrato ricorrendo alle (157) e (158)

Peso della lamiera $p_1 = 31 + 0{,}0056 \times 3000 \times 1{,}5 =$ 56,2 Kg.
» » ghiaia $p_{11} = (0{,}15 + {}^1/_3\, 0{,}15)\, 2000$ = 400 »
Peso complessivo per m□, $p_0 = p_1 + p_{11} =$ 456,2 Kg.

e quindi riferendosi al centimetro ed essendo $p = p_0$ è $p = 0{,}0456$ chilogrammi.

Col mezzo della (156a) si calcolano i valori di A e B cioè

$$A = 0{,}00003 \times 3000 + 0{,}00156 \times 0{,}0456 \times 150 = 0{,}1$$
$$B = 0{,}00000125 \times 3000 \times 150 = 0{,}5625$$

e sostituendo nella (155a) si ottiene

$$s = \frac{0{,}1}{2} + \sqrt{\left(\frac{0{,}10}{2}\right)^2 + 0{,}5625} = 0{,}8 \text{ cm.}$$

ossia $s = 8$ millimetri.

β) Lamiere a volta. — Ricorrendo alle (157a) e 158) si forma il valore di $p = p_0$ cioè

Peso della lamiera $p_1 = 38 + 0{,}0068 \times 3000 \times 1{,}5 =$ 68,6 Kg.
» » ghiaia $p_{11} = (0{,}15 + {}^1/_3\, 0{,}15)\, 2000$ = 400 »
Peso complessivo per m□ $p_0 = p_1 + p_{11} =$ 468,6 Kg.

e quindi

$$p = 0{,}0469 \text{ per cm.}$$

Le quantità A e B si calcolano colle (156b) e si ha

$$A = 0{,}00004 \times 3000 + 0{,}00208 \times 0{,}0469 \times 150 = 0{,}135$$
$$B = 0{,}00000166 \times 3000 \times 150 = 0{,}747$$

e fatta lo sostituzione nella (155a) risulta

$$s = \frac{0{,}135}{2} + \sqrt{\left(\frac{0{,}135}{2}\right)^2 + 0{,}747} = 0{,}937 \text{ cm.}$$

ossia $s = 10$ millimetri circa.

144. Lamiere gobbe.

α) **Lamiere impostate.** — Non venne ancora determinata mediante ricerche teoriche una formula rigorosa per il calcolo di queste lamiere, dacchè il problema presenta qualche complicazione. Il RANKINE dà una formola che si può mettere sotto la seguente forma

$$s = 1{,}4 \frac{P\, l\, l_1^3}{R_c\,(l^4 + l_1^4)\, f} \qquad (159)$$

dove l ed l_1 rappresentano le lunghezze dei lati della piastra, essendo $l_1 > l$, mentre è da porsi $R_c = 600$ chilogrammi per centimetro quadrato. Per piastre quadrate, e quindi per $l_1 = l$, la (159) diventa

$$s = 0{,}7 \frac{P}{R_c\, f} \qquad (159a)$$

Queste formule però non tengono conto del peso permanente il quale, essendo in questo caso piuttosto rilevante, non deve essere trascurato.

Secondo il MALLET, inventore di queste piastre, la resistenza si riduce a $^5/_8$ quando esse sono imbollonate soltanto lungo due lati, e si riduce alla metà quando sono affatto libere; mentre le piastre d'acciaio devono sopportare un doppio carico, ciò per altro nell'ipotesi di carichi uniformemente distribuiti. Le esperienze di BAUSCHINGER, con carichi concentrati nel mezzo, hanno provato invece che la resistenza delle piastre appoggiate liberamente è di assai poco inferiore a quella delle piastre chiodate.

In analogia alla formula (154), e seguendo i procedimenti del WINKLER, si può usare per il calcolo delle piastre gobbe la relazione

$$\left\{\frac{0{,}12\, P\, l}{s^2\, l_1} + 0{,}288 \frac{P\, l}{l_1\, f s} + 0{,}22 \frac{p\, l^2}{f s}\right\} \frac{l_1^5}{l^5 + l_1^5} = R_c \qquad (160)$$

la quale serve a dare lo spessore delle piastre, tenendo conto anche del peso permanente, e dalla medesima si ricava

$$s^2 - \left(0{,}288 \frac{P}{l_1} + 0{,}22\, p\, l\right) \frac{l\, l_1^5}{f\,(l^5 + l_1^5)\, R_c}\, s = \frac{0{,}12\, P\, l\, l_1^5}{l_1\,(l^5 + l_1^5)\, R_c}$$

e ponendo per brevità

$$\left.\begin{aligned}\left(0{,}288\,\frac{P}{l_1}+0{,}22\,p\,l\right)\frac{l\,l_1^5}{f\,(l^5+l_1^5)\,R_c}&=A\\ \frac{0{,}12\,P\,l\,l_1^5}{l_1\,(l^5+l_1^5)\,R_c}&=B\end{aligned}\right\}\quad(161)$$

si ha definitivamente

$$s=\frac{A}{2}+\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2+B}\qquad(160a)$$

Per piastre quadrate, cioè per $l_1=l$, i valori di A e B dati dalla (161) diventano:

$$\left.\begin{aligned}A&=(0{,}144\,P+0{,}11\,p\,l^2)\,\frac{1}{f\,R_c}\\ B&=\frac{0{,}06\,P}{R_c}\end{aligned}\right\}\quad(161a)$$

β) **Piastre sospese.** — Le formule (159) (159a) (160) (160a) (161) (161a) date per le piastre impostate, servono anche per le lamiere sospese, purchè si ponga in esse R_t in luogo di R_c, e prendendo $R_t=800$ chilogrammi per centimetro quadrato.

Il peso p_1 delle piastre gobbe per metro quadrato è dato:

$$\left.\begin{aligned}&\alpha)\ \text{Per le piastre impostate } p_1=21+0{,}008\,P\ \text{Kg.}\\ &\beta)\ \text{»}\qquad\text{»}\qquad\text{sospese}\quad p_1=18+0{,}007\,P\ \text{»}\end{aligned}\right\}\quad(162)$$

dove P si deve prendere in chilogrammi.

Il peso p_{11} per metro quadrato della massicciata stradale è dato da

$$p_{11}=\left(a_1+\frac{1}{4}\,f\right)2000\ \text{Kg.}\qquad(163)$$

esprimendo a_1 ed f in metri, ed essendo a_1 l'altezza della ghiaia non compresa la freccia della piastra.

Esempio.

α) PIASTRE IMPOSTATE. — Si prenda $P=3000$ chilogrammi, $l=$ metri 1,20, $l_1=$ metri 1,50, $f=0{,}07$, essendo $R_c=6000000$ chilogrammi per metro quadrato.

Applicando la formola di RANKINE (159) si ha

$$s = 1{,}4\,\frac{3000 \times 1{,}20 \times 1{,}50^3}{6000000\,(1{,}20^4 \times 1{,}50^4)\,0{,}07} = \text{m. } 0{,}0056$$

ossia circa 6 millimetri.

Applicando le formule (160*a*) e (161), allo scopo di tener conto anche del peso permanente, bisogna cominciare dal calcolare il medesimo. A ciò servono le formole (162) e (163). — Si prenda l'altezza della ghiaia $a_r = $ metri 0,16 e si ha

Peso della lamiera $p_r = 21 + 0{,}008 \times 3000 = 45$ Kg.

» » ghiaia $p_{rr} = \left(0{,}16 + \frac{0{,}07}{4}\right) 2000 = 355$ »

Peso complessivo per m□ $p_0 = p_r + p_{rr} = 400$ Kg.

e siccome anche in questo caso è il peso per metro lineare eguale a quello per metro quadrato, cioè $p = p_0$, si deve prendere $p = 400$ chilogrammi per metro.

I valori delle quantità A e B si determinano colle (161)

$$A = \left(0{,}288\,\frac{3000}{1{,}50} + 0{,}22 \times 400 \times 1{,}20\right) \frac{1{,}20 \times 1{,}50^5}{0{,}07\,(1{,}20^5 + 1{,}50^5)\,6000000} = 0{,}00146$$

$$B = \frac{0{,}12 \times 3000 \times 1{,}20 \times 1{,}50^5}{1{,}50\,(1{,}20^5 + 1{,}50^5)\,6000000} = 0{,}000045$$

e quindi sostituendo nella (160*a*) si ottiene

$$s = \frac{0{,}00146}{2} + \sqrt{\left(\frac{0{,}00146}{2}\right)^2 + 0{,}000045} = \text{m. } 0{,}0075$$

cioè millimetri $7\,^1/_2$.

Osservazione. — La tabella **XI**, dove sono raccolte le quarte potenze dei numeri naturali fino al 160, serve a calcolare speditamente le potenze quinte per qualsivoglia dei valori che possono assumere l ed l_r in pratica.

β) PIASTRE SOSPESE. — Tenendo i dati precedenti, per avere i valori delle quantità A e B, siccome la sola differenza in queste sta nello sforzo pratico di tensione, che devesi prendere $R_t = 8000000$, mentre prima era $R_c = 6000000$, vedesi facilmente che basta dividere i valori prima trovati per il rapporto $\frac{R_t}{R_c}$ ossia per $\frac{8000000}{6000000} = 1{,}25$ e quindi si ha

$$A = \frac{0{,}00146}{1{,}25} = 0{,}00117$$

$$B = \frac{0{,}000045}{1{,}25} = 0{,}000036$$

e sostituendo nella (160*a*) risulta

$$s = \frac{0{,}00117}{2} + \sqrt{\left(\frac{0{,}00117}{2}\right)^2 + 0{,}000036} = 0{,}0066$$

ossia circa 7 millimetri.

145. Ferri sagomati. — Questi ferri hanno tale lunghezza che appoggiano d'ordinario sopra più travi, il cui numero varia colla distanza alla quale sono collocate. A rigore dunque si dovrebbero istituire i calcoli di stabilità tenendo conto di questa condizione; però per semplicità di processo, e per favorire la stabilità, si usa in pratica di considerare il tratto di ferro sagomato, che sta fra due appoggi successivi, come liberamente appoggiato, ed in base a questa ipotesi, ecco come si procede, tenendo conto tanto del carico permanente che dell'accidentale.

Sia δ la distanza fra asse ed asse dei ferri sagomati, a la loro altezza, l la lunghezza del tratto che si considera, a_1 l'altezza della ghiaia sopra la faccia superiore dei medesimi, p_0 il peso permanente riferito all'unità di superficie, per cui è $p = p_0 \delta$ quello riferito all'unità di lunghezza, e P la pressione di una ruota.

Il *carico permanente*, essendo uniformemente distribuito, dà un momento inflettente per la sezione mediana del tratto considerato

$$M_p = \frac{p\, l^2}{8} = \frac{p_0 \delta\, l^2}{8}$$

Circa al *carico accidentale* è facile vedere che è più pericoloso quello prodotto dal passaggio dei carri, che non quello dovuto ad una folla stipata. Difatti, siccome la massima lunghezza del tratto libero (cioè la massima distanza fra le travi su cui insistono i ferri sagomati) si prende d'ordinario l = metri 1,80, e la massima distanza a cui si pongono i ferri da asse ad asse è δ = metri 0,40, ne consegue che il massimo carico dovuto alla folla sarebbe di $1{,}80 \times 0{,}40 \times 450 = 324$ chilogrammi, cioè ben inferiore al minimo peso di una ruota, ossia 1500 chilogrammi, il quale d'altronde essendo concentrato, agisce anche più sfavorevolmente. Essendo poi di metri 1,80 la massima lunghezza del tratto libero l, vedesi che il caso più sfavorevole dovuto al sopraccarico si verifica allorchè una ruota si trova nel mezzo del tratto

considerato. Bisogna poi tener conto anche dell'influenza della ghiaia, circa alla trasmissione della pressione della ruota sul ferro sagomato, valendosi delle considerazioni del § **140**, ed usando la formula (148), cioè $P_r = P\frac{\delta}{Z}$, dove per Z si deve porre il valore dato dalla (147) $Z = z + 1{,}50\,a_r$. Il valore di z, cioè di quel tratto della superficie dell'inghiaiata sul quale opera direttamente la pressione di una ruota, si può ritenere mediamente, in base all'esperienza, $z = 30$ centimetri, e quindi diventa, $Z = 30 + 1{,}5\,a_r$ per cui la pressione ridotta risulta $P_r = P\frac{\delta}{30 + 1{,}5 a_r}$.

Il massimo momento inflettente prodotto dalla pressione ridotta P_r sul ferro è dunque

$$M_P = \frac{P_r\, l}{4} = \frac{P\,\delta\, l}{4\,(30 + 1{,}5\,a_r)}$$

e quindi il totale momento inflettente massimo è

$$_{mas}M = M_p + M_P = \frac{1}{8}\,p_0\,\delta\,l^2 + \frac{P\,\delta\,l}{4\,(30 + 1{,}5\,a_r)}$$

Per la stabilità dunque deve essere

$$\frac{\delta\,l}{4}\left(\frac{P}{30 + 1{,}5\,a_r} + \frac{1}{2}\,p_0\,l\right) = \frac{R\,I}{d} \qquad (164)$$

dove R ed I conservano il solito significato, d indica la distanza della fibra più lontana dall'asse neutro, e nella quale formula si deve prendere per unità di misura il centimetro. Il peso dei ferri per metro quadrato si può valutare colla

$$p_r = 32 + 0{,}0125\,P\,l \qquad (165)$$

e mediamente si può prendere di 60 chilogrammi.

Il peso $p_{''}$ della ghiaia per metro quadrato, chiamando a l'altezza del ferro, è dato da

$$p_{''} = \left(a_r + \frac{1}{2}\,a\right)2000 \qquad (166)$$

e mediamente si può prendere

$$p_{''} = (a_{'} + 0{,}04)\ 2000 \qquad (166a)$$

nelle quali formule a, $a_{'}$ ed l devono valutarsi in metri e P in chilogrammi, ricordando poi che $p_0 = p_{'} + p_{''}$.

I ferri sagomati che al presente si adoperano come tavolato di ponti sono i ferri Zores e Wautherin, e d'ordinario anzi si usano quest' ultimi, mentre le rotaie Brunel e Barlow, adoperate originariamente, oggidì sono in disuso sia perchè poco economiche, sia perchè non facilmente reperibili in commercio. — I ferri Zores e Wautherin si devono prendere colle dimensioni che si trovano in commercio, (indicate nelle tabelle XXV e XXVI) e per le quali sono anche calcolati i valori del rapporto $\frac{I}{d}$ in millimetri. Il loro calcolo dunque riesce facile e spedito mettendo la formula (164) sotto la seguente forma

$$\frac{\delta\, l}{4\,R}\left(\frac{P}{300 + 1{,}5\,a_{'}} + \frac{1}{2}\,p_0\,l\right) = \frac{I}{d} \qquad (164a)$$

dove tutto è da esprimersi in millimetri, e mediante la quale si determina il valore che deve avere in un dato caso il rapporto $\frac{I}{d}$. Colla scorta di questo valore si cerca nelle dette tabelle quale ferro è opportuno di prendere.

Una importante osservazione si deve fare riguardo all'impiego di questi ferri, riferendosi specialmente ai ferri Wautherin il cui uso è più frequente. Di solito il calcolo si deve fare per ruote del peso $P = 3000$; la distanza a cui si pongono i ferri da asse ed asse si prende mediamente $\delta = 0{,}30$, l' altezza dello strato di ghiaia $a_{'} = 0{,}15$, lo sforzo pratico $R = 8$ chilogrammi per millimetro quadrato. In quanto al peso p_0 bisogna formarlo. Ricorrendo alla (166a) si ha

Peso ghiaia	per m□	$p_{''} = (0{,}15 + 0{,}04)\,2000 =$	380 Kg.
Il peso dei ferri	»	si può prendere mediamente di	60 »
		Peso totale per m□ $p_0 =$	440 Kg.

In base a questi dati la (164*a*) diventa

$$53{,}57\, l + 0{,}00206\, l^2 = \frac{I}{d} \qquad (164b)$$

Ora, essendo vincolate le dimensioni dei ferri che si trovano in commercio, e quindi anche il valore di $\frac{I}{d}$, si cerchi quale è la massima lunghezza l che si può assegnare al tratto libero dei medesimi (cioè la massima distanza delle travi che li sorreggono).

Perciò si risolve la (164*b*) mettendola sotto la forma

$$l = -13002 + \sqrt{13002^2 + 485\,\frac{I}{d}} \qquad (164c)$$

Introducendo in questa formula i valori del rapporto $\frac{I}{d}$, somministrati dalla tabella XXV, si ottengono i rispettivi valori di l in millimetri, i quali sono raccolti nella tabella XLII ridotti in metri.

Tabella XLII.

Ferri Wautherin (Vedi tabella XXV)				
Numero	1	2	3	4
Distanza fra le travi l . . .	0,644	0,679	1,433	0,772

Il tipo numero 4 essendo poco economico non si adopera per tavolato di ponti, il tipo numero 3 viene poco usato stante la sua maggior altezza, e si preferisce in pratica l'impiego dei tipi numeri 1 e 2. Però in luogo delle limitate distanze delle travi d'appoggio, date dalla tabella XLII, e risultanti dall'indicato processo di calcolo, in pratica si adottano distanze molto maggiori. Si ammette cioè che in causa della favorevole azione dell'inghiaiata, la pressione di una ruota venga sopportata da tre ferri contemporaneamente, e quindi allora per il calcolo serve l'equazione

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{P}\,l + 3\,\frac{1}{8}\,p\,l^2 = 3\,\mathrm{R}\,\frac{I}{d} \qquad (167)$$

nella quale è $p = p_0 \delta$, e risolta rispetto ad l dà

$$l = -\frac{1}{3}\frac{P}{p} + \sqrt{\left(\frac{1}{3}\frac{P}{p}\right)^2 + \frac{8R}{p}\frac{I}{d}} \qquad (167a)$$

e prendendo per P, p_0 e δ i valori sopra indicati, cioè P = 3000 chilogrammi e $p = 440 \times 0{,}3 = 132$ chilogrammi per metro, cioè 0,132 per millimetro lineare si ha

$$l = -7558 + \sqrt{7558^2 + 485\frac{I}{d}} \qquad (167b)$$

per cui risultano le seguenti distanze massime che si possono adottare fra le travi sorreggenti i ferri WAUTHERIN

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Tipo N. 1} \ldots\ldots & l = & \text{m. } 1{,}06 \\ \text{» » 2} \ldots\ldots & l = & \text{» } 1{,}12 \\ \text{» » 3} \ldots\ldots & l = & \text{» } 2{,}27 \\ \text{» » 4} \ldots\ldots & l = & \text{» } 1{,}26 \end{array}\right\} \qquad (168)$$

L'ipotesi pratica che resistano contemporaneamente 3 ferri al peso di una ruota non può accettarsi se non allorquando la massicciata siasi perfettamente consolidata, e siccome ciò si verifica molto tempo dopo che il ponte è aperto al pubblico transito, ne consegue che adottando le distanze indicate nelle (168), da principio i ferri sono cimentati molto più di 8 chilogrammi per millimetro quadrato, e quindi, onde rimediare a questo inconveniente, è opportuno di rinforzarli chiodando al di sotto di essi, normalmente alla loro direzione, un ferro continuo in forma di ⊓ in corrispondenza alla mezzaria. Questo provvedimento poi si deve assolutamente adottare allorchè si sorpassino le distanze massime sopraccennate, e con esso si ottiene che i vari ferri lavorino solidariamente.

Certo è poi che se si dovesse tener conto di ruote del peso di 4 o 5 tonnellate, allora bisognerebbe ricorrere al tipo numero 3, non trascurando di adoperare gli accennati rinforzi, mentre per ruote del peso di 1,5 o 2 tonnellate si può colle usuali distanze l (cioè fino a metri 1,60) ricorrere ai tipi numeri 1 e 2 senza detti rinforzi.

146. Volte in mattoni. — Il WINKLER considera queste volte alla stessa guisa delle travi ad arco ribassato, per cui lo sforzo unitario di compressione prodotto dal carico P di una ruota, analogamente alla formula del § **143**, è dato da

$$0{,}15\,\frac{P\,l}{Z\,f\,s}+0{,}08\,\frac{P\,l}{Z\,s^2}$$

nella quale i coefficienti numerici tengono conto dell'influenza vantaggiosa della ghiaia sulla trasmissione della pressione, e dove l, f ed s rappresentano rispettivamente la corda, la freccia e la grossezza della volta, e Z la lunghezza del tratto secondo il quale si distribuisce la pressione di una ruota nel senso dell'asse della volta. Chiamando p_o il carico permanente sull'unità di superficie, il quale rappresenta anche quello p sull'unità di lunghezza, inquantochè si considera una porzione di volta lunga l'unità lineare, esso produce uno sforzo unitario di compressione dato da $\frac{p\,l^2}{8\,f\,s}$, e quindi lo sforzo unitario complessivo con cui è cimentata la volta è

$$R_c=0{,}15\,\frac{P\,l}{Z\,f\,s}+0{,}08\,\frac{P\,l}{Z\,s^2}+\frac{p\,l^2}{8\,f\,s} \qquad (169)$$

Siccome mediamente si può ritenere $f=\frac{1}{10}\,l$, Z = 50 centimetri, $R_c=8$ chilogrammi per centimetro quadrato per il buon laterizio, sostituendo questi valori nella (169), ed ordinandola rispetto ad s si ottiene

$$s^2-(0{,}00375\,P+0{,}15625\,p\,l)\,s=0{,}0002\,P\,l \qquad (169a)$$

dove si deve porre l in centimetri, P in chilogrammi, e p in chilogrammi per centimetro quadrato.

Ponendo per brevità nella (169a)

$$\left.\begin{aligned}0{,}00375\,P+0{,}15625\,p\,l&=A\\0{,}0002\,P\,l&=B\end{aligned}\right\} \qquad (170)$$

e risolvendola si ottiene

$$s=\frac{A}{2}+\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2+B} \qquad (169b)$$

Il peso permanente p_0 per metro quadrato si può valutare colla seguente formula:

$$p_0 = 80 + 0{,}08\ P + 0{,}04\ P\ l \qquad (171)$$

dove si deve porre P in chilogrammi ed l in metri. Però si può prendere in media questo peso di 600 chilogrammi per metro quadrato, il che corrisponde ad una grossezza media di massicciata, compresa la muratura dei timpani e della volta, di metri 0,30 e calcolata in ragione di 2000 chilogrammi per metro cubo.

Se si adoperano mattoni cavi, bisogna tenere la grossezza della volta maggiore di quella somministrata dalle formule precedenti, in causa dei vuoti che diminuiscono la resistenza alla compressione; e precisamente è opportuno di moltiplicare il valore di s per 1,5, per cui il peso delle volte con mattoni cavi, a parità di resistenza, risulta pressochè eguale a quello delle volte con mattoni pieni, e quindi l'uso delle prime non è consigliabile nel tavolato dei ponti, inquantochè riescono più costose.

Esempio.

Per volte colla corda l = metri 1,50 e per ruote del peso P = 3000 chilogrammi, il peso permanente p_0 per metro quadrato, valutato colla (171), diventa

$$p_0 = 80 + 0{,}08 \times 3000 + 0{,}04 \times 3000 \times 1{,}5 = 500\ \text{Kg.}$$

e quindi il peso p per centimetro corrente, essendo $p_0 = p$, è eguale al peso per centimetro quadrato, ossia $p = 0{,}05$ chilogrammi.

Le (170) danno i valori di A e B, cioè

$$A = 0{,}00375 \times 3000 + 0{,}15625 \times 0{,}05 \times 150 = 12{,}42$$

$$B = 0{,}0002 \times 3000 \times 150 = 90$$

per cui sostituendo nella (169b) si ottiene

$$s = \frac{12{,}42}{2} + \sqrt{\left(\frac{12{,}42}{2}\right)^2 + 90} = 17{,}54\ \text{cm.}$$

Osservazione. — Purchè non si preferisca far eseguire i mattoni espressamente, le volte bisogna costruirle coi mattoni del commercio, a dimensioni fisse, ed in questo caso, siccome le grossezze che si ottengono colla (169b) di solito non coincidono colle dimensioni suddette, così senza ridurre i mattoni con spreco di materiale e mano d'opera, conviene adoperarli quali si trovano, assegnando alle volte la grossezza prossima superiore a quella data dalle formule.

2) Marciapiedi.

147. Suolo per marciapiedi. — Per il suolo dei marciapiedi valgono gli stessi procedimenti dei ponti pedonali, ricordando che il carico accidentale si prende più elevato, cioè fra 500 e 600 chilogrammi per metro quadrato, onde tener conto dell'effetto dinamico.

C) Suolo per ponti ferroviari.

148. Suolo per ponti ferroviari. — Per il suolo di questi ponti valgono le stesse norme date per i ponti pedonali, §§ **136** a **139**, inquantochè esso non è cimentato che dal passaggio di pedoni. Siccome poi in questi ponti il passaggio di pedoni è assai limitato e poco frequente, basta prendere il carico accidentale di 300 chilogrammi per metro quadrato.

D) Travi dell'impalcato.

149. Generalità. — Le travi di un ponte sotto l'azione del carico permanente e dell'accidentale sono soggette a sforzi di flessione e di taglio. Questi sforzi si determinano colle norme e procedimenti dati nella *prima parte*, §§ **43** a **56**. Quando si ha determinato il massimo momento inflettente $_{mas}M$ che cimenta una trave qualsiasi di un ponte, per la stabilità della medesima, esso deve essere equilibrato dal relativo momento resistente nel limite di stabilità, che è $\frac{R\,I}{d}$, vedi § **30**, formula (29*a*), deve cioè essere

$$_{mas}M = \frac{R\,I}{d} \qquad (172)$$

nella quale R ed I conservano i soliti significati, e d denota la distanza delle fibre più lontane dall'asse neutro, che possono essere le più stirate, o le più compresse a seconda dei casi.

Le quantità I e d dipendono dalle dimensioni della sezione retta della trave, delle quali se ne scelgono alcune, lasciandone una sola indeterminata (ed è opportuno che sia l'altezza della

trave) e questa si determina colla (172). Però per le solite forme delle travi metalliche a T I [semplici o composte, qualunque sia la dimensione che si lascia indeterminata, la (172) risulterebbe di grado superiore al secondo e quindi in pratica, sia per esser costretti ad adoperare le travi del commercio con tutte le dimensioni vincolate, sia per evitare la risoluzione della (172), si preferisce scegliere a priori tutte le dimensioni della trave e verificare se vi sia stabilità col mezzo della (172) posta però sotto la forma

$$_{mas}\mathrm{M}\frac{d}{\mathrm{I}} = \mathrm{R} \qquad (172a)$$

nella quale il 1° membro rappresenta lo sforzo reale o *coefficiente di lavoro* che cimenta le fibre più lontane dall'asse neutro (cioè le più affaticate) ed R lo sforzo tollerato dalla pratica, cioè il coefficiente di sicurezza. È evidente che le scelte dimensioni devono essere tali da rendere soddisfatta la (172*a*), se non a rigore, almeno molto approssimativamente, per cui ogniqualvolta colle assunte dimensioni ciò non risulti, conviene modificarle opportunamente, onde non vi sia deficienza a danno della resistenza, od esuberanza a scapito dell'economia. Il valore R poi si assume di 5 a 6 chilogrammi per millimetro quadrato a seconda dell'importanza del ponte, e solo in qualche raro caso si potrà prendere R = 8 chilogrammi.

Per calcolare il massimo momento inflettente che cimenta una qualunque delle travi dell' impalcato, siccome queste sono soggette tanto all'azione del carico permanente quanto a quella del carico accidentale, bisogna determinare i massimi momenti inflettenti parziali dovuti a questi carichi, e nella loro somma si ha il valore di $_{mas}$M.

Ponti pedonali.

150. Travi trasversali. — Di solito nei ponti pedonali si adottano due o più travi longitudinali col suolo posto direttamente al di sopra. Qualche volta però si ricorre anche all'impiego di travi trasversali, ma non si aggiungono mai i correntini.

Tanto il carico permanente che l'accidentale sono uniformemente distribuiti e si possono quindi considerare cumulativamente.

Chiamata δ la distanza fra le travi trasversali, δ rappresenta in unità quadrate anche la zona di carico per unità corrente di trave, **Fig. 188.** Il peso del suolo sul metro quadrato, si valuta rigorosamente una volta che ne sieno determinate le dimensioni, e lo si indica con p_0; il peso proprio della trave si chiama p_t e quindi il peso che cimenta la trave sul metro corrente, detto p, è $p = p_0 \delta + p_t$. Il carico accidentale sull'unità corrente, detto k, ha per valore $k = k_0 \delta$ e quindi il carico totale sull'unità di lunghezza della trave è $q = p + k$.

Il massimo momento inflettente per carico uniformemente distribuito ha luogo per la sezione mediana, e detta l la lunghezza della trave ha per valore

$$_{mas}M = \frac{1}{8} q l^2 \qquad (173)$$

Scelte convenientemente la forma e le dimensioni della trave, e quindi calcolato il rapporto $\frac{d}{I}$ si ricorre alla (172a) che diventa

$$\frac{1}{8} q l^2 \frac{d}{I} = R \qquad (174)$$

la quale serve per la verifica, e cioè il primo membro deve prossimamente risultare eguale al valor pratico di R onde la trave si trovi in buone condizioni di stabilità, senza trascurare una ben intesa economia.

Esempio.

Si consideri la passerella ad arco rappresentata a **Tav. 41** (Fig. 21 a 29). I traversali hanno una distanza $d =$ metri 0,967, lunghezza $l =$ metri 2, il peso $p_t = 16{,}5$ chilogrammi per metro corrente, la forma di I massiccio col rapporto $\frac{d}{I} = \frac{63}{5163827}$. Il suolo di lamiera rigata pesa chilogrammi 50 per metro quadrato, e quindi il peso permanente sul metro corrente è

$$p = 50 \times 0{,}967 + 16{,}5 = 64{,}85 \text{ Kg.}$$

Tenendo conto di un sopraccarico di 400 chilogrammi per metro quadrato si ha il carico accidentale sul metro corrente

$$k = 400 \times 0{,}967 = 386{,}80 \text{ Kg.}$$

quindi il peso totale sul metro corrente è

$$q = 64{,}85 + 386{,}80 = 451{,}65 \text{ Kg.}$$

ed il massimo momento inflettente dato dalla (173) risulta

$$mas\text{M} = \frac{1}{8} 451{,}65 \times \overline{2{,}00}^2 = 225{,}825 \text{ Kgm.}$$

e riferendosi al millimetro diventa

$$mas\text{M} = 225825$$

ed il coefficiente di lavoro dato dal 1° membro della (174) risulta

$$225825 \frac{63}{5163827} = 2{,}75 \text{ Kg. per mm}\square$$

cosicchè il travetto si trova in favorevolissime condizioni di stabilità, potendo il carico pratico R arrivare fino a 6 chilogrammi per millimetro quadrato nelle fibre più affaticate.

Ponti carrettieri.

151. Carichi. — Riguardo al *carico permanente*, esso od è in fatto uniformemente distribuito, od agisce in modo che si può considerare come tale. Riguardo al *carico accidentale* è facile scorgere che è più sfavorevole l'azione dei pesanti carri, che non quella della folla. Difatti la lunghezza delle travi secondarie e la loro distanza sono piuttosto limitate, e quindi la zona totale di carico per ogni trave è di pochi metri quadrati, per cui le considerevoli pressioni delle ruote, che agiscono quali pesi concentrati su questa piccola zona, operano più sfavorevolmente della folla, che è un carico uniformemente distribuito e d'ordinario molto minore del peso dei carri.

Riguardo alle *travi trasversali* bisogna distinguere l'appoggio diretto del tavolato, da quello ottenuto coll'interposizione di correntini longitudinali.

152. Appoggio diretto del tavolato sulle travi trasversali. — In questo caso le travi trasversali possono essere sopportate o da due sole travi principali o da un numero maggiore.

α) **Travi trasversali poste sopra più di due travi principali.** — Quando vi sono più di due travi principali, e sopra queste delle travi trasversali che portano direttamente il suolo, la distanza di quest'ultime dipende dal genere di tavolato che su di esse si deve appoggiare; in generale però non conviene tenerla maggiore di metri 2,00. In questo caso senza tener conto della continuità delle travi trasversali sopra più appoggi, si considera per semplicità di processo, e secondo l'uso della pratica, il tratto di trave trasversale che sta fra l'una e l'altra delle principali, come liberamente appoggiato, e la relativa lunghezza si indica con l.

Circa al *carico permanente*, che comprende il peso del tavolato e quello proprio della trave, è uniformemente distribuito, e chiamando p quello riferito all'unità di lunghezza, esso produce, per una sezione di ascissa x, un momento inflettente $M_p = \frac{p\,x}{2}(l - x)$, e per la sezione mediana un momento inflettente $M_p = {}^1/_8\, p\, l^2$. Essendo δ la distanza fra asse ed asse delle travi trasversali, chiamando p_0 il peso per unità superficiale del tavolato compresa la coperta (se ve ne ha), e p_t il peso proprio della trave per unità corrente, è

$$p = p_0\,\delta + p_t \qquad (175)$$

Si consideri ora il *carico accidentale*. Essendo P la pressione di una ruota, e Δ la distanza fra le ruote di un medesimo asse, può avvenire che sul tratto di trave trasversale considerato si trovi una sola ruota, quando cioè è $l < \Delta$, ed allora il massimo momento inflettente M_P si verifica quando la ruota si trova nel mezzo della trave ed ha per valore $M_P = {}^1/_4\, P\, l$. Se invece è $l > \Delta$, allora sulla trave si possono trovare due ruote e la posizione più sfavorevole è quella segnata nella **Fig. 191**, la quale però si verifica soltanto per $\Delta < 0{,}586\, l$, ed allora il relativo momento inflettente è $M_P = \frac{P(2\,l - \Delta)^2}{8\,l}$, tabella **XVIII**, Fig. 8, che se fosse $\Delta > 0{,}586\, l$ allora, ancorchè sulla trave si possano trovare due ruote, il caso più sfavorevole è dato da una sola ruota posta nel mezzo, e si ricade nel primo caso.

Il momento inflettente totale $_{mas}M = M_p + M_P$ è dunque nel caso di $\Delta > 0{,}586\, l$, e per la sezione mediana

$$_{mas}M = \frac{1}{8} p l^2 + \frac{1}{4} P l \qquad (176)$$

e nel caso di $\Delta < 0{,}586\, l$, e per la *sezione di ascissa* $x = {}^1/_4 (2l - \Delta)$

$$_{mas}M = \frac{p x}{2} (l - x) + P \frac{(2l - \Delta)^2}{8 l} \qquad (176a)$$

Per la stabilità della trave deve essere soddisfatta l'equazione (172) o la (172*a*) quando in essa si ponga per $_{mas}M$ il valore dato dalla (176) o (176*a*) a seconda della grandezza di l.

Se le travi trasversali sono di legname colla riquadratura di base b e di altezza a, allora è $\frac{I}{d} = \frac{b a^2}{6}$ e quindi la (172) diventa $_{mas}M = \frac{R b a^2}{6}$, da cui

$$a = \sqrt{\frac{6\ _{mas}M}{R b}} \qquad (177)$$

e siccome per l'economia del materiale conviene prendere b fra $0{,}50\, a$ e $0{,}75\, a$, mentre è mediamente $R = 60$ chilogrammi per centimetro quadrato, risulta:

Per $b = 0{,}5\ a$ $\qquad a = \sqrt[3]{0{,}20\ _{mas}M}$ $\qquad (177a)$

Per $b = 0{,}75\ a$ $\qquad a = \sqrt[3]{0{,}1333\ _{mas}M}$ $\qquad (177b)$

Per $b = a$ $\qquad a = \sqrt[3]{0{,}10\ _{mas}M}$ $\qquad (177c)$

dove per $_{mas}M$ sono da porsi i valori dati dalle (176) (176*a*) a seconda del valore di l, prendendo per unità di misura il centimetro.

Nel peso permanente p, dato dalla (175), è compreso anche quello p_t della trave, il quale, volendo ricavare a direttamente dalle (177) (177*a*) (177*b*) (177*c*) riesce indeterminato, e quindi in *questo caso* per semplicità di processo lo si trascura, senza notevole differenza nei risultati, poichè esso è molto piccolo in confronto del carico accidentale. Il valore adunque di p da intro-

dursi nelle (176) o (176*a*), si calcola ponendo nella (175) $p_t = 0$, cioè

$$p = p_0 \delta \qquad (175a)$$

Esempio 1°

Riferendosi alla **Fig. 254** *è* $l =$ *metri* 1,6, *e si assuma la distanza fra le travi trasversali* $\delta =$ *metri* 1, *l'altezza della ghiaia sopra le lamiere* $a_r = 0,14$, *il peso delle ruote* $P = 3000$ *chilogrammi, e quindi* $\Delta =$ *metri* 1,50. Essendo $\Delta > 0,586\,l$, ossia $1,5 > 0,94$, il massimo momento inflettente è da calcolarsi colla (176). Si cerchi il valore del carico permanente p per metro lineare.

Dalla (152) si ha peso delle lamiere $p_r = 15 + 0,0184 \times 3000 \times 1,00 = 70,2$ Kg.
Dalla (152*b*) » della ghiaia $p_{rr} = (0,14 + 0,05)\,2000 = 380$ »

Peso permanente per m$\square$ $p_0 = 450,2$ Kg.

Prendendo il ferro numero 21 della tabella **XXXIII**, il cui peso unitario è $p_t = 34$ chilogrammi, risulta mediante la (175) $p = 450 \times 1,00 + 34 = 484$.

Riferendosi al millimetro è $l = 1600$, $p = 0,484$, $d = \frac{200}{2} = 100$

$$1 = \frac{1}{12}\left(102 \times 200^3 - 92 \times 176^3\right) = 26203050$$

e quindi dalla (176) si ha

$$_{mas}M = \frac{1}{8}\,0,484 \times 1600^2 + \frac{1}{4}\,3000 \times 1600 = 1355880$$

per cui sostituendo nella (172*a*) risulta

$$1355880\,\frac{100}{26203050} = 5,18 \text{ Kg. per mm}\square$$

cioè la trave assunta soddisfa convenientemente alla stabilità.

Esempio 2°

Nella **Fig. 251** è $l = 90$ centimetri, $\delta = 65$ centimetri e supponendo tavoloni di larice grossi 10 centimetri, il peso relativo per centimetro quadrato è $p_0 = 10 \times 0,00065 = 0,0065$ chilogrammi, tabella **XL**, e quindi la (175*a*) dà $p = 0,0065 \times 65 = 0,4225$ chilogrammi per centimetro corrente. Prendendo $P = 3000$ chilogrammi ed essendo $\Delta > 0,586l$, cioè $1,5 > 0,53$, dalla (176) si ottiene

$$_{mas}M = \frac{1}{8}\,0,4225 \times 90^2 + \frac{1}{4}\,3000 \times 90 = 67927$$

e nell'ipotesi di prendere $b = 0{,}75\ a$, colla (177b) si trova

$$a = \sqrt{0{,}133 \times 67927} = 21 \text{ cm.} \quad , \quad b = 0{,}75 \times 21 = 15{,}75 \text{ cm.}$$

Esempio 3°

Nel ponte rappresentato dalle Fig. 6 *a* 14 *della* **Tav. 2** *è* $l = 125$ *centimetri,* $\delta = 67$ *centimetri, la grossezza della ghiaia* 20 *centimetri, quella dei tavoloni larice* 12 *centimetri.* Si prenda P = 3000 chilogrammi, e $b = 20$ centimetri. Si formi il valore di p_0 per centimetro quadrato.

Peso della ghiaia	$20 \times 0{,}002$	$= 0{,}0400$ Kg.
» dei tavoloni	$12 \times 0{,}00065$	$= 0{,}0078$ »
Peso permanente per cm□ p_0		$= 0{,}0478$ Kg.

e quindi $p = 0{,}0478 \times 67 = 3{,}2$ chilogrammi per centimetro corrente. Essendo $\Delta > 0{,}586\,l$, cioè $1{,}5 > 0{,}73$, colla (176) si trova

$$_{mas}M = \frac{1}{8} 3{,}2 \times 125^2 + \frac{1}{4} 3000 \times 125 = 100000$$

e prendendo lo sforzo di sicurezza R = 60 chilogrammi per centimetro quadrato si ricava dalla (177)

$$a = \sqrt{\frac{6 \times 100000}{60 \times 20}} = 22{,}4 \text{ cm.}$$

e per conto tondo si è fatto $a = 23$ centimetri.

β) **Travi trasversali poste sopra due sole travi principali.** — Affinchè due carri carichi possano scambiarsi nel ponte, è necessario che la larghezza della carreggiata sia rispettivamente di metri 4, 4,60, 5, a seconda che si tratti di carri leggeri, pesanti o pesantissimi, la cui larghezza è metri 2, 2,3, 2,5, e quindi quando vi sono due sole travi principali bisogna distinguere due casi, cioè *carreggiate di minima larghezza*, sulle quali non possono scambiarsi i veicoli, e *carreggiate di maggior larghezza* sulle quali due o più carri possono marciare di conserva.

1) **Ponti con carreggiate di minima larghezza.** — In questa categoria sono compresi quei ponti la cui larghezza, relativamente ai carri che vi hanno passaggio, è minore dei limiti sopra indicati, non mai però minore di metri 3, § 176

Nelle travi trasversali adunque (la cui distanza δ dipende dal

genere di tavolato, e giunge tutto al più a metri 2), supponendole liberamente appoggiate, in favore della stabilità, il *carico permanente*, che è uniformemente distribuito, dà per una sezione di ascissa x un momento inflettente $M_p = \frac{p\,x}{2}(l - x)$, dove p è da valutarsi colla (175); mentre il più sfavorevole *carico accidentale* (essendo per queste travi $l >$ metri 3, quindi $\Delta < 0{,}586\,l$) si verifica allorchè due ruote gemelle di un carro si trovano sulla trave disposte come nella **Fig. 192**, e lateralmente al carro marcia una folla di pedoni. Le pressioni delle ruote danno un momento inflettente $M_P = \frac{P\,(2l - \Delta)^2}{8\,l}$. Chiamando λ_s e λ_d la larghezza dei tratti occupati dalla folla rispettivamente agli estremi di sinistra e di destra della trave, ritenendo $\lambda_s < \lambda_d$, k_0 il carico sull'unità di superficie, per cui è $k = k_0\,\delta$ quello riferito all'unità di lunghezza, la folla di pedoni produce un momento inflettente

$$M_k = A_k\,x - k\,\lambda_s\left(x - \frac{\lambda_s}{2}\right)$$

nella quale deve porsi, tabella **XIX**, Fig. 2,

$$A_k = \frac{k\,\lambda_s\,(2l - \lambda_s) + k\,\lambda_d^2}{2\,l} \qquad (178)$$

$$x = \frac{2l + \Delta}{4}\,,\quad \lambda_s = \frac{2l - 2\,\Delta_0 - \Delta}{4}\,,\quad \lambda_d = \frac{2l - 2\,\Delta_0 + \Delta}{4} \qquad (179)$$

Il totale momento inflettente è dato da $_{mas}M = M_p + M_P + M_k$, cioè

$$_{mas}M = \frac{p\,x}{2}\left(l - x\right) + \frac{P\,(2l - \Delta)^2}{8\,l} + A_k\,x - k\,\lambda_s\left(x - \frac{\lambda_s}{2}\right) \qquad (180)$$

Per i calcoli di stabilità servono le formule (172), (172*a*) allorchè si ponga in esse per $_{mas}M$ il valore dato dalla (180).

Esempio.

Nel ponticello rappresentato dalle **Fig. 248-49-50**, *il tavolato è di ferri* Wautherin *con sovrapposta inghiaiata avente l'altezza media sopra i ferri* $a_1 = 0{,}15$, *la distanza fra le travi trasversali è* $\delta = 1{,}25$, *la lunghezza delle*

stesse (*ossia la larghezza del ponte*) $l =$ *metri* 4. Supponendo carri pesanti e quindi P = 3000 chilogrammi, $\Delta =$ metri 1,50 si è nel caso dei *ponti di minima larghezza*, e quindi il valore del momento inflettente è da calcolarsi colla (180). Si cominci dal calcolare il valore di p colla (175) e si assuma $k_c = 400$ chilogrammi per metro quadrato, per cui è $k = 400 \times 1{,}25 = 500$.

Peso dei ferri per m□ mediamente . . . . . 60 Kg.
» della ghiaia » formula (166*a*) (0,15 + 0,04) 2000 = 380 »
Peso del tavolato per m□ $p_0 = 440$ Kg.

Si assumino per la trave trasversale le dimensioni segnate nella **Fig. 193**, per cui l'area della medesima è $4\,(60^2 - 52^2) + 400 \times 8 = 6784$ millimetri quadrati e quindi il peso per metro corrente di trave è $p_t = 6784 \times 0{,}0078 = 52{,}91$ chilogrammi e per conto tondo $p_t = 53$. Il valore di p è dunque

$$p = 440 \times 1{,}25 + 53 = 603 \text{ Kg.}$$

Dalle (179) si ha

$$\lambda_s = \frac{2 \times 4{,}0 - 2 \times 2{,}3 - 1{,}5}{4} = 0{,}475$$

$$\lambda_d = \frac{2 \times 4{,}0 - 2 \times 2{,}3 + 1{,}5}{4} = 1{,}225 \quad , \quad x = \frac{2 \times 4{,}0 + 1{,}5}{4} = 2{,}375$$

e quindi colla (178) si trova

$$A_k = \frac{500 \times 0{,}475\,(2 \times 4{,}0 - 0{,}475) + 500 \times 1{,}225^2}{2 \times 4{,}0} = 317{,}14$$

e sostituendo nella (180) si ha

$$_{mas}M = \frac{603 \times 2{,}375}{2}(4 - 2{,}375) + \frac{3000\,(2 \times 4{,}0 - 1{,}5)^2}{8 \times 4{,}0} +$$

$$+ 317{,}14 \times 2{,}375 - 500 \times 0{,}475\left(2{,}375 - \frac{0{,}475}{2}\right) = 5369{,}93$$

Esprimendo in millimetri è

$$_{mas}M = 5369930 \quad , \quad d = \frac{400}{2} = 200$$

$$I = \frac{1}{12}\left\{128 \times 400^3 - (104 \times 384^3 + 16 \times 280^3)\right\} = 159166666$$

e sostituendo nella (172*a*) è

$$5369930\ \frac{200}{159166666} = 6{,}75 \text{ Kg. per mm□}$$

il quale sforzo reale massimo che cimenta la trave, è compreso entro i limiti pratici, e quindi si conclude che la medesima si trova in buone condizioni di stabilità.

2) **Ponti di maggiore larghezza.** — Anche per questa disposizione, *il carico permanente* produce sulle travi trasversali un momento inflettente $M_p = {}^1/_8\, p\, l^2$ per la sezione mediana, mentre per una sezione di ascissa x contata dall'appoggio di sinistra il momento inflettente è $M_p = \frac{p\,x}{2}(l - x)$, formula (53), nelle quali espressioni p ha il valore dato dalla (175).

Rispetto al *carico accidentale*, esso agisce nel modo più sfavorevole allorchè sulla trave si trova il maggior numero di ruote, ossia sul piano del ponte quanti più carri è possibile, posti gli uni accanto agli altri, mentre gli spazi vuoti che rimangono agli estremi sono coperti dalla folla di pedoni, **Fig. 194.**

Nel caso di carri pesantissimi basta considerarne uno soltanto posto nel centro, e lateralmente carri pesanti. Riferendosi all'appoggio di sinistra di cui sia A_P la corrispondente reazione, chiamando $P_1\ P_2 \ldots\ P_m \ldots\ P_n$ le successive pressioni delle ruote, di cui $P_1\ P_2 \ldots\ P_m \ldots$ rappresentano quelle che agiscono a sinistra di una data sezione **M** di ascissa x, e $d_1\ d_2 \ldots\ d_m$ le rispettive distanze di queste ultime pressioni dalla sezione considerata, il momento inflettente M_P prodotto dai carri su questa sezione, si esprime con

$$M_P = A_P\, x - (P_1\, d_1 + P_2\, d_2 + \cdots + P_m\, d_m)$$

nella quale il valore di A_P è dato da

$$A_P = \frac{P_1\,(l - a_1) + P_2\,(l - a_2) + \cdots + P_m\,(l - a_m) + \cdots + P_n\,(l - a_n)}{l} \qquad (181)$$

dove $a_1\ a_2 \ldots\ a_m \ldots\ a_n$ rappresentano le distanze delle rispettive pressioni dall'appoggio di sinistra.

Nel caso che le pressioni sieno distribuite simmetricamente rispetto al mezzo della trave, tanto per posizione che per intensità, la sezione pericolosa è la mediana, ed essendo per questa sezione $x = \frac{l}{2}$ il relativo momento inflettente è dato da

$$M_P = A_P \frac{l}{2} - (P_1 d_1 + P_2 d_2 + \cdots + P_m d_m)$$

e le reazioni degli appoggi si eguagliano, mentre essendo $n = 2m$ diventa

$$A_P = P_1 + P_2 + \cdots + P_m \qquad (181a)$$

Nel caso che le pressioni sieno tutte eguali (ciò che avviene comunemente) cioè per $P_1 P_2 \ldots P_m \ldots P_n = P$ allora diventa

$$M_P = A_P \frac{l}{2} - P (d_1 + d_2 + \cdots + d_m)$$

$$A_P = P_1 + P_2 + \cdots + P_m = mP \qquad (181b)$$

Chiamando λ_s e λ_d la larghezza degli spazi occupati dalla folla, posti rispettivamente a sinistra ed a destra, essendo k_0 il carico per unità quadrata, δ la distanza fra le travi trasversali, e quindi $k = k_0 \delta$ il carico riferito all'unità di lunghezza, il momento inflettente M_k prodotto dalla folla in una data sezione M di ascissa x è $M_k = A_k x - \lambda_s k (x - {}^1/_2 \lambda_s)$ nella quale il valore della reazione A_k dell'appoggio di sinistra si calcola colla (178).

Nel caso di carri disposti simmetricamente rispetto al mezzo della trave, gli spazi occupati dalla folla hanno eguale larghezza, la quale, chiamata λ, diventa $\lambda_s = \lambda_d = \lambda$ e quindi il momento inflettente è $M_k = \frac{k \lambda^2}{2}$, tabella XIX, Fig. 2.

Il totale momento inflettente che cimenta le travi trasversali è dunque $_{mas}M = M_p + M_P + M_k$.

Per il caso di *ruote di differente pressione, non poste simmetricamente*, e per una sezione M di ascissa x

$$\left.\begin{aligned} {}_{mas}M = \frac{p x}{2} (l - x) + A_P x - (P_1 d_1 + P_2 d_2 + \cdots \\ + P_m d_m) + A_k x - \lambda_s k \left(x - \frac{\lambda_s}{2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (182)$$

dove p, A_P ed A_k sono da valutarsi rispettivamente colle formule (175) (181) (178); ed il valore massimo di M ha luogo per quella

delle due sezioni che sono più vicine al mezzo della trave, e sulla quale agisce immediatamente una ruota delle più pesanti.

Per il caso di *ruote di differente pressione, ma poste simmetricamente* rispetto al mezzo della trave, e per la sezione pericolosa, cioè la mediana è

$$_{mas}M = \frac{1}{8} p\, l^2 + A_P \frac{l}{2} - \left(P_1 d_1 + P_2 d_2 + \cdots + P_m d_m \right) + \frac{k\,\lambda^2}{2} \qquad (182a)$$

dove p ed A_P si calcolano rispettivamente colle (175) e (181*a*).

E per il caso di *ruote di egual pressione disposte simmetricamente*, e per la sezione pericolosa, cioè la mediana diventa

$$_{mas}M = \frac{1}{8} p\, l^2 + A_P \frac{l}{2} - P \left(d_1 + d_2 + \cdots d_m \right) + \frac{k\,\lambda^2}{2} \qquad (182b)$$

dove p ed A_P si determinano colle (175) e (181*b*).

In luogo di considerare il sistema di carichi concentrati prodotti dalle ruote, nonchè il peso della folla sugli spazi che rimangono liberi lateralmente, si può considerare un carico fittizio uniformemente distribuito, il quale produca la stessa azione. Questo carico k riferito al metro corrente si può valutare in generale con sufficiente approssimazione colle semplici formule che seguono, date dal WINKLER:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Per carri leggeri} & k = 590 + 410\,\delta \text{ Kg.} & \ldots a \\ \text{» pesanti} & k = 1020 + 560\,\delta \text{ »} & \ldots b \\ \text{» pesantissimi} & k = 1290 + 570\,\delta \text{ »} & \ldots c \end{array}\right\} \qquad (183)$$

dove δ rappresenta la distanza delle travi trasversali espressa in metri. Bisogna però avvertire che k non si può prendere minore dei seguenti limiti:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Per carri leggeri} & k = 1500 \text{ Kg.} & \ldots a \\ \text{» pesanti} & k = 2610 \text{ »} & \ldots b \\ \text{» pesantissimi} & k = 3300 \text{ »} & \ldots c \end{array}\right\} \qquad (183^{bis})$$

Adottando questi valori d'approssimazione il momento inflettente totale per una sezione di ascissa x è dato da

$$M_x = \frac{p+k}{2} x (l - x) \qquad (184)$$

e quello massimo per la sezione mediana da

$$_{mas}M = \frac{1}{8} (p + k) l^2 \qquad (184a)$$

dove p rappresenta il *carico permanente*, e si determina colla (175) e k rappresenta il *carico accidentale* che si valuta colle (183) o (183bis) a seconda dei casi.

Sostituendo nella (172) o (172*a*) per $_{mas}M$ i valori rigorosi dati dalle (182) (182*a*) (182*b*), o quello d'approssimazione dato dalla (184) o (184*a*), si determinano le condizioni di stabilità della trave.

Osservazione. — Nei ponti con marciapiedi basta considerare la folla soltanto in questi, ancorchè lateralmente ai carri restino degli spazi vuoti nella carreggiata, e con λ si denota la larghezza degli stessi.

Nei ponti senza marciapiedi in pratica si trascura generalmente di considerare la folla, lateralmente ai carri, inquantochè essa produce un momento inflettente assai piccolo, e quindi basta porre $\lambda_s = 0$, $\lambda_d = 0$, $\lambda = 0$ nelle (180) (182) (182*a*) (182*b*).

Esempio 1°

Si supponga il ponte senza marciapiedi, col tavolato di ferri Wautherin *ed inghiaiata del peso complessivo* $p_0 = 460$ *chilogrammi per metro quadrato. La distanza delle travi trasversali sia* $\delta =$ *metri* 1,5, *la loro lunghezza* $l =$ *metri* 7 *e le dimensioni quelle segnate nella* **Fig. 195** *a cui corrisponde un peso* $p_t = 143{,}52$ *chilogrammi per metro corrente.* Si supponga il passaggio dei pesantissimi carri, dei quali però basta considerarne uno solo e gli altri pesanti. Sulle travi non possono trovarsi che due soli carri, e questi sieno disposti come nella **Fig. 196.** In questo caso il momento inflettente è da calcolarsi colla (182). Vedesi poi facilmente che la sezione pericolosa è quella più vicina al mezzo della trave, su cui sta una ruota colla pressione di 5000 chilogrammi ed a cui corrisponde un'ascissa $x =$ metri 3,05. Dalla (175) si ha

$$p = 460 \times 1{,}5 + 143{,}52 = 833{,}52$$

Colla (181) si ottiene

$$A_p = \frac{5000\,(7{,}0 - 1{,}55) + 5000\,(7{,}0 - 3{,}05) + 3000\,(7{,}0 - 395) + 3000\,(7{,}0 - 5{,}45)}{7{,}00} =$$

$$= 8685{,}7 \text{ Kg.}$$

Supponendo che la folla produca un carico $k_0 = 450$ chilogrammi per metro quadrato, è $k = 450 \times 1{,}5 = 675$, e quindi essendo $\lambda_s = 1{,}05$, $\lambda_d = 1{,}15$ la (178) dà

$$A_k = \frac{675 \times 1{,}05\,(2 \times 7{,}0 - 1{,}05) + 675 \times 1{,}15^2}{2 \times 7{,}0} = 719{,}5 \text{ Kg.}$$

e quindi sostituendo nella (182), e ricordando che $P_1 = 5000$, $d_1 =$ metri 1,50 si ha

$$_{mas}M = \frac{833{,}52 \times 3{,}05}{2}(7{,}0 - 3{,}05) + 8685{,}7 \times 3{,}05 - 5000 \times 1{,}5 +$$

$$+ 719{,}5 \times 3{,}05 - 1{,}05 \times 675\left(3{,}05 - \frac{1}{2}1{,}05\right) = 26198{,}884 \text{ Kgm.}$$

Volendo adoperare la formola di approssimazione, si deve in questo caso, per calcolare il valore di k, ricorrere alla (183c) da cui, ricordando che $\delta = 1{,}5$, si ricava $k = 1290 + 570 \times 1{,}5 = 2145$ chilogrammi, valore che è minore del limite minimo di 3300 chilogrammi, per cui si deve prendere $k = 3300$ chilogrammi (183bis), e quindi essendo $p = 833{,}52$ dalla (184a) si ha

$$_{mas}M = \frac{833{,}52 + 3300}{8}\overline{7{,}00^2} = 25373$$

il qual valore è abbastanza prossimo a quello rigoroso sopra trovato.

Esprimendo in millimetri, e tenendo per $_{mas}M$ il valore rigoroso, è

$$_{mas}M = 26198884 \quad , \quad d = 375 \quad , \quad I = 1720860000$$

e quindi dalla (172a) si ricava lo sforzo massimo che cimenta la trave di

$$26198883\,\frac{375}{1720860000} = 5{,}71 \text{ Kg. per mm}\square.$$

Esempio 2°

Conservando i dati dell'esempio precedente e supponendo il passaggio di carri pesanti, siccome in questo caso le pressioni sono tutte eguali e simmetricamente distribuite, il momento inflettente si deve calcolare colla (182b). Assumendo la trave colle dimensioni segnate nella **Fig. 197**, il cui peso per metro corrente è $p_t = 110$ chilogrammi, e ricordando che $p_0 = 460$, risulta $p = 460 \times 1{,}5 + 110 = 800$ chilogrammi. Si è già trovato $k = 675$ chilogrammi, dalla **Fig. 198** si vede che è $\lambda = 1{,}20$ e dalla (181b) si ricava $A_p = 2 \times 3000 = 6000$ chilogrammi; per cui sostituendo nella (182b) si ottiene

$$_{mas}M = \frac{1}{8} 800 \times 7{,}0^2 + 6000 \frac{7{,}00}{2} - 3000 (1{,}9 + 0{,}4) + \frac{675 \times 1{,}2^2}{2} = 194\ 6 \text{Kgm.}$$

Ricorrendo alla formula di approssimazione, si deve valutare k colla (183b) e si ha $k = 1020 + 560 \times 1{,}5 = 1890$ chilogrammi; e siccome questo valore è minore del limite minimo 2610, si deve prendere $k = 2610$ (183bis b) per cui sostituendo nella (184a) risulta

$$_{mas}M = \frac{1}{8} (800 + 2610)\ 7{,}0^2 = 20886 \text{ Kgm.}$$

valore che si avvicina molto a quello rigoroso.

Riferendosi al millimetro, e tenendo per $_{mas}M$ il valore rigoroso, risulta

$$_{mas}M = 19486000 \quad , \quad d = 375 \quad , \quad I = 1180950000$$

e quindi lo sforzo massimo che cimenta la trave è

$$19486000 \frac{375}{1180950000} = 6{,}2 \text{ Kg. per mm}\square.$$

153. Appoggio del tavolato sopra correntini. — In questo caso le travi trasversali sono generalmente sostenute da due sole travi principali. Per ponti di molta larghezza, coll'impalcato posto sopra le travi principali, queste potrebbero essere più di due, ma sempre però poste a distanze maggiori di metri 2.

α) **Correntini.** — I correntini possono essere soprapposti o frapposti alle travi trasversali, e tanto in un caso che nell'altro si considera praticamente il tratto di correntino che sta fra due travi trasversali successive come liberamente appoggiato, con che si opera in vantaggio della stabilità. D'ordinario la massima distanza δ_0 a cui si pongono i correntini, che dipende dal genere di membrature adoperate per il tavolato, è di metri 2,00, mentre la loro lunghezza l, cioè la distanza delle travi trasversali, supera assai di rado i metri 4,00.

Essendo p_0 il peso del tavolato riferito all'unità di superficie, e p_t il peso proprio del correntino per unità corrente, il *carico permanente* p riferito all'unità di lunghezza è

$$p = p_0 \delta_0 + p_t \qquad (185)$$

il quale essendo uniformemente distribuito produce per una sezione

di ascisca x, un momento inflettente $M_p = \frac{p\,x}{2}(l - x)$ e per la sezione mediana $M_p = {}^1/_8\, p\, l^2$.

Circa al *carico accidentale* la posizione più pericolosa dei carri è quella indicata nella **Fig. 199**, quando cioè sopra un dato correntino si trova una ruota di un carro e lateralmente a questo sono posti degli altri carri. Vedesi allora che sul correntino agisce, oltrechè tutta l'intera pressione della ruota che vi insiste immediatamente sopra, anche parte della pressione delle altre ruote che si trovano entro i due intervalli ad esso adiacenti, per cui coll'aumentare dell'ampiezza δ_0 di questi intervalli, tanto più grande è il numero delle ruote che sopra di essi si trovano, e quindi tanto maggiore la pressione totale che si esercita sul correntino interposto. Questa totale pressione P_0 si è calcolata per alcuni valori di δ_0, per carri leggeri, pesanti, pesantissimi (per i quali è rispettivamente la pressione di una ruota $P = 1500$, 3000, 5000 chilogrammi, la distanza fra due ruote gemelle $\Delta =$ metri 1,4, 1,5, 1,6, la larghezza degli stessi $\Delta_0 =$ metri 2,0, 2,3, 2,5) ed i risultati si trovano nella tabella XLIII.

I valori di questa tabella nel caso di carri pesantissimi, sono calcolati nell'ipotesi che il solo carro centrale sia pesantissimo, e gli adiacenti invece sieno carri pesanti.

Tabella XLIII.

Distanze fra i corrent. $\delta_0 =$	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	metri
Carri leggieri . . . $P_0 =$	1500	1880	2100	2250	2360	2830	2830	3000	Kg.
» pesanti . . . $P_0 =$	3000	3000	3600	4000	4290	5170	5170	5550	»
» pesantissimi . $P_0 =$	5000	5000	5300	5750	6070	7330	7330	7900	»

Resta ora a vedere quante ruote si possano trovare sopra un tratto di correntino nel senso della lunghezza, e quale sia la posizione più sfavorevole. Siccome la massima lunghezza l di un tratto di correntino si può fissare a metri 5,00, dall'ispezione

delle Fig. 181-82-83-84-85 si vede che sul medesimo non si possono trovare più di due ruote, ricordando che la distanza D fra due ruote successive di un medesimo carro è di metri 2,8, 3,5, 4,00 rispettivamente per i carri leggeri, pesanti, pesantissimi.

Per una sola ruota posta nel mezzo il momento inflettente è $M_P = {}^1/_4 P_o\, l$, e per due ruote che hanno fra loro la distanza D, la posizione più sfavorevole avviene quando una dista dalla mezzaria della trave ${}^3/_4$ D, e l'altra ${}^1/_4$ D, Fig. 200, nel qual caso il momento inflettente diventa $M_P = P_o \frac{(2\,l - D)^2}{8\,l}$, tabella XVIII, Fig. 8. Si ottiene l'eguaglianza dei due momenti quando è ${}^1/_4\, l = \frac{(2\,l - D)^2}{8\,l}$, ossia quando $D = 0{,}586\, l$, per cui si conclude che è più sfavorevole una ruota nel mezzo quando è $D > 0{,}586\, l$, mentre per $D < 0{,}586\, l$ è più sfavorevole l'azione di due ruote poste nel modo anzidetto.

Il totale momento inflettente $_{mas}M = M_p + M_P$ è dunque per $D \geq 0{,}586\, l$, cioè per la sezione di ascissa x,

$$_{mas}M = \frac{p\,x}{2}(l - x) + P_o \frac{(2\,l - D)^2}{8\,l} \qquad (186)$$

e per $D > 0{,}586\, l$, cioè per la sezione mediana,

$$_{mas}M = \frac{1}{8} p\, l^2 + \frac{1}{4} P_o\, l \qquad (187)$$

nelle quali per p è da porsi il valore dato dalla (185) e per P_o quello fornito dalla tabella XLIII, il quale varia colla distanza δ_o fra i correntini.

I calcoli di stabilità si completano sostituendo nella (172) o (172*a*) il valore di $_{mas}M$ dato dalle (186) o (187) a seconda del valore di l.

Per correntini di legname con sezione rettangolare di base b e di altezza a, servono ancora le formule (177) (177*a*) (177*b*) (177*c*) nelle quali si deve porre per $_{mas}M$ il valore dato dalla (186) o (187), valendo anche in questo caso l'osservazione fatta a pagina 281 rispetto al valore di p, che si deve calcolare colla

$$p = p_o\, \delta_o \qquad (185a)$$

Esempio 1°

Nella **Fig. 257** *è* $\delta = 1{,}10$, *e si assuma la distanza fra le travi trasversali, ossia la lunghezza del tratto di correntino che si considera,* $l = 2{,}8$, *l'altezza della ghiaia sopra le lamiere ondulate* $a_1 = 0{,}15$, *e si suppongano carri pesanti e quindi* $P = 3000$ *chilogrammi*, $D =$ *metri* 3,50. Prendendo il ferro numero 33, tabella **XXXIII**, si ha il peso $p_t = 46$ chilogrammi per metro corrente.

La (152) dà il peso della lamiera ondulata $p_1 = 15 + 0{,}0184 \times 3000 \times 1{,}1 = 75{,}72$
» (152*b*) » ghiaia $p_{11} = (0{,}15 + 0{,}05)\,2000 = 400$

Peso del tavolato per m□ $p_0 = p_1 + p_{11} = 475{,}72$

e dalla (185) $p = 475{,}72 \times 1{,}10 + 46 = 569{,}3$

Per avere la totale pressione P_0 sopra il correntino per ogni punto di applicazione delle ruote che vi stanno immediatamente al disopra, si ricorre alla tabella **XLIII**. Siccome il valore di P_0 corrispondente alla distanza $\delta_0 = 1{,}10$ non è compreso nella detta tabella si può prendere con molta approssimazione il valore medio fra i due relativi alle distanze $\delta_0 = 1{,}0$, $\delta_0 = 1{,}2$, cioè $P_0 = \frac{3600 + 4000}{2} = 3800$ chilogrammi. Essendo poi $D > 0{,}586\,l$, cioè metri $3{,}5 > 1{,}64$, il momento inflettente deve valutarsi colla (187) e quindi

$$_{mas}M = \frac{1}{8} 569{,}3 \times 2{,}8^2 + \frac{1}{4} 3800 \times 2{,}8 = 3217{,}62 \text{ Kgm.}$$

Riferendosi al millimetro è

$$_{mas}M = 3217620 \quad , \quad d = \frac{250}{2} = 125$$

$$I = \frac{1}{12}(130 \times 250^3 - 119 \times 223^3) = 59299294$$

e quindi sostituendo nella (172*a*) si trova il massimo sforzo che cimenta il correntino di

$$3217620 \frac{125}{59299294} 6{,}7 \text{ Kg. per mm□.}$$

Esempio 2°

Si supponga che nel ponte rappresentato dalla **Fig. 157** *il tavolato sia di legname larice della grossezza di* 12 *centimetri, con soprapposta inghiaiata dell'altezza di* 20 *centimetri, ed i correntini pure di legname posti alla distanza* $\delta_0 = 80$ *centimetri conservando ancora* $l =$ *metri* 2,8, *nonchè ritenendo i carri pesanti, cioè* $P = 3000$ *chilogrammi e* $D =$ *metri* 3,50. Dalla tabella **XLIII** si ricava $P_0 = 3000$ chilogrammi.

Peso dei tavoloni per m□ $= 0{,}12 \times 650 = 78$ Kg.
» della ghiaia » $= 0{,}20 \times 2000 = 400$ »

Peso del tavolato per m□ $p_0 = 478$ Kg.

e quindi dalla (185a) $p = 478 \times 0{,}8 = 382{,}4$ chilogrammi per metro corrente e riferendosi al centimetro $p = 3{,}824$ chilogrammi, per cui la (187) dà

$$_{mas}M = \frac{1}{8} 3{,}724 \times 280^2 + \frac{1}{4} 3000 \times 280 = 247475 \text{ Kgm.}$$

e supponendo di prendere $b = 0{,}75\, a$ ricorrendo alla (177b) si ottiene

$$a = \sqrt[3]{0{,}1333 \times 247475} = 32 \text{ cm.} \quad , \quad b = 0{,}75 \times 32 = 24 \text{ cm.}$$

β) **Travi trasversali.** — Riguardo al *carico permanente* quello riferito all'unità di lunghezza si valuta colla formula

$$p = p_o\, \delta + p_t \tag{188}$$

dove p_o rappresenta il peso del tavolato e dei correntini ragguagliato all'unità quadrata, δ la distanza delle travi trasversali, e p_t il peso proprio di queste travi per unità corrente.

Il valore di p_o riferito al metro quadrato, nel caso che vi sia inghiaiata, si può valutare mediamente, senza distinzione fra le membrature del tavolato, colle seguenti formule

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Carri leggeri} \ldots & p_o = 412 + 4{,}9\,\delta \ldots & a \\ \text{» pesanti} \ldots & p_o = 478 + 7{,}4\,\delta \ldots & b \\ \text{» pesantissimi} \ldots & p_o = 550 + 10{,}8\,\delta \ldots & c \end{array}\right\} \tag{189}$$

nelle quali δ si deve esprimere in metri. Il carico permanente dà dunque un momento inflettente $M_p = \frac{p\,x}{2}(l - x)$, od $M_p = {}^1/_8\, p\, l^2$, in cui p è da valutarsi colla (188), ed l rappresenta la lunghezza della trave trasversale.

Rispetto al *carico accidentale* bisogna prima trovare la pressione che producono i carri sulle travi trasversali, indi la posizione più sfavorevole delle singole ruote che insistono sulla medesima trave trasversale.

La massima pressione sulle travi trasversali ha luogo quando una fila longitudinale di ruote si trova immediatamente sopra un correntino in modo che la ruota posteriore di un carro sia posta immediatamente sopra la trave trasversale che si considera, e quando dietro a questo carro si muove una folla stipata, **Fig. 201**, per cui per ogni fila longitudinale di ruote la trave trasversale sop-

porta una pressione totale P_{oo} che comprende tutta la pressione P della ruota che si trova immediatamente sopra la trave considerata, e parte della pressione dell'altra ruota di una medesima fila longitudinale, nonchè parte del carico prodotto dalla folla. In generale si può approssimativamente valutare questa totale pressione colla formula

$$P_{oo} = \left(0{,}39 + 0{,}76\,\frac{\delta}{D}\right) P \qquad (190)$$

dove D indica la distanza fra due ruote successive di uno stesso carro, e δ la distanza fra le travi trasversali. Se poi dalla (190) risulta P_{oo} minore della pressione P di una sola ruota, quando cioè è $\frac{\delta}{D} < 0{,}8$, allora si deve tener conto di questa pressione P.

Siccome le pressioni prodotte dai carichi accidentali vengono trasmesse alle travi trasversali mediante i correntini, i quali di solito non riescono tutti egualmente caricati, così a rigore bisognerebbe prima calcolare le singole pressioni trasmesse dai correntini alla trave, la quale risulterebbe cimentata da pressioni agenti ad eguali distanze, ma di differente intensità. Variando poi le posizioni rispettive dei carri sul piano del ponte, variano anche le singole pressioni trasmesse dai correntini. Il caso più sfavorevole ha luogo quando la ruota di un carro si trova immediatamente sopra uno dei correntini mediani, e lateralmente a questo carro ve ne sono quanti altri possono trovar posto gli uni accanto agli altri, mentre gli spazi vuoti che rimangono agli estremi sono coperti dalla folla, Fig. 202.

In pratica però per speditezza di processo, e con sufficiente approssimazione si ammette che sul piano del ponte si trovino quanti più carri è possibile, posti gli uni accanto agli altri, nel modo sopra indicato, e si suppone che le pressioni prodotte da questi carri si esercitino direttamente sulla trave trasversale in corrispondenza ai punti dove sono poste le ruote. Gli spazi vuoti poi che rimangono lateralmente si considerano coperti dalla folla. Operando in questo modo si commette un errore in eccesso nella valutazione del momento inflettente per cui si opera in vantaggio della stabilità. È per questo, che alcuni costruttori adottando quest'ultimo processo trascurano di tener conto della folla, nei riguardi dell'economia.

Ciò posto per la determinazione del totale momento inflettente servono ancora le formule (182) (182*a*) (182*b*), colla differenza che in luogo delle pressioni P_1, P_2, P_m si devono porre le corrispondenti pressioni P_{oo} valutate colla (190). Egualmente pure servono le formule d'approssimazione (184) (184*a*) nelle quali p è da calcolarsi colla (188).

Esempio 1°

Il tavolato sia con lamiere sospese e sovrapposta ghiaia, la distanza dei correntini $\delta_0 =$ *metri* 2, *quella delle travi trasversali* $\delta =$ *metri* 4, *e la loro lunghezza* $l =$ *metri* 10. *Si supponga il passaggio di carri pesantissimi per cui si deve considerare la distribuzione dei carichi come nella* **Fig. 202**. Trattandosi di carichi disposti non simmetricamente per calcolare il momento inflettente si deve ricorrere alla (182). Si cominci dal calcolare il valore di p_0 colla (189*c*) e si ha $p_0 = 550 + 10{,}8 \times 4{,}0 = 593{,}2$ chilogrammi; prendendo la trave colle dimensioni segnate nella **Fig. 203** è $p_t = 244{,}14$ e quindi dalla (188) si ha $p = 593{,}2 \times 4 + 244{,}14 = 2616{,}94$. Essendo di solito D = 3,5 per i carri pesanti, e D = metri 4,0 per i pesantissimi, dalla (190) si ha

Per i carri pesanti, $P_{oo} = \left(0{,}39 + 0{,}76\,\frac{4{,}00}{3{,}5}\right) 3000 = 3750$ Kg.

» pesantissimi $P_{oo} = \left(0{,}39 + 0{,}76\,\frac{4{,}00}{4{,}0}\right) 5000 = 5300$ »

Dalla (181) si ha

$$A_p = \frac{3750\,(10-1{,}6)+3750\,(10-3{,}1)+5300\,(10-4)+5300\,(10-5{,}5)+3750\,(10-6{,}4)+3750\,(10-7{,}9)}{10} =$$

$$= 13440 \text{ Kg}.$$

Supponendo che la folla produca un carico $k_0 = 450$ chilogrammi per metro quadrato, è $k = 450 \times 4{,}0 = 1800$ chilogrammi, e risultando $\lambda_s = 1{,}2$, $\lambda_d = 1{,}7$ colla (178) si determina

$$A_k = \frac{1800 \times 1{,}2\,(2 \times 10 - 1{,}2) + 1800 \times 1{,}7^2}{2 \times 10} = 2290{,}50 \text{ Kg}.$$

E siccome la sezione pericolosa è quella dove succede l'attacco del secondo correntino a partire da sinistra, come si può facilmente scorgere dall'ispezione della **Fig. 202**, essendo allora $x =$ metri 4,0, $d_1 = 1{,}50 + 0{,}9 = 2{,}40$, $d_2 = 0{,}9$, sostituendo i trovati valori nella (182) risulta

$$_{mas}M = \frac{2616{,}94 \times 4}{2}(10-4) + 13440 \times 4 - (3750 \times 2{,}4 + 3750 \times 0{,}9) +$$

$$+ 2290{,}50 \times 4 - 1{,}2 \times 1800\left(4 - \frac{1}{2}\,1{,}2\right) = 74606{,}28 \text{ Kgm}.$$

Ricorrendo alle formule d'approssimazione, bisogna formare il valore del carico fittizio uniformemente distribuito k, che produce un'azione analoga

a quella del sistema di pressioni concentrate. In questo caso bisogna adoperare la formula (183*c*) che dà $k = 1290 + 570 \times 4 = 3570$, e sostituendo nella (184) si ottiene per la considerata sezione di ascissa $x =$ metri 4,00.

$$_{mas}M = \frac{2616,94 + 3570}{2} 4,0 \ (10 - 4,0) = 74243,28 \text{ Kgm.}$$

valore assai prossimo a quello rigoroso.

Riferendosi al millimetro e tenendo conto del valore rigoroso di $_{mas}M$, si ha

$$_{mas}M = 74606280 \quad . \quad d = 500 \quad , \quad I = 5610870000$$

e quindi si trova colla (172*a*) il massimo sforzo che cimenta la trave, cioè

$$74606280 \frac{500}{5610870000} = 6,64 \text{ Kg. per mm}\square.$$

Esempio 2°

Il ponte sia con marciapiedi di larghezza $\lambda =$ *metri* 1,2, *il tavolato di ferri* Zores *con inghiaiata, la distanza fra i correntini* $\delta_0 =$ *metri* 1,5, *quella fra le travi trasversali* $\delta =$ *metri* 3,00 *e la loro lunghezza* $l =$ *metri* 7,5. Si supponga il passaggio di carri pesanti, per cui è $\Delta =$ metri 1,5, $\Delta_0 =$ metri 2,3, D = metri 3,5, i quali sieno disposti come nella **Fig. 204** (disposizione che viene comunemente considerata in pratica) e quindi trattandosi di pressioni eguali, e distribuite simmetricamente, il momento inflettente si deve valutare colla (182*b*). Mediante la (189*b*) si trova il peso del tavolato, compresi i correntini, $p_0 = 478 + 7,4 \times 3,0 = 500$ chilogrammi per metro quadrato, prendendo le dimensioni segnate nella **Fig. 205** è $p_t = 142,74$ chilogrammi e quindi dalla (188) si ha $p = 500 \times 3,0 + 142,74 = 1642,74$ chilogrammi. La (190) porge $P_{00} = 3000 \left(0,39 + 0,76 \frac{3,0}{3,5}\right) = 3130$ mentre la (181*b*) dà $A_p = 2 \times 3130 = 6260$ chilogrammi; e nell'ipotesi che la folla produca sui marciapiedi un carico $k_0 = 400$ chilogrammi, si ottiene $k = 400 \times 3,50 =$ $= 1200$ chilogrammi, mentre risulta $d_1 = 1,9$ e $d_2 = 0,4$, per cui sostituendo i trovati valori nella (182*b*) si trova

$$_{mas}M = \frac{1}{8} 1642,74 \times 7,5^2 + 6260 \frac{7,5}{2} - 3130 \ (1,9 + 0,4) + \frac{1200 \times 1,2^2}{2} =$$
$$= 28688 \text{ Kgm.}$$

Adoperando invece le formule di approssimazione, il valore del carico fittizio k si deve in questo caso calcolare colla (183*b*), cioè $k = 1020 +$ $+ 560 \times 3,9 = 2700$, e quindi dalla (184*a*) si ottiene

$$_{mas}M = \frac{1}{8} (1642,74 + 2700) \ 7,5^2 = 30529,45 \text{ Kgm.}$$

valore che si scosta poco dal rigoroso.

Riferendosi al metro, e tenendo conto del valore esatto di $_{mas}M$ si ha

$$_{mas}M = 28688000 \quad , \quad d = 375 \quad , \quad I = 1711330000$$

e quindi sostituendo nella (172*a*), il massimo sforzo che cimenta la trave è di

$$28688000 \frac{375}{1711330000} = 6{,}32 \text{ Kg. per mm}\square.$$

Ponti ferroviari.

154. Lungarine. — Le lungarine si frappongono alle travi trasversali, o si sovrappongono alle medesime, nel qual caso sono nelle condizioni di solidi collocati su più appoggi; in ogni modo però praticamente si considera il tratto di lungarina che sta fra due travi trasversali successive come una trave liberamente appoggiata, con che si opera in vantaggio della stabilità.

Il *peso permanente* si compone di quello della rotaia, di quello della lungarina di legname o delle traversine col soprapposto tavolato, e del peso proprio della lungarina metallica. Esso si può valutare con sufficiente approssimazione, riferendolo al metro corrente di lungarina, colle seguenti formule:

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Tipo francese} \text{ (con lungarina) } p = 85 + 14\,l \text{ Kg.} \quad a \\ \text{» } \textit{tedesco} \text{ (con traversine) } p = 140 + 16\,l \text{ » } \quad b \end{array}\right\} \quad (191)$$

ed il relativo momento inflettente è

$$M_p = \frac{p\,x}{2}(l - x) \quad , \quad M_p = \frac{1}{8} p\,l^2 \qquad (192)$$

Riguardo al *carico accidentale* bisogna trovare la posizione più sfavorevole della più pesante locomotiva, che si prende a base dei calcoli; si può però con sufficiente approssimazione considerare una locomotiva con tre assi equidistanti e dello stesso peso, scegliendo gli scartamenti e le pressioni in modo che si avvicinino il meglio possibile a quelli della vera macchina che si dovrebbe considerare.

α) **Tipo francese.** — La posizione più sfavorevole della locomotiva si determina seguendo le norme date ai §§ **50** e **54**; di solito però si ha riguardo che sulla trave si trovi il massimo numero di ruote e che nello stesso tempo la più pesante coincida colla

sezione mediana o ne sia discosta il meno possibile, e si valuta il relativo momento inflettente nel modo indicato al § **43**.

Seguendo invece la regola pratica di adottare una locomotiva a tre assi con eguali scartamenti e pressioni di ruote, allora la determinazione del momento inflettente si può fare più speditamente. Si chiami D la distanza delle ruote e P la loro pressione.

Quando la posizione più sfavorevole è data da una sola ruota nel mezzo della trave, **Fig. 206**, cioè per

$$l = 0 \textit{ fino } 1{,}71\ \mathrm{D} \cdots\cdots \mathrm{M_P} = \frac{1}{4}\,\mathrm{P}\,l \qquad (193)$$

Quando sulla trave si possono trovare due ruote disposte come nella **Fig. 207**, cioè per

$$l = 1{,}71\ \mathrm{D} \textit{ fino } 2{,}323\ \mathrm{D} \cdots\cdots \mathrm{M_P} = \mathrm{P}\,\frac{(2\,l - \mathrm{D})^2}{8\,l} \qquad (193a)$$

E finalmente quando sulla trave si possono trovare tre ruote in modo che la intermedia coincida colla sezione mediana, **Fig. 208**, cioè per

$$l = 2{,}23\ \mathrm{D}\ e \textit{ fino circa } 10\ \mathrm{m} \cdots\cdots \mathrm{M_P} = \mathrm{P}\left(\frac{3}{4}\,l - \mathrm{D}\right) \qquad (193b)$$

Il totale momento inflettente è dunque

$$_{mas}\mathrm{M} = \mathrm{M}_p + \mathrm{M_P} \qquad (194)$$

dove M_p si valuta colla (192) ed $\mathrm{M_P}$ colle (193) (193*a*) (193*b*) a seconda del rapporto fra lo scartamento delle ruote e la portata della trave.

β) **Tipo tedesco.** — In questo caso l'azione del carico accidentale si esercita sulle lungarine soltanto nelle sezioni dove insistono le traversine, e quindi bisogna trovare le pressioni che sono trasmesse da quest'ultime, e che variano col variare della posizione del sopraccarico. La posizione più sfavorevole d'ordinario si verifica allorchè la più pesante ruota si trova sopra la traversina che insiste sulla sezione mediana della lungarina (per un numero dispari di traversine), **Fig. 210, 212**, oppure sulla traversina più prossima alla sezione mediana (per un numero pari di traversine), **Fig. 209, 211, 213**, e la relativa pressione viene tras-

messa per intero dalla traversina alla lungarina, mentre per le altre ruote che non insistono immediatamente sopra una traversina bisogna trovare le pressioni che esercitano sopra le due traversine fra le quali si trovano interposte. Determinate tutte le pressioni singole trasmesse dalle traversine si calcola mediante i procedimenti del § **43** il valore del momento inflettente.

Adottando il noto tipo di locomotiva a 3 assi con scartamenti P e pressioni D eguali, allora il momento inflettente è dato dalle seguenti formule purchè, chiamando δ_0 la distanza fra gli assi delle traversine, sia $2\delta_0 > D$, ciò che di solito si verifica inquantochè il minimo valore di $\delta_0 =$ metri 0,75 ed il massimo valore che si assume per $D =$ metri 1,50.

Allorchè sopra la lungarina vi sono due sole traversine è

$$M_P = \frac{1}{16} P (5l - 2D) \qquad (195)$$

Quando su ogni lungarina vi sono 3 traversine è

$$M_P = \frac{1}{12} P (7l - 6D) \qquad (195a)$$

Quando su ogni lungarina vi sono 4 traversine è

$$M_P = \frac{1}{16} P (10l - 11D) \qquad (195b)$$

Quando su ogni lungarina vi sono 5 od anche 7 traversine è

$$M_P = \frac{1}{4} P (3l - 4D) \qquad (195c)$$

Quando su ogni lungarina vi sono 6 traversine è

$$M_P = \frac{1}{48} P (35l - 48D) \qquad (195d)$$

Il totale momento inflettente è dato ancora dalla (194) dove M_p si calcola colle (192) ed M_P colle (195) (195*a*) (195*b*) (195*c*) (195*d*) a seconda del numero di traversine che si trovano sopra una lungarina.

Calcolato che si abbia il momento inflettente massimo le (172) (172*a*) servono a determinare nel modo già indicato le condizioni di stabilità della trave.

Esempio.

Si supponga la portata delle lungarine $l =$ metri 2,55 e si consideri il tipo di *locomotiva tender* SEMMERING rappresentato nella tabella XLI, per cui è D = metri 1,16.

TIPO FRANCESE. — Il carico permanente si calcola mediante la (191*a*), cioè $p = 85 + 14 \times 2{,}55 = 120{,}7$ chilogrammi, e quindi il relativo momento inflettente dato dalla (192) è

$$M_p = \frac{l}{8} 120{,}7 \times 2{,}55^2 = 98{,}12$$

Rispetto al carico accidentale la posizione più sfavorevole è quella rappresentata nella **Fig. 214** per cui colla (47) si trova

$$A = \frac{(2{,}55 - 0{,}115)\,12880 + (2.55 - 1{,}275)\,12600 + (2{,}55 - 2{,}435)\,13700}{2{,}55} = 19217 \text{ Kg.}$$

e siccome per la sezione mediana è $x = 1{,}275$, ricorrendo alla (49) risulta

$$(M_x)_p = 19217 \times 1{,}275 - 12880 \times 1{,}16 = 9662{,}47$$

il quale momento inflettente è relativo ad un binario, e quindi per la lungarina si riduce a metà, cioè

$$M_p = \frac{9662{,}47}{2} = 4831{,}23$$

Ricorrendo alle formule d'approssimazione, prendendo 13 tonnellate per asse, cioè la pressione di una ruota P = 6500 chilogrammi e lo scartamento D = metri 1,2, e valendosi della (193*a*) per essere $\frac{l}{D} = \frac{2{,}55}{1{,}2} = 2{,}125$, si ottiene

$$M_p = 6500 \frac{(2 \times 2{,}55 - 1{,}2)^2}{8 \times 2{,}55} = 4842{,}5$$

valore assai prossimo a quello prima trovato.

TIPO TEDESCO. — Il carico permanente si ricava dalla (191*b*) cioè $p = 140 + 16 \times 2{,}55 = 180{,}8$ chilogrammi, e quindi il relativo momento inflettente dato dalla (192) è

$$M_p = \frac{l}{8} 180{,}8 \times 2{,}55^2 = 147$$

Riguardo al carico accidentale vedesi facilmente che la posizione più sfavorevole della locomotiva è quella rappresentata dalla **Fig. 215** e si comincia dal calcolare le pressioni che le tre traversine trasmettono sulla lungarina, osservando che risulta $\delta_0 = 0{,}85$.

Pressione sulla I traversina $P_1 = \frac{2 \times 0{,}85 - 1{,}16}{0{,}85} 12880 = 8182$ Kg.

» » II » $P_2 = 12600$ Kg.

» » III » $P_3 = \frac{2 \times 0{,}85 - 1{,}16}{0{,}85} 13700 = 8703$ Kg.

Le distanze delle tre traversine dall'appoggio di sinistra A sono rispettivamente per la I, II e III, $d_1 = 0{,}425$, $d_2 = 1{,}275$, $d_3 = 2{,}125$ e quindi mediante la (47) si calcola la reazione del detto appoggio, cioè

$$A = \frac{(2.55 - 0{,}425)\,8182 + (2{,}55 - 1{,}275)\,12600 + (2{,}55 - 2{,}125)\,8703}{2{,}55} = 14569 \text{ Kg.}$$

ed il momento inflettente si calcola colla (49), relativamente alla sezione mediana, che è la pericolosa e per la quale è $x = 1{,}275$, e quindi

$$(M_x)_P = 14569 \times 1{,}275 - 8182 \times 0{,}85 = 11620{,}77$$

il quale momento inflettente è relativo ad un binario e quindi per la lungarina si riduce alla metà, cioè

$$M_P = \frac{11620{,}77}{2} = 5810{,}38$$

Ricorrendo alle formule d'approssimazione, ed avendo preso $P = {}^1/_2\,13000 = 6500$ e D = metri 1,16, valendosi della (195*a*) si ottiene

$$M_P = \frac{1}{12} 6500\,(7 \times 2{,}55 - 6 \times 1{,}16) = 5902$$

valore assai prossimo a quello sopra trovato.

155. Travi trasversali. — Il *carico permanente* è in parte uniformemente distribuito, e chiamando p quello riferito all'unità di lunghezza esso dà un momento inflettente per una sezione di ascissa x

$$M_p = \frac{p\,x}{2}(l - x) \qquad (196)$$

ed in parte concentrato nei punti d'attacco delle lungarine metalliche alle travi trasversali, e chiamando P, quello relativo ad uno di questi punti, esso va sommato colla pressione prodotta sui medesimi dal carico accidentale. Il carico permanente però è così poco rilevante in confronto dell'accidentale che si può per semplicità trascurarlo nei calcoli di stabilità, senza tema di notevole errore. In ogni modo volendo tener conto anche di esso si può valutarlo approssimativamente colle seguenti regole.

Nel *tipo francese* è uniformemente distribuito il peso proprio della trave trasversale e quello del tavolato (che d'ordinario è appoggiato sulle dette travi), e riferendosi al metro corrente si può prendere

$$p = 55\,\delta + p_t \qquad (197)$$

è invece concentrato il peso delle lungarine metalliche, quello delle lungarine di legname (se ve ne sono) e quello delle rotaie, e si può assumere

$$P_r = (85 + 14\,\delta)\,\delta \qquad (198)$$

Nel *tipo tedesco* è uniformemente distribuito il peso proprio, concentrato invece quello del tavolato, delle rotaie, delle traversine e delle lungarine e si può prendere

$$p = p_t \qquad (197a)$$

$$P_r = (140 + 16\,\delta)\,\delta \qquad (198a)$$

nelle quali formule δ indica la distanza fra le travi trasversali, e si deve computare in metri.

Il *carico accidentale* opera sulle travi trasversali in quei punti nei quali sono applicate le lungarine, e siccome la pressione P_o, che le lungarine trasmettono alle travi trasversali in detti punti, va variando di intensità col cambiare di posizione del sopraccarico, bisogna prima determinare la posizione più sfavorevole del medesimo onde calcolare la relativa pressione massima P_o. In generale per ottenere questo massimo valore di P_o si possono stabilire le seguenti norme:

1° Allorchè il sopraccarico agisce direttamente sopra le lungarine (*tipo francese*) una ruota deve insistere immediatamente sopra la trave trasversale che si considera;

2° Quando il sopraccarico agisce sulle lungarine coll'intermezzo delle traversine (*tipo tedesco*) una ruota deve insistere immediatamente sopra una delle due traversine fra le quali si trova la trave trasversale considerata, e tanto in un caso, che nell'altro la detta ruota deve essere una delle più pesanti, e scelta per modo che sopra i due tratti di lungarina adiacenti alla trave trasversale si trovi il massimo numero di ruote.

Determinata in questo modo la posizione del sopraccarico, col

mezzo della (47) si trova la pressione che i singoli carichi trasmettono sulla trave trasversale mediante la lungarina, avvertendo che nel caso dell'impiego di traversine si può operare come se le medesime non vi fossero.

Ricorrendo al tipo di locomotiva con 3 assi aventi scartamenti D e pressioni P eguali, si determina assai speditamente la pressione P_0 colle seguenti formule ricordando, essere δ la distanza fra le travi trasversali.

α) **Tipo francese.**

Per $\delta = 0$ *fino a* D $\cdots\cdots$ $P_0 = P$ (199)

» $\delta =$ D *fino circa metri* 5 $\cdot\cdot$ $P_0 = P\left(3 - 2\frac{D}{\delta}\right)$ (199*a*)

β) **Tipo tedesco.**

Per 2 *traversine* $P_0 = P\left(2{,}5 - 1{,}5\frac{D}{\delta}\right)$ *purchè sia* $\delta =$ D *fino* 2 D (200)

» 3 » $P_0 = P\left(2{,}833 - 2\frac{D}{\delta}\right)$ » $\delta = 1{,}5$ D » 3 D (200*a*)

» 4 » $P_0 = P\left(2{,}875 - 2\frac{D}{\delta}\right)$ » $\delta = 2$ D » 4 D (200*b*)

» 5 » $P_0 = P\left(2{,}90 - 2\frac{D}{\delta}\right)$ » $\delta = 2{,}5$ D » 5 D (200*c*)

» 6 » $P_0 = P\left(2{,}823 - 2\frac{D}{\delta}\right)$ » $\delta = 3$ D » 6 D (200*d*)

Osservazione. — In generale le travi trasversali estreme sopportano una minor pressione, e volendo calcolarle separatamente onde farle più leggiere, nei riguardi dell'economia, si può approssimativamente valutare la pressione P'_0 per ogni punto d'attacco delle lungarine colla formula

$$P'_0 = \frac{1}{2}(P_0 + P_r) \qquad (201)$$

Note le pressioni P_0 e P_r nei vari punti d'attacco delle lungarine alle travi trasversali, è facile la determinazione del momento inflettente.

Per ponti ad un binario, chiamando l la lunghezza della trave

trasversale e Δ la distanza delle lungarine, per tutte le sezioni comprese fra i punti d'attacco delle lungarine è

$$_{mas}M_P = (P_o + P_r)\left(\frac{l-\Delta}{2}\right) \qquad (202)$$

Per ponti a due binari, chiamando Δ_o la distanza fra asse ed asse dei binari, per tutte le sezioni comprese fra le due lungarine intermedie è

$$_{mas}M_P = 2\,(P_o + P_r)\left(\frac{l-\Delta_o}{2}\right) = (P_o + P_r)\,(l-\Delta_o) \qquad (202a)$$

Il totale momento inflettente è dunque

$$_{mas}M = M_p + M_P$$

nella quale M_p ed M_P sono da calcolarsi colle formule date precedentemente a seconda dei casi.

Esempio.

Si supponga un ponte ad un binario; la portata delle travi trasversali sia $l =$ *metri* 3, *la loro distanza* $\delta =$ *metri* 3,28 *e quella delle lungarine* $\Delta =$ *metri* 1,60 *e si consideri il tipo della locomotiva dei Giovi per la quale i pesi e le distanze degli assi sono dati nelle* **Fig. 217** e **218.**

La trave abbia le dimensioni segnate nella **Fig. 216** e quindi il peso $p_t = 84{,}24$ chilogrammi.

Tipo francese. — Il peso permanente unitario uniformemente distribuito si ha dalla (197) cioè $p = 55 \times 3{,}28 + 84{,}24 = 264{,}64$ che dà un momento inflettente $M_p = {}^1/_8\ 264{,}64 \times 3^2 = 297{,}72$ e quello concentrato dà una pressione P_r che si ricava dalla (198), cioè $P_r = (85 + 14 \times 3{,}28)\ 3{,}28 = 429{,}42$ chilogrammi.

Il carico accidentale produce una pressione P_o che ha per valore

$$P_o = \frac{1}{2}\left(11724 + \frac{(3{,}28-1{,}294)\,14366 + (3{,}28-1{,}92)\,10235}{3{,}28}\right) = \frac{24666}{2} = 12333$$

Tipo tedesco. — Il peso permanente uniformemente distribuito, dato dalla (197*a*), è $p_t = 84{,}24$, il cui momento inflettente è $M_p = {}^1/_8\ 84{,}24 \times 3^2 = 94{,}77$, e quello concentrato dà una pressione P_r che si ottiene dalla (198*a*), ossia $P_r = (140 + 16 \times 3{,}28)\ 3{,}28 = 631{,}33$ chilogrammi.

Il carico accidentale agisce con una pressione P_o il cui valore è

$$P_o = \frac{1}{2}\left(\frac{(3{,}28-0{,}41)\,11724 + (3{,}28-2{,}33)\,10235 + (3{,}28-0{,}884)\,14366}{3{,}28}\right) =$$

$$= \frac{23717}{2} = 11858$$

Ricorrendo alle formule relative al tipo di locomotiva a tre assi con eguali scartamenti e pressioni, si assuma lo scartamento D = metri 1,50, e la pressione P = 12000 (che sono circa i valori medi in numeri rotondi, della locomotiva dei Giovi).

Tipo francese. — Essendo $\delta > D$, cioè $3{,}28 > 1{,}50$ si deve ricorrere alla (199*a*) e si ha $P_o = \frac{12000}{2}\left(3 - 2\frac{1{,}50}{3{,}28}\right) = \frac{24720}{2} = 12360$

Tipo tedesco. — Essendovi quattro traversine, e $\delta > 2D < 4D$, cioè $3{,}28 > 3{,}00 < 6{,}00$ serve la (200*b*) e si ottiene $P_o = \frac{12000}{2}\left(2{,}875 - 2\frac{1.5}{3{,}28}\right) =$

$= \frac{23532}{2} = 11766$, i quali valori coincidono assai prossimamente con quelli sopra trovati.

Il momento inflettente dovuto ai carichi concentrati si determina colla (202) ed è:

Nel *tipo francese* $_{mas}M_p = (12333 + 429{,}42)\frac{3 - 1.6}{2} = 8933{,}7$ Kgm.

» » *tedesco* $_{mas}M_p = (11858 + 631{,}33)\frac{3 - 1{,}6}{2} = 8742{,}9$ »

e quindi il momento inflettente totale è:

Nel *tipo francese* $_{mas}M = 297{,}72 + 8933{,}7 = 9231{,}42$

» » *tedesco* $_{mas}M = 94{,}77 + 8742{,}9 = 8837{,}67$

Riferendosi al millimetro è $I = 264043333$, $d = 200$ e quindi lo sforzo massimo che cimenta la trave si trova usando la (172*a*), cioè:

Nel *tipo francese* $9231420\,\frac{200}{264043333} = 6{,}98$ Kg. per mm□

» » *tedesco* $8837670\,\frac{200}{264043333} = 6{,}73$ » »

156. Determinazione grafica di P_o. — La massima pressione P_o si può anche determinare in via grafica, allorchè si considera un qualunque tipo di locomotiva. Per mettere bene in evidenza il procedimento lo si sviluppa in un esempio.

Esempio.

Sia δ = metri 3,5 la distanza fra le travi trasversali di un ponte a binario rettilineo. Si considerino le travi successive **A**, **B**, **C**, e si faccia la ricerca per il travetto mediano **B**. Si supponga la locomotiva, rappresentata dalla **Fig. 220**, marciante da sinistra verso destra. L'intervallo **A C** = 2δ lo si chiama *intervallo d'azione* pel travetto **B**, inquantochè qualunque peso si trova su questo intervallo produce una pressione nel travetto **B** considerato.

Avendosi un peso P applicato ad una trave lunga l in un punto distante

rispettivamente a e b dagli appoggi A, B, Fig. 219, i valori delle due pressioni su questi appoggi, dette rispettivamente A e B, sono

$$A = P\frac{b}{l} \quad , \quad B = P\frac{a}{l} \qquad (I)$$

Se ora sulle verticali che passano per A e B si porta in una certa scala il peso P, rispettivamente in A A′ e B B′ e tirate le rette B A′ ed A B′ si conduce l'ordinata a queste rette in corrispondenza al punto d'applicazione del peso P, è facile vedere che questa ordinata rappresenta il valore della corrispondente pressione, giacchè sussistono le due relazioni

$$A : P = b : l \quad , \quad B : P = a : l$$

dalle quali si ottengono per A e B i valori precedenti (I). Ciò stabilito, ecco come si procede nella ricerca della pressione massima P_o.

Si conduce una fondamentale $A_1 C_4$, Fig. 221, e su questa si porta due volte successivamente la distanza δ delle travi trasversali partendo da A_1, nei punti B_1 e C_1; sull'ordinata di B_1 si porta in una certa scala il peso P_1 della ruota 1ª della locomotiva in $B_1 P_1$. Le ordinate della spezzata $A_1 P_1 C_1$ rappresentano la pressione sul travetto di mezzo B per le corrispondenti posizioni della ruota 1ª sull'intervallo d'azione.

È facile vedere che la ruota 2ª comincia ad entrare nell'intervallo d'azione quando la 1ª dista d_1 dal travetto A, e quindi portata nella scala delle distanze la lunghezza d_1 = metri 1,5 a partire da A_1 si individua il punto A_2 in seguito al quale si porta nuovamente due volte la distanza δ nei punti B_2 C_2: innalzata l'ordinata di B_2 si porta in scala il peso P_2 della ruota 2ª in $B_2 P_2$. Le ordinate della spezzata $A_2 P_2 C_2$ rappresentano le pressioni sul travetto di mezzo B per le corrispondenti posizioni della ruota 2ª sull'intervallo d'azione.

La ruota 3ª comincia ad entrare nell'intervallo d'azione quando la 2ª dista d_2 dal travetto A, e quindi portata nella scala delle distanze la lunghezza d_2 = metri 1,3 a partire da A_2 si individua il punto A_3 di seguito al quale si riporta ripetutamente la distanza δ nei punti B_3 e C_3; innalzata l'ordinata di B_3 si porta in iscala il peso P_3 della ruota 3ª in $B_3 P_3$. Le ordinate della spezzata $A_3 P_3 C_3$ rappresentano la pressione sul travetto B per le corrispondenti posizioni della ruota 3ª sull'intervallo d'azione.

La ruota 4ª comincia ad entrare nell'intervallo d'azione quando la 3ª dista d_3 dal travetto A, e quindi portata in iscala la lunghezza d_3 = metri 1,3 a partire da A_3 si individua il punto A_4 di seguito al quale si porta due volte la distanza δ nei punti B_4 e C_4; innalzata l'ordinata di B_4 si porta in iscala il peso P_4 della ruota 4ª in $B_4 P_4$. Le ordinate della spezzata $A_4 P_4 C_4$ rappresentano la pressione sul travetto B per le corrispondenti posizioni della ruota 4ª sull'intervallo d'azione.

Le ordinate delle 4 spezzate così costruite misurano le pressioni parziali prodotte dalle 4 ruote sul travetto B nelle loro posizioni successive simultanee, e quindi nella somma delle ordinate o pressioni parziali si ha l'ordinata o pressione totale sul travetto B per caduna successiva posizione della loco-

motiva. Costruendo dunque sulle verticali dei punti A_2 A_3 B_1 A_4 B_2 B_3 C_1 B_4 C_2 C_3 l'ordinata totale si ha la spezzata A_1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 C_4 le cui ordinate rappresentano la legge di variazione della pressione totale sul travetto B nel progressivo avanzamento della locomotiva, dal quale diagramma si scorge:

Che la pressione è nulla in A_1, quando cioè la prima ruota sta per entrare nell'intervallo di azione;

Che la pressione va sempre crescendo coll'avanzare della locomotiva e diventa massima in B_2 quando cioè la 2ª ruota si trova sul travetto B;

Che poi coll'avanzare della locomotiva la pressione va sempre diminuendo e diventa nulla in C_4, cioè quando la 4ª ruota sta per abbandonare l'intervallo d'azione.

Misurando l'ordinata massima B_2 5 nella scala assunta, si ha il valore della massima pressione cercata P_0. Avendo preso mezzo centimetro per tonnellata, e quindi un centimetro per due tonnellate, e risultando B_2 5 = 7,95 centimetri è

$$P_0 = 7{,}95 \times 2 = 15{,}90 \text{ tonn.}$$

Stabilità delle travi col gambo a traliccio.

157. Natura e valore degli sforzi nelle sbarre del traliccio. — Le sbarre di un gambo a traliccio servono a rendere solidali fra loro le due nervature trasmettendo le forze esterne dall'una all'altra per modo che esse abbiano a resistere come se fossero tutto un solido. Perciò, quando si deve calcolare la resistenza alla flessione di una trave a traliccio, i pratici usano di trascurare affatto il gambo e considerano come parti resistenti soltanto le nervature. Le dimensioni delle sbarre del gambo poi vengono calcolate a parte, e si tratta ora di vedere in qual modo queste sbarre sono cimentate. Essendo ufficio delle stesse quello di trasmettere le forze esterne da una nervatura all'altra, è evidente che devono resistere allo sforzo di taglio, cioè alla somma algebrica delle forze esterne che sollecitano la trave nelle varie sezioni. E poichè lo sforzo di taglio non è costante per tutte le sezioni della trave, ne consegue che le sbarre del traliccio non sono egualmente cimentate. Siccome però le travi dei ponti di piccola portata hanno altezze e lunghezze relativamente molto piccole, così si usa fare nelle medesime il traliccio con sbarre di eguali dimensioni, per regolarità di costruzione, inquantochè il poco risparmio che si ottiene nella quantità di materiale, facendo il traliccio di uniforme resistenza

(molte volte non possibile a conseguire per i troppo esigui spessori teorici delle sbarre centrali), non compensa la complicazione che si porta nella mano d'opera. Perciò è evidente che si deve sottoporre al calcolo la sbarra più cimentata, e le dimensioni che a questa competono si assegnano anche a tutte le altre.

Le sbarre del traliccio sono alcune tese, le altre compresse. Determinata la sezione rispetto alla quale, per una data posizione del sopraccarico, si verifica il massimo momento inflettente, è facile determinare la natura degli sforzi cimentanti le singole sbarre. Difatti le sbarre che, rispetto alla sezione per la quale ha luogo masM, hanno ad essa più vicino il capo che non il piede, sono compresse, e viceversa quelle che hanno il piede più vicino alla sezione suddetta che non il capo, sono tese, come vedesi nella Fig. 247, in cui sono rappresentate con linee grosse le sbarre compresse e con linee sottili le sbarre stirate. Tale differente modo di cimento delle sbarre, che ora viene semplicemente indicato, si dimostrerà con dettaglio allorchè si tratterà dei ponti di grande portata. È facile scorgere che le sbarre compresse, a parità di condizioni, sono più cimentate delle tese, inquantochè in causa della loro piccola riquadratura in confronto della lunghezza sono in pericolo di inflettersi piuttostochè di comprimersi, e quindi lo sforzo pratico di compressione *ridotto*, §§ **64** e **65**, si deve prendere molto più piccolo di quello di trazione.

Volendo, si può fare distinzione fra sbarre tese e compresse, assegnando alle une le dimensioni che competono alla sbarra maggiormente tesa, ed alle altre quelle che competono alla sbarra maggiormente compressa.

Se invece si vogliono fare tutte le sbarre eguali, allora bisogna assegnare ad ognuna le dimensioni relative alla sbarra la più cimentata in modo assoluto, che è quella maggiormente compressa.

Vedesi pertanto che in ogni maniera è necessario determinare il massimo sforzo masT, alla cui ricerca ora si procede nei vari casi. Ai §§ **50** e **51**, si è veduto che tanto per un carico mobile uniformemente distribuito, quanto per un sistema di carichi mobili concentrati, lo sforzo di taglio è massimo in una data sezione quando detti carichi occupano la trave dall'estremo più lontano fino a detta sezione. Il massimo valore assoluto poi dello sforzo di taglio, nel caso di un carico uniformemente distribuito, ha luogo in ambo le sezioni sugli appoggi, quando tutta la trave

è occupata dal carico uniforme, e nel caso di un sistema di carichi concentrati quando tutta la trave è occupata dai medesimi, in modo che i più pesanti si trovino il più vicino possibile ad uno degli appoggi ed anzi possibilmente il primo carico insista sull'appoggio stesso, rispetto al quale poi si verifica $_{mas}T$.

Lo sforzo di taglio T_x che si verifica in una data sezione viene equilibrato equabilmente da tutte le sbarre che sono incontrate dal piano verticale secondo il quale opera lo sforzo, per cui se è n il numero di queste sbarre, lo sforzo che agisce verticalmente su ciascuna è $\frac{T_x}{n}$ (nella Fig. 223 è $n = 6$). Ma mentre lo sforzo di taglio ha direzione verticale le sbarre invece sono inclinate, e chiamando β l'angolo delle sbarre colla verticale risulta che lo sforzo T_0 cimentante una sbarra nel senso del suo asse, Fig. 224, è $T_0 = \frac{T_x}{n \cos \beta}$. Per le sbarre maggiormente cimentate lo sforzo è $\frac{_{mas}T}{n \cos \beta}$, e chiamando ω l'area della sezione retta di di una sbarra, deve essere per la stabilità delle medesime:

$$\text{Relativamente alle sbarre stirate} \quad \omega_t = \frac{_{mas}T}{n \cos \beta R_t} \tag{203}$$

$$\text{» » compresse} \quad \omega_c = \frac{_{mas}T}{n \cos \beta R_c}$$

Considerato che di solito le sbarre sono molto lunghe in confronto della loro riquadratura, per cui le compresse possono più facilmente inflettersi che non comprimersi, si deve ridurre il coefficiente R_c, prendendo per sforzo pratico ridotto $R_0 = \frac{R_c}{m}$, § **19**, dove il valore del coefficiente di riduzione m è dato dalla tabella XII, in base al rapporto $r = \frac{L}{g}$, nel quale g indica la minima dimensione della riquadratura della sbarra ed L la *lunghezza teorica* della medesima e quindi ω_c diventa

$$\omega_c = \frac{_{mas}T}{n \cos \beta \frac{R_c}{m}} \tag{204}$$

la quale è la formula che di solito si adopera in pratica, oppure si deve adottare la formula (79) relativa ai solidi caricati di punta cioè

$$\frac{mas\,T}{n\cos\beta} = R_c\,\omega\,\frac{1}{1+\alpha\frac{\omega\,L^2}{1}} \qquad (205)$$

nella quale si deve porre $\alpha = 0{,}00008$ trattandosi di sbarre di ferro, § **65**, mentre L rappresenta ancora la *lunghezza teorica*. Se la sbarra è fissata soltanto agli estremi la lunghezza teorica coincide colla lunghezza reale, ma se la sbarra ha uno o più punti di collegamento oltre agli estremi, ciò che avviene nei tralicci doppi, tripli, quadrupli, ecc., **Fig. 174** *a b c*, essendo allora collegate fra loro tutte le sbarre del traliccio, non può avvenire il piegamento di un'asta senza che si pieghi tutta la parete. Le **Fig. 225** *a b*, rappresentano i più probabili piegamenti della parete, e indicando con L la lunghezza teorica dell'asta, con L_o la proiezione verticale della medesima, con l la lunghezza effettiva, con H la relativa proiezione verticale, siccome è $L_o = \frac{H}{2}$, così risulta $L = \frac{l}{2}$, cioè *la lunghezza teorica si deve prendere metà della effettiva.*

Scelte alcune dimensioni dell'asta, se ne lascia una di indeterminata, che si ricava risolvendo le (203) (204) (205) a seconda dei casi; però in pratica si preferisce scegliere tutte le dimensioni, adoperando i ferri del commercio, verificando poi se vi sia stabilità mediante le formule precedenti poste sotto la seguente forma:

Per aste stirate $$\frac{mas\,T}{n\cos\beta\,\omega_t} = R_t \qquad (203a)$$

» compresse
$$\begin{cases} \dfrac{mas\,T}{n\cos\beta\,\omega_c} = \dfrac{R_c}{m} & (204a) \\ \dfrac{mas\,T}{n\cos\beta}\left(\dfrac{1}{\omega_c} + \alpha\,\dfrac{L^2}{I}\right) = R_c & (205a) \end{cases}$$

Ciò stabilito si passa ai casi particolari.

158. Travi trasversali per ponti carrettieri. — Il tavolato può essere sostenuto dalle travi trasversali o direttamente, o col mezzo di correntini, per cui nella ricerca di $mas T$ si deve far distinzione fra questi due casi.

α) **Appoggio diretto del tavolato.** — Il *carico permanente* unitario è dato da

$$p = p_0 \delta + p_t \qquad (206)$$

dove p_0 e δ conservano i soliti significati e p_t rappresenta il peso proprio della trave che si compone del peso p_t' delle nervature, e di quello p_t'' del traliccio, i quali si possono calcolare colle seguenti formule di approssimazione, cioè:

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{Peso delle nervature} & p_t' = 0{,}00325\, q\, l \\ \textit{Peso del traliccio} \;\; . & p_t'' = 0{,}00195\, q\, l \end{array}\right\} \qquad (207)$$

per cui il *peso totale della trave* è $p_t = 0{,}0052\, q\, l \qquad (207a)$

nelle quali q (che rappresenta carico permanente ed accidentale ragguagliato all'unità di lunghezza) si può valutare:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Per carri leggieri} & q = 590 + 910\,\delta & \text{purchè sia} & \delta > \text{m. } 2{,}22 \\ \text{» pesanti} & q = 1020 + 1060\,\delta & \text{»} & \delta > \text{m. } 2{,}84 \\ \text{» pesantissimi} & q = 1290 + 1070\,\delta & \text{»} & \delta > \text{m. } 3{,}52 \end{array}\right\} \qquad (208)$$

od altrimenti

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Per carri leggieri} & q = 1500 + 500\,\delta & \text{quando è} & \delta < \text{m. } 2{,}22 \\ \text{» pesanti} & q = 2610 + 500\,\delta & \text{»} & \delta < \text{m. } 2{,}84 \\ \text{» pesantissimi} & q = 3300 + 500\,\delta & \text{»} & \delta < \text{m. } 3{,}52 \end{array}\right\} \qquad (208a)$$

Lo sforzo di taglio massimo dovuto al carico permanente è dunque

$$T_p = \frac{1}{2}\, p\, l$$

Il *carico accidentale dovuto al passaggio dei carri* opera nel modo più sfavorevole quando sulla trave si trova il massimo numero di ruote situate quanto più è possibile vicino ad uno degli appoggi e rispetto al quale si verifica il massimo sforzo di taglio. Nel caso di carri pesantissimi se ne considera uno

soltanto posto in prossimità al detto appoggio, Fig. 226. Lo sforzo di taglio massimo dovuto ai carri è dunque

$$T_P = \frac{P_1 (l - a_1) + P_2 (l - a_2) + \cdots + P_n (l - a_n)}{l}$$

indicando con a_1, a_2, $a_3 \ldots a_n$ le distanze dei carichi dall'appoggio A di sinistra.

Il *carico accidentale dipendente dalla folla sui marciapiedi*, essendo simmetricamente disposto, dà uno sforzo tagliente eguale a metà del carico totale, cioè

$$T_k = k_0 \delta \lambda$$

dove k_0, δ, λ conservono i soliti significati.

Ciò posto il totale sforzo tagliente è ${}_{mas}T = T_p + T_P + T_k$, ossia

$${}_{mas}T = \frac{1}{2} p l + \frac{P_1 (l - a_1) + P_2 (l - a_2) + \cdots + P_n (l - a_n)}{l} + k_0 \delta \lambda \qquad (209)$$

nella quale si deve porre $\lambda = 0$ nel caso di un ponte senza marciapiedi, oppure coi marciapiedi posti esternamente alle travi principali.

Il valore di ${}_{mas}T$ si può ricavare colla seguente formula di approssimazione

$${}_{mas}T = \frac{1}{2} (p + k) l \qquad (210)$$

nella quale p si determina colla (206) e k colle (183).

β) **Appoggio del tavolato sopra correntini.** — In questo caso il valore di T_p si determina come nel caso precedente, colla differenza che il *peso permanente* comprende anche quello dei correntini, e quindi p_0 si valuta colla (189). I carichi accidentali sono trasmessi alla trave trasversale dai correntini. Però in pratica, per semplicità di processo, si accetta l'ipotesi che le ruote agiscano direttamente sulla trave, in corrispondenza ai punti sui quali esse insistono sopra il tavolato, e quindi T_P si calcola come nel caso precedente, avvertendo però che la trave, come si è visto al § 153 — β), è influenzata per ogni punto di applicazione di una ruota non soltanto dalla pressione della medesima, ma dalla pressione P_{00} dovuta ad una fila longitudinale di ruote, la quale

varia colla distanza δ delle travi trasversali, e con quella D fra due ruote di una fila e che si calcola colla (190), per cui nella (209) in luogo delle semplici pressioni delle ruote si devono porre i corrispondenti valori P_{00}.

Esempio.

Nel ponticello rappresentato in sezione trasversale dalla **Fig. 227**, *la distanza fra le travi trasversali è* $\delta =$ *metri* 1,50, *e la loro lunghezza* $l =$ *metri* 5, (*cioè* $7 \times 0{,}68 + 2 \times 0{,}12 = 5{,}0$). *Supponendo il passaggio di carri leggieri è* $P = 1500$, $\Delta =$ *metri* 1,4, $\Delta_0 =$ *metri* 2, $D =$ *metri* 2,8. Il peso permanente p_t si ricava dalla (189*a*), cioè $p_0 = 412 + 4{,}9 \times 1{,}5 = 419{,}35$; il peso proprio della trave p_t si deve valutare colla (207*a*) in cui per q, essendo $\delta <$ metri 2,22, si deve porre il valore dato dalla (208*a*) ed è $p_t = 0{,}0052\ (1500 + 500 \times 1{,}5)\ 5{,}0 = 58{,}5$ e quindi il carico unitario risulta $p = 419{,}35 \times 1{,}5 + 58{,}5 = 687{,}52$. Dalla (190) si ricava la pressione $P_{00} = \left(0{,}39 + 0{,}76\ \frac{1{,}5}{2{,}8}\right) 1500 = 1200$, la quale risulta minore della pressione di una sola ruota, e quindi si deve adottare quest'ultima, cioè $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 1500$.

Nervature. — Il momento inflettente massimo riguardo al carico accidentale, si ottiene per la posizione di carri rappresentata nella **Fig. 228**, ed essendo le pressioni disposte simmetricamente, esso si deve valutare colla (182*b*), dove si deve porre $\lambda = 0$ non essendovi marciapiedi, mentre è $A_p = 2 \times 1500 = 3000$. Dalla **Fig. 228** si ricava $d_1 = 1{,}70$, $d_2 = 0{,}3$, e quindi sostituendo i valori particolari nella (182*b*) si ottiene

$$_{mas}M = \frac{1}{8}\ 687{,}52 \times 5^2 + 3000\ \frac{5{,}0}{2} - 1500\ (1{,}7 + 0{,}3) = 6648 \text{ Kgm.}$$

Ricorrendo alle formule d'approssimazione dalla (183*a*) si ha $k = 590 + 410 \times 1{,}5 = 1205$ il quale valore è minore del limite minimo (183^{bis}a) e quindi si deve prendere $k = 1500$, mentre si è trovato $p = 687{,}52$, e quindi sostituendo nella (184*a*) si ottiene

$$_{mas}M = \frac{1}{8}\ (687{,}52 + 1500)\ 5{,}0^2 = 6836 \text{ Kgm.}$$

valore assai prossimo al rigoroso.

Riferendosi al millimetro e considerando la **Fig. 230**, si trova

$$_{mas}M = 664800 \quad , \qquad d = \frac{520}{2} = 260$$

$$I = \frac{1}{12}\left\{22\ (520^3 - 370^3) + 128\ (392^3 - 370^3)\right\} = 267139239$$

e quindi colla (172*a*) si trova lo sforzo massimo cimentante le nervature di

$$6648000 \frac{260}{267139239} = 6{,}46 \text{ Kg. per mm}\square.$$

Traliccio. — Relativamente al carico accidentale, il massimo sforzo tagliente si ottiene per la posizione di carri rappresentata nella Fig. 229 e per l'appoggio di sinistra. Dalla detta figura risulta $a_1 = 0{,}30$, $a_2 = 1{,}7$, $a_3 = 2{,}3$, $a_4 = 3{,}7$ e quindi mediante la (209), nella quale si deve porre $\lambda = 0$, non essendovi marciapiedi, si ottiene

$$_{mas}T = \frac{1}{2} 687{,}52 \times 5 + 1500 \left\{ \frac{(5 - 0{,}3) + (5 - 1{,}7) + (5 - 2{,}3) + (5 - 3{,}7)}{5} \right\} = 5318 \text{ Kg.}$$

Ricorrendo alla formula d'approssimazione (210) e sostituendovi i trovati valori di p e k si ottiene

$$_{mas}T = \frac{1}{2} (687{,}52 + 1500)\, 5{,}0 = 5468{,}86$$

valore assai prossimo al rigoroso.

Aste compresse. — Si comincia dal formare lo sforzo pratico $\frac{R_c}{m}$ da adottarsi in questo caso.

La lunghezza totale di una sbarra è $l = \sqrt{450^2 + 550^2} = 710$ millimetri, e quella teorica è $L = \frac{710}{2} = 355$; assumendo poi sbarre a sezione rettangolare colle dimensioni $\frac{70}{20}$, risulta $\omega_c = 70 \times 20 = 1400$ millimetri quadrati, ed il rapporto fra la lunghezza e la grossezza $r = \frac{355}{20} = 17{,}7$, il quale non si trova nella tabella XII, ma è compreso fra i rapporti 12 e 24, e si può prendere la media fra i rispettivi coefficienti di riduzione, cioè $m = \frac{1{,}2 + 2}{2} = 1{,}6$ e quindi prendendo $R_c = 5$ chilogrammi si ha lo sforzo pratico in questo caso $\frac{R_c}{m} = \frac{5}{1{,}6} = 3{,}1$ chilogrammi per millimetro quadrato. Essendo $\cos\beta = \frac{450}{710} = 0{,}634$, ed $n = 2$, ricorrendo alla (204*a*) risulta lo sforzo che cimenta la sbarra

$$\frac{5318}{2 \times 0{,}634 \times 1400} = 3{,}05 \text{ Kg. per mm}\square$$

cioè molto prossimo allo sforzo pratico $\frac{R_c}{m} = 3{,}1$ chilogrammi prima trovato.

Aste stirate. — Prendendo queste aste colla sezione rettangolare di $\frac{70}{10}$, risulta $\omega_t = 70 \times 10 = 700$, e quindi mediante la (203*a*) si ricava lo sforzo che le cimenta di

$$\frac{5318}{2 \times 0{,}634 \times 700} = 6 \text{ Kg. per mm}\square.$$

159. Travi trasversali per ponti ferroviari. — Se le travi trasversali si fanno col *gambo reticolato*, per determinare le condizioni di stabilità delle aste del medesimo, bisogna ricorrere allo *sforzo di taglio*.

Il *carico permanente* uniformemente distribuito dà uno sforzo di taglio:

Per una sezione di ascissa x $\quad T_p = \frac{1}{2} p (l - 2x)$ (211)

Per le sezioni sugli appoggi $\quad {}_{mas}T_p = \frac{1}{2} p l$ (211*a*)

dove p è da valutarsi colle (197) o (197*a*) a seconda che si tratti del tipo francese o del tipo tedesco.

Il *carico accidentale* e *parte del permanente* producono uno sforzo di taglio che si mantiene costante negli intervalli compresi fra i punti d'applicazione delle pressioni $P_0 + P_1$ ed il cui valore è, *per ponti ad un binario:*

Negl' intervalli estremi . . . ${}_{mas}T_P = P_0 + P_1$ (212)

Nell'intervallo centrale . . . . . $T_P = 0$

E *per ponti a due binari:*

Negli intervalli estremi . . ${}_{mas}T_P = 2 (P_0 + P_1)$ (213)

» » intermedi . . . $T_P = P_0 + P_1$ (213*a*)

Nell' intervallo centrale . . . ${}_{min}T_P = \left(\frac{l - \Delta_0}{l}\right) (P_0 + P_1)$ (213*b*)

Il totale sforzo di taglio è dunque

$${}_{mas}T = T_p + T_P \qquad (214)$$

nella quale per T_p e T_P si devono porre i corrispondenti valori sopra trovati.

Il carico permanente poi è d'ordinario così piccolo in confronto dell'accidentale, che lo si può trascurare, ed allora basta porre nelle formule da (210) a (214) $p = 0$, $P_r = 0$.

Travi per marciapiedi e mensole.

160. Carichi. — Il *carico permanente* si compone di due parti: quello dovuto al tavolato e quello dipendente dalle travi che lo sorreggono. Senza entrare in un calcolo dettagliato per la sua valutazione, in pratica basta determinarlo con una sufficiente approssimazione. Chiamando p_m quello relativo al metro quadrato, comprendendo in esso il tavolato, il parapetto e le travi, si può prendere mediamente:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Per tavolato di legname} \ldots & p_m = 130 \text{ Kg.} & a \\ \text{» lamiera rigata} \ldots & p_m = 150 \text{ »} & b \\ \text{» betonato sopra tavolato metallico} & p_m = 330 \text{ »} & c \\ \text{» lastre di pietra} \ldots & p_m = 360 \text{ »} & d \end{array}\right\} \quad (215)$$

Pel *carico accidentale* si è già accennato al § **135** — β) come alcuni costruttori usino di valutarlo in ragione di 500 a 600 chilogrammi per metro quadrato, allo scopo di tener conto delle forti vibrazioni che, in caso di folla compatta, si producono nei marciapiedi. È conveniente di adottare tale carico nei *ponti carrettieri* da costruirsi entro alle città, in località molto frequentate, ma negli altri casi basta assumere un carico di 450 chilogrammi per metro quadrato. Per *ponti ferroviari* basta assumere questo carico di 300 chilogrammi per metro quadrato, non dimenticando che se i marciapiedi, sono esterni e devono servire ad uso pubblico, si ricade nel caso precedente. In generale il carico per unità quadrata si indicherà con k_m.

165. Travi frontali. — Tanto nel caso dell'appoggio diretto del tavolato, quanto allora che si impiegano dei traversi od anche dei correntini, il carico permanente e l'accidentale si considerano uniformemente distribuiti. Chiamando l la lunghezza delle travi frontali, λ la larghezza dei marciapiedi, risulta $\frac{\lambda}{2}$ la zona uni-

taria di carico in unità superficiali, e quindi il momento inflettente massimo è

$$_{mas}\mathrm{M} = \frac{1}{16}(p_m + k_m)\,\lambda\, l^2 \qquad (216)$$

Determinato $_{mas}\mathrm{M}$ si procede nella nota maniera a ricercare od a verificare le condizioni di stabilità mediante le (172) o (172*a*).

In analogo modo si procede per il calcolo dei traversi e dei correntini.

162. Mensole a parete piena. — Queste mensole si trovano nella condizione di solidi incastrati ad un estremo ed all'altro liberi, e si considerano come tali ancorchè sieno collegate fra loro in corrispondenza alla fronte del ponte.

α) **Appoggio diretto del tavolato.** — In questo caso i carichi *permanenti* ed *accidentali* sono uniformemente distribuiti sulle mensole, **Fig. 231**, e quindi il momento inflettente per una sezione di ascissa x contata dall'incastro, chiamando δ la loro distanza, è

$$\mathrm{M}_x = (p_m + k_m)\,\delta\,\frac{(l-x)^2}{2} \qquad (217)$$

dove p_m e k_m sono da calcolarsi come è indicato al § **160**. Basta considerare due o tre sezioni della mensola, fra le quali quella all'incastro, che è la più cimentata, dividendo la lunghezza in due, tre o più parti eguali, e valutare il relativo momento inflettente nonchè il rapporto $\frac{d}{\mathrm{I}}$, nel quale d ed I conservano i soliti significati. Per ogni sezione dovrà essere soddisfatta la relazione.

$$\mathrm{M}_x\,\frac{d}{\mathrm{I}} = \mathrm{R}$$

dovendosi prendere per R i soliti valori.

β) **Appoggio del tavolato mediante correntini.** — In questo caso ad eccezione del peso proprio della mensola, che si può considerare uniformemente distribuito, e che si può trascurare stante la sua poca entità, il carico permanente e l'accidentale sono trasmessi alle mensole nei punti d'appoggio dei correntini,

Fig. 232. Si determina il valore delle pressioni P_0, P_1, P_2, nonchè le distanze (a) dei loro punti d'applicazione dalle singole sezioni ove si appoggiano i correntini, poi per queste sezioni I, II e III, si deduce il relativo momento inflettente rappresentato in generale da $M = \Sigma P a$ e si determina il rispettivo valore del rapporto $\frac{d}{I}$, e per ogni sezione dovrà essere soddisfatta la nota relazione $M \frac{d}{I} = R$.

Per esempio il valore del momento inflettente per la sezione III, Fig. 232, sarebbe

$$M_{III} = P_0 a_0 + P_1 a_1 + P_2 a_2 \qquad (218)$$

essendo a_0, a_1, a_2 le distanze rispettive dei pesi P_0, P_1, P_2 dalla sezione III.

Siccome in generale i correntini hanno eguale distanza b, risulta in questo caso

$$\left.\begin{aligned} P_0 &= (p_m + k_m) \frac{b}{2} \delta \\ P_1 = P_2 &= \cdots = (p_m + k_m) b \delta \end{aligned}\right\} \qquad (219)$$

dove per p_m e k_m si devono porre i valori dati dal § 160.

Esempio.

Mensola rappresentata nella Tav. 6 (Fig. 7), Tav. 7 (Fig. 8) *e* Fig. 233. *Per questa mensola è* $l =$ *metri* 1,5, *la distanza rispettiva* $\delta =$ *metri* 3,0 *e quella dei correntini* $b =$ *metri* 0,75.

Il carico permanente per metro quadrato si ricava dalla (215a) $p_m = 130$ chilogrammi, e l'accidentale si assuma $k_m = 500$ chilogrammi per metro quadrato. Mediante la (219) si trova

$$P_0 = (130 + 500) \frac{0,75}{2} 3,0 = 708,75 \text{ Kg.}$$

$$P_1 = (130 + 500)\, 0,75 \times 3,0 = 1417,5 \quad »$$

e quindi risulta:

Per la sezione I $\quad mas M_I = 708,75 \times 0,75 = 531,56$

» » II $\quad mas M_{II} = 708,75 \times 1,5 + 1417,5 \times 0,75 = 2126,25$

Riferendosi al millimetro è $_{mas}M_I = 531560$, $_{mas}M_{II} = 2126250$ e:

Per la sezione I . . . $\frac{d}{I} = \frac{200}{180793259} = 0{,}0000011$

» » II . . . $\frac{d}{I} = \frac{320}{555829552} = 0{,}00000057$

e quindi gli sforzi che cimentano la mensola sono:

Nella sezione I . . . $531560 \times 0{,}0000011 = 0{,}58$ Kg. per mm□

» » II . . . $2126250 \times 0{,}00000057 = 1{,}21$ » »

vale a dire la mensola presenta un eccesso di resistenza, e nei riguardi dell'economia si dovrebbero diminuire le dimensioni dei cantonali.

163. Mensole senza gambo. — Per queste mensole bisogna calcolare separatamente le dimensioni dell'asta orizzontale e quelle dell'asta inclinata, trascurando per semplicità di tener conto del loro peso proprio, il cui valore è assai piccolo.

α) **Appoggio diretto del tavolato.** — Il peso totale sopportato dalla mensola, chiamato P, ha per valore

$$P = (p_m + k_m)\,\delta\,l \qquad (220)$$

dove δ ed l conservano i soliti significati, e p_m k_m si valutano colle norme date al § **160**. In **A** e **B**, **Fig. 234**, operano due eguali pesi $\frac{P}{2} = (p_m + k_m)\frac{\delta\,l}{2}$, e decomposto quello che agisce in **B** nelle componenti **BT** e **BC**, che si chiamano rispettivamente T e C, vedesi che la T produce uno sforzo di trazione nell'asta orizzontale **AB**, e la C uno sforzo di compressione nell'asta inclinata **BD** i cui valori sono

$$T = \frac{P}{2}\operatorname{cotg}\alpha = \frac{P\,l}{2\,h} \quad , \quad C = \frac{P}{2\operatorname{sen}\alpha} = \frac{P\sqrt{h^2 + l^2}}{2\,h} \qquad (221)$$

e nelle quali P deve calcolarsi colla (220).

1) **Asta orizzontale.** — Sia ω_t l'area della sezione retta ed I il relativo momento d'inerzia. Lo sforzo unitario di trazione che cimenta quest'asta, § **8**, è $\frac{T}{\omega_t}$. Quest'asta è anche cimentata alla flessione dal carico soprastante uniformemente distribuito, che

produce il momento inflettente massimo

$$_{mas}\mathrm{M} = \frac{\mathrm{P}l}{8} = \frac{(p_m + k_m)\,\delta l^2}{8} \qquad (222)$$

e quindi le fibre del bordo inferiore della medesima sono soggette ad uno sforzo unitario di trazione eguale a $_{mas}\mathrm{M}\,\frac{d}{\mathrm{I}} = \frac{\mathrm{P}l}{8}\,\frac{d}{\mathrm{I}}$.

Lo sforzo totale di trazione che cimenta le fibre maggiormente affaticate, cioè quelle del bordo inferiore si ha dalla somma dei due sforzi parziali sopra trovati, e per la stabilità esso deve eguagliare lo sforzo pratico di trazione R_t per cui si ha

$$\frac{\mathrm{T}}{\omega_t} + {}_{mas}\mathrm{M}\,\frac{d}{\mathrm{I}} = \mathrm{R}_t \qquad (223)$$

dove T e $_{mas}\mathrm{M}$ sono da calcolarsi rispettivamente colle (221) (222).

2) **Asta inclinata.** — Sia ω_c l'area della sezione retta. Siccome quest'asta è molto lunga in confronto della sua riquadratura, essa si inflette più facilmente che non si comprima, per cui lo sforzo unitario di compressione, che la cimenta, cioè $\frac{\mathrm{C}}{\omega_c}$, deve eguagliare lo sforzo pratico $\frac{\mathrm{R}_c}{m}$, per il quale il coefficiente di riduzione m è da valutarsi colle norme date al § **19**, e dipende dal rapporto $r = \frac{\mathrm{L}}{g}$ nel quale la lunghezza teorica L si deve prendere eguale all'effettiva, cioè $\mathrm{L} = \sqrt{l^2 + h^2}$; deve essere quindi

$$\frac{\mathrm{C}}{\omega_c} = \frac{\mathrm{R}_c}{m} \qquad (224)$$

dove il valore di C si deve calcolare colla (221).

β) **Appoggio del tavolato mediante correntini.** — Si determinano le pressioni $\mathrm{P}_0\ \mathrm{P}_1\ \mathrm{P}_2\ldots$ nel modo indicato al § **162** — β), nonchè le distanze dei corrispondenti punti d'applicazione dall'estremo (**A**), cioè $a_0\ a_1\ a_2\ldots$ e quelle dall'estremo libero (**B**), cioè $b_1\ b_2\ldots$, **Fig. 235.** La pressione totale che agisce all'estremo libero **B**, chiamata P, ha per valore

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}_0 + \frac{\mathrm{P}_1\,(l - b_1) + \mathrm{P}_2\,(l - b_2) + \cdots}{l} \qquad (225)$$

Il massimo momento inflettente, si verifica per la sezione mediana ed è dato da

$$_{mas}M = P\frac{l}{2} - P_0\frac{l}{2} - P_1\left(\frac{l}{2} - b_1\right) - \cdots \qquad (226)$$

Ciò posto, per i calcoli di stabilità servono ancora le (223) (224) soltanto che il valore di $_{mas}M$ si deve calcolare colla (226), e quelli di T e C colle (221) purchè in esse si ponga per P il valore dato dalla (225).

Esempio.

Mensola rappresentata nella **Tav. 4** (Fig. 8 e 9), **Tav. 5** (Fig. 1), *per la quale è* $l =$ *metri* 0,695, $\delta =$ *metri* 2,2, $h = 0{,}78 - 0{,}22 =$ *metri* 0,56, *la forma delle aste un* T *e le rispettive dimensioni* $\frac{150 \times 80}{2}$.

Il carico permanente si ha dalla (215*b*), cioè $p_m = 150$ chilogrammi per metro quadrato e l'accidentale si assume $k_m = 500$ chilogrammi per metro quadrato.

Dalla (220) si ha $P = (150 + 500)\, 2{,}2 \times 0{,}695 = 993{,}85$ chilogrammi; dalle

(221) $T = \frac{993{,}85 \times 0{,}695}{2 \times 0{,}56} = 616{,}75$, $C = \frac{993{,}85\sqrt{0{,}56^2 + 0{,}695^2}}{2 \times 0{,}56} = 789{,}79$;

e dalla (222) $_{mas}M = \frac{993{,}85 \times 0{,}695}{8} = 86{,}34$. Riferendosi al millimetro è

$_{mas}M = 86340$, $\omega_t = \omega_c = 2616$ mm□, $\frac{d}{I} = \frac{61{,}5}{1234382} = 0{,}000049$.

Asta orizzontale. — Il massimo sforzo che la cimenta è dato dalla (223), cioè $\frac{616{,}75}{2616} + 86340 \times 0{,}000049 = 4{,}47$ chilogrammi per millimetro quadrato.

Asta inclinata. — Si faccia il rapporto $r = \frac{L}{g}$, § **19**, ed è $r = \frac{890}{80} = 11{,}12$; per conto tondo si prenda $r = 12$, a cui corrisponde un coefficiente di riduzione, tabella **XII**, $m = 1{,}2$, e quindi lo sforzo pratico in questo caso è $\frac{R_c}{m} = \frac{5}{1{,}2} = 4{,}16$ chilogrammi per millimetro quadrato.

Dalla (224) si ricava quello che effettivamente cimenta l'asta, cioè $\frac{789{,}79}{2616} = 0{,}3$ chilogrammi per millimetro quadrato, e quindi vi è esuberanza di stabilità.

164. Mensole col gambo reticolato. — In questo caso si considera la mensola come un sistema articolato invariabile,

e bisogna quindi determinare le tensioni a cui sono soggette le varie aste che la compongono. Di solito il tavolato è posto sopra correntini che insistono sopra i nodi **B**, **C**, **D**, **A**, Fig. 236*a*, equidistanti fra di loro, e quindi tanto il carico *permanente* che l'*accidentale* operano in corrispondenza a questi nodi, che sono tutti egualmente caricati ad eccezione del primo, il quale porta metà del carico degli altri. Il valore delle pressioni sui singoli nodi si determina colle norme del § **162** — β).

α) **Processo analitico.** — Per questo tipo di mensole conviene ricorrere al metodo dei momenti statici, § **74**, onde valutare la tensione delle varie sbarre costituenti la mensola. È facile scorgere che le aste costituenti la nervatura orizzontale **AB** sono soggette a trazione, e le altre componenti la nervatura inclinata **BH** sono compresse, mentre le aste del gambo sono in parte tese ed in parte compresse. Si consideri una qualunque delle porzioni della nervatura orizzontale, per esempio **CD**, e sia T il relativo sforzo di trazione e t la distanza normale dal nodo opposto **F**, nonchè una porzione qualunque della nervatura inclinata, per esempio **FG**, di cui sia C lo sforzo di compressione e c la distanza normale del nodo opposto **D**. Sia M_t il momento di tutte le forze che operano a destra del nodo **D** ed a questo riferite, ed M_c il momento di tutte le forze che operano a sinistra del nodo **G** e riferite al medesimo. Si ha perciò

$$T = \frac{M_t}{t} \quad , \quad C = \frac{M_c}{c} \qquad (227)$$

Si consideri ora una qualunque delle aste del gambo inclinate verso destra, per esempio **DF**, e sia F il relativo sforzo di tensione. Si prolunghino quelle due porzioni di nervature, una orizzontale, l'altra inclinata, che concorrono agli estremi dell'asta inclinata e che sono entrambe intersecate da un qualunque piano che tagli l'asta medesima; riferendosi all'asta **DF**, esse sono **CD** e **GF**, che si intersecano in **O**, e sia f la distanza normale dell'asta da questo punto **O**. Si chiami M il momento delle forze che operano a destra di **D**, riferite al punto **O**, e si ha

$$F = \frac{M}{f} \qquad (228)$$

avvertendo che la tensione F è positiva o negativa (cioè indica trazione o compressione) a seconda che il momento M produce una rotazione a sinistra od a destra.

Per un'asta del gambo inclinata verso sinistra, per esempio **C F**, serve la stessa formula (228), e le stesse norme per determinare la natura delle tensioni.

Basta poi tener conto soltanto dei carichi che si trovano da una parte o dall'altra del punto **O**, secondo che si voglia valutare la massima tensione positiva o negativa.

β) **Processo grafico.** — La determinazione delle tensioni dei singoli pezzi componenti la mensola si può fare molto speditamente per via grafica ricorrendo al metodo delle figure reciproche, seguendo le norme indicate al § **79**.

Nella **Fig. 236***b* è rappresentato il diagramma delle tensioni relativo alla mensola disegnata in tipo schematico nella **Fig. 236***a*, nelle quali figure si sono segnati con linee grosse i lati a cui corrisponde uno sforzo di compressione, con linee sottili quelli a cui corrisponde uno sforzo di trazione.

Determinati gli sforzi di tensione, per calcolare la riquadratura ω delle varie aste servono le seguenti formule:

$$\text{Aste tese} \qquad \frac{T}{\omega_t} = R_t \qquad (229a)$$

$$\text{» compresse} \quad \frac{C}{\omega_c} = \frac{R_c}{m} \qquad (229b)$$

Esempio.

Mensola rappresentata nella **Tav. 7** (Fig. 12) *e* **Fig. 237**. *La lunghezza della mensola è* $l =$ *metri* 1,5, *la distanza fra i correntini* $b = \frac{1,5}{2} =$ *metri* 0,75, *e quella fra le mensole* $\delta =$ *metri* 3. Il carico permanente per metro quadrato è dato dalla (215*c*) cioè $p_m = 330$ chilogrammi, e quello accidentale si assume $k_m = 500$ chilogrammi per metro quadrato. Colle (219) si trovano le pressioni P_0 e P_1 che agiscono rispettivamente all'estremo **A** ed alla mezzaria **D** della mensola, cioè

$$P_0 = (330 + 500)\,\frac{0,75}{2}\,3,0 = 933,75$$

$$P_1 = (330 + 500)\,0,75 \times 3,0 = 1867,5$$

Si calcolino ora le tensioni dei vari pezzi della mensola colle (227) e (228). Le tensioni dei due pezzi di nervatura orizzontale **BD** ed **AD** sono eguali, inquantochè a ciascheduna è opposto lo stesso nodo **E**, e quindi i momenti di tutte le forze che stanno rispettivamente a destra dei nodi **B** e **D** riferiti al punto **E** sono fra loro eguali, ed hanno per valore $M_t = P_0 \times AD = 933,75 \times 0,75 = 700,31$ e quindi, essendo $t = 0,32$ si ha $T = \frac{700,31}{0,32} = 2188,5$.

Siccome la nervatura inferiore **AC** si fa tutta di un pezzo, così il calcolo bisogna farlo per la porzione **CE** che è la più cimentata. Il relativo momento M_c di tutte le forze che stanno a destra del punto **C**, riferite al nodo opposto **B**, è $M_c = 1867,5 \times 0,75 + 933,75 \times 1,5 = 2801,25$. Per avere $c = BF$ si formi $AE = \sqrt{0,75^2 + 0,32^2} = 0,815$, $sen\alpha = \frac{0,32}{0,815} = 0,392$, e quindi $c = AB\ sen\alpha = 1,5 \times 0,392 = 0,59$; risulta perciò $C = \frac{2801,25}{0,59} = 4747,9$.

L'asta verticale **DE** è soggetta ad uno sforzo di compressione $V = P_1 = 1867,5$ e l'asta inclinata **BE** ad uno sforzo dato dalla (228). Il momento M, essendo in **A'** il punto di incontro delle due porzioni **BD** e **CE**, ha per valore $M = 1867,5 \times 0,75 = 1400,625$, e per essere $f = AG = BF = 0,59$, si trova $F = \frac{1400,625}{0,59} = 2374$.

Resta a determinare gli sforzi unitari che cimentano questi pezzi.

Nerv. **AB** sez. $(70^2 - 60^2) = 1056$ mm□, e quindi $R_t = \frac{2188,5}{1056} = 2,07$ Kg. p. mm□

» **AC** » $(70^2 - 62^2) = 1056$ » » $R_c = \frac{4747,9}{1056} = 4,50$ » »

Vert. **DE** » $100 \times 8 = 800$ » » $R_c = \frac{1867,5}{800} = 2,33$ » »

Diag. **BE** » $100 \times 8 = 800$ » » $R_t = \frac{2374}{800} = 2,97$ » »

e si conclude trovarsi la mensola in buone condizioni di stabilità, poichè i pezzi stirati si possono caricare fino a 7 chilogrammi per millimetro quadrato, ed i compressi in media fino a 4,5.

Nella **Fig. 237*b*** si sono determinati gli sforzi di tensione graficamente rappresentando 100 chilogrammi con un millimetro.

I.

PONTI A TRAVATA

CON TRAVI DIRITTE O RETTILINEE

165. Generalità. — I ponti a travata con travi diritte o rettilinee sono caratterizzati da due o più travi diritte che corrono longitudinalmente sopra due o più piedritti, le quali costituiscono le *travi* od *armature principali*, ed il cui ufficio è quello di sostenere tutte le parti costituenti il palco del ponte, nonchè i carichi accidentali che devono transitare sul medesimo. Esse sono quindi le membrature principali di resistenza.

Il complesso della costruzione metallica che sta fra un piedritto ed il successivo dicesi *travata* o *campata*, e quindi a seconda che varia il numero dei piedritti varia anche quello delle travate. Da ciò nasce una importante distinzione, e cioè:

A) **Ponti ad una travata,**

B) **Ponti a più travate.**

L'ampiezza della travata dicesi *portata*, e siccome a mano a mano che aumenta la distanza fra i piedritti, la forma delle travi principali, nonchè quella del complesso della travata, si va complicando e modificando per guisa da dare origine a dei tipi affatto speciali e fra loro differenti, così si fa distinzione fra:

1) **Ponti di piccola portata**, e

2) **Ponti di grande portata.**

E se si vuol prendere in considerazione anche il modo di costruzione delle *travi principali*, si può fare la seguente distinzione:

Ponti con travi semplici o *massiccie*,

Ponti con travi composte, aventi:

α) *Il gambo* o *la parete verticale piena*,

β) » » » *reticolata*.

Si studieranno separatamente i ponti di *piccola portata*, da quelli di *grande portata*, quelli ad *una travata*, da quelli *a*

più travate, tralasciando di considerare la particolare costruzione delle travi, giacchè per uno stesso tipo di ponte si possono prendere varie forme di travi diritte.

A) Ponti ad una travata di piccola portata.

In questa categoria sono compresi quei ponti la cui portata non supera i 10 metri, o per meglio dire quelli le cui travi principali sono prismatiche, ossia a sezione costante.

166. Forma delle travi. — Le travi che si adoperano nei ponti di piccola portata si costruiscono in diversi modi e cioè possono essere *massiccie* o *composte*, e quest'ultime *col gambo pieno* o *col gambo reticolato*, sempre però prismatiche, con l'una o l'altra delle forme vedute al § **131**.

Ponti pedonali o passerelle.

1. Costruzione.

167. Larghezza. — Semplicissima è generalmente la conformazione dei *ponti pedonali di piccola portata*, i quali richieggono larghezze relativamente piccole ed un unico piano camminabile per il passaggio dei soli pedoni.

D'ordinario essi si costruiscono per uso dei privati, ed allora, essendo assai limitato il carico accidentale che di solito devono sostenere, riescono leggerissimi. Anche per uso pubblico però possono venire costruiti, e sebbene convenga in allora considerare il passaggio di una folla stipata di persone come carico accidentale, cioè un peso che ragguagliato all'unità superficiale è piuttosto considerevole, pure riescono sempre costruzioni assai leggiere. Circa alla loro *larghezza*, essa varia a seconda dell'uso del ponte, della quantità di persone che devono ordinariamente e contemporaneamente transitare sul medesimo, e del grado di economia che si vuol raggiungere, e mentre non deve essere mai minore di metri 1,20, onde permettere che due persone cariche di qualche oggetto voluminoso, e dirette in sensi contrari possano passare comodamente, si fa di solito di metri 1,50 — può

essere portata fino ai metri 2,50 nei siti molto frequentati — e può venire anche di molto aumentata a seconda che si presentino circostanze locali e bisogni straordinari, nel qual caso non si può fissare limite alcuno, ma conviene proporzionarla alle esigenze particolari che si incontrano.

Ad esempio, se il ponte deve essere costruito lungo un largo viale destinato a pubblico passeggio, gli si deve assegnare la medesima larghezza del viale, e quindi 6, 8, 10 metri ed anche più.

168. Vari tipi. — Il più semplice tipo è costituito da un proporzionato numero di travi longitudinali massiccie, § **131** — α), con forma di I poste sopra ai piedritti alla distanza da asse ad asse di metri 0,50 fino a metri 1,00. Uno strato di tavoloni chiodati sopra alle travi completa il palco del ponte, Fig. 238.

Il piano camminabile, ossia il suolo, può anche venire formato con lastre di pietra, Fig. 239, o con lamiere di ferro cilindriche, impostate e sospese, Fig. 241 e 242, o con lamiera rigata, Fig. 240, seguendo le norme indicate ai §§ **106**, **112**, **114** a **116**.

I ritti del parapetto in ferro od in ghisa si fissano alle travi frontali col mezzo di bolloni od al disopra delle tavolette, Fig. 238, 240, o lateralmente al gambo, Fig. 239, 241, 242, nel qual caso per le travi frontali si adottano dei ferri a ⌶. Mano a mano che la portata del ponte va aumentando, basta alle semplici travi massiccie sostituire le travi composte descritte al § **131** — β), conservando nel resto le precedenti disposizioni.

Quando la portata supera 8 metri ed il ponte è largo più di 2 metri, torna opportuno:

1° Di adottare due sole travi frontali, le quali necessariamente si devono fare composte nei riguardi di resistenza, ed è preferibile che il gambo sia reticolato per renderle di aspetto più leggiero ed aggradevole;

2° Di mettere il suolo inferiormente alle medesime, sostenendolo con dei traversi metallici in forma di T o I, in modo che le travi frontali servano anche da parapetto, come si vede nella Fig. 243, in sezione longitudinale e trasversale, nella quale il suolo è di lamiera di ferro rigata. La Fig. 244 rappresenta una variante del tavolato il quale invece è di lastre di pietra.

169. Ponticello per giardino. — Dovendo costruire entro un giardino un ponticello, il quale abbia il suolo di minuta

ghiaia, come nei viali, e nello stesso tempo presenti un aspetto il più leggiero possibile, si può adottare la disposizione segnata nella **Tav. 1** (Fig. 1, 2, 3). Le travi longitudinali sono dei ferri massicci, in forma di ⌋ quelli frontali, ed in forma di ⊥ quelli intermedî. Il tavolato è di *lamiere cilindriche sospese*, aventi la distanza di un centimetro l'una dall'altra, onde permettere il pronto scolo delle acque, e sopra le medesime vi ha un primo strato di ghiaia grossa dell'altezza di 5 centimetri, un secondo di ghiaia ordinaria dell'altezza di 5 centimetri, e finalmente un terzo strato di ghiaia minutissima pure dell' altezza di 5 centimetri. Tutte le travi sono in ambedue i loro estremi inchiavardate sopra una trave trasversale di legno incassata nella muratura dei piedritti.

170. Ponticello privato. — Avendosi a costruire un ponte, che attraversando un corso d'acqua metta in comunicazione un qualche fabbricato posto lungo una sponda del canale, con una strada che corre parallelamente all'altra sponda, colla condizione che, mentre il piano camminabile del ponte deve essere collocato al livello della soglia della porta del fabbricato, esso rimanga in conseguenza sopraelevato sul piano stradale, è evidente che si rende necessario in questo caso l'impiego dei gradini.

Nella **Tav. 1**, le Fig. 5, 6, 7, 8 ne danno un esempio, nella ipotesi che il corso d'acqua sia largo metri 6,50 ed incassato fra sponde murali, che il dislivello fra il piano stradale e quello del ponte sia di metri 0,80, e che si possa occupare la strada coi gradini.

Il ponticello è costituito da 3 travi longitudinali in forma di I, sopra le quali è disposto un tavolato di legname. Dalla parte dei gradini, queste travi sono inchiavardate ai loro estremi in una traversa di legname incassata nel muro di sponda, e dall'altra parte invece gli estremi di esse travi si addentrano in apposite nicchie incavate nella muratura, e sono inchiavardate mediante bolloni da muro sopra un corso di pietra da taglio che corre tutto di un pezzo per quanto è largo il ponte.

Si potrebbe sovrapporre ai tavoloni un letto di pianelle con coperta d'asfalto, oppure sostituirvi delle lastre di pietra da taglio, o di lamiera rigata, o di lamiera cilindrica, nei modi indicati dalle **Fig. 239, 240, 241, 242.**

171. Ponticello con gradini. — Se sopra un corso d'acqua, corrente entro sponde murali, e fiancheggiato da strade, si deve costruire un ponticello per mettere in comunicazione l'una sponda coll'altra, colla condizione che il livello del sottotrave sia sopraelevato sul pelo delle acque alte più che non lo sia il piano stradale, è evidente che conviene tenere il palco del ponte più alto del piano stradale medesimo. Bisogna perciò far uso di alcuni gradini onde accedere dal piano stradale a quello più alto del ponte, e se non si può coi medesimi occupare il piano della strada, può servire la costruzione rappresentata nella Tav. 1, dalle Fig. 9, 10, 11, 12. L'impalcato è sostenuto da due travi longitudinali frontali formate con due coppie di ferri piatti nelle nervature, e con un gambo costituito di vari pezzi di lamiera intagliata onde esso riesca traforato e quindi di uno aspetto leggiero, e per quanto sia possibile elegante. I gradini sono formati con dei ferri trasversali in forma di ⌋, posti col gambo verticale e fissati alle travi principali mediante cantonali verticali, e coll'aiuto di altri cantonali orizzontali saldati alla loro parte inferiore sostengono il piano dei gradini fatto di lamiera rigata, mentre essi stessi ne costituiscono la fronte, Tav. 1 (Fig. 13 e 14). Il palco è formato da travi trasversali in forma di T, saldati mediante cantonali verticali alla parte superiore delle travi principali, e sopra gli stessi sono chiodate delle lamiere rigate di ferro costituenti il suolo del ponte.

2. Calcoli di stabilità.

172. Travi principali. — Queste travi portano per intero il *peso permanente* ed il *sopraccarico accidentale*. Il *peso proprio* della costruzione è, in questi ponticelli, relativamente assai piccolo in confronto dell'accidentale, e perciò, senza entrare in minuti dettagli per la sua valutazione, si può mediamente ritenerlo con sufficiente approssimazione da 50 a 100 chilogrammi per metro quadrato, a seconda che la portata varia da 5 a 10 metri, e per ordinarie larghezze da 1 a 2 metri, purchè il suolo sia costituito da semplici tavoloni, o da lamiere di ferro. Se il suolo è formato con lastre di pietra, o con coperta di ghiaia o di béton, bisogna calcolarne il peso esattamente, avvegnachè esso diventa rilevante e può variare dai 150 ai 250 chilogrammi per metro quadrato.

Per il *carico accidentale* valgono le norme stabilite al § **135** — α). Tanto l'uno che l'altro cimentano le travi principali alla flessione nel modo indicato al § **32**.

Entrambi questi carichi sono uniformemente distribuiti sulla lunghezza delle travi, e quindi chiamando:

l la lunghezza teorica della trave (cioè la lunghezza libera, contata da vivo a vivo degli appoggi);
p il peso permanente riferito all'unità di lunghezza della trave;
k il carico accidentale riferito all'unità di lunghezza della medesima;
q il carico unitario complessivo; si ha

$$q = p + k$$

Per formar il valore di p e k si osservi che generalmente le travi hanno eguale distanza δ da asse ad asse, **Fig. 188**, e quindi, prendendo per unità di misura il metro, la zona di carico riferita all'unità di lunghezza della trave è lunga un metro e larga δ metri, ossia ha una superficie di δ metri quadrati, cioè *la distanza δ fra le travi rappresenta altresì la zona superficiale unitaria di carico, fatta eccezione però dalle travi frontali, per le quali la detta zona è metà di quella relativa alle travi intermedie, vale a dire è eguale a* $\frac{\delta}{2}$.

Il valore di p e k si ottiene dunque speditamente moltiplicando i carichi riferiti all'unità superficiale (ordinariamente è il metro quadrato) per δ.

Veramente essendo le travi d'ordinario solidamente fissate ai loro estremi, si dovrebbero considerare quali solidi incastrati, ma siccome l'incastro prodotto dalle chiodature non è perfetto, e d'altronde per favorire anche la stabilità, esse si considerano semplicemente appoggiate, come usano i prudenti costruttori.

E siccome le travi si fanno prismatiche, bisogna calcolare la loro stabilità rispetto alla sezione pericolosa. Il massimo momento inflettente $_{mas}M$ (ossia quello delle forze esterne) che cimenta la trave nella sezione pericolosa per carico uniformemente distribuito, tabella **XVIII**, Fig. 5, è

$$_{mas}M = \frac{1}{8} q l^2$$

Volendo tener conto dell'incastro è $_{mas}M = \frac{1}{12} q l^2$, tabella XVIII, Fig. 11.

Alcuni costruttori usano di prendere il valore medio, cioè $_{mas}M = \frac{1}{10} q l^2$. Chiamando:

I il momento di inerzia della sezione retta della trave riferito all'asse neutro;

c la distanza dall'asse neutro delle fibre compresse più cimentate;

t » » » tese »

d la detta distanza quando è $c = t$ (per sezioni simmetriche);

R_c, R_t ed R gli sforzi pratici unitari di compressione, di trazione, di flessione, si ha il momento resistente μ, ossia Σmf della trave, cioè quello delle forze interne o reazioni molecolari. espresso dalle (29) e (29a) del § **30**, ossia: se la sezione della trave è dissimmetrica

$$\mu = \frac{R_t I}{t} = \frac{R_c I}{c}$$

se la sezione è simmetrica

$$\mu = \frac{R I}{d}$$

Come si determinino le quantità t, c, d, I nei vari casi fu indicato nei §§ **33**, **36** a **40**.

Le condizioni dunque di stabilità della trave, per quanto si è veduto nei §§ **27** e **32**, sono date dalle (31) e (31a) nelle quali sostituendo per M il trovato valore del massimo momento inflettente si ha

$$\frac{1}{8} q l^2 = \frac{R_t I}{t} = \frac{R_c I}{c} \qquad (230)$$

$$\frac{1}{8} q l^2 = \frac{R I}{d} \qquad (230a)$$

Nelle quantità I, t, c, d sono implicitamente contenute le dimensioni della sezione retta della trave, delle quali o se ne scelgono alcune, lasciandone una di indeterminata, che si ricava risolvendo la (230) o (230a), oppure, come si usa in pratica, si scelgono opportunamente tutte le dimensioni, e si verifica se con esse vi sia stabilità, affine di liberarsi dalla risoluzione delle (230) o

(230*a*), che di solito riescono di grado superiore al secondo. Perciò si pongono le (230) e (230*a*) sotto la forma

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{8}\, q\, l^2\, \frac{t}{\mathrm{I}} &= \mathrm{R}_t \\ \frac{1}{8}\, q\, l^2\, \frac{c}{\mathrm{I}} &= \mathrm{R}_c \end{aligned}\right\} \quad (231)$$

$$\frac{1}{8}\, q\, l^2\, \frac{d}{\mathrm{I}} = \mathrm{R} \qquad (231a)$$

nelle quali il primo membro rappresenta il vero e reale sforzo unitario che cimenta la trave nelle fibre più affaticate (cioè le più lontane dall'asse neutro) ed il cui valore varia col variare delle dimensioni della trave, ed il secondo membro rappresenta lo sforzo unitario consentito dalla pratica. Generalmente i costruttori adottano per le travi massiccie lo *sforzo pratico di sicurezza* compreso fra 5 ed 8 chilogrammi per millimetro quadrato, avvicinandosi al primo limite nei ponti soggetti di frequente al massimo carico accidentale, ed al secondo nei ponti poco frequentati. Se le dimensioni scelte sono tali da rendere il primo membro eguale al secondo, sono giuste, se invece rendono il primo membro maggiore del secondo, vuol dire che lo sforzo reale che cimenta la trave con quelle dimensioni, è maggiore di quello tollerato dalla pratica, e quindi esse sono deficienti e bisogna aumentarle, e viceversa se le scelte dimensioni sono tali per cui il primo membro riesce minore del secondo, vuol dire che con quelle dimensioni la trave è cimentata meno di quanto è lo sforzo pratico, e quindi essendovi esuberanza di stabilità, ed in conseguenza spreco di materiale, bisogna diminuirle nei riguardi dell'economia. Per poco che si sia esercitati, dopo due o tre tentativi al più, si giunge alla scelta delle dimensioni opportune, avendo l'avvertenza di adottare forme e dimensioni di ferri che sieno facilmente reperibili in commercio, tabelle XXVIII a XXXIX, senza che vi sia la necessità di commetterli espressamente, ciò che eleverebbe il costo della costruzione.

Esempio 1°

Passerella rappresentata nella Tav. 1 (Fig. 1, 2, 3 e 4). In questo caso che la distanza delle travi è $\delta = 0{,}40$, la zona unitaria di carico è 0,40

metri quadrati. L'inghiaiata è grossa metri 0,15. Le travi a T hanno per sezione $0{,}15 \times 0{,}13 - 0{,}127 \times 0{,}116 = 0{,}004768$ metri quadrati, Fig. 245. Le lamiere sospese sono grosse 0,006, e larghe 0,40 e quindi in sezione misurano 0,0024 metri quadrati. Ciò posto si formi il valore di q.

Inghiaiata	$0{,}40 \times 0{,}15 \times 2000 =$	120,00 Kg.
Trave a T	$0{,}004768 \times 1{,}00 \times 7800 =$	37,19 »
Lamiere sospese .	$0{,}0024 \times 1{,}00 \times 7800 =$	18,72 »

Carico permanente . . . . . $p = 175{,}91$ Kg.
» accidentale . . . . . $k = 0{,}40 \times 250 = 100{,}00$ »

Carico unitario totale $q = p + k = 275{,}91$ Kg.

Per determinare il momento di inerzia I del ferro a T si deve determinare la posizione del baricentro. Chiamando x la distanza del medesimo dal lato inferiore della tavoletta, riferendo i momenti di figura a questo lato, § 33 — α), ed esprimendo tutto in millimetri, si ha

$$x = \frac{150 \times 14 \times \frac{14}{2} + 23\,(130 - 14)\,\frac{130 + 14}{2}}{150 \times 14 + 23\,(130 - 14)} = 43{,}4 \text{ mm.}$$

e quindi il momento di inerzia è, § 38 — β),

$$I = \frac{1}{3}\left\{150 \times \overline{35{,}5}^3 - (150 - 23)\,(35{,}5 - 14)^3 + 23\,(130 - 43{,}4)^3\right\}$$

$$I = 8753084.$$

le quantità t e c sono date da

$$t = 43{,}4 \quad , \quad c = 130 - 43{,}4 = 86{,}6$$

mentre prendendo per unità di misura il millimetro è

$$q = 0{,}276 \qquad \text{ed} \qquad l = 4500$$

e quindi sostituendo nelle (231) risulta lo sforzo reale nella fibra estrema della tavoletta soggetta a trazione

$$\frac{1}{8}\,0{,}276 \times \overline{4500}^2\,\frac{43{,}4}{8286200} = 3{,}43 \text{ Kg. per mm}\square$$

lo sforzo reale nella fibra estrema del gambo soggetta a compressione

$$\frac{1}{8}\,0{,}276 \times \overline{4500}^2\,\frac{86{,}6}{8286200} = 6{,}84 \text{ Kg. per mm}\square$$

per cui essendo gli sforzi reali compresi nei limiti acconsentiti dalla pratica si conclude che la trave a T colle assunte dimensioni va bene.

Osservazione. — Nelle travi dissimetriche basta fare la verifica per la sola fibra più lontana dall'asse neutro, inquantochè questa è la più cimentata di tutte, e quindi nel caso considerato era sufficiente farla per il gambo soggetto a compressione. Vedesi diffatti che nella tavoletta lo sforzo massimo è ben inferiore a quello del gambo, anzi vi sarebbe una esuberanza di resistenza, la quale però non è che apparente, avvegnachè se si diminuissero le dimensioni della trave, aumenterebbe tanto lo sforzo massimo di trazione, che quello di compressione, e quindi nel gambo, che è il più cimentato, si sorpasserebbe il limite pratico, e non si avrebbe più una conveniente stabilità nella trave.

Esempio 2°

Passerella rappresentata nella **Tav. 1** (Fig. 5, 6, 7 e 8) *della portata di metri* 6,50. Essendo la distanza fra le travi $\delta = 1$ metro, la zona di carico $\delta = 1$ metro quadrato, e quindi

Carico permanente . . . . $p = 1{,}00 \times 80$ Kg. $= 80$ Kg.
» accidentale . . . . $k = 1{,}00 \times 250$ » $= 250$ »

Carico unitario totale $q = p + k = 330$ Kg.

Esprimendo tutto in millimitri si ha, **Fig. 246**,

$$I = \frac{1}{12}\left\{120 \times \overline{180}^3 - 110\,(180 - 24)^3\right\} = 23520000$$

$$d = \frac{180}{2} = 90 \quad , \quad q = 0{,}33 \quad , \quad l = 6500$$

e quindi sostituendo nella (231*a*) si ottiene

$$\frac{1}{8}\,0{,}33 \times \overline{6500}^2\,\frac{90}{23520000} = 6{,}62 \text{ Kg. per mm}\square$$

per cui, essendo il massimo sforzo di tensione compreso fra i limiti pratici, la trave colle dimensioni assunte si trova in buone condizioni di stabilità.

Osservazione. — La zona di carico relativa alle travi frontali è metà di quella della trave centrale, per la quale si sono fatti i calcoli, e quindi le prime sono meno cimentate. Nei riguardi dell'economia, si dovrebbe adunque diminuire la riquadratura delle travi frontali, facendole tanto in forma di I che di [, ma per semplicità e regolarità di costruzione, in pratica si preferisce di farle eguali alle centrali.

Esempio 3°

Passerella rappresentata nella **Tav. 1** (Fig. 9, 10, 11 e 12), *della portata di metri* 6,00. — Non essendovi che due sole travi frontali la cui

distanza è di metri 2,5, la relativa zona di carico è $\frac{2,50}{2} = 1,25$ metri quadrati.

Carico permanente . . . $p = 1,25 \times 80$ Kg. $= 100,00$ Kg.
» accidentale . . . $k = 1,25 \times 450$ » $= 562,50$ »

Carico unitario totale $q = q + k = 662,50$ Kg.

Esprimendo tutto in millimetri si ha, **Fig. 247**,

$$I = \frac{1}{12}\left\{20 \times \overline{480}^3 - 20 \times \overline{320}^3\right\} = 129706600$$

$$d = \frac{480}{2} = 249 \quad , \quad q = 0,6625 \quad , \quad l = 6000$$

Sostituendo nella (231a) risulta

$$\frac{1}{8}\, 0,6625 \times \overline{6000}^2 \frac{240}{129706600} = 5,52 \text{ Kg. per mm}\square$$

cioè la trave, essendo cimentata meno del limite pratico, si trova non solo in buone condizioni di stabilità, ma presenta una esuberanza di resistenza la quale però non essendo notevole, non è contraria all'economia.

Osservazione. — Pei calcoli delle varie parti dell'impalcato si seguono le norme indicate ai §§ **136** a **139** e **150**.

Ponti per strada ordinaria.

1. Costruzione.

173. Generalità. — Di solito questi ponti devono avere uno spazio centrale o *carreggiata* destinato al passaggio dei ruotabili, e due spazi laterali o *marciapiedi* destinati al passaggio dei pedoni.

I ponticelli però di secondaria importanza, quali sono quelli che danno continuità a strade secondarie (*comunali*, *vicinali*), dovendo avere la larghezza proporzionata a quella della strada, che tutto al più misura da 4 a 5 metri, si fanno con un unico piano che serve indistintamente al passaggio dei veicoli e pedoni, sopprimendo i marciapiedi i quali, stante la poca larghezza del ponte, non potrebbero trovar posto e lasciare nello stesso tempo tanta larghezza alla carreggiata da permettere lo scambio di due veicoli carichi che marciano in senso contrario.

174. Numero e forma delle travi principali. — Circa alle travi principali che si adoperano in questi ponti, esse possono essere o due soltanto, o più di due. Mano a mano che cresce la loro portata e la loro distanza aumenta anche l'intensità dei carichi che esse devono sopportare, e quindi per renderle sempre più robuste bisogna proporzionatamente aumentare la loro altezza, avvegnachè la resistenza di un solido cimentato alla flessione dipende principalmente dall'altezza della sua sezione retta, anzi si può dire che la resistenza, a parità di tutte le altre condizioni e dimensioni, cresce in ragione del quadrato di quest'altezza. E siccome l'esperienza ha dimostrato che è opportuno tenere l'altezza di queste travi compresa fra $^1/_{10}$ ed $^1/_{15}$ della portata, si può stabilire che i limiti entro i quali essa può variare sono metri 0,20 e metri 1,00.

Fino all'altezza di metri 0,30 è conveniente di adottare travi massiccie, oltre questa altezza è necessario fare le travi composte, nel qual caso il gambo può essere a parete piena, oppure reticolata, con l'una o l'altra delle forme indicate al § **131** — β).

Qualora però si deve ricorrere ad una trave composta, si preferisce farla col gambo reticolato, allo scopo di dare alla costruzione un aspetto il più leggiero possibile, abbenchè queste travi, che hanno lunghezze ed altezze relativamente piccole, riescano d'ordinario più costose di quelle col gambo pieno, sia in causa della maggiore mano d'opera richiesta, sia perchè un gambo a traliccio con sbarre di eguali dimensioni (come di solito si usano in queste piccole travi) riesce più pesante di un gambo pieno a parità di resistenza.

175. Palco del ponte. — Relativamente al palco del ponte, esso può essere di costruzione pesante o leggiera a seconda che si formi il suolo con una massicciata qualunque, o che la si tralasci, usando invece un semplice tavolato di legname. La massicciata (inghiaiata, bétonata, selciato, lastricato) aumentando notevolmente il peso della costruzione (da 250 a 400 chilogrammi per metro quadrato) costringe all'impiego di travi più robuste e quindi più costose, e per di più accresce il costo dell'opera della quota relativa al suo proprio importo. Nei riguardi adunque dell'economia sarebbe da preferirsi l'impiego di un suolo formato da soli tavoloni, i quali per altro essendo esposti direttamente al

roteggio sono soggetti ad un deterioramento rapidissimo, e quindi elevano notevolmente le spese di manutenzione.

Nei ponti di secondaria importanza, e sopratutto in quelli soggetti ad un passaggio poco frequente di veicoli e specialmente di pesanti carri, si può adottare per ragioni di economia il suolo di soli tavoloni, in vista della limitata usura a cui sarebbero sottoposti, ma in quelli nei quali è frequente il passaggio dei veicoli e principalmente dei pesanti carri, è conveniente di costruire il suolo della carreggiata con una opportuna massicciata, altrimenti il rapidissimo logorarsi del tavolato porterebbe una continua spesa di manutenzione, e d'altronde risultando il peso della costruzione troppo inferiore a quello dei carichi accidentali, questi nel loro frequente passaggio causerebbero dei forti brandimenti nel ponte, i quali oltre di riescire incomodi ai transeunti, sarebbero nocevoli alla durata del manufatto.

176. Ponti senza marciapiedi. — Ordinariamente nella costruzione di questi ponti di secondaria importanza, è necessario di raggiungere il minimo dispendio, e quindi delle diverse conformazioni che si possono usare, convien ricorrere a quelle che permettono la massima economia, che d'ordinario poi sono anche le più semplici.

La larghezza di questi ponti varia da metri 4,50 a 6. Per larghezze minori di metri 4,50 non è possibile lo scambio di due veicoli, e quindi non è che eccezionalmente, e nel caso della più stretta economia, che si può discendere fino a metri 3, purchè però la portata non superi i metri 6.

α) **Ponti con più di due travi longitudinali.** — Quando l'altezza libera è sufficiente, il più conveniente tipo è formato da parecchie travi longitudinali che corrono da una testata all'altra, e sopra alle quali si dispone direttamente il suolo. La distanza da asse ed asse, alla quale si possono collocare le travi, è compresa fra metri 0,50 e 1,00, a seconda che si possono fare più o meno alte e quindi più o meno robuste.

Il suolo senza massicciata si può fare con un semplice strato di grossi tavoloni, **Tav. 2** (Fig. 1, 2, 3, 4), o con un doppio strato di tavoloni più sottili, la qual'ultima disposizione ha per iscopo di diminuire le spese di manutenzione.

Volendo il suolo con la massicciata, questa può essere od una

inghiaiata, od una bétonata disposte sopra un tavolato di legname, di ghisa, o di ferro nei vari modi che furono indicati ai §§ **109** a **119**.

β) **Ponti con due sole travi principali.** — Se l'*altezza libera* è poca, e la portata delle travi superiore ai 6 metri, allora adottando i tipi sopraindicati, l'*altezza della costruzione* diventa notevole, e da metri 0,50 può giungere fino ad 1 metro, per cui potrebbe non essere più compresa entro l'altezza libera computando anche il franco. Allora bisogna ricorrere all'altro tipo costituito da due sole travi principali, che si pongono in corrispondenza alle fronti del ponte, mentre il suolo viene sostenuto da travi trasversali che si attaccano alla parte inferiore delle principali riducendo così al minimo l'*altezza della costruzione*. Il suolo può essere conformato nei vari modi indicati precedentemente.

Nelle **Fig. 248, 249, 250** è rappresentato un ponticello con due sole travi principali composte, col gambo a traliccio, e col palco formato di sole membrature metalliche, costituito cioè di travi trasversali in forma di I composto su cui sono disposte dei ferri WAUTHERIN, con riempimento di ghiaia.

Si ha anche un esempio nel ponte rappresentato dalla **Tav. 5** (Fig. 3 a 12), nel quale il tavolato è con voltine in mattoni cavi, a seconda del tipo francese.

117. Controventi (Franc. *Contrevent*, Ted. *Quersteifen*, *Windstreben*). — In ogni caso è opportuno collegare fra loro le varie travi, ma specialmente quando l'altezza di esse è superiore a metri 0,30, quando cioè si tratta di travi composte. Il collegamento si può ottenere o con ferri trasversali chiodati alle tavolette inferiori delle travi normalmente alla loro direzione, **Fig. 253**, o con croci di Sant'Andrea poste verticalmente fra le travi, **Fig. 255** e **Tav. 2** (Fig. 9, 10, 11), sì gli uni che le altre, alla rispettiva distanza da 1 a 2 metri, o finalmente con croci di Sant'Andrea poste orizzontalmente al di sotto delle travi, adottando l'una o l'altra disposizione, od anche tutte e due combinate, a seconda che le travi sieno più o meno alte e discoste.

Questi collegamenti si formano con ferri piatti o con ferri a ⌐T⌐, con dimensioni relative alla forza che si vuol loro assegnare, ed il loro ufficio principale è quello di dare maggiore

rigidezza alla costruzione, rendendola atta a meglio opporsi ai brandimenti causati dal passaggio dei ruotabili, il cui effetto è sempre sgradito e pernicioso. In pratica si chiamano *controventi*.

Le travi massiccie poi si possono controventare o nel modo dinanzi indicato, oppure mediante tubi di ghisa posti trasversalmente fra trave e trave nello stesso allineamento, e con tiranti di ferro che, attraversando tutte le travi ed i detti tubi da una fronte all'altra del ponte, sono inchiavardati esternamente alle due travi frontali, costringendo tubi e travi a serrarsi fortemente gli uni contro le altre, **Tav. 2** (Fig. 3, 4).

Allorchè si impiegano due sole travi, i controventi a croce di Sant'Andrea, disposti in piano orizzontale si attaccano od al disotto delle tavolette inferiori delle travi trasversali, quando esse sieno più elevate di quelle delle travi principali, oppure alle tavolette inferiori delle travi principali, quando le travi trasversali sieno appoggiate direttamente sulle tavolette medesime.

178. Appoggi delle travi. — Le travi si possono collocare in vari modi sulle testate:

1° Semplicemente appoggiandole sopra piastrine di ghisa (cuscinetti) incassate nella muratura, le quali col mezzo di ribordi salienti impediscono gli spostamenti laterali delle travi;

2° Fissandole col mezzo di bolloni da muro sopra un corso di pietra da taglio sia direttamente, sia coll'intermezzo di piastrine di ghisa;

3° Inchiavardando gli estremi di tutte le travi sopra una traversa di legno incassata nelle murature, **Tav. 2** (Fig. 2, 4).

179. Ponti con marciapiedi. — I ponti con marciapiedi separati dalla carreggiata, si usano sempre nell'interno, ed in vicinanza delle città e borgate, ed alcune volte anche lungo le strade che corrono in aperta campagna, quando esse sieno di notevole importanza.

Larghezza. — Si è già indicato al § **121** che il piano dei marciapiedi si tiene sopraelevato su quello della carreggiata da 5 fino a 20 centimetri, e bisogna assegnare tanto agli uni, che all'altra larghezze opportune e tali che permettano nella carreggiata il comodo scambio di due carri carichi, senza ingombrare

gli spazi riserbati ai marciapiedi, mentre sui medesimi i pedoni possano scambiarsi facilmente, senza essere obbligati a discendere nel piano della carreggiata. Onde rispondere a queste non trascurabili condizioni, si tiene d'ordinario la larghezza della carreggiata di metri 5,50 e quella dei marciapiedi di metri 1,00. Però qualora si voglia conseguire la massima economia, e che nel ponte da costruirsi vi sia un passaggio relativamente limitato di ruotabili e pedoni, si riduce la larghezza della carreggiata a metri 4,5 e quella dei marciapiedi a metri 0,90, le quali larghezze si devono prendere come limiti minimi nei ponti da costruirsi nell'interno od in prossimità alle città e borgate.

Se, costretti dalle esigenze economiche, o dalla poca larghezza della strada, si devono assumere larghezze minori dei limiti indicati, riesce incomodo tanto il passaggio dei veicoli che quello dei pedoni, ed allora è più conveniente di sopprimere i marciapiedi e fare un unico piano nel ponte, servente ad uso comune.

Che se si deve costruire il ponte entro o vicino ad una città importante, ed in località di continuo e numeroso passaggio, bisogna aumentare proporzionatamente le indicate larghezze, ed allora quella della carreggiata si può tenere di metri 6, 7, 8, 10, ed anche più, e quella dei marciapiedi metri 1, 1,50, 1,80 fino a metri 2,50 a seconda delle circostanze.

α) **Ponti con più di due travi longitudinali principali.** — Se la portata del ponte è così limitata da permettere l'impiego delle travi massiccie, è allora opportuna la disposizione indicata nei due ponticelli della **Tav. 3**; cioè le travi longitudinali, tutte eguali, si pongono equidistanti fra loro, e si tengono allo stesso livello; oppure si può usare l'altra disposizione rappresentata nelle **Fig. 251, 252**, nelle quali la carreggiata è sostenuta da un certo numero di travi longitudinali più o meno vicine a seconda della qualità del tavolato che devono sopportare, mentre i marciapiedi si appoggiano sopra appositi travicelli longitudinali di legno o di ferro, più leggieri delle travi della carreggiata e posti a differente livello. Un esempio si trova nella **Tav. 4** (Fig. 1, 2, 3, 4).

Il tavolato poi, tanto della carreggiata che dei marciapiedi, può essere in legno, in ghisa, od in ferro, con o senza massicciata, e conformato nei vari modi descritti dal capitolo che tratta del suolo dei ponti carrozzabili.

Circa alla distanza delle travi da asse ad asse, la si tiene fino

a metri 0,80 per i tavoloni in legno, fino a metri 1,20 per le lamiere ondulate, fino a metri 2,00 per le lamiere cilindriche e gobbe e per i ferri WAUTHERIN e ZORES.

Qualora si è costretti di costruire travi composte (ciò che ordinariamente avviene oltre i metri 6 di portata) è conveniente per ragioni di economia di diminuirne il numero quanto più sia possibile. Se l'altezza libera è sufficiente, avendo riguardo anche al franco, allora si può adottare il tipo indicato nelle **Fig. 254, 255**, cioè si mettono soltanto 3 o 4 travi longitudinali, e sopra esse si dispongono delle travi trasversali che sopportano l'uno o l'altro dei tanti tavolati già noti. I marciapiedi si sopraelevano sul piano della carreggiata mediante due travicelli longitudinali in legno o metallici posti sulle travi trasversali.

Le travi principali sono equidistanti da asse ed asse e così disposte che le due frontali corrispondono all'asse dei marciapiedi, la quale disposizione ha per iscopo di caricarle tutte pressochè egualmente, e quindi di poterle costruire tutte di eguali dimensioni senza troppo spreco di materiale. Se le due estreme sono collocate alle fronti del ponte esse sono molto meno caricate delle intermedie, e quindi costruendole tutte di eguali dimensioni (da calcolarsi rispetto alle travi più cimentate), si ha molto spreco di materiale, a menochè non si voglia costruirle di differenti dimensioni, proporzionate ai carichi che le cimentano, ciò che complicherebbe la costruzione, contrariamente ai precetti della buona pratica, i quali suggeriscono di renderla semplice quanto più è possibile.

β) **Ponti con due travi principali.** — Quando l'altezza libera è molto scarsa, e la portata delle travi supera i metri 6, volendo ridurre al minimo l'altezza della costruzione per lasciare un franco conveniente, senza essere obbligati di innalzare il piano camminabile del ponte molto al di sopra di quello stradale, ciò che porterebbe delle rampe d'accesso lunghe, incomode e costose, bisogna adottare due sole travi principali, inferiormente alle quali si colloca il suolo, sostenuto da travi trasversali col relativo tavolato. Se l'altezza delle travi principali è tale da superare di poco quella della costruzione, ciò che succede di frequente, allora è più economico, e nel tempo stesso più elegante, di mettere i marciapiedi esternamente a queste travi, collocandole in corrispondenza dei cigli della carreggiata allo scopo di ridurre la

lunghezza delle travi trasversali, la quale risulterebbe notevole qualora le travi principali si collocassero alle fronti del ponte, comprendendo entro alle stesse tanto la carreggiata che i marciapiedi; disposizione la quale a parità di tutte le altre condizioni risulterebbe meno economica della precedente. I marciapiedi si sorreggono: o con mensole, come si è usato nel ponte rappresentato nelle **Tav. 4** (Fig. 8, 9) e **Tav. 5** (Fig. 1), ed in quello illustrato dalla **Tav. 6**, con le relative varianti del tavolato nella **Tav. 7**: o con travicelli longitudinali secondari posti alle fronti del ponte come mostrano le **Fig. 256** e **257**.

Il tavolato è sopportato o soltanto da travi trasversali, **Fig. 256**, oppure da correntini di legname, o metallici, posti sopra alle medesime, **Fig. 257**, od anche frapposti alle travi trasversali per diminuire l'altezza della costruzione, nei modi indicati dalle **Fig. 257** e **259**, dalla **Tav. 5** (Fig. 1, 2), e dalle **Tav. 6** e **7**.

Se l'altezza delle travi principali è molto maggiore di quella della costruzione, allora esse si devono porre alle fronti del ponte, ed i marciapiedi internamente. In questo caso poi è necessario di diminuire l'altezza della costruzione il più possibile, affinchè le travi principali si innalzino sul piano dei marciapiedi per lo meno metri 0,90, quanto cioè abbisogna per formare parapetto, e quindi il tavolato si fa sopportare da correntini frapposti alle travi trasversali. Si vede un esempio nella **Fig. 259**.

Riguardo alla distanza a cui devono essere poste le travi trasversali si distingue:

1° *Il tavolato posto direttamente sopra le travi stesse*, nel qual caso questa distanza si deve proporzionare alla struttura o resistenza del tavolato medesimo, e sarà non maggiore di metri 0,80 da asse ad asse per tavoloni di legname, non maggiore di metri 1,20 per le lamiere ondulate, e non maggiore di metri 1,60 per i ferri Zores e Wautherin.

2° *Il tavolato posto sopra correntini*, ed allora sono questi che devono essere spaziati entro i limiti indicati in (1°) per le travi trasversali, mentre invece è opportuno di diminuire il numero di quest'ultime, che si pongono distanti fra loro da metri 1,50 fino a metri 3.

Siccome la resistenza delle travi è inversamente proporzionale alla loro lunghezza, è evidente che mano a mano che cresce la larghezza della carreggiata, tanto più le travi trasversali de-

vono farsi robuste, e quindi nei ponti con larghe carreggiate (maggiori di metri 6,00) si deve diminuire il più possibile il numero delle travi trasversali nei riguardi dell'economia, ciò che si ottiene disponendo dei correntini sopra alle medesime.

Circa al modo di controventare ed appoggiare le travi, valgono le stesse norme indicate pei ponti senza marciapiedi, e si aggiunge soltanto che i controventi possono essere anche conformati come lo rappresenta la Fig. 254.

1. Calcoli di stabilità.

I calcoli di stabilità si sviluppano per le sole *travi principali*. I carichi di cui si deve tener conto sono il *permanente* o *peso morto*, che in qualunque tipo di ponte è il peso proprio della costruzione; e l'*accidentale* o *peso mobile* dipendente nei ponti per strada carrozzabile dal passaggio dei ruotabili e dei pedoni.

Anche per le travi principali si deve fare distinzione fra l'appoggio diretto del tavolato sulle medesime, e quello ottenuto mediante travi trasversali con o senza interposti correntini.

180. Appoggio diretto del tavolato. — In questo caso le travi principali sono in numero maggiore di due, e la loro distanza dipende dal genere di membrature costituenti il tavolato, vale a dire giunge al massimo a metri 2,00. Il *carico permanente* che è uniformemente distribuito, dà per una sezione di ascissa x un momento inflettente $M_p = \frac{p\,x}{2}(l - x)$; e per la sezione mediana $M_p = {}^1/_8\, p\, l^2$, dove l rappresenta la lunghezza libera della trave, e p si calcola colla

$$p = p_0\,\delta + p_t \qquad (232)$$

nella quale p_0 indica il peso di suolo per metro quadrato e p_t il peso delle travi principali per metro corrente, mentre δ rappresenta la distanza fra le travi principali.

In quanto al *carico accidentale*, esso opera nel modo il più sfavorevole quando nel piano del ponte si trova il maggior numero possibile di carri, tanto nel senso della larghezza, che in quello della lunghezza, posti gli uni accanto agli altri in file regolari

ed in modo che una fila di ruote giaccia immediatamente sopra una trave, per esempio **M**, **Fig. 260**, e quando dietro ai medesimi si muove una folla di persone, **Fig. 261**. Vedesi che sulla trave considerata agisce, oltrechè la pressione P delle ruote che vi insistono immediatamente sopra, anche parte della pressione delle altre ruote che stanno sui due intervalli di lunghezza δ adiacenti alla trave che si considera ed in modo tanto più sfavorevole quanto più è $\delta > \Delta$. Il valore totale della pressione P_0 che agisce sulla trave principale per ogni punto di appoggio di una ruota è dato dalla tabella **XLIV**.

Siccome nei ponti di piccola portata, la lunghezza delle travi giunge fino a circa 10 metri, vedesi, esaminando le **Fig. 181** a **185**, che tutto al più possono trovarsi tre ruote sulla trave, frammezzo alle quali starebbe l'attiraglio di un carro, il quale occuperebbe molto spazio nel centro, producendo pressioni relativamente molto piccole, per cui è facile scorgere che è più sfavorevole considerare due sole ruote poste nella parte centrale della trave, e quindi riguardo alla determinazione del momento inflettente valgono le stesse considerazioni fatte pei correntini, § **153** — α), e cioè per $D < 0{,}586\,l$ è $M_p = P_0 \frac{(2l - D)^2}{8l}$ e per $D > 0{,}586\,l$ è $M_p = {}^1/_4\, P_0\, l$.

Tabella XLIV.

Distanza delle travi (δ) *in metri, pressione* (P_0) *in tonnellate*

Distanza delle travi $\delta =$	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
Carri leggieri $P_0 =$	1,88	2,10	2,25	2,36	2,63	2,83	3,00	3,27	3,50	3,69	3,85	4,00
» pesanti $P_0 =$	3,00	3,60	4,00	4,29	4,69	5,17	5,55	5,86	6,25	6,69	7,07	7,40
» pesantiss. $P_0 =$	5,00	5,30	5,75	6,07	6,63	7,33	7,90	8,36	8,77	9,30	9,78	10, 2

Essendo k_0 il carico per unità quadrata dovuto alla folla, è $k = k_0\,\delta$ quello riferito all'unità corrente, e detto λ_0 il tratto di trave occupato dalla folla, il momento inflettente da questa prodotto nella sezione di ascissa x è $M_k = A_k\, x = \frac{k\,\lambda_0^2}{2l}\, x$ dove

il valore della reazione dell'appoggio di sinistra A_k è da calcolarsi colla tabella XIX, Fig. 1, cioè

$$A_k = \frac{k\,\lambda_o^2}{2\,l} \qquad (233)$$

mentre il valore di λ_o è dato dalla relazione

$$\lambda_o = \frac{l}{2} + \frac{D}{4} - \frac{D_o}{2} \qquad (234)$$

Il momento inflettente totale è dunque $_{mas}M = M_p + M_P + M_k$, cioè per $D < 0{,}586\,l$, e per la sezione di ascissa x, il cui valore è

$$x = \frac{l}{2} + \frac{D}{4} \qquad (235)$$

$$_{mas}M = \frac{p\,x}{2}(l - x) + P_o\,\frac{(2\,l - D)^2}{8\,l} + \frac{k\,\lambda_o^2}{2\,l}\,x \qquad (236)$$

e per $D > 0{,}586\,l$, cioè per la sezione mediana $\left(x = \frac{l}{2}\right)$

$$\left.\begin{aligned} _{mas}M &= \frac{1}{8}\,p\,l^2 + \frac{1}{4}\,P_o\,l + A_k\,\frac{l}{2} - \frac{k\,\lambda_o}{2}(l - \lambda_o) = \\ &= \frac{1}{8}\,p\,l^2 + \frac{1}{4}\,P_o\,l + \frac{k\,\lambda_o^2}{4} \end{aligned}\right\} \qquad (236a)$$

nelle quali il valore di P_o si determina colla tabella XLIV.

Esempio.

Nella **Fig. 253** *il tavolato è di lamiere sospese aventi la freccia* $f = 1/10$ *della corda, con coperta di lastricato sopra letto di béton della grossezza media* $a_1 =$ *metri* 0,20. *La distanza fra le travi principali è* $\delta =$ *metri* 1,25, *si assuma la loro portata* $l =$ *metri* 7,00, *e si supponga il passaggio di pesanti carri per cui è* $D =$ *metri* 3,50, $D_o =$ *metri* 7,5.

Essendo $D < 0{,}586\,l$, cioè $3{,}5 < 4{,}1$, si deve determinare il momento inflettente colla (236). Si formi il valore di p usando la (232).

La (157) dà il peso delle lamiere $p_1 = 31 + 0{,}0056 \times 3000 \times 1{,}25 = 52$ Kg.

» (158) » della coperta $p_{11} = \left(0{,}2 + \frac{1}{3}\,0{,}125\right) 2000 = 482$ »

Peso del tavolato per m□ $p_o = 534$ Kg.

Assumendo la trave colle dimensioni segnate nella **Fig. 262** è $p_t = 81{,}12$ e quindi $p = 534 \times 1{,}25 + 81{,}12 = 748{,}62$ chilogrammi. Nella tabella XLIV

non si trova il valore $\delta = 1{,}25$, ma si può con sufficiente approssimazione riferirsi al valore prossimo 1,2 per il quale si ha $P_0 = 4000$ chilogrammi, (volendo operare con maggiore approssimazione si può dedurre il valore di P_0 col metodo delle parti proporzionali). Prendendo il carico per metro quadrato prodotto dalla folla $k_0 = 400$ chilogrammi, quello riferito all'unità di lunghezza è $k = 400 \times 1{,}25 = 500$, e dalle (234) (235) si ottiene rispettivamente $\lambda_0 = \frac{7{,}0}{2} + \frac{3{,}5}{4} - \frac{7{,}5}{2} = 0{,}625$, $x = \frac{7{,}0}{2} + \frac{3{,}5}{4} =$ metri 4,375, e sostituendo i trovati valori nella (236) si ha

$$_{mas}M = \frac{748{,}62 \times 4{,}375}{2}(7{,}0 - 4{,}375) + 4000\frac{(2 \times 7{,}0 - 3{,}5)^2}{8 \times 7{,}0} + \\ + \frac{500 \times 0{,}625^2}{2 \times 7{,}0} 4{,}375 = 12909{,}56 \text{ Kgm.}$$

Riferendosi al millimetro è

$$_{mas}M = 12909560 \quad , \quad d = 325 \quad , \quad I = 665480000$$

e quindi sostituendo nella (172a) si ricava il massimo sforzo che cimenta la trave di

$$12909560 \frac{325}{665480000} = 6{,}3 \text{ Kg. per mm}\square.$$

181. Appoggio del tavolato sopra travi secondarie. — Sia che il tavolato insista direttamente sopra travi trasversali, oppure che esso si trovi sopra correntini, conviene distinguere il caso di più travi principali, e quello di due sole travi principali.

α) **Travi principali in numero maggiore di due.** — Generalmente in questo caso il tavolato è posto direttamente sopra travi trasversali, la cui distanza dipende dal genere di membrature del medesimo, e quindi non supera i metri 2. In ogni modo la pressione prodotta dai carichi viene trasmessa alle travi principali mediante le travi trasversali, le quali non sono uniformemente caricate nel passaggio dei carri. Si dovrebbe quindi, a rigore, calcolare le varie pressioni trasmesse dalle travi trasversali alle principali ed in base ad esse istituire i calcoli di stabilità, però in pratica si suppone per semplicità che il sistema di carichi produca direttamente la sua azione come se il tavolato fosse posto direttamente sulle travi principali, e quindi si istituisce il calcolo di stabilità come al § **180** per cui servono ancora le formule (233) (234) 235) (236) (236a). Solo è da avvertire che il valore di p contenuto in queste formule si deve computare me-

diante la

$$p = p_0 \delta + p_t \qquad (237)$$

dove p_0 indica il *peso del tavolato e delle travi secondarie* (correntini, travi trasversali) ragguagliato all'unità superficiale. Il valore di p_0, compreso tavolato, correntini, travi trasversali nell'ipotesi che vi sia inghiaiata, si può valutare mediamente, senza distinzione fra le membrature del tavolato, colla formula

$$p_0 = 468 + 0{,}017\ P + (1{,}9 + 0{,}0012\ P)\ \delta \qquad (238)$$

dove P rappresenta la pressione di una ruota in chilogrammi, e δ la distanza fra le travi principali in metri.

β) **Due sole travi principali.** — Anche con questa disposizione sono le travi trasversali quelle che trasmettono le pressioni alle travi principali, però si accetta la stessa ipotesi pratica del caso precedente, cioè si trascura di tener conto dell'influenza delle travi trasversali, ammettendo che il carico accidentale operi direttamente sulle travi principali.

Il *carico permanente* produce ancora in una sezione di ascissa x il momento inflettente $M_p = \frac{p x}{2}(l - x)$, e nella sezione mediana $M_p = {}^1/_8\ p l^2$ dove p si valuta colla

$$p = p_0 \frac{c}{2} + p_t + p_m \lambda \qquad (239)$$

nella quale p_0 si calcola colla (238), e c indica la larghezza della carreggiata, p_m il peso dei marciapiedi per unità quadrata compreso mensole, tavolato e correntini, e λ la loro larghezza. Il valore di p_m per metro quadrato si può calcolare mediamente:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Per tavoloni di legname} \ldots . & p_m = 130 \text{ Kg.} \\ \text{» lamiera rigata} \ldots . & p_m = 150 \text{ »} \\ \text{» bétonato sopra tavolato metallico} & p_m = 330 \text{ »} \\ \text{» per lastre di pietra} \ldots . & p_m = 360 \text{ »} \end{array}\right\} \quad (240)$$

Nei ponti senza marciapiedi si deve porre nella (239) $\lambda = 0$.

La posizione più sfavorevole del *carico accidentale* si verifica allorchè sul piano del ponte si trova il maggior numero di carri

posti gli uni accanto agli altri in file regolari, seguiti da una folla di pedoni, ed in modo che queste file sieno accostate il più possibile ad una delle travi principali, per la quale si istituiscono i calcoli di stabilità, **Fig. 263** e **261.** Allora la pressione P_0 che si deve ritenere esercitarsi sulla trave principale considerata, per esempio quella di sinistra, in corrispondenza ad ogni fila trasversale di ruote, è data dalla relazione:

$$P_0 = \frac{P_1(\delta - a_1) + P_2(\delta - a_2) + \cdots + P_n(\delta - a_n)}{\delta} \qquad (241)$$

dove δ indica la distanza fra le travi principali, P_1, $P_2 \ldots P_n$ la pressione delle ruote successive di una fila trasversale, a_1, $a_2 \ldots a_n$ le rispettive distanze dei punti d'applicazione di queste ruote dall'estremo di sinistra. Il momento inflettente è dato ancora (come per i correntini) per $D < 0{,}586\,l$ da $M_P = P_0 \frac{(2l - D)^2}{8l}$ e per $D > 0{,}586\,l$ da $M_P = {}^1/_4\, P_0\, l$.

Chiamando c la larghezza della carreggiata, il carico per unità lineare, dovuto alla *folla seguente i carri*, è $k = {}^1/_2\, k_0 c$ che dà un momento inflettente $M_k = A_k x = \frac{k\lambda_0^2}{2l} x$ essendo $A_k = \frac{k\lambda_0^2}{2l}$, tabella XIX, Fig. 1.

Il carico per unità corrente, dovuto *alla folla occupante i marciapiedi*, è $k_1 = k_0 \lambda$, essendo λ la larghezza dei marciapiedi, e questo carico, essendo uniformemente distribuito su tutta la lunghezza della trave, produce per una sezione di ascissa x, il momento inflettente $M_{k_1} = \frac{k_1 x}{2}(l - x)$, e per la sezione mediana il momento inflettente $M_{k_1} = {}^1/_8\, k_1 l^2$.

Il totale momento inflettente è dunque $_{mas}M = M_p + M_P + M_k + M_{k_1}$, cioè per $D < 0{,}586\,l$, e per la sezione x

$$_{mas}M = \frac{px}{2}(l - x) + P_0 \frac{(2l - D)^2}{8l} + \frac{k\lambda_0^2}{2l} x + \frac{k_1 x}{2}(l - x) \qquad (242)$$

per $D > 0{,}586\,l$ e per la sezione mediana

$$_{mas}M = \frac{1}{8} p l^2 + \frac{1}{4} P_0 l + \frac{k\lambda_0^2}{4} + \frac{1}{8} k_1 l^2 \qquad (242a)$$

nelle quali formule A_k, λ_0, x, p, P_0 sono da calcolarsi rispettivamente colle (233) (234) (235) (239) (241).

Per ponti senza marciapiedi bisogna porre nelle (242) (242*a*) $k_1 = 0$.

Per ponti senza marciapiedi, oppure con marciapiedi posti esternamente alle travi principali, il valore di P_0 è dato in tonnellate dalla tabella XLV corrispondente ad alcune larghezze c della carreggiata.

Tabella XLV.

Larghezze della carreggiata	$c = 4$ m.	$c = 5$ m.	$c = 6$ m.	$c = 7$ m.	$c = 8$ m.
Carri leggieri . . . $P_0 =$	3,00	3,60	4,50	5,14	5,62
» pesanti . . . $P_0 =$	4,27	6,48	7,38	9,12	10,23
» pesantissimi . $P_0 =$	6,87	9,52	10,26	11,98	13,23

Il valore di $_{mas}M$ si può anche desumere dalle seguenti formule di approssimazione

$$_{mas}M = \frac{1}{8} q l^2 \qquad (243)$$

dove per q si devono prendere rispettivamente i seguenti valori, *per ponti con inghiaiata:*

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Per carri leggieri} & q = 270\,c + 0{,}34\,P_0 + 345\,\lambda \\ \text{» pesanti} & q = 270\,c + 0{,}30\,P_0 + 345\,\lambda \\ \text{» pesantissimi} & q = 270\,c + 0{,}27\,P_0 + 345\,\lambda \end{array}\right\} \qquad (244)$$

e *per ponti senza inghiaiata:*

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Per carri leggieri} & q = 80\,c + 0{,}34\,P_0 + 135\,\lambda \\ \text{» pesanti} & q = 80\,c + 0{,}30\,P_0 + 135\,\lambda \\ \text{» pesantissimi} & q = 80\,c + 0{,}27\,P_0 + 135\,\lambda \end{array}\right\} \qquad (244a)$$

nelle quali devesi porre $\lambda = 0$ per ponti senza marciapiedi.

Colla (172) o (172*a*) si completano i calcoli di stabilità.

Esempio.

Nel ponticello rappresentato dalla **Tav. 4** (Fig. 8 e 9) *e* **Tav. 5** (Fig. 1 e 2), *la larghezza della carreggiata è* $c =$ *metri* 3,92, *la distanza dei correntini* $\delta_0 =$ *metri* 0,68, *la lunghezza delle travi principali* $l =$ *metri* 2, $2 \times 4 =$ *metri* 8,8, *e la larghezza dei marciapiedi* $\lambda =$ *metri* 0,8. *Si supponga il passaggio di carri pesanti per cui è* $D =$ *metri* 3,5 *e* $D_0 =$ *metri* 7,5.

Essendo $D < 0{,}586\, l$, cioè $3{,}50 < 5{,}16$, il momento inflettente si deve calcolare colla (242).

Si formi il valore di p_0. Colla (238) si trova

$$p_0 = 468 + 0{,}017 \times 3000 + (1{,}9 + 0{,}0012 \times 3000)\, 3{,}92 = 540{,}56 \text{ Kg.}$$

La trave principale colle dimensioni segnate nella **Fig. 264** ha un peso proprio $p_t = 147{,}42$ chilogrammi, ed essendo il tavolato dei marciapiedi formato con lamiera rigata, la (240) dà $p_m = 150$ chilogrammi, e quindi colla (239) si trova

$$p = 540{,}56\, \frac{3{,}92}{2} + 147{,}42 + 150 \times 0{,}8 = 1326{,}91 \text{ Kg.}$$

Il valore di P_0 si desume della tabella **XLV** prendendo quello relativo al valore $c =$ metri 4, cioè $P_0 = 4270$ chilogrammi. Dalla (234) si ha $\lambda_0 = \frac{8{,}8}{2} + \frac{3{,}5}{4} - \frac{7{,}5}{2} =$ metri 1,52, la (235) dà $x = \frac{8{,}8}{2} + \frac{3{,}5}{4} =$ metri 5,275; e prendendo $k_0 = 400$ chilogrammi per metro quadrato risulta $k = 400 \times {}^1/_2\, 3{,}92 = 784$, e finalmente si trova $k_1 = 400 \times 0{,}8 = 320$ chilogrammi.

Sostituendo i trovati valori nella (242) si ha

$$_{mas}\mathrm{M} = \frac{1326{,}91 \times 5{,}275}{2}\,(8{,}8 - 5{,}275) + 4270\,\frac{(2 \times 8{,}8 - 3{,}5)^2}{8 \times 8{,}8} +$$

$$+ \frac{784 \times 1{,}52^2}{2 \times 8{,}8}\, 5{,}275 + \frac{320 \times 5{,}275}{2}\,(8{,}8 - 5{,}275) = 27878 \text{ Kgm.}$$

Ricorrendo alle formule d'approssimazione (244) e (243) è $q = 270 \times 3{,}92 + 0{,}34 \times 4270 + 345 \times 0{,}8 = 2786{,}2$ e quindi $_{mas}\mathrm{M} = {}^1/_8\, 2786{,}2 \times 8{,}8^2 = 26970{,}42$.

Riferendosi al millimetro e tenendo conto del valore rigoroso di $_{mas}$M, è

$$_{mas}\mathrm{M} = 27878000 \quad , \quad d = 390 \quad , \quad \mathrm{I} = 1841150833$$

e quindi colla (172*a*) si trova lo sforzo massimo che cimenta la trave, di

$$27878000\, \frac{390}{1841150833} = 5{,}90 \text{ Kg. per mm}\square.$$

182. Travi principali col gambo a traliccio. — In queste travi le nervature resistono al momento inflettente ed il traliccio allo sforzo di taglio. Il *momento inflettente* si determina nei modi già indicati per le travi col gambo pieno. Per lo *sforzo di taglio* si procede nel modo seguente. Circa al *carico permanente* p lo si valuta ancora colla formula (239) nella quale il peso proprio p_t della trave si assume approssimativamente $p_t = 0{,}0052\, q\, l$ dovendo prendersi per q i seguenti valori:

Per ponti con massicciata e

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Per carri leggeri} & . & q = 270\ c + 0{,}40\ P_0 + 345\ \lambda \\ \text{» pesanti} & . & q = 270\ c + 0{,}35\ P_0 + 345\ \lambda \\ \text{» pesantissimi} & & q = 270\ c + 0{,}32\ P_0 + 345\ \lambda \end{array}\right\} \quad (245)$$

Per ponti senza massicciata e

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Per carri leggeri} & . & q = 80\ c + 0{,}40\ P_0 + 135\ \lambda \\ \text{» pesanti} & . \ . & q = 80\ c + 0{,}35\ P_0 + 135\ \lambda \\ \text{» pesantissimi} & & q = 80\ c + 0{,}32\ P_0 + 135\ \lambda \end{array}\right\} \quad (245a)$$

denotando con c la larghezza della carreggiata e con λ la larghezza dei marciapiedi. Per ponti senza marciapiedi si deve porre $\lambda = 0$.

Lo sforzo di taglio massimo prodotto dal carico permanente è dunque $T_p = {}^1/_2\, p\, l$.

Il *carico accidentale*, opera nel modo più sfavorevole, quando sul ponte si trova il massimo numero di carri posti gli uni accanto agli altri in file regolari in modo da essere accostati il più possibile ad una delle travi principali, e così disposti che una fila trasversale di ruote coincida con un appoggio, Fig. 265, essendo poi i carri seguiti da una folla di persone. La pressione P_0 che opera sulla detta trave principale in corrispondenza ad ogni fila trasversale di ruote è ancora data dalla (241) per ponti con marciapiedi posti internamente alle travi principali, oppure dalla tabella XLV, quando non vi sono marciapiedi, o quando essi sono posti esternamente alle travi principali. Lo sforzo di taglio massimo prodotto dai carri è dunque $T_p = \dfrac{2\,l - D}{l} P_0$.

La *folla che segue i carri* dà un carico per unità corrente

$k = k_0 \frac{c}{2}$ e quindi produce uno sforzo di taglio $T_k = \frac{k \lambda_0^2}{2l}$, essendo

$$\lambda_0 = l - \frac{D_0 + D}{2} \qquad (246)$$

La *folla che occupa i marciapiedi* produce un carico per unità di lunghezza $k_1 = k_0 \lambda$ e quindi il relativo sforzo di taglio è $T_{k_1} = {}^1/_2 k_1 l$.

Il totale sforzo di taglio è dunque $_{mas}T = T_p + T_P + T_k + T_{k_1}$ cioè

$$_{mas}T = \frac{1}{2} p l + \frac{2l - D}{l} P_0 + \frac{k \lambda_0^2}{2l} + \frac{1}{2} k_1 l \qquad (247)$$

nella quale si deve porre $k_1 = 0$ per ponti senza marciapiedi.

Per valutare $_{mas}T$ possono servire anche le seguenti formule d'approssimazione:

Per ponti con inghiaiata

$$_{mas}T = \frac{1}{2} (290\, c + k + 345\, \lambda)\, l \qquad (248)$$

Per ponti senza inghiaiata

$$_{mas}T = \frac{1}{2} (100\, c + k + 135\, \lambda)\, l \qquad (248a)$$

nelle quali si deve porre $\lambda = 0$ per ponti senza marciapiedi, mentre il valore di k varia colla portata delle travi principali e si deve prendere rispettivamente nella seguente tabella:

Tabella XLVI.

Portata delle travi principali $l =$	6 metri	7 metri	8 metri	9 metri	10 metri
Carri leggieri . . k	0, 51 P_0	0, 46 P_0	0, 42 P_0	0, 38 P_0	0, 35 P_0
» pesanti . . . k	0, 47 »	0, 43 »	0, 40 »	0, 36 »	0, 34 »
» pesantissimi . $k =$	0,444 »	0,408 »	0,375 »	0,345 »	0, 32 »

Esempio.

Nel ponticello senza marciapiedi rappresentato nelle **Fig. 248, 249** *e* **250** *è* $c = \delta =$ *metri* 4, $l =$ *metri* 7,57, $\lambda = 0$, *e supponendo il passaggio di carri pesanti è* P = 3000 *chilogrammi*, D = *metri* 3,5, $D_0 =$ *metri* 7,50. Ricorrendo alla tabella **XLV** si trova $P_0 = 4270$. Si formi il valore di p. Dalla (238) si ha $p_0 = 468 + 0{,}017 \times 3000 + (1{,}9 + 0{,}0012 \times 3000)\, 4 = 541$ e la (245) dà $q = 270 \times 4 + 0{,}35 \times 4270 = 2574{,}5$, per cui è $p_t = 0{,}0052 \times 2574{,}5 \times 7{,}57 = 101{,}3$ e quindi mediante la (239) si trova $p = 541 \times \frac{4{,}0}{2} + 101{,}3 = 1183{,}3$.

NERVATURE. — Essendo $D < 0{,}586\, l$, cioè $3{,}5 < 4{,}43$, il momento inflettente si deve calcolare colla (242), ponendo però $h_1 = 0$ perchè non vi sono marciapiedi. Assumendo il carico dovuto alla folla che segue i carri $k_0 = 400$ chilogrammi per metro quadrato è $k = 400 \frac{4{,}0}{2} = 800$, mentre risulta dalla (234)

$$\lambda_0 = \frac{7{,}57}{2} + \frac{3{,}5}{4} - \frac{7{,}5}{2} = 0{,}91$$

e dalla (235)

$$x = \frac{7{,}57}{2} + \frac{3{,}5}{4} = 5{,}54.$$

Sostituendo nella (242) si ottiene

$$_{mas}M = 1183{,}3 \frac{5{,}54}{2} (7{,}57 - 5{,}54) + 4270 \frac{(2 \times 7{,}57 - 3{,}5)^2}{8 \times 7{,}57} + \frac{800 \times 0{,}91^2}{2 \times 7{,}57} 5{,}54 =$$

$$= 16506{,}25 \text{ Kgm.}$$

Colle formule d'approssimazione si avrebbe dalla (244) $q = 270 \times 4{,}0 + 0{,}3 \times 4270 = 2361$ e quindi dalla (243)

$$_{mas}M = \frac{1}{8} 2361 \times 7{,}57^2 = 16905 \text{ Kgm.}$$

cioè un valore assai prossimo al rigoroso.

Riferendosi al millimetro, **Fig. 266**, è $_{mas}M = 16506250$, $d = \frac{720}{2} = 360$

$$I = \frac{1}{12} \left\{ 160 \times 720^3 - 20 \times 700^3 - 120 \times 680^3 - 20 \times 560^3 \right\} = 967960000$$

e quindi servendosi della (172*a*) si trova che il massimo sforzo che cimenta le nervature è

$$16506250 \frac{360}{967960000} = 6{,}14 \text{ Kg. per mm}\square.$$

Traliccio. — Dalla (246) si ha $\lambda_0 = 7{,}57 - \frac{7{,}5 + 3{,}5}{2} = 2{,}07$ e quindi la (247) dà

$$_{mas}T = \frac{1}{2}\,1183{,}3 \times 7{,}57 + \frac{2 \times 7{,}57 - 3{,}5}{7{,}57}\,4270 + \frac{800 \times 2{,}07}{2 \times 7{,}57} = 11262{,}59 \text{ Kg.}$$

Ricorrendo alle formule di approssimazione, bisogna dedurre il valore di k dalla tabella **XLVI**, e non essendovi compresa la portata di metri 7,57, si prende il valore medio fra quelli relativi alle portate di 7 ed 8 metri, cioè $k = \frac{0{,}43 + 0{,}40}{2} P_0 = 0{,}415\, P_0$. (Volendo procedere più esattamente bisogna calcolare k col metodo delle parti proporzionali). Sostituendo nella (248) si trova

$$_{mas}T = \frac{1}{2}\,(290 \times 4 + 0{,}415 \times 4270)\,7{,}57 = 11097 \text{ Kg.}$$

valore molto prossimo al rigoroso.

Aste compresse. — Il numero delle aste sezionate da un piano verticale, **Fig. 267**, è $n = 2$, la loro lunghezza è $\sqrt{520^2 + 620^2} = 810$ millimetri e quindi la lunghezza teorica è $L = \frac{810}{2} = 405$ e $\cos\beta = \frac{620}{810} = 0{,}765$. Si prenda la loro riquadratura $\omega = 120 \times 16 = 1920$ e quindi risulta il rapporto $r = \frac{L}{g} = \frac{405}{16} = 29$, il quale non si trova nella tabella **XII**, però si può prendere il coefficiente di riduzione $m = 2$ relativo al rapporto 24 e quindi lo *sforzo pratico* in questo caso è $\frac{R_c}{m} = \frac{7}{2} = 3{,}5$ chilogrammi per millimetro quadrato. Dalla (204*a*) si ha lo sforzo reale che cimenta l'asta maggiormente compressa di

$$\frac{11262{,}59}{2 \times 0{,}765 \times 1920} = 3{,}83 \text{ Kg. per mm}\square$$

e quindi ammissibile per essere prossimo allo sforzo pratico sopra trovato.

Aste stirate. — Prendendo la loro riquadratura $\omega = 120 \times 10 = 1200$ dalla (203) si ha lo sforzo reale che cimenta l'asta maggiormente stirata di

$$\frac{11262{,}59}{2 \times 0{,}765 \times 1200} = 6{,}13 \text{ Kg. per mm}\square$$

cioè inferiore allo *sforzo pratico* $R_t = 8$ chilogrammi per millimetro quadrato.

Ponti per ferrovia.

1. Costruzione.

183. Generalità. — Le rotaie distano d'ordinario metri 1,50 da asse ad asse, e tale scartamento si adotta costantemente per

ogni nuova linea che si costruisce (eccetto che non sia una ferrovia economica) non soltanto in Italia, ma nella maggior parte degli Stati d'Europa, onde rendere possibile il servizio cumulativo, e tutto al più lo scartamento può tenersi di metri 1,51, nell'intendimento di facilitare il movimento oscillatorio dei treni in senso orizzontale, detto dai francesi *lacet*, e tale minima differenza non impedisce di conseguire il servizio cumulativo.

Nel caso di più binari, la distanza fra le rotaie interne di due binari adiacenti deve esser tale da permettere il libero scambio di due treni che marciano in senso contrario, mentre lateralmente alle rotaie esterne dei binari estremi deve restare uno spazio che permetta il comodo passaggio dei pedoni contemporaneamente a quello dei convogli. Scorgesi adunque che la *larghezza* del ponte dipende dallo scartamento dei binari, che è fisso, e dalle larghezze degli spazi posti fra i binari e lateralmente ai medesimi, le quali possono variare.

La legge sui lavori pubblici, vigente in Italia, non determina le dimensioni da adottarsi per le opere d'arte d'una ferrovia, lasciando che desse sieno fissate dai singoli capitolati di concessione, per cui le medesime variano alquanto da una linea all'altra. Però il Ministero dei lavori pubblici tende colle nuove concessioni ad unificare tanto le dimensioni della via, quanto quelle del materiale mobile, allo scopo di rendere possibile il servigio cumulativo per tutta l'Italia, attenendosi quindi alla prescrizione della Commissione italiana del 1871, cioè:

Nei ponti, cavalcavia e viadotti ad *un binario* la distanza fra le faccie interne dei parapetti, o delle travi frontali non deve essere minore di metri 4,50.

Nei ponti a *più binari* basta aggiungere alla precedente larghezza, che corrisponde ad un solo binario, almeno metri 3,50 per ogni altro binario. Alcuni costruttori però in vista delle aumentate dimensioni dell'attuale materiale mobile, vorrebbero che la distanza fra asse ed asse di ogni binario fosse al minimo di metri 3,62. Tale distanza poi non deve tenersi in verun caso minore di metri 3,50.

Qualunque sia il tipo del ponte ed il numero dei binari, il *tavolato* può essere di costruzione leggiera o pesante, cioè con o senza ballast, però di solito si adotta la costruzione leggiera in vista dell'economia, §§ **128** a **130**.

Le rotaie si possono fissare direttamente o sopra lungarine o sopra traversine di legname, qualunque sia la disposizione delle travi metalliche che le sorreggono. Siccome il primo sistema viene adoperato quasi di consueto in Francia, lo si chiama *tipo francese*, mentre il secondo è quasi sempre adoperato in Germania, e si dirà perciò *tipo tedesco*.

184. Sovrappassaggi con rotaie. — Allorchè la piattaforma stradale rimane intersecata da piccoli rigagnoli di acqua serventi per l'irrigazione o lo scolo, si possono impiegare semplicemente delle rotaie per sovrappassarli col binario.

Quando la luce libera non sorpassa metri 0,80 la sola rotaia costituente il binario offre sufficiente resistenza per servire da cavalcavia fra i piedritti costruiti in muratura, **Tav. 8** (Fig. 1, 2, 3). Le rotaie del binario in corrispondenza dei vivi dei piedritti riposano su due traverse di legname incassate ed inchiavardate nella muratura, mentre le rotaie sono fissate alle traverse colle medesime piastrine ed arpioni adoperati per fissarle alle traversine dell'armamento stradale. Un panconato posto fra le rotaie, nonchè esternamente alle stesse, e chiodato sulle anzidette traverse, forma il tavolato.

Per portate maggiori, cioè fino a metri 1,4, si adoperano due rotaie sovrapposte e collegate con allacciature di ferro a piccoli intervalli, le quali formano la trave e servono contemporaneamente da rotaia per il binario, **Tav. 8** (Fig. 4, 5, 6). Per appoggiare questo sistema di rotaie sui piedritti, è necessario l'impiego di un speciale cuscinetto, **Tav. 8** (Fig. 6), fissato con chiavarde sopra una traversa di legno, e per meglio assicurarsi dagli spostamenti laterali, la rotaia superiore viene assicurata con arpioni sopra un'altra traversa di legname posta un poco più in alto. Un tavolato di panconi chiodato sopra quest'ultime traverse completa il manufatto.

Un sistema più resistente del precedente, che si può adottare fino a metri 1,8 di portata, è costituito da tre rotaie riunite parallelamente, di cui la centrale fa parte del binario, collegate col mezzo di chiavarde a vite e di opportuni riempimenti in ghisa, **Tav. 8** (Fig. 11, 12), in modo da renderle solidali così da costituire una unica trave. Le rotaie appoggiano in corrispondenza ai piedritti sopra una traversa di legname coll'intermezzo di una piastra di

ferro, e vengono assicurate con arpioni che attraversano anche la piastra. Il tavolato conserva la precedente disposizione.

Per luci più ampie occorre un collegamento di rotaie più solido. Fino a metri 2,65 si impiega la disposizione seguente. Quattro rotaie a due a due sovrapposte, e rese solidali con chiavarde orizzontali che ne collegano i gambi, e con bolloni inversamente inclinati che ne congiungono i piedi, formano una delle travi, che col mezzo di traversine in legno sostengono le rotaie del binario, **Tav. 8** (Fig. 7, 8, 9, 10). Le rotaie inferiori costituenti la trave sono incassate agli estremi in traverse di legname, ed a queste fissate con cunei di legno, mentre le rotaie superiori sono collegate colle dette traverse mediante le solite piastrine ed arpioni dell'armamento. Il tavolato di panconi di legno si chioda al di sopra delle traversine sorreggenti il binario, come mostra il disegno relativo.

185. Ponti con sole travi principali sotto rotaia. — Questa disposizione si adopera allorquando l'altezza libera è piuttosto abbondante, così da non vincolare in verun modo l'altezza della costruzione, la quale risulta molto maggiore in questa che non nelle altre disposizioni che si descriveranno in seguito. In questo caso per ogni rotaia si pone una trave longitudinale, la quale può essere massiccia fino alla portata di metri 3, e per portate maggiori si deve fare composta, preferibilmente col gambo pieno, onde rendere la costruzione più semplice ed economica. Queste travi se sono massiccie si collegano fra loro nella stessa guisa indicata pei ponti di strada ordinaria al § **177**, mentre se sono composte si preferisce l'impiego di traversi metallici collocati alla distanza di metri 1,50 a 2,50 che possono avere il gambo pieno, **Tav. 9** (Fig. 4, 5, 8), oppure il gambo vuoto, **Tav. 9** (Fig. 11, 13). Alcune volte si impiegano anche dei controventi orizzontali a Croce di Sant'Andrea collocati sopra delle tavolette superiori dei detti traversi, **Tav. 9** (Fig. 1, 3, 5).

α) **Tipo francese.** — Con questa disposizione la distanza fra le travi deve farsi eguale alla distanza fra le rotaie, **Tav. 9** (Fig. 9, 10, 11, 12), mentre i marciapiedi si sostengono con mensole, che ordinariamente si collegano fra loro alle fronti del ponte con delle leggiere travi longitudinali. Il tavolato fra le rotaie si può fare con panconi di legname posti longitudinal-

mente sopra dei traversi, ma preferibilmente si adotta l'impiego di lamiera di ferro semplice o rigata, o robustata con ferri a ⊓ o T, Tav. 9 (Fig. 11), od anche di lamiera a volta, mentre il tavolato dei marciapiedi ordinariamente è di legname. Tanto l'uno che l'altro poi possono costruirsi nei vari modi indicati ai §§ **128** a **130**.

β) **Tipo tedesco.** — In questo tipo la distanza fra le travi principali non è vincolata allo scartamento delle rotaie, anzi si usa tenerla alcun poco maggiore, e cioè si può arrivare fino a metri 2, allo scopo di rendere più elastico l'appoggio delle rotaie, e quindi di diminuire gli scuotimenti del materiale mobile. Le traversine poi possono venire accostate le une alle altre, Tav. 9 (Fig. 1, 2, 3), ed allora servono anche da tavolato, oppure si pongono alla distanza da 80 a 90 centimetri da asse ad asse, ed allora il tavolato di leggieri panconi viene ad esse sovrapposto longitudinalmente. In ogni caso si prolungano oltre alle travi principali quanto occorre per sostenere i marciapiedi, ed agli estremi si sorreggono o con travi frontali di legname, Tav. 9 (Fig. 2, 5) od anche con leggiere travi metalliche.

186. Ponti con travi gemelle (Franc. *Poutre jumelle*, Ted. *Zwillingsträger*). — Allorchè la portata supera i metri 3 e l'altezza libera è assai limitata, allo scopo di ridurre l'altezza della costruzione al minimo possibile, si fa sopportare ogni rotaia da un paio di travi longitudinali fra loro distanti dai 25 ai 45 centimetri, e rese solidali col mezzo di opportuni congiungimenti trasversali, sui quali si collocano le rotaie o direttamente, Tav. 10 (Fig. 5, 11), Tav. 12 (Fig. 4, 5), o coll'interposizione di lungarine di legname, Tav. 10 (Fig. 12), Tav. 11 (Fig. 2), Tav. 12 (Fig. 1). In questo modo le rotaie restano comprese entro l'altezza delle travi portanti, con diminuzione notevole nell'altezza della costruzione. Questo tipo generalmente è opportuno fino alla portata di metri 6.

Le travi gemelle possono essere massiccie o composte, collegate soltanto dagli accennati congiungimenti, od anche rinforzate inferiormente con una tavoletta o lamiera comune ad entrambe, come si vede dall'ispezione dei vari tipi rappresentati nelle Tav. 10, 11, 12. Le travi portanti poi sono collegate col mezzo di traversi metallici, che possono essere o travi massiccie, o travi composte

col gambo reticolato e dai quali si fa sopportare il tavolato compreso fra i binari, che però potrebbe anche essere portato dalle travi principali direttamente, o col mezzo di cantonali o di ferri d'attacco, come vedesi nelle tavole accennate. Il tavolato dei marciapiedi, ossia degli spazi laterali, è sostenuto da mensole che d'ordinario sono collegate da leggiere travi frontali, ed alcune volte da travi frontali e traversi disposti come negli spazi centrali.

181. Ponti con travi trasversali. — Quando l'altezza libera è assai limitata, e la portata superiore ai metri 5,0, allora d'ordinario si fa sopportare le rotaie da travi trasversali sia direttamente, sia coll'interposizione di travi di legname. Tanto in un caso che nell'altro si possono mettere le travi principali in corrispondenza alle fronti del ponte, ed allora la loro distanza è di metri 4,50 per un solo binario, e per un numero maggiore si deve aumentarla da metri 3,5 a 3,62 per ogni altro binario ; ed i marciapiedi posti fra le travi principali vengono sostenuti dalle travi trasversali. Si può invece collocare i marciapiedi esternamente alle travi principali nel qual caso si sorreggono o con mensole o con leggiere travi frontali collegate alle principali con traversi metallici aventi la forma e la disposizione delle travi trasversali, le quali possono essere o travi massiccie, o travi composte sia col gambo pieno che col gambo reticolato, come mostrano le **Tav. 12, 13, 14, 15.**

α) **Appoggio diretto delle rotaie sulle travi trasversali, Tav. 12** (Fig. 6, 7, 8, 9), **Tav. 13** (Fig. 1, 2, 3. 4). — In questo caso la distanza fra le travi trasversali dipende dalla resistenza delle rotaie e quindi ordinariamente varia fra 80 e 90 centimetri. Le rotaie si fissano alle travi trasversali mediante piastrine di ghisa le quali hanno per iscopo di impedire gli spostamenti laterali e possono essere conformate ed assicurate nei vari modi indicati al **§ 127.**

β) **Appoggio delle rotaie sopra travi di legname.**

1) **Tipo francese.** — In questo tipo la distanza fra le travi trasversali è affatto libera, e può arrivare anche fino ai metri 3. Per piccole distanze e cioè fino a metri 1,5 si possono adoperare semplici lungarine di legname poste sopra le travi trasversali, **Tav. 15** (Fig. 3, 4, 5, 6, 7) e fissate sopra le medesime nei modi indicati al § **125**. Per distanze maggiori e di solito oltre metri

1,20, le lungarine di legname vengono robustate con rinforzi metallici, Tav. 13 (Fig. 5, 7), nei vari modi indicati al § **126**. Molti costruttori però preferiscono l'impiego di lungarine metalliche, sopra le quali si dispongono le lungarine di legname, Tav. 13 (Fig. 8, 9).

2) **Tipo tedesco.** — Adottando questo tipo vi è la necessità di impiegare le lungarine metalliche le quali portano direttamente le traversine. La distanza fra le travi trasversali poi è in qualche modo vincolata, inquantochè essa deve essere un multiplo esatto della distanza fra asse ed asse delle traversine, la quale, come si è detto, varia da 80 a 90 centimetri. È necessario di ottemperare a tale condizione onde far sì che due traversine adiacenti ad una trave trasversale sieno disposte simmetricamente ed abbiano la stessa distanza delle traversine intermedie.

Queste traversine invece che di legname possono essere *metalliche*, Tav. 14 (Fig. 1, 2, 3, 4, 5), cioè dei ferri a ⊤ od a ⌐ appoggiati alle travi trasversali nel modo indicato dalla Fig. 268, la quale mostra che l'appoggio avviene per le tavolette di questi ferri, mentre i loro gambi che pendono all'ingiù vengono intagliati in corrispondenza alle nervature delle travi trasversali. Le rotaie poi si assicurano alle dette traversine mediante apposite piastrine con ribordi inchiavardate alle lungarine. Tale sistema ha lo scopo di ridurre al minimo possibile l'altezza della costruzione, però viene raramente adoperato, e soltanto in casi di assoluta necessità.

Ordinariamente invece si adoperano traversine di legname che vengono fissate alle travi metalliche nei modi indicati al § **124**, Tav. 14 (Fig. 7, 8, 9), Tav. 15 (Fig. 1, 2).

Circa alla struttura ed alla disposizione del tavolato valgono le norme indicate ai §§ **128** a **130**.

188. Ponti con più di due travi principali per ogni binario, Tav. 16 (Fig. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7). — Tale conformazione è possibile soltanto allora che l'altezza libera sia abbondante, inquantochè è necessario di porre il binario sopra le travi principali, e precisamente lo si colloca sopra traversine di legname. Questo tipo presenta il vantaggio che si risparmiano le travi trasversali e le lungarine metalliche, però esige un maggior numero di travi principali, ordinariamente tre per binario, le quali

d'altronde devono essere controventate con traversi metallici, per cui è dubbio se esso sia per riescire più economico. Certo però che esso offre un reale vantaggio e cioè una grande semplicità di costruzione, e la possibilità di spaziare le traversine liberamente, senza che la loro distanza sia condizionata a quella delle travi trasversali; e d'altronde per sostenere il tavolato dei marciapiedi bastano le stesse traversine prolungate oltre il vivo delle travi frontali.

2. Calcoli di stabilità.

La ricerca delle condizioni di stabilità basta eseguirla per le sole travi principali, avendosi già sviluppata quella relativa alle varie membrature dell'impalcato.

189. Ponti senza travi trasversali. — In questi ponti l'azione del carico accidentale si esercita direttamente sulle travi principali. Tanto i piccoli sovrappassaggi a rotaie, che i ponti con travi gemelle, quanto quelli con le travi principali sotto rotaia si trovano in questa condizione, purchè non vi sieno traversine, ed allora per la ricerca del momento inflettente prodotto dal *carico accidentale* valgono gli stessi procedimenti e le stesse formule indicati per le lungarine, § **154**, semprechè però non si sorpassino i metri 10 di portata.

Nel caso poi che vi sieno traversine, il *carico accidentale*, a parità di tutte le altre condizioni agisce meno sfavorevolmente, per cui per semplicità di processo si può supporre l'azione diretta del carico, con che si opera in vantaggio della stabilità senza notevole spreco; d'altronde le norme generali indicate per le lungarine con soprapposte traversine, possano applicarsi anche in questo caso.

Riguardo alla valutazione degli sforzi dipendenti dal *carico accidentale* non si rendono dunque necessari speciali procedimenti.

Per il *carico permanente* invece bisogna vedere come si procede a valutarlo nei vari tipi. Esso od è uniformemente distribuito, od è così disposto, che si può considerarlo come tale, e quindi chiamando p quello riferito all'unità corrente, esso produce un momento inflettente massimo

$$_{mas}M_p = \frac{1}{8} p l^2 \qquad (249)$$

in cui il valore di p è da determinarsi colle seguenti norme:

α) **Travi con rotaie per sovrappassaggi.**

1) **Senza traversine.** — In questo caso si deve tener conto del solo peso delle rotaie, inquantochè il tavolato è sopportato dai piedritti. Il peso delle rotaie ordinariamente varia fra 30 e 40 chilogrammi per metro corrente ed in media si può prendere di 35 chilogrammi; chiamando n il numero delle rotaie componenti la travé, ed in cui si comprende anche quella del binario, il valore di p per metro corrente è

$$p = 35\,n \qquad (250)$$

2) **Con traversine.** — Con questa disposizione bisogna considerare anche il peso del tavolato, e quindi mediamente si può prendere il valore di p per metro corrente

$$p = 90 + 35\,n \qquad (250a)$$

L'azione del carico permanente però è così piccola in questi manufatti, che la si può trascurare senza tema di valutabile errore.

β) **Travi gemelle e travi sotto rotaia.** — Tanto se non vi sono traversine come se queste si impiegano, il peso dell'impalcato (tavolato, rotaia, lungarine di legname o traversine, traversi di collegamento, mensole, controventi) si può prendere mediamente in ragione di 250 chilogrammi per metro corrente di trave, ed il peso di questa si può valutare in media $p_t = 30\,l$, essendo l la portata in metri, per cui approssimativamente è

$$p = 250 + 30\,l \qquad (251)$$

Esempio.

Sovrappassaggio rappresentato nella **Tav. 8** (Fig. 7, 8, 9, 10). *Il numero delle rotaie componenti una trave, compresa quella del binario, è* $n = 5$, *la portata* $l =$ *metri* 2,62 *e si supponga il tipo di macchina* ENGHERT, *tabella* **XLI**, *con* 3 *assi aventi eguale scartamento* D = *metri* 1,35, *ed eguali pressioni* P = 11800.

La (250a) dà $p = 90 + 35 \times 5 = 265$ chilogrammi e quindi dalla (249) si ottiene ${}_{mas}M_p = {}^1/_8\ 265 \times 2{,}62^2 = 227{,}37$.

Il momento inflettente prodotto dal carico accidentale, essendo $l > 1{,}71\ D < 2{,}33\ D$, cioè $2{,}62 > 2{,}40 < 3{,}01$, è dato dalla (193a) e quindi ${}_{mas}M_p =$

$= 11800 \frac{(2 \times 2,62 - 1,35)^2}{8 \times 2.62} = 8519,6$ per un binario, e per una sola trave

$_{mas}M_p = \frac{8519,6}{2} = 4259,8$, per cui il totale momento inflettente è

$$_{mas}M = 227,37 + 4259,8 = 4487,17$$

Il momento di inerzia totale I si trova determinando col processo grafico indicato al § **40** il momento di inerzia I_0 di una sola rotaia riferito alla base, e moltiplicandolo per 4, che è il numero totale delle rotaie componenti la trave. Nella **Fig. 269** la rotaia è disegnata in scala di $^1/_3$ del naturale e quindi avendo assunto $b = 12$ millimetri, $b_I = 50$ millimetri, $b_{II} = 45$ millimetri, ed essendo risultato $\Sigma i = 13,2$ millimetri è

$$I_0 = 12 \times 50 \times 45 \times 13,2 \times 3^4 = 28\ 68400$$

per cui risulta $I = 4 I_0 = 4 \times 28868400 = 115473600$.

Riferendosi al millimetro è $_{mas}M = 4487170$ e $d = 123$ per cui colla (172*a*) si ottiene il massimo sforzo che cimenta la trave di

$$4487170 \frac{123}{115473600} = 4,75 \text{ Kg. per mm}\square.$$

190. Ponti con travi trasversali. — In questi ponti il peso dell'impalcato nonchè il carico accidentale agiscono sulle travi principali nei punti ove ad esse si attaccano le travi trasversali. In quanto al peso dell'impalcato, siccome di solito le travi trasversali sono equidistanti, esso agisce con eguale intensità sopra ognuno di detti punti d'attacco, per cui si può considerarlo come se fosse uniformemente distribuito. Chiamando dunque p il totale *peso permanente* per metro corrente di trave principale si può assumere mediamente:

Per ponti senza lungarine metalliche $p = 250 + 22\,l$ (252)

» *con* » » $p = 300 + 22\,l$ (252*a*)

Ed il relativo momento inflettente è

Per una sezione di ascissa $M_p = \frac{p\,x}{2}(l - x)$ (253)

Per la sezione mediana $_{mas}M_p = \frac{1}{8} p\,l^2$ (253*a*)

Riguardo al *carico accidentale*, mano a mano che il medesimo

cangia di posizione, variano anche le pressioni che le travi trasversali trasmettono alle principali. In generale la posizione più sfavorevole del sopraccarico avviene quando una delle più pesanti ruote della locomotiva si trova sulla trave trasversale che corrisponde alla metà della trave principale, o sopra una delle due travi trasversali che sono più vicine a detta metà; e mediante le formule (47) (49) si determina il relativo momento inflettente massimo che corrisponde alla sezione d'attacco dell'anzidetta trave trasversale.

Si può fare però più speditamente la determinazione approssimata del momento inflettente colle seguenti regole.

Considerato che questo tipo di ponte si impiega per portate maggiori di metri 4, per cui sopra una trave principale possono agire almeno 3 ruote, si assume il tipo di locomotiva con 3 assi di scartamento D e pressioni P eguali. Se alla metà della trave corrisponde una trave trasversale (cioè per un numero dispari delle medesime) allora è

$$_{mas}M_P = \frac{P}{4}(3\,l - 4\,D) \qquad (254)$$

Se invece alla metà della trave principale non si trova una trave trasversale (cioè per un numero pari delle medesime, comprese anche le estreme) allora è

Per 4 *travi trasversali* $_{mas}M_P = \frac{P}{3}(2\,l - 3\,D)$ (254*a*)

» 6 » $_{mas}M_P = \frac{P}{25}(18\,l - 25\,D)$ (254*b*)

» 8 » $_{mas}M_P = \frac{P}{49}(3\,l - 49\,D)$ (254*c*)

Esempio 1°

Ponte senza lungarine metalliche, rappresentato nella **Tav. 15** (Fig. 3, 4, 5, 6, 7), *nel quale è* $l = 1{,}6 \times 6 =$ *metri* 9,6, *considerando il tipo di locomotiva-tender* Enghert, *tabella* **XLI.**

Per la (252) è $p = 250 + 22 \times 9{,}6 = 461{,}2$ per cui la (253*a*) dà $_{mas}M_p = \frac{1}{3} 461{,}2 \times 9{,}6^2 = 5313$. Valendosi dei dati della **Fig. 270**, e mediante la (47) si trova

$$A = \frac{\{(9{,}6 - 3{,}45) + (9{,}6 - 4{,}8) + (9{,}6 - 6{,}15)\}\,11760 + (9{,}6 - 7{,}4)\,7000}{9{,}6} = 19244$$

per cui la (49) dà $_{mas}M_p = 19244 \times 4,8 - 11760 \times 1,35 = 76495$ per un binario, e quindi per una trave

$$_{mas}M_p = \frac{76495}{2} = 38247,5 \text{ Kgm.}$$

Valendosi della regola pratica e prendendo D = metri 1,30 e P = 6500 chilogrammi per ruota, si deve ricorrere alla (254) essendovi una trave trasversale nel mezzo di quella principale, e quindi si ottiene

$$_{mas}M_p = \frac{6500}{4}(3 \times 9,6 - 4 \times 1,30) = 38350 \text{ Kgm.}$$

valore che coincide quasi col precedente.

Il momento inflettente totale è $_{mas}M = 5313 + 38247 = 43560$.

Riferendosi al millimetro è $_{mas}M = 43560000$, $d = 450$, $I = 3969540448$ e sostituendo nella (172*a*) si trova il massimo sforzo che cimenta la trave principale di

$$43560000 \frac{450}{3969540448} = 4,94 \text{ Kg. per mm}\square.$$

Esempio 2°

Ponte con lungarine metalliche rappresentato nella **Tav. 13** (Fig. 8, 9), *nel quale è* $l = 5 \times 1,5 =$ *metri* 7,50, *considerando il tipo di locomotiva-tender* ENGHERT *come nell'esempio precedente.*

Dalla (252*a*) si ha $p = 300 + 22 \times 7,5 = 465$ chilogrammi e per essere $x =$ metri 3 la (253) da $_{mas}M_p = \frac{465 \times 3,0}{2}(7,5 - 3,0) = 3138,75$ Kgm.

Mediante i dati della **Fig. 271** e colla (47) si trova

$$A = \frac{\{(7,5-1,75)+(7,5-3,0)+(7,5-4,35)\}11760+(7,5-5,6)7000}{7,5} = 22000 \text{ Kg.}$$

per cui dalla (49) risulta $_{mas}M_p = 22000 \times 3,0 - 11760 \times 1,35 = 51124$ per binario e quindi per una trave principale

$$_{mas}M_p = \frac{51124}{2} = 25562 \text{ Kgm.}$$

Ricorrendo alla regola pratica e prendendo D = metri 1,30 e P = 6500 chilogrammi per ruota, si deve usare la (254*b*) essendovi 6 travi trasversali. e quindi

$$_{mas}M_p = \frac{6500}{25}(18 \times 7,5 - 25 \times 1,30) = 26650 \text{ Kgm.}$$

valore assai prossimo a quello sopra trovato.

Il totale momento inflettente è dunque $_{mas}M = 3138,75 + 25562 = 28700,75$. Riferendosi al millimetro è $_{mas}M = 28700750$, $d = 357$, $I = 1608320000$ e quindi mediante la (172a) si trova lo sforzo massimo che cimenta la trave di

$$28700750 \frac{357}{1608320000} = 6,40 \text{ Kg. per mm}\square.$$

Stabilità delle testate.

191. Verifica delle condizioni di stabilità. — In pratica si usa considerare le testate dei ponti di piccola portata quali muri di sostegno del terrapieno stradale, omettendo di tener conto dell'influenza della travata metallica.

Di solito le testate propriamente dette sono raccordate colle sponde mediante muri di risvolto e d'ala, i quali oltrechè servire per il raccordamento fanno anche l'ufficio di contrafforti concorrendo alla stabilità della testata. Però in pratica non si tien conto di essi, nella ricerca delle condizioni di resistenza della testata, e così si opera in favore della stabilità, e si riduce il problema alla massima semplicità.

Siccome il terrapieno preme uniformemente su tutta la lunghezza della testata, la quale perciò si fa a sezione costante, così nei calcoli basta considerare l'unità di lunghezza della medesima.

Verso acqua la testata può essere profilata verticalmente, od anche a scarpa, con inclinazione non maggiore di $^1/_{12}$, e verso terra il relativo profilo od è verticale, od è conformato a riseghe, od a scaglioni, ed assai di rado è terminato a scarpa. Comunque sia, data l'*altezza h* della testata, la quale va computata dal piano di fondazione al ciglio superiore della medesima, si stabiliscono tutte le altre dimensioni trasversali, lasciando indeterminata la grossezza in sommità, la quale si valuta col seguente procedimento.

Si comincia dal calcolare la spinta del terrapieno sull'unità di lunghezza della testata, considerandolo come sopraccaricato dal carico accidentale in ragione di 350 a 450 chilogrammi per metro quadrato nei ponti per strada ordinaria, e di 2000 chilogrammi per metro quadrato nei ponti per ferrovia, servendosi all'uopo delle formule (129) (130), § **86**. Poscia si determina la posizione del centro di pressione mediante la relativa distanza $AM = \Delta$ dal piede, Fig. **272**, che è data dalle (135) (136) del § **89**. Volendo eseguire queste ricerche graficamente si seguono le norme ed i processi indicati ai §§ **92** a **95**.

Nota l'intensità della spinta e la posizione del centro di pressione **M**, si passa a determinare la grossezza g in sommità della testata.

La spinta S può produrre scorrimento della testata sulla sua base **A D**, **Fig. 272**, o rovesciamento per rotazione intorno al piede esterno **D**. Sarebbe facile dimostrare che assegnata alla testata una grossezza g tale che valga ad impedire il moto rotatorio essa vale, ed anche in maggior grado, ad impedire il moto di traslazione. Perciò basta considerare soltanto la *resistenza al moto rotatorio*.

La testata è soggetta all'azione della risultante F della spinta S e del peso proprio P, la quale risultante passa per un punto **N** della base, che in generale non coincide col centro della medesima. La componente verticale della F, che rappresenta la pressione normale alla base, non si distribuisce quindi uniformemente sulla medesima, § **23**, ma lo spigolo **D** più vicino al centro di pressione **N** è cimentato con una pressione unitaria massima, cosicchè le murature potrebbero ivi schiacciarsi facilmente. Bisogna quindi determinare anche la *resistenza delle murature allo schiacciamento*. Ecco come si procede a fare questa doppia ricerca.

Si supponga che la testata abbia il profilo trapezio, e si chiami h l'altezza della medesima, m il rapporto di inclinazione della scarpa verso terra, ed n quello della scarpa verso acqua. Scomposte la S e la F nelle rispettive componenti orizzontali e verticali, cioè O, V ed O_1, V_1 vedesi che la V_1 rappresenta la pressione normale alla base **A D**. Applicando la teoria sviluppata al § **23** risulta che ogni qualvolta la distanza **N D** $= d$ è minore di $^1/_3$ **A D** la pressione V_1 non si diffonde che sopra una parte soltanto della base **A D** $= a$, ed allora la pressione unitaria in corrispondenza allo spigolo più cimentato **D**, è maggiore del doppio della pressione uniforme, di quella cioè che avrebbe luogo se la pressione V_1 fosse applicata al punto di mezzo di **A D**. E siccome la pratica prescrive che la pressione unitaria massima non debba essere maggiore del doppio della uniforme, ne consegue che questa condizione è data da $d \geq {}^1/_3\, a$. Essendo poi sufficiente di adottare il limite $d = {}^1/_3\, a$, così è mediante questa condizione che si determina la grossezza g della testata in sommità.

Supponendo tolto il terreno al di sotto della testata, e sosti-

tuita ad esso la relativa reazione (— F) di valore eguale e direttamente contraria alla risultante F, essendo O, V, (— O_r), (— V_r) e P le forze che sollecitano la testata, e dovendo essere, per l'equilibrio della medesima, eguale allo zero la somma algebrica dei momenti di queste forze riferiti all'asse di rotazione **D**, chiamando o, v; o_r, d e p i bracci di leva rispettivi si ha (ricordando che il momento O, o_r è nullo perchè la forza (— O_r) passa per l'asse di rotazione) :

$$-Oo - V_r d + Vv + Pp = 0 \qquad (255)$$

da cui

$$d = \frac{Vv + Pp - Oo}{V_r} \qquad (255a)$$

Per condizione è $d = {}^1/_3\,\mathbf{AD} = {}^1/_3\left\{g + (m+n)\,h\right\}$ mentre si trova

$$o = \frac{\Delta}{\sqrt{1+m^2}},\quad v = g + (m+n)\,h - \frac{\Delta m}{\sqrt{1+m^2}},\quad O = \frac{S}{\sqrt{1+m^2}},$$

$$V = \frac{m\,S}{\sqrt{1+m^2}},\quad V_r = P + V$$ ed indicando con π il peso unitario della muratura è anche $P = \frac{\pi h}{2}\left\{2g + (m+n)\,h\right\}$;

$$Pp = \pi\left\{\frac{n^2 h^3}{6} + g h\left(\frac{g}{2} + n h\right) + \frac{m h^2}{2}\left(\frac{m h}{3} + g + n h\right)\right\}.$$

Sostituendo questi valori nella (255), ordinandola rispetto all'incognita g, e risolvendola si trova

$$g = -\left\{\frac{2m\,S}{\pi h\sqrt{1+m^2}} + \frac{3hn}{2}\right\} + \sqrt{\left\{\left(\frac{2m\,S}{\pi h\sqrt{1+m^2}} + \frac{3hn}{2}\right)^2 - \frac{4m\,S(m+n)}{\pi\sqrt{1+m^2}} - mnh^4 + \frac{6\Delta S}{\pi h}\right\}} \qquad (256)$$

Per testate col profilo verso terra verticale, cioè per $m = 0$

$$g = -\frac{3hn}{2} + \sqrt{\left(\frac{3hn}{2}\right)^2 + \frac{6\Delta S}{\pi h}} \qquad (256a)$$

Per testate a sezione rettangolare, cioè per $m = 0$ ed $n = 0$.

$$g = \sqrt{\frac{6 \Delta S}{\pi h}} \qquad (256b)$$

La grossezza g ricavata colle (256) (256*a*) (256*b*) oltrechè soddisfare per la resistenza allo schiacciamento, basta anche per la resistenza al rovesciamento, inquantochè è facile vedere che si avrebbe l'equilibrio teorico fra i momenti delle forze che tendono a produrre quest'ultimo e quelli delle forze che vi si oppongono, alloraquando la risultante F del sistema passasse per l'asse di rotazione **D**, mentre quanto più essa si avvicina al punto di mezzo della base, e tanto maggiore è la stabilità rispetto al rovesciamento.

Osservazione. — Nel caso che la testata sia profilata verso terra a scaglioni, **Fig. 273**, la terra che soprastà ai medesimi concorre col suo peso alla stabilità della testata, e quindi si considera **A B** come superficie sulla quale si esercita la spinta del terrapieno. Se la muratura è di *materiale laterizio* allora siccome mediamente il peso della terra eguaglia quello dei laterizi, si può considerare **A B C D** come tutto un masso resistente dello stesso peso delle murature, e quindi il valore di g dato dalle formule (256*a*) (256*b*) indica il lato **B C**. Se invece la muratura è di *pietrame*, cioè molto più pesante delle terre, allora bisognerebbe calcolare separatamente il momento del peso della terra, e quello del peso della muratura, e la somma dei due parziali momenti sarebbe il valore di Pp da introdurre nella (273). In pratica però si può con sufficiente approssimazione supporre ancora **A B C D** tutto un masso resistente dello stesso peso, adottando come peso unitario, un peso qualche poco minore di quello delle murature, e servendosi ancora delle formule precedenti.

Di solito però in pratica in luogo di fare la ricerca diretta della grossezza g, si scelgono a priori tutte le dimensioni della testata, e *si verifica se vi sia stabilità*, lasciando indeterminata la quantità d, che si ricava colla (255*a*) e calcolando la pressione unitaria sullo spigolo il più premuto (quello più vicino al centro di pressione) valendosi delle formule (22*a*) (23*a*) nelle quali devesi porre $a = g + (m + n) h$, $\omega = a \times 1 = a = g + (m + n) h$, nonchè

$$F = V_r = P + V = \frac{\pi h}{2} \left\{ 2 g + (m + n) h \right\} + \frac{m S}{\sqrt{1 + m^2}} \qquad (257)$$

Fatta la sostituzione si ottiene

Per $d > {}^1/_3\, a$ la massima pressione unitaria eguale a

$$\frac{2\,V_1}{g + (m+n)\,h}\left(2 - \frac{3\,d}{g + (m+n)\,h}\right) \qquad (258a)$$

Per $d = {}^1/_3\, a$ la massima pressione unitaria eguale a

$$\frac{2\,V_1}{g + (m+n)\,h} \qquad (258b)$$

Per $d < {}^1/_3\, a$ la massima pressione unitaria eguale a

$$\frac{2\,V_1}{3\,d} \qquad (258c)$$

nelle quali per V_1 si deve porre il valore dato dalla (257). In ogni caso deve essere per la stabilità la massima pressione unitaria minore, o tutto al più eguale allo sforzo pratico R_c.

Esempio.

Ponte rappresentato nella **Tav. 6**, *nel quale la testata d'altezza* $h =$ *metri* 4,54 *ha profilo rettangolare con riseghe, e quindi è* $m = 0$, $n = 0$. *La muratura è di laterizio con rivestimento in pietra da taglio, e, tenendo conto anche dell'azione vantaggiosa delle terre sopra lo scaglione, si supponga che il masso resistente* **ABCD**, **Fig. 274**, *abbia un peso medio unitario* $\pi = 1700$ *chilogrammi per metro corrente. Si assuma il sopraccarico accidentale* $k = 400$ *chilogrammi per metro quadrato, e si suppongano terre ordinarie per le quali il coefficiente di attrito è* $f = 1$.

La spinta unitaria del terrapieno si ricava dalla (130) ponendo $p = \pi = 1700$, $h =$ metri 4,54, $h_1 = \frac{k}{\pi} = \frac{400}{1700} = 0{,}235$, $f = 1$, e si ha

$$S = \frac{1}{2}\,1700 \times 4{,}54\,(4{,}54 + 2 \times 0{,}235)\left\{\sqrt{2} - 1\right\}^2 = 3287{,}46$$

ed il valore di Δ si trova colla (136), cioè $\Delta = \frac{4{,}54}{3} \cdot \frac{4{,}54 + 3 \times 0{,}235}{4{,}54 + 2 \times 0{,}235} = 1{,}58$.

Volendo che la testata abbia grossezza tale per cui il centro di pressione cada ad ${}^1/_3$ della base, si dovrebbe ricorrere alla (256*b*) che dà $g = \sqrt{\left(\frac{6 \times 3287 \times 1{,}58}{1700 \times 4{,}54}\right)} =$ metri 1,98. La testata invece ha una minore grossezza, cioè $CB = g =$ metri 1,60, e si deve verificare se vi è stabilità.

Perciò si determina la posizione del centro di pressione mediante la distanza d data dalla (255*a*), nella quale è da porsi $O = S$, $o = \Delta$, $V = 0$, $V_1 = P$

per cui risulta $d = \frac{Pp - S\Delta}{P}$. Ora è $P = 1{,}6 \times 4{,}54 \times 1700 = 12348{,}8$; $p = \frac{1{,}6}{2} = 0{,}8$ e quindi sostituendo si trova

$$d = \frac{12348{,}8 \times 0{,}8 - 3287 \times 1{,}58}{12348{,}8} = 0.39$$

ed essendo $d < {}^1/_3\, a$, cioè $0{,}39 < {}^1/_3\, 1{,}6 < 0{,}53$, la pressione unitaria massima (che ha luogo sullo spigolo **D** il più vicino al centro di pressione) si determina colla (258*c*), cioè

$$\textit{Pressione unitaria massima} = \frac{2 \times 12348{,}8}{3 \times 0{,}39} = 21110 \text{ Kg. per m}\square$$

e siccome lo sforzo pratico R_c non deve essere maggiore di ${}^1/_{20}$ dello sforzo di rottura K_c, che per il laterizio è $K_c = 600000$ chilogrammi per metro quadrato, tabella **XIV**, in questo caso, essendo $\frac{R_c}{K_c} = \frac{21110}{600000} = 0{,}035$, cioè circa ${}^1/_{30}$, concludesi che la testata si trova in buone condizioni di stabilità.

B) Ponti ad una sola travata rettilinea di grande portata.

1. Costruzione.

192. Generalità. — Alcuni costruttori fanno distinzione fra ponti di *media* e di *grande* portata, comprendendo nella prima categoria quelli con portate comprese fra 10 e 50 metri, e nella seconda quelli che hanno portate maggiori di metri 50. Siccome però tale distinzione non ha importanza pratica, la si tralascia, e si comprende in un solo gruppo i ponti la cui portata supera i 10 metri e per i quali le travi principali si fanno a traliccio e di uniforme resistenza.

193. Ponti pedonali. — La larghezza di questi ponti non si deve tenere minore di metri 2,50, che anzi a seconda della loro importanza deve venire aumentata e può arrivare fino a metri 4. Stante la loro piccola larghezza non conviene adoperare più di due travi principali, ed il tavolato, che si può costruire nei tanti modi già indicati ai §§ **104** a **107**, viene appog-

giato o direttamente, o col mezzo di correntini, sopra travi trasversali che si attaccano alle principali. Tanto per i correntini che per le travi trasversali bastano in generale le travi massiccie in forma di T] I. Il tavolato può essere posto alla parte inferiore delle travi principali od a metà circa della loro altezza, o superiormente alle medesime, la qual ultima posizione può riescire meno economica inquantochè esige l'impiego dei parapetti.

194. Ponti per strada ordinaria. — Circa alla larghezza di questi ponti valgono le stesse norme indicate per i ponti di piccola portata, §§ **176**, **179**.

Riguardo al numero delle travi principali ordinariamente se ne pongono due soltante in corrispondenza ai cigli della carreggiata. Questa disposizione è necessaria allorchè l'impalcato è posto alla parte inferiore delle travi principali o fra le stesse; essa si usa pure se l'impalcato è posto superiormente alle travi principali ed è soltanto nel caso di un ponte con la carreggiata molto larga che si deve adottare un numero maggiore di travi principali, onde non essere costretti all'impiego di travi trasversali molto lunghe e quindi molto pesanti e poco economiche, Fig. 275.

Questa anzi è la ragione per la quale in ogni caso i marciapiedi si pongono esternamente alle travi principali, e si fanno sopportare da mensole, come si vede nelle Fig. 275, 276, 277.

Si danno però esempi di marciapiedi posti fra le travi principali, cioè sorretti dalle travi trasversali, Fig. 278.

Il tavolato può essere conformato nei vari modi indicati ai §§ **108** fino a **119** e si appoggia o direttamente o col mezzo di correntini alle travi trasversali, le quali sono sostenute dalle travi principali.

195. Ponti per ferrovia. — La larghezza di questi ponti si stabilisce colle stesse norme indicate per i ponti di piccola portata al § **183**.

Circa al numero delle travi principali esso dipende sopratutto dal numero dei binari.

α) **Ponti ad un binario.** — In questo caso si usano due sole travi principali, nè è possibile aumentare il loro numero nei ponti col binario posto inferiormente o fra le stesse. Se le travi principali si possono mettere sotto il binario, allora il loro numero

può essere portato a tre, nell'intento di risparmiare le travi trasversali e di usare soltanto traversine di legno, sulle quali si appoggia il binario ed il tavolato; questa disposizione però è poco economica e quindi non viene usata in pratica.

β) **Ponti a due binari.** — In questi ponti, qualunque sia la posizione altimetrica del binario rispetto alle travi principali, se ne possono impiegare due, tre, ed anche quattro.

Due travi principali, **Tav. 24** (Fig. 12), **Tav. 25** (Fig. 11), a parità di altezza, di carichi e di resistenza sono più economiche di un numero maggiore; però le travi trasversali, riescendo molto lunghe, devono farsi di maggior sezione, e quindi riescono molto pesanti. Due sole travi principali presentano l'inconveniente che quando è caricato un solo binario, stante la differente intensità degli sforzi a cui vanno soggette, esse non si inflettono egualmente, e quindi ne nasce una posizione alquanto obliqua nelle rotaie, la quale origina un contorcimento per traverso nel ponte, così che le varie travi, e specialmente le principali sono cimentate in modo molto più sfavorevole.

Tre travi principali presentano pure l'inconveniente del differente modo di piegarsi per il carico di un solo binario, e d'altronde la trave mediana dovendo portare un peso molto maggiore che non le estreme, allorchè tutti due i binari sono carichi, essa richiede una più solida e particolare conformazione, il che porta una costruzione più complicata e dispendiosa la quale non viene accettata in pratica.

Quattro travi principali portano il vantaggio dell'indipendenza dei due binari, come scorgesi nella **Tav. 24** (Fig. 11), per cui non ha luogo il sopraccennato inconveniente, però rendono la costruzione molto meno economica e quindi poco conveniente. Tale disposizione viene a costituire due ponti ad un binario, affatto indipendenti e posti l'uno vicino all'altro, per cui essa è opportuna allorchè si costruisce originariamente la ferrovia ad un binario e si stabilisce di aggiungerne un secondo dopo un certo tempo, quando cioè il traffico abbia sorpassato un dato limite.

Un numero di travi principali maggiore di quattro, possibile soltanto allora che il palco sia posto superiormente alle stesse, è affatto da evitarsi, prima perchè contrario all'economia, poscia perchè è assai difficile di potere ottenere una tale distribuzione

delle travi, per la quale il carico massimo sia eguale per ciascheduna di esse, cosicchè se si fanno tutte eguali si ha uno spreco di materiale in danno dell'economia, mentre se si fanno di uniforme resistenza, si complica di troppo la costruzione.

Se l'impalcato è posto al di sopra delle travi principali, allora è opportuno di tenerle vicine il più possibile onde diminuire la lunghezza delle travi trasversali ciò che si ottiene:

a) Ponendo le travi principali direttamente sotto le rotaie, nel qual caso i marciapiedi si sostengono con mensole, **Tav. 22** (Fig. 11), **Tav. 24** (Fig. 11, 12), **Tav. 27** (Fig. 12);

b) Tenendole spostate verso l'esterno delle rotaie da metri 0,50 fino a metri 1,0 nel qual caso i marciapiedi si fanno ordinariamente sostenere dalle traversine prolungate oltre il vivo delle travi principali, **Tav. 20** (Fig. 4), **Tav. 21** (Fig. 15), **Tav. 24** (Fig. 5, 6), oppure da mensole, **Tav. 27** (Fig. 14), e nel caso della massima economia si possono sopprimere del tutto i marciapiedi, **Tav. 19** (Fig. 1), **Tav. 23** (Fig. 2, 5).

Quando l'impalcato è posto inferiormente alle travi principali, **Tav. 17** (Fig. 4), **Tav. 21** (Fig. 5, 6), **Tav. 22** (Fig. 5, 8, 10), **Tav. 23** (Fig. 7, 10), **Tav. 26** (Fig. 9, 10), o fra le stesse ad una qualunque altezza, **Tav. 25** (Fig. 4, 11), la distanza netta fra queste due travi non deve essere minore di 4 metri nei ponti ad un binario, e di metri 7,60 nei ponti a due binari, senza bisogno di aggiungere i marciapiedi.

Alcune volte poi si provvede al pubblico transito per i pedoni mediante mensole poste esternamente alle travi principali, come mostra la **Fig. 279**.

196. Ponti col binario in curva. — Le difficoltà del tracciato e le esigenze locali costringono alcune volte di tenere il binario in curva anche sopra i ponti; e siccome nelle curve bisogna tenere la rotaia esterna più alta della interna, onde opporsi agli effetti dannosi della forza centrifuga, così interessa di vedere come si conseguisca tale sopraelevazione.

α) **Sopraelevazione della rotaia esterna.** — In vari modi si dispone la costruzione onde ottenere tale sopraelevazione ed il Winkler ne fa una distinzione così esatta e diligente, che torna opportuno di attenersi alla stessa.

1) Si dispone la costruzione metallica nella stessa guisa come

se non vi dovesse essere la sopraelevazione, e si ottiene la medesima unicamente con le membrature di legname.

a) *Tipo tedesco* (*traversine*). — Per piccole sopraelevazioni o si può approfondire di più la suola della rotaia interna entro le traversine, o si può tenere più profondo il corrispondente intaglio praticato inferiormente alle traversine per l'appoggio delle medesime sulle travi metalliche. Per grandi sopraelevazioni si mette al di sotto della rotaia esterna e su di ogni traversa un cuscinetto di legno **A**, **Fig. 280**, oppure una lungarina, tanto l'uno che l'altra alcun poco incastrati nella traversina e con questa solidamente collegati, od anche si pone fra le traversine e la trave metallica esterna un cuscinetto **B**, **Fig. 281**, la qual'ultima disposizione è da consigliarsi inquantochè offre maggior sicurezza di conservare lo scartamento delle rotaie.

b) *Tipo francese* (*lungarine*). — Il miglior modo è quello di usare lungarine di legname di differente altezza, **Fig. 282** e **Tav. 16** (Fig. 8). Per le piccole sopraelevazioni è anche sufficiente di praticare nelle lungarine stesse degli intagli di differente altezza in corrispondenza all'appoggio sulle travi trasversali.

2) Si dispongono le travi metalliche in piano verticale, ma a differente livello, corrispondentemente alla richiesta sopraelevazione.

a) *Traversine*. — Nell'impiego delle medesime si tengono le travi principali, **Fig. 283**, o le lungarine metalliche, **Fig. 284**, ad un differente livello e nell'ultimo caso le travi trasversali sono disposte del tutto come per binari rettilinei.

b) *Lungarine*. — Nell'impiego delle medesime si tengono le travi trasversali, o soltanto le loro tavolette superiori, inclinate, **Fig. 285**, e le lungarine metalliche, qualora sieno adoperate, si tengono corrispondentemente ad un differente livello.

Egualmente si opera allorchè le rotaie sono direttamente appoggiate sulle travi principali, o sulle trasversali, o sulle lungarine.

3) Si dispone tutto il ponte inclinato, costruendolo del resto in ogni parte, come per un binario rettilineo, **Fig. 286, 287**, soltanto i parapetti si dispongono verticalmente. Questa disposizione è la più semplice, e, per portate molto piccole, staticamente anche la più opportuna, perchè il peso permanente essendo molto piccolo in confronto dell'accidentale, le forze esterne operano quasi nel piano delle travi, ammesso che la velocità del treno

sia tale per cui la forza centrifuga sia distrutta mediante la sopraelevazione. Per i treni merci però, che sono i più pesanti e marciano con piccola velocità, le forze non operano esattamente nel piano delle travi. In ogni modo questa disposizione nelle piccole portate è la migliore, semprechè non dispiaccia la vista delle travi inclinate. Nelle grandi portate si adotta sempre la posizione verticale per le travi principali, inquantochè l'influenza delle forza centrifuga nel cimento delle travi non si distrugge per nessuna posizione delle stesse, mentre la posizione verticale riesce esteticamente migliore.

In quanto concerne alla scelta fra il primo ed il secondo modo: *per le piccole sopraelevazioni*, le quali si possono ottenere mediante differenti intagli del legno, è migliore il 1° modo; e *per le grandi sopraelevazioni*, e specialmente nell'impiego di traversine, è preferibile il 2° modo come il più semplice. Nell'impiego di lungarine di legname è bene di schivare le travi trasversali inclinate.

Nei ponti col binario in curva le travi principali, nonchè l'asse del ponte, si mantengono rettilinei, e quindi quest'ultimo non coincide con l'asse del binario. Dovendosi poi tenere la rotaia esterna sopraelevata sulla interna, i veicoli si inclinano alla verticale e quindi richiedono uno spazio libero per traverso, dalla parte della rotaia interna, maggiore di quello relativo alla posizione normale. In questi ponti dunque si deve tenere la *distanza dei parapetti* e *delle travi principali* maggiori dei limiti indicati per i ponti con binario rettilineo, § **183**.

β) **Distanza dei parapetti.** — Quando il binario è posto alla parte superiore delle travi principali, allora si richiedono i parapetti. Si chiami r il raggio dell'asse del binario, f la freccia della rotaia esterna, f_1 quella della rotaia interna, l la lunghezza del tratto lungo il quale devono porsi i parapetti ed a la distanza ordinariamente tenuta fra la rotaia ed il parapetto nei ponti col binario rettilineo, **Fig. 288.** Essendo il raggio molto grande in confronto delle freccie e dello scartamento delle rotaie, si può ritenere con molta approssimazione $f = f_1 = \frac{l^2}{8r}$. Se si dispongono i parapetti con andamento rettilineo su tutta la loro lunghezza, quello dalla parte della rotaia esterna conserva la distanza ordinaria a dalla medesima in corrispondenza alla mezzaria, e quello

dalla parte della rotaia interna conserva la distanza ordinaria a dalla medesima in corrispondenza agli estremi. Indicando con b la larghezza del binario, ossia lo scartamento delle rotaie, con D la distanza ordinaria dei parapetti (quella cioè relativa ad un ponte con binario rettilineo), con D_o la distanza dei parapetti per un ponte in curva, con d_e d_i rispettivamente le distanze del parapetto esterno ed interno dall'asse del binario in corrispondenza alla mezzaria del ponte è

$$d_e = \frac{D}{2} = a + \frac{b}{2} \quad , \quad d_i = \frac{D}{2} + \frac{l^2}{8r} = a + \frac{b}{2} + \frac{l^2}{8r} \qquad (259)$$

$$D = 2a + b \quad , \quad D_o = d_e + d_i = 2a + b + \frac{l^2}{8r} \qquad (259a)$$

essendo ordinariamente $a =$ metri 1,5, $b =$ metri 1,5, cioè D = metri 4,5. Nel caso di raggi molto piccoli e di parapetti molto lunghi la quantità $\frac{l^2}{8r}$ riesce notevole.

γ) **Distanza delle travi principali.** — In causa della sopraelevazione della rotaia esterna il piano di scorrimento del treno è obbliquo rispetto all'orizzonte, cosicchè il peso accidentale non si scarica egualmente sulle due travi, ma quella interna sarebbe cimentata più che la esterna. Si può però ottenere l'eguale cimento delle due travi, ponendo l'interna più lontana dall'asse del binario che non l'esterna in corrispondenza alla mezzaria del ponte. Onde soddisfare alla condizione che le travi principali, qualunque sia la posizione altimetrica del binario rispetto alle stesse, sieno cimentate egualmente dagli sforzi massimi (nella ipotesi di un carico uniformemente distribuito) chiamando rispettivamente d_e d_i le distanze delle travi esterna ed interna dall'asse del binario, in corrispondenza alla mezzaria, e D_o la distanza fra le due travi, deve essere

$$d_i = \frac{D_o}{2} + \frac{l^2}{96r} \quad , \quad d_e = \frac{D_o}{2} - \frac{l^2}{96r} \qquad (260)$$

da cui

$$d_i - d_e = \frac{l^2}{48r} \qquad (260a)$$

D'altronde se il binario posto fra le travi principali è in curva, quella interna deve avere un aumento di distanza dall'asse del binario, in corrispondenza alla mezzaria, perchè all'estremo essa conservi dalla rispettiva rotaia la distanza ordinaria a, **Fig. 288**, il quale aumento di distanza è ancora, come per i parapetti, $\frac{l^2}{8r}$. Un altro aumento di distanza le si deve dare, poichè i veicoli, stante la loro inclinazione, richiedono un maggior spazio libero: chiamando h l'altezza sopra la rotaia interna dello spigolo della tavoletta superiore della trave, **Fig. 289**, ed s la sopraelevazione della rotaia esterna, quest'ultimo aumento di distanza è dato da $\frac{hs}{b}$. A rigore esso compete alla sola trave interna, verso la quale succede l'inclinazione dei veicoli, ma per una opportuna distribuzione dei carichi, si deve scostare dal binario anche la trave esterna, perchè altrimenti sarebbe più cimentata dell'interna. Essendo dunque D la distanza ordinaria delle travi per un binario rettilineo, si ha per un binario in curva, introducendo la condizione data dalle (260)

$$d_i = \frac{D}{2} + \frac{l^2}{8r} + \frac{hs}{b} \quad , \quad d_e = d_i - \frac{l^2}{48r} \qquad (261)$$

$$D_0 = d_e + d_i = 2d_i - \frac{l^2}{48r} \qquad (261a)$$

nelle quali la sopraelevazione s si può calcolare colla formula

$$s = 0{,}0079\, b \frac{V^2}{r} \qquad (262)$$

dove s, b ed r sono espressi in metri, e V indica la velocità in chilometri per ora dei convogli più celeri che percorrono la linea.

Siccome poi i veicoli non conservano la loro maggior larghezza su tutta la loro altezza, la quale d'altronde non supera un dato limite, così per h non conviene assumere valori maggiori di metri 3,3, cioè si pone $h =$ metri 3,3, ogni qual volta il vero valore di h sia maggiore di questo limite.

Osservazione. — In pratica però si usa calcolare la distanza delle travi come per i parapetti valendosi delle formule (259).

Esempio.

Nel ponte rappresentato dalla **Tav. 22** (Fig. 1 a 7) è $a =$ metri 1,5, $b =$ metri 1,5, e quindi $D =$ metri 4,5, essendo inoltre $l =$ metri 20, $r =$ metri 400, $h =$ metri 2,2 — 0,65 = metri 1,55. Supponendo la velocità massima $V = 50$ chilometri all'ora, dalla (262) si ricava $s = 0{,}0079 \times 1{,}5 \frac{50^2}{400} =$ = metri 0,074 e quindi sostituendo nelle (261) si trova

$$d_i = \frac{4{,}5}{2} + \frac{20^2}{8 \times 400} + \frac{1{,}55 \times 0{,}074}{1{,}5} = \text{m. } 2{,}451 \quad , \quad d_e = 2{,}45 - \frac{20^2}{48 \times 400} = \text{m. } 2{,}43$$

ed il ponte in totalità sarebbe largo $D_0 = d_i + d_e = 2.451 + 2{,}43 =$ metri 4,881. Usando invece le formule pratiche (259) e (259*a*) si ha

$$d_e = 1{,}5 + \frac{1{,}5}{2} = \text{m. } 2{,}25 \quad , \quad d_i = 1{,}5 + \frac{1{,}5}{2} + \frac{20^2}{8 \times 400} = \text{m. } 2{,}375$$

$$D_0 = 2{,}25 + 2{,}375 = \text{m. } 4{,}625$$

mentre la distanza delle travi principali dalle rotaie in corrispondenza al mezzo per la trave interna, ed in corrispondenza agli estremi per la esterna è $a + \frac{l^2}{8r} = 1{,}5 + \frac{20^2}{8 \times 400} =$ metri 1,625, come precisamente si è fatto nel ponte della **Tav. 22.**

197. Ponti col suolo in pendenza. — Nelle strade montane le esigenze del tracciato costringono alcune volte, allorchè le accidentalità del suolo sono difficili da superare, di tenere in pendenza l'impalcato, specialmente nei ponti per ferrovia. In due differenti modi si può disporre la costruzione.

1° Ponendo le travi principali coi loro appoggi ad un medesimo livello orizzontale, ed attaccando le travi trasversali a differente altezza in modo che le rotaie, od il tavolato, abbiano ad avere la voluta pendenza. Se ne vede un esempio nel ponte sul Miscano (*ferrovia Ariano-Benevento*), **Fig. 290.** Indicando con λ la distanza fra le travi trasversali, con i la pendenza od inclinazione unitaria, e con δ la differenza di livello fra due travi trasversali successive, è

$$\delta = i\lambda$$

Così ad esempio nel ponte suddetto è $\lambda =$ metri 2,72, e la pendenza del 10 per 1000, cioè $i = {}^{10}/_{1000} = 0{,}01$; quindi è $\delta = 0{,}01 \times 2{,}72 =$ metri 0,0272, ed essendovi 18 scomparti fra le travi trasversali, la differenza di livello fra la prima e l'ultima delle medesime è di $0{,}0272 \times 18 =$ metri 0,49.

2° Costruendo la travata come se dovesse essere disposta orizzontalmente e tenendo i piani di posa delle travi principali a differente livello sui piedritti, in modo da ottenere la pendenza richiesta. Con tale disposizione la travata tende a discendere e produce una spinta sul piedritto più basso, sul quale è necessario di fissarla robustamente onde impedire l'accennata discesa. Si ha un esempio nel viadotto sulla Comba Scura, Fig. 291. Detta D la distanza orizzontale fra i paramenti dei piedritti in corrispondenza ai piani di posa delle travi principali, e Δ la differenza di livello fra i piani stessi, è

$$\Delta = i\,D$$

Nel viadotto sulla Comba Scura è $D = 56{,}458$, $i = \frac{29{,}5}{1000} = 0{,}0295$ e quindi la differenza di livello fra i due piani di posa delle travi principali è $\Delta = 56{,}458 \times 0{,}0295 =$ metri 1,665.

198. Congiunzione dei ponti per strada ordinaria e ferrovia. — In quattro modi si può ottenere tale congiunzione, cioè:

1° Costruendo due travate metalliche affatto indipendenti, ma poste una accanto all'altra sui medesimi piedritti allo scopo di diminuire il costo dei medesimi e specialmente delle fondazioni;

2° Costruendo due tavolati speciali ma sostenuti dalle medesime travi trasversali. Nel caso che essi sieno posti al di sopra delle travi principali, bisogna separarli mediante alto parapetto, se invece sono posti fra le travi principali, od alla parte inferiore delle stesse, qualora se ne impiegano tre, la mediana serve di separazione, mentre se vi sono due sole travi principali, si ottiene la separazione con un parapetto interposto. Adottando questi modi si risparmia soltanto nel costo dei piedritti, inquantochè con due sole travi principali si ha l'inconveniente che le travi trasversali diventano molto pesanti, e con un maggior numero si ha quello invece che ogni singola trave si deve fare di differente robustezza.

3° Collocando la strada ordinaria al di sotto della ferrovia, cioè che si ottiene col porre il binario alla parte superiore delle travi principali e la carreggiata alla parte inferiore; questa disposizione però non si può adoperare che per travi di grande

altezza, onde rimanga fra l'una strada e l'altra un'altezza libera sufficiente per il passaggio dei più alti veicoli, compreso il carico, Fig. 292.

4° Collocando la ferrovia al di sotto della strada ordinaria, cioè usando una disposizione inversa della precedente, Fig. 293. Nel caso di travi molto alte conviene porre uno degli impalcati al basso, l'altro circa a metà l'altezza delle travi, le quali poi vengono superiormente controventate. In questo modo si ottiene un conveniente irrigidimento del traliccio. Tale disposizione è stata adottata al ponte di Sesto-Calende sul Ticino, Fig. 294.

Queste ultime disposizioni portano un vantaggio notevole nel costo dei piedritti nonchè in quello del ferro. L'adottare poi i due primi modi, o gli ultimi, non è arbitrario, ma dipende dalle circostanze locali, e sopratutto dal rispettivo andamento altimetrico delle due strade che si vogliono unire nel medesimo ponte.

1) Impalcato.

Nei ponti a travata rettilinea, sia che si tratti di ponti pedonali, o per strada ordinaria, o per ferrovia, l'impalcato si può sistemare nei tanti modi indicati ai §§ **102, 175, 176, 179, 185, 187** e **188**. Le membrature del tavolato, le travi trasversali e longitudinali secondarie conservano la stessa disposizione. Si aggiunge soltanto che nei grandi ponti per ferrovia le travi trasversali si riscontrano di frequente conformate a traliccio, Tav. 19 (Fig. 1, 10), Tav. 25 (Fig. 4, 11).

Riguardo dunque ai calcoli di stabilità delle membrature dell'impalcato servono i procedimenti sviluppati ai §§ **133** a **164**.

2) Travi principali.

199. Forma delle travi principali. — La resistenza di un solido cimentato alla flessione è maggiore nelle parti più lontane dall'asse neutro, mentre in corrispondenza al medesimo, la resistenza è nulla. È vantaggioso dunque di portare il metallo quanto più si può lontano dall'asse neutro, e di costruire le travi con due sbarre longitudinali dette *nervature* od anche *briglie* (Franc. *Nervure*, *Semelle*, Ted. *Gurten*) distanti l'una dall'altra il più possibile, le quali però devono essere fra loro collegate mediante un gambo in modo che abbiano a resistere

come se fossero tutto un solido. L'ufficio di questo gambo adunque è quello di trasmettere le forze esterne dall'una all'altra nervatura, e quindi deve presentare resistenza sufficiente per soddisfare a questo importante ufficio. Se il gambo è costituito da una parete piena, cioè da una lamiera, questa non presenta sufficiente resistenza agli sforzi di compressione che tenderebbero a contorcerla, e bisogna irrigidirla mediante opportuni rinforzi; all'incontro la grossezza che ad essa teoricamente competerebbe per resistere a sforzi di trazione, non sarebbe praticamente adottabile perchè troppo esigua. Se invece il gambo si fa a traliccio, siccome le aste sono alcune tese, altre compresse, si possono proporzionare le sezioni agli sforzi cimentati senza spreco di materiale. Ne consegue che le travi col gambo pieno in generale riescono più pesanti di quelle col gambo reticolato, razionalmente costruito, tale cioè che le sbarre non abbiano sezioni superiori a quelle competenti agli sforzi che le cimentano. D'altronde le travi a parete piena, specialmente se molto alte, hanno un aspetto sgradevole ed assai pesante, e sopratutto presentano una assai ampia superficie alla violenza dei venti. Però esse hanno il vantaggio di una grande semplicità di costruzione, ciocchè ne diminuisce il costo, nonchè di una facile e libera applicazione delle travi trasversali. Abbenchè dunque in origine si sieno formate anche le grandi travi col gambo pieno in lamiera, come ad esempio nei ponti di Conwany di Britannia (metri 140) e di Brotherton (metri 68,6) in Inghilterra, e nei ponti di Asniers (metri 31,4) e di Langon (metri 77,4) in Francia, ecc., presentemente però il gambo pieno, ad onta dei suoi vantaggi, non si usa più a motivo dei notati inconvenienti, e le travi principali si costruiscono col gambo a traliccio.

200. Altezza delle travi principali. — Siccome quanto più le nervature si scostano dall'asse neutro e tanto maggiore diventa la loro resistenza, così per una data resistenza, la sezione di esse, e quindi il loro volume sarà tanto minore, quanto maggiore è la loro rispettiva distanza, ossia l'altezza della trave. Viceversa col crescere dell'altezza cresce il volume del traliccio e dei relativi rinforzi verticali. La più opportuna altezza sarebbe dunque quella per la quale il totale volume della trave risulta un minimo. D'altro canto col crescere dell'altezza, cresce la

difficoltà di costruzione, e così pure è più difficile di impedire i brandimenti laterali, a cui va soggetta la trave sotto l'azione del carico accidentale, od almeno ciò riesce più dispendioso per la grande robustezza che si deve dare ai sbadacchi o controventi. Per determinare adunque la più opportuna altezza sotto ogni riguardo, si può ricorrere alle seguenti norme pratiche: L'altezza h deve avere un certo rapporto colla portata l, il quale in generale è compreso fra $h = {}^1/_8\, l$ ed $h = {}^1/_{12}\, l$; nei ponti di piccola portata però si giunge anche fino ad $h = {}^1/_5\, l$, mentre nelle grandi portate si è fatto fino $h = {}^1/_{16}\, l$. Ordinariamente però $h = {}^1/_{10}\, l$ è la media altezza la più conveniente.

201. Generalità sui vari tipi di traliccio, (Franc. *Treillis*, Ted. *Gitterverk*). — Il traliccio è composto da sbarre inversamente inclinate, che concorrono a due a due tanto sulla nervatura superiore che sulla inferiore, ed ogni punto di concorso si chiama nodo (Ted. *Knolpunckt*). Alcune volte però fra le due sbarre inversamente inclinate di un nodo, se ne interpone una di verticale facente parte del traliccio. Il primo si chiama *sistema semplice*, Fig. 295, 296, il secondo *sistema combinato*, Fig. 300, inquantochè si può considerare quale una combinazione di due sistemi semplici.

a) Sistema semplice.

α) **Forma del traliccio.** — Le due sbarre che concorrono ad un nodo in direzione opposta, possono essere entrambe egualmente inclinate, od una verticale. Nel primo caso si ha il *traliccio a triangoli isosceli o simmetrico* (Ted. *Netzwerk*), Fig. 295, e nel secondo caso si ha il *traliccio a triangoli rettangoli o dissimetrico* (Ted. *Fachwerk*), Fig. 296. In entrambi questi tipi di traliccio, a seconda che una sezione verticale fatta fuori dei nodi taglia una sola sbarra o più sbarre, si ha un traliccio *ugnolo* (Ted. *Einfach Stabreihe*), *o multiplo* (Ted. *Merfach Stabreihe*) ed in quest'ultimo caso doppio, triplo, quadruplo, ecc. secondo che sieno tagliate due, tre, quattro sbarre, ossia il traliccio si compone di un solo ordine o più ordini di triangoli.

Le travi di grande portata si costruiscono in modo che esse soddisfano quanto più è possibile all'uniforme resistenza, onde

non vi sia spreco di materiale, e quindi sia conseguita la massima economia. Il traliccio dovendo trasmettere le forze esterne da una nervatura all'altra, è cimentato dallo sforzo di taglio, il quale dagli estremi va diminuendo verso il mezzo della trave. Allo scopo dunque di proporzionare la resistenza delle varie sbarre del traliccio agli sforzi che le cimentano si può procedere in vari modi:

a) Si lascia costante l'ampiezza delle maglie, nonchè l'inclinazione delle sbarre, e si varia la loro sezione, **Fig. 295, 296.**

b) Si lascia costante l'inclinazione e la sezione delle sbarre e si varia l'ampiezza delle maglie, **Fig. 297.**

c) Si lascia costante la sezione delle sbarre, e si varia la loro inclinazione e quindi l'ampiezza delle maglie, in modo però che qualunque sezione verticale tagli il medesimo numero di sbarre, **Fig. 298.**

La prima disposizione è la più generalmente usata ed è la più razionale.

La seconda offre l'utilità di poter usare per ogni sbarra il medesimo calibro, ma all'incontro presenta due grandi inconvenienti: 1° è opportuno di porre le travi trasversali soltanto in corrispondenza ai nodi, per cui con questa disposizione esse avrebbero differenti distanze e quindi si dovrebbero fare di differenti dimensioni costringendo ad una costruzione irregolare; 2° è anche opportuno che gli assi delle sbarre si taglino a due a due sulle nervature, e con questo tipo non si può soddisfare a detta condizione.

La terza disposizione è la meno conveniente di tutte: 1° perchè la differente inclinazione delle sbarre in ogni nodo diminuisce la loro azione: 2° perchè non è possibile una notevole variazione negli angoli delle sbarre come sarebbe necessario per ottenere la uniforme resistenza; 3° perchè anche qui le differenti distanze dei nodi portano distanze differenti nelle travi trasversali; 4° perchè il peso del traliccio con questa disposizione riesce molto maggiore. Del resto come accenna il Winkler non si conosce che un solo esempio della disposizione *b*) e cioè il ponte sulla Vienna presso Vienna (ferrovia Elisabetta), **Fig. 297**, ed alcuni piccoli ponti colla disposizione *c*) nelle ferrovie austriache dello Stato.

β) **Ampiezza delle maglie.** — L'ampiezza delle maglie considerata teoricamente non ha nessuna influenza sul peso totale

del traliccio inquantochè coll'aumentare della medesima, diminuisce bensì il numero delle sbarre, ma tanto più robuste esse devono farsi. Se si considera però che le sbarre non resistono con tutta la loro sezione, ma la sezione utile è la totale diminuita dei fori per le chiodature, vedesi che coll'aumentare del numero delle sbarre, aumenta la perdita di materiale dovuta alle chiodature; d'altronde per maglie ristrette può darsi che le sezioni teoriche competenti alle sbarre sieno così deboli, da non potersi praticamente adottare, ed allora bisogna fare le sbarre più grosse di quanto lo richieggono gli sforzi che le cimentano. Perciò tanto meglio si risponderà alle esigenze economiche quanto più ampie saranno le maglie. A questo riguardo si distinguono *tralicci a piccole, a grandi, a grandissime maglie* (Ted. *Engweit-sehrweitmaschige Gitterverk*).

1) **Traliccio simmetrico.**

Piccole maglie. — Le piccole maglie si usarono specialmente in origine, dappoichè l'esperienza e la teoria non aveano ancora suggeriti altri sistemi migliori. Il rapido sviluppo delle ferrovie, per le quali si dovette costruire grande numero di ponti in breve volgere di tempo, e la grande facilità di costruzione, furono causa del grande numero di ponti con travi a piccole maglie (Franc. *Poutre lattice*, Ted. *Gitterträger*) che si trovano in Francia, Svizzera e Germania. Oggigiorno però esse non si adottano che per i ponti di portata molto piccola. Le sbarre sono dei ferri piatti per cui le compresse non hanno sufficiente resistenza al piegamento, e quindi è necessario di irrigidire il traliccio col mezzo di montanti verticali in forma di ⊥ T I [saldati alle nervature. Un esempio si vede nelle **Tav. 31** (Fig. 1, 4), **Tav. 34** (Fig. 1, 5).

Grandi maglie. — Constatata la convenienza di dare alle sbarre compresse una forma adatta per resistere al piegamento, si eseguirono i tralicci a grandi maglie, **Tav. 23** (Fig. 7, 8), **Tav. 25** (Fig. 10, 12), **Tav. 26** (Fig. 1, 12) e **Tav. 27** (Fig. 13). Alle sbarre compresse si dà una sezione in forma di ⊥ T I [⊓, semplice o composta e le sbarre tese si fanno con ferri piatti; si possono però fare tanto le sbarre compresse che le tese con ferri sagomati. La prima disposizione è opportuna allorchè le travi trasversali si attaccano alle principali mediante montanti verticali (Franc. *Montant*, Ted. *Steifen*), inquantochè i ferri sago-

mati si pongono dalla parte esterna delle travi ed i ferri piatti dalla parte interna, dalla quale risulta una superficie piana nel traliccio, che si presta ad un facile attacco dei montanti testè accennati. Se non vi sono montanti è migliore la seconda disposizione.

Grandissime maglie. — È specialmente nelle grandissime maglie che le sbarre compresse, e meglio anche le tese, devono avere una sezione tale che abbia un momento di inerzia del massimo valore onde sieno dotate di grande resistenza contro il piegamento, inquantochè nelle grandi maglie la lunghezza delle sbarre è assai notevole, mentre la loro resistenza al piegamento diminuisce in ragione inversa del quadrato della lunghezza. Generalmente il traliccio si fa doppio (Ted. *Kreuzsystem*), **Tav. 20** (Fig. 1, 3), **Tav. 21** (Fig. 1, 5), **Tav. 22** (Fig. 1, 3), **Tav. 23** (Fig. 1, 4), qualche volta però si è fatto quadruplo, **Tav. 24** (Fig. 1, 3, 4), **Tav. 27** (Fig. 1, 10), e si trova anche triplo, **Tav. 23** (Fig. 7), e quintuplo nelle travi di grande altezza. Nelle travi molto alte, adottando il sistema doppio, i nodi vengono troppo discosti per l'applicazione delle travi trasversali, ed in questo caso si mettono delle travi trasversali anche fra un nodo e l'altro e si collega la nervatura alla quale desse sono attaccate col punto di incrocio delle sbarre, mediante un tirante (Ted. *Hängestangen*) se è la nervatura inferiore, **Fig. 299***a*, ed una saetta (Ted. *Stützën*) se è la nervatura superiore, **Fig. 299***b*. Nel traliccio doppio ordinariamente vi sono dei montanti per l'attacco delle travi trasversali, mentre invece questi si usano poco nei sistemi multipli.

Le sbarre compresse si fanno a sezione cruciforme con due ferri a T, fra i quali passano le sbarre tese in forma di ferri piatti, oppure, specialmente quelle molto lunghe, con sezione a I composto col gambo pieno o reticolato, ed allora le sbarre tese sono dei ferri piatti posti d'ambo i lati delle compresse e le travi così conformate si dicono travi tubulari (Ted. *Kastenträger*), **Tav. 25** (Fig. 11, 12), **Tav. 26** (Fig. 10, 11), **Tav. 35** (Fig. 16, 17).

2) **Traliccio dissimetrico.** — Nei tralicci dissimetrici non sono opportune le piccole maglie ed ordinariamente essi sono ugnoli, **Tav. 17** (Fig. 1), **Tav. 18** (Fig. 1, 8, 9), doppî, **Tav. 28** (Fig. 1, 3), o tripli. Economicamente essi sono meno vantaggiosi dei simmetrici perchè richiedono maggior materiale, però hanno il vantaggio che le sbarre compresse, che sono le verticali, hanno minor lunghezza di quella che avrebbero se il traliccio fosse

simmetrico, d'altronde esse sono meno cimentate delle tese, per cui facendole con sezioni rigide, mentre hanno minor lunghezza resistono meglio contro il piegamento. Circa alla forma della loro sezione le sbarre sono foggiate nei vari modi indicati per i tralicci simmetrici.

γ) **Angolo di inclinazione delle sbarre.** — La sezione ω di una sbarra è proporzionale allo sforzo che la cimenta nel senso del suo asse, e siccome questo è inversamente proporzionale al coseno dell'angolo d'inclinazione α che la sbarra fa colla verticale, ne consegue che è ω proporzionale ad $\frac{1}{\cos\alpha}$. La lunghezza l della sbarra è eguale alla sua proiezione orizzontale divisa per $sen\,\alpha$, cioè è l proporzionale ad $\frac{1}{sen\,\alpha}$, perciò il volume della sbarra $v = \omega\, l$ è proporzionale ad $\frac{1}{\cos\alpha\, sen\,\alpha}$. Esso volume diventa minimo pel minimo valore della frazione $\frac{1}{\cos\alpha\, sen\,\alpha}$ che si verifica per il massimo valore del suo denominatore $\cos\alpha\, sen\,\alpha$; e dappoichè il prodotto del seno per il coseno è massimo per un angolo di 45°, si conclude che il minimo volume di una sbarra e quindi del traliccio, ha luogo per una inclinazione di 45°. Ciò però è rigoroso allorchè si suppongano le sbarre compresse non soggette al piegamento, ossia la loro sezione non dipendente dalla loro lunghezza, quando cioè gli sforzi pratici di trazione e di compressione siano eguali. Siccome poi questa condizione si verifica molto prossimamente per tralicci in ferro, così si usa in generale di adottare per le sbarre l'inclinazione di 45°, e soltanto allora che si voglia avere minore distanza fra i nodi si adottano angoli minori di 45°.

b) Sistema di traliccio combinato.

Nel sistema combinato vi sono le sbarre verticali come nel traliccio semplice dissimetrico, ma con due diagonali per ogni scomparto invece di una, per cui viene come ad essere un doppio traliccio dissimetrico nel quale i due sistemi hanno le diagonali inversamente inclinate, **Fig. 300.** In questo caso entrambe le diagonali devono essere costruite in modo da resistere soltanto

alla trazione od al piegamento. Questo sistema però venne assai di rado usato nelle travi con nervature parallele o tutto al più nella parte centrale delle medesime.

202. Nervature o briglie. — La nervatura superiore è soggetta alla compressione e perciò si deve assegnare alla medesima una tale forma che valga ad impedirne il piegamento, mentre quella inferiore è cimentata alla trazione e quindi la sua resistenza è affatto indipendente dalla forma, che può essere qualsiasi. Generalmente però nelle travi con nervature parallele si usa di farle eguali per simmetria e regolarità di costruzione, adottando la forma di un T costituito da una *tavoletta orizzontale o piattabanda* (Ted. *Lamelle*) e da un *gambo verticale o lamierone* (Ted. *Stehblech*) collegati fra loro da due *cantonali*, **Tav. 22** (Fig. 5, 8, 10, 11), **Tav. 23** (Fig. 5, 10), **Tav. 24** (Fig. 5, 6, 11, 12), **Tav. 25** (Fig. 4), **Tav. 27** (Fig. 12, 14).

α) **Tavoletta o piattabanda.** — La tavoletta si compone di parecchie lamiere sovrapposte allo scopo di raggiungere, per quanto è possibile, l'uniforme resistenza col variare il loro numero nei diversi scomparti delle nervature. Queste lamiere di solito hanno eguale grossezza e solo in qualche caso si è diminuita la grossezza delle lamiere aderenti ai cantonali, o variata quella della lamiera esterna allo scopo di meglio conseguire l'uniformità della resistenza. Anche la larghezza si usa di tenerla eguale in tutte le lamiere ed in qualche raro caso si sono usate delle lamiere meno larghe delle altre, come mostra la **Fig. 301**, nell'intento di favorire la economia del metallo.

Allorchè le tavolette sono molto larghe ciascheduna lamiera si fa in più striscie a giunti longitudinali, i quali giunti devono essere fra loro alternati nei vari ordini di lamiere, come mostra la **Fig. 302.**

Per una data resistenza le piattabande devono avere una corrispondente sezione, che si può denotare con λg, essendo λ la larghezza e g la grossezza. Quanto più grande si tiene λ e tanto più piccolo risulta g, e con ciò, mentre la piattabanda presenta la massima resistenza ad un piegamento laterale, essa può facilmente incartocciarsi nella nervatura compressa. Se invece si tiene λ piccolo, e quindi g molto grande, si può aumentare notevolmente il numero delle lamiere e conseguire con ciò una grande

variazione nelle sezioni della nervatura ed avvicinarsi il meglio possibile all'uniforme resistenza, ma tanto più difficile e mal sicura riesce la chiodatura in causa del lungo gambo dei chiodi, e si diminuisce la resistenza al piegamento laterale. È necessario quindi di assegnare dimensioni convenienti sotto ogni riguardo, le quali si possono determinare colle seguenti regole pratiche.

La larghezza λ delle lamiere si deve prendere fra $^1/_9$ ed $^1/_{14}$ dell'altezza della trave, e secondo il WINKLER nei ponti per ferrovia si assume:

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{Per un binario} \ . \ . \ . & \lambda = 150 + 4\,l \text{ mm.} \\ \text{» } \textit{due binari} \ . \ . \ . & \lambda = 150 + 8\,l \text{ »} \end{array}\right\} (263)$$

dove l rappresenta la lunghezza teorica della trave che si deve esprimere in metri.

Detto n il numero delle lamiere costituenti la piattabanda ed s il loro spessore è $g = ns$. Lo spessore di queste lamiere può variare da 6 a 15 millimetri, e va aumentando col crescere della loro larghezza. In generale però per le lamiere di larghezza inferiore a 400 millimetri non si supera mai 12 millimetri, mentre per lamiere di maggiore larghezza non si usano spessori minori di 10 millimetri.

Scelto lo spessore, si passa a determinare il numero delle lamiere nei vari scomparti della nervatura mediante i calcoli di stabilità, usando i procedimenti che in seguito verranno indicati.

β) **Lamierone verticale.** — Il lamierone consta quasi sempre di una sola lamiera; quando però si attaccano ad esso quei montanti che servono al collegamento delle travi trasversali, potendo essere piegato dall'azione dei medesimi, conviene farlo robusto, e qualche volta in luogo di una sola lamiera si uniscono due lamiere onde conseguire la voluta rigidezza, **Fig. 301, Tav. 21** (Fig. 12), **Tav. 24** (Fig. 5, 6), **Tav. 33** (Fig. 4, 8). L'altezza del lamierone non deve essere maggiore di 15 volte la sua grossezza nelle nervature compresse, acciò non abbia troppo facilmente a piegarsi, ma in quelle tese si può assegnargli un'altezza maggiore per agevolare l'attacco al medesimo delle travi trasversali o dei traversi che servono per la controventatura.

Non conviene poi abbondare nella grossezza del lamierone, specialmente nel caso di traliccio a piccole maglie, inquantochè

resistendo esso con poca efficacia, si avrebbe molto spreco di materiale. In generale non si tiene la sua grossezza maggiore di 25 millimetri nè minore di 8 millimetri.

L'altezza a_0 del lamierone ed il relativo spessore g_0 si possono determinare colle

$$a_0 = 10 + 0{,}7\ l \text{ cm.} \quad , \quad g_0 = 0{,}05\ a_0 \text{ cm.} \qquad (264)$$

Lo scopo del lamierone è quello di prestarsi opportunamente all'attacco delle sbarre del traliccio. Di solito abbisognano per questo attacco parecchi chiodi. Questi chiodi devono essere posti in file longitudinali, dirette secondo la lunghezza delle sbarre, **Fig. 303,** ed il numero di queste file deve essere il minore possibile, acciò la sezione utile della sbarra riesca la massima, nei riguardi dell'economia. Nelle travi a larghe maglie e di notevole portata, essendo molto grandi gli sforzi che cimentano le sbarre del traliccio occorrono molti chiodi per il loro solido attacco alle nervature, e quindi per poter disporre questi chiodi in poche file longitudinali, bisogna metterne parecchi per fila, e si abbisogna perciò di una membratura larga a sufficienza per fare la distribuzione di questi chiodi. Non bastando a questo ufficio le ali verticali dei cantonali si chioda fra le medesime il lamierone.

Se però le maglie sono piccole e le travi di poca lunghezza, allora, essendo assai limitato il numero dei suddetti chiodi, si può omettere il lamierone ed attaccare le sbarre del traliccio direttamente alle ali verticali dei cantonali, nel qual caso se i chiodi sono più di due si dispongono in due file orizzontali, come mostra la **Fig. 304,** nè si adotterà mai un numero maggiore di file.

Nelle moderne costruzioni però, anche nel caso che occorrano parecchi chiodi per l'attacco delle sbarre del traliccio, si omettono i lamieroni, ed in corrispondenza ad ogni nodo si chioda fra i cantonali un pezzo di lamiera detto *piastra dei nodi* (Ted. *Knotenbleche*, *Anschlussblech*, *Anhangebleche*) sporgente oltre i medesimi quanto occorre per attaccarvi convenientemente le sbarre del traliccio, **Tav. 20** (Fig. 1, 3).

Si hanno anche esempi di lamieroni poco sporgenti, formati da una doppia lamiera fra cui, in corrispondenza ai nodi, è interposta una piastra, e l'attacco delle sbarre del traliccio si fa in parte sulla piastra ed in parte sul lamierone, come dimostrano le **Fig. 305, 306.**

γ) **Cantonali.** — In generale i cantonali si usano colle ali eguali, e solo allora che, omettendo il lamierone, le sbarre del traliccio si attacchino alla loro ala verticale, questa si sceglie maggiore dell'ala orizzontale, onde potervi disporre il numero di chiodi necessario per l'attaccatura. In quanto alle loro dimensioni vi è una regola pratica per la quale si dà ad essi una sezione ω eguale a due terzi di quella di una sola delle lamiere costituenti la piattabanda, cioè si fa $\omega = {}^2/_3 \lambda s$, per cui scelta la larghezza a delle ali, se ne determina facilmente lo spessore s_1 colla

$$s_1 = a - \sqrt{a^2 - \omega} \qquad (265)$$

Il Winkler porge le seguenti formule per valutare il più opportuno spessore s_1 dei cantonali nei ponti per ferrovia:

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{Per un binario} & . \; . \; s_1 = 10 + 0{,}06\, l \text{ mm.} \\ \text{» } \textit{due binari} & . \; . \; s_1 = 10 + 0{,}08\, l \text{ »} \end{array}\right\} \quad (266)$$

Nei ponti per strada carrettiera di ordinaria larghezza si può prendere:

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{Per ponti senza massicciata} & s_1 = 10 + 0{,}06\, l \text{ mm.} \\ \textit{Per ponti con massicciata} & s_1 = 10 + 0{,}07\, l \text{ »} \end{array}\right\} \quad (266^{bis})$$

dove l rappresenta la lunghezza della trave da esprimersi in metri, e quindi determinato lo spessore colle (266) si valuta la lunghezza a delle ali, ricorrendo alla regola prima data, usando cioè la formula

$$a = \frac{\omega + s_1^2}{2\, s_1} \qquad (267)$$

dove si deve porre

$$\omega = \frac{2}{3} \lambda s \qquad (268)$$

δ) **Altre forme di nervature.** — Qualora nelle travi di grande portata, le piattabande per essere molto larghe sporgono oltre i cantonali più di 15 volte la grossezza di una sola lamiera, allora vi è pericolo di un incartocciamento lungo i loro bordi. Onde evitare questo inconveniente si può appigliarsi a due partiti.

1° Rinforzare gli orli stessi mediante ferri sagomati, come si vede nelle **Fig. 307, 308, 309**, avvertendo che nella nervatura inferiore è opportuno di metterli al di sotto della stessa, per impedire che si formino dei canaletti ove l'acqua di pioggia possa stagnare.

2° Costruire le nervature con due lamieroni verticali fra i quali allora si attaccano le sbarre compresse del traliccio aventi la forma di un I col gambo pieno o reticolato, mentre esternamente ai medesimi si attaccano le sbarre tese in forma di ferro piatto, **Tav. 19** (Fig. 1), **Tav. 25** (Fig. 11), **Tav. 35** (Fig. 17).

Anche il lamierone verticale, se è molto alto, lo si rinforza lungo il suo orlo libero mediante cantonali, soltanto però nella nervatura compressa, e ciò onde impedire che esso si possa ondulare sotto l'azione del carico accidentale, specialmente poi quando ad esso lamierone si attaccano le travi trasversali dell'impalcato, **Fig. 307**. Questi rinforzi si usano anche quando vi sieno due lamieroni per ogni nervatura, come si vede nel ponte di Brusegana, **Tav. 27** (Fig. 12).

Alle nervature si possono assegnare altre forme e cioè di I][(H semplice e doppio) ottenute mediante il collegamento di cantonali, ferri piatti, o ferri a], e queste tanto alle nervature compresse che alle tese, **Fig. 310**, **Tav. 17** (Fig. 4, 5), **Tav. 28** (Fig. 4, 8, 9), oppure forme di semplici piattabande orizzontali o verticali costituite di una o più lamiere, e queste alle sole nervature tese, **Tav. 19** (Fig. 1).

Nelle travi con doppio gambo, onde evitare che nella nervatura inferiore abbia a stagnare l'acqua di pioggia che vi si raccoglierebbe come entro ad una cassa o si praticano dei fori lungo le tavolette, modo semplicissimo questo, il quale però ha l'inconveniente di diminuire la sezione utile della nervatura con perdita non lieve di materiale, oppure si tralasciano le tavolette, **Tav. 17** (Fig. 4, 5), **Tav. 19** (Fig. 1), od infine si collegano a ciaschedun gambo due tavolette fra loro indipendenti, **Fig. 311**, che al caso possono essere collegate mediante un traliccio.

203. Sbarre del traliccio, (Ted. *Streben*, *Füllungsglieder*). — Esse si distinguono in *sbarre tese* e *sbarre compresse;* la resistenza delle une è indipendente dalla forma, mentre quella delle seconde la si consegue specialmente con una forma oppor-

tuna la quale deve essere tale da renderle rigide il meglio possibile onde possano resistere al piegamento che può in esse avvenire a motivo della loro lunghezza. Al § **201**-β)-1) si è già veduto che le tese si formano di solito con ferri piatti e le compresse con ferri sagomati. Tanto le une che le altre però possono avere profili che le rendano rigide. I profili delle sbarre rigide possono avere le seguenti forme:

1° Di un semplice cantonale, opportuno per le piccole portate e le piccole maglie, **Tav. 25** (Fig. 4, 5), **Tav. 27** (Fig. 12, 13), **Tav. 30** (Fig. 4, 6);

2° Di un T massiccio, **Tav. 23** (Fig. 4, 6, 7), o formato da una coppia di cantonali, **Tav. 20** (Fig. 3, 4), **Tav. 21** (Fig. 5), **Tav. 24** (Fig. 3, 5), oppure composto con cantonali, ferri a T e ferri piatti, **Tav. 22** (Fig. 3, 8), **Fig. 312**;

3° Di un] massiccio che si attacca facilmente alle nervature, ma che presenta poca resistenza al piegamento in confronto delle altre forme, **Tav. 35** (Fig. 12, 16, 17);

4° Di un I massiccio, o composto di cantonali ferri a T] e ferri piatti, col gambo pieno o reticolato, **Tav. 25** (Fig. 11, 15), **Tav. 27** (Fig. 2, 6), **Tav. 35** (Fig. 11, 16, 17), **Fig. 313**;

5° Di una -|- formata da 4 cantonali fra loro collegati con o senza interposizione di ferri piatti, o da due T pure congiunti con o senza ferri piatti; il qual tipo è molto opportuno nelle grandi portate per il facile collegamento colle nervature, e per la molta resistenza al piegamento. In questo caso le sbarre tese possono essere dei ferri piatti che passano fra mezzo ai ferri componenti la croce, **Fig. 314**;

6° Anche altre forme di ferri sagomati possono servire, quali sono quelle rappresentate nella **Fig. 315**.

204. Collegamento delle sbarre del traliccio colle nervature. — Generalmente questo attacco si fa con chiodi ribaditi a caldo; però nei ponti inglesi ed americani si sono usati anche i bolloni con giunto a snodo. L'attacco colle chiodature a caldo si fa in più modi.

1° Attaccando direttamente le sbarre ai cantonali, o fra i medesimi: e ciò nelle travi di piccola portata, nel qual caso non occorre il lamierone bastando un numero limitato di chiodi § **202** — β), **Tav. 32** (Fig. 8, 9), **Tav. 33** (Fig. 4, 5, 6), **Tav. 34**

(Fig. 5, 6). Questo tipo presenta l'inconveniente che nella nervatura inferiore resta fra i cantonali una larga fessura fra cui può stagnare l'acqua con danno della costruzione ;

2° Attaccando le sbarre al lamierone verticale frapposto ai cantonali, la quale conformazione è opportuna nelle travi di grande portata a piccole maglie, ed ha il vantaggio di non lasciare stagnare l'acqua come nel tipo precedente, **Tav. 21** (Fig. 5), **Tav. 22** (Fig. 3), **Tav. 23** (Fig. 7), **Tav. 25** (Fig. 5, 12), **Tav. 26** (Fig. 7, 11), **Tav. 27** (Fig. 13) ;

3° Attaccando le sbarre, e specialmente le tese, al lamierone mediante *piastre di giunto* (Franc. *Gousset*, Ted. *Laschen*) con che si ha il vantaggio di far lavorare a doppio taglio i chiodi necessari all'attacco e quindi di ridurne il numero, nonchè l'altro di impiegare lamieroni di poca altezza, **Fig. 316** ;

4° Attaccando le sbarre alle nervature mediante le *piastre da nodi*, le quali o servono soltanto a questo scopo, ed allora sono chiodate fra i cantonali, **Tav. 18** (Fig. 10), o fra un doppio lamierone, **Tav. 24** (Fig. 3, 4), oppure servono anche di coprigiunto al lamierone ed allora si chiodano al medesimo o da una sola parte e sono ugnole, o d'ambo le parti e sono doppie ;

5° Attaccando le sbarre alle nervature sia con piastre da nodi che con piastre da giunto, **Tav. 17** (Fig. 1), **Tav. 20** (Fig. 3), **Tav. 23** (Fig. 4), **Tav. 28** (Fig. 3, 7).

205. Collegamento delle sbarre del traliccio fra loro. — Allorchè il traliccio è multiplo, sia esso simmetrico o dissimetrico, si incrociano fra loro le sbarre dei diversi sistemi semplici, che lo costituiscono, e nei punti di intersezione esse vengono collegate. Tre casi possono verificarsi e cioè l'incrocio può aver luogo fra due ferri piatti, fra due ferri sagomati massicci o composti, e fra un ferro piatto ed un ferro sagomato.

a) **Incrocio di ferri piatti.** — Tale incrocio succede allorchè tutte le sbarre del traliccio sono formate con ferri piatti, nel qual caso od esse sono chiodate fra i cantonali o fra un lamierone doppio, ed allora le varie sbarre nell'incrociarsi restano a contatto l'una dell'altra e quindi si collegano semplicemente con una o più bulle a caldo — oppure le sbarre si attaccano dall'una e l'altra parte di un lamierone ugnolo ed allora si può egualmente chiodarle assieme una a ridosso dell'altra nell'incrocio, ma

così si ha l'inconveniente che si piegano e perdono la loro dirittura; molto meglio è di interporvi una *piastrina di ripieno* od *imbottitura* (Ted. *Futterbleche*, *Nietring*) della stessa grossezza del lamierone ed avente forma rettangolare od anulare la quale può rimanere nascosta nell'incrocio, od anche sporgere dal medesimo, **Fig. 317**. Alcune volte però si interrompono le sbarre in corrispondenza all'incrocio, e si collegano fra loro mediante due piastre di coprigiunto, **Fig. 318**, la quale maniera è da evitarsi del tutto.

β) **Incrocio di ferri sagomati.** — Se questi ferri si attaccano da una parte del lamierone quelli inclinati in un senso, e dall'altra parte quelli inclinati in senso opposto, allora, siccome nell'incrocio essi non vanno a contatto, si interpone fra essi una piastra di ripieno, grossa quanto il lamierone, ma se essi si attaccano o da una sola parte del lamierone, o se sono a sezione cruciforme, allora bisogna interromperne uno all'incrocio, od anche entrambi, e si collegano con piastre di coprigiunto, **Tav. 20** (Fig. 6).

γ) **Incrocio di ferri piatti con ferri sagomati.** — Il collegamento si eseguisce facilmente, allorchè i ferri piatti sono attaccati da una parte, ed i ferri sagomati dall'altra di un unico lamierone, mediante una piastra di ripieno. In corrispondenza alla mezzaria della trave, siccome tanto le sbarre tese che le compresse cambiano di direzione, si interrompono ambe le sbarre che si incrociano e si collegano con piastre di coprigiunto, **Tav. 25** (Fig. 7) e **Fig. 319**. Quando le sbarre tese in forma di ferro piatto passano frammezzo ai ferri componenti la croce, vi si congiungono senza bisogno nè di piastrine di ripieno, nè di coprigiunto, **Tav. 20** (Fig. 3, 4).

Osservazione. — Il collegamento delle sbarre del traliccio, che si incrociano, porta l'inconveniente di non poter determinare con esattezza gli sforzi di tensione che cimentano le sbarre, stante la loro vicendevole azione, però si consegue il vantaggio che viene impedito nel miglior modo possibile il piegamento delle sbarre compresse, e l'allentamento delle tese, e si aumenta quindi notevolmente la rigidezza del traliccio.

206. Montanti estremi o pareti sugli appoggi, (Ted. *Endpfosten*, *Endständer*). — Le travi a traliccio si terminano alla loro estremità con montanti verticali costituiti da una o più

aste, il cui scopo principale è quello di ricevere direttamente la reazione dell'appoggio. Nei tralicci multipli quando si tengono le sbarre estreme colla loro regolare inclinazione, esse vanno ad incontrarsi col montante estremo a cui devono essere attaccate, **Fig. 320.** Esse adunque assoggettano il detto montante ad uno sforzo che è diretto secondo il loro asse e le cui componenti verticale ed orizzontale originano la prima una tensione longitudinale, la seconda una flessione del montante, il quale perciò dovrebbe farsi assai robusto. È opportuno di impedire la flessione del montante e ciò si ottiene facendo convergere ai suoi estremi inferiore e superiore tutte le sbarre che ad esso concorrono, **Fig. 321.** È specialmente nei tralicci dissimetrici che ciò si rende necessario inquantochè la accennata componente orizzontale è di notevole intensità. In luogo di un solo montante estremo si terminano gli estremi delle travi anche con due o più montanti, **Fig. 322.** A questo riguardo si osservi che al piegarsi della trave sotto l'azione del carico accidentale, la massima parte della reazione dell'appoggio opera in prossimità al punto **F**, inquantochè l'estrema porzione **B F** della trave si stacca dall'appoggio qualora non si abbia cercato modo di costringere la reazione a distribuirsi uniformemente sul tratto **B F** per carico completo. Ne consegue che i montanti **A B**, **C D** rimangono inattivi, mentre quello interno **E F** deve farsi così robusto come se gli altri non vi fossero. È evidente quindi che *è opportuno nei riguardi dell'economia di materiale, di usare un solo montante estremo, e conseguentemente di ridurre la lunghezza d'appoggio la minima possibile.* In alcuni ponti le travi sono terminate con un largo appoggio costituito da un gambo pieno di lamiera rinforzato con parecchi ordini di montanti, la quale disposizione si conosce sotto il nome di *parete piena sull'appoggio*, **Tav. 25** (Fig. 5, 6), **Tav. 27** (Fig. 4). Tale disposizione è poco opportuna per le ragioni anzidette, mentre *deve essere cura particolare di far sì che la reazione dell'appoggio agisca in corrispondenza all'asse verticale baricentrico di un unico montante estremo.*

I montanti estremi dovendo resistere alla reazione dell'appoggio, cioè ad uno sforzo che agisce nel senso del loro asse sono cimentati alla compressione, con pericolo di ripiegamento, inquantochè essi hanno sempre molta lunghezza in confronto della loro riquadratura. Perciò essi devono essere costruiti mediante ferri

sagomati, a modo di aste rigide, cioè con forme composte a profilo di ⊣⊢, le quali si fanno ugnole od anche doppie e fra loro collegate da una lamiera o da un graticcio. A queste aste rigide si collega poi od un lamierone o delle piastre da nodi, per l'attacco delle sbarre del traliccio. Il profilo a ⊢ si vede nella Fig. 323*a*, ed è quello del montante estremo della Tav. 24 (Fig. 5); quello a ⊣⊢ si trova nella Tav. 20 (Fig. 3), Tav. 21 (Fig. 9), Tav. 33 (Fig. 2, 14). Il montante estremo della Tav. 23 (Fig. 7) ha il profilo segnato nella Fig. 323*b*. Nella Tav. 19 (Fig. 2, 3) si trova il profilo a ⊢.

Quando l'estremo della trave è terminato da due o più montanti, questi si collegano o con un gambo pieno, Tav. 23 (Fig. 1), Tav. 25 (Fig. 5, 6), Tav. 32 (Fig. 3), o con un traliccio, Tav. 28 (Fig. 3), oppure colle stesse sbarre del traliccio principale prolungate fino al montante esterno, Tav. 22 (Fig. 3), Tav. 31 (Fig. 3), Tav. 34 (Fig. 2), Tav. 35 (Fig. 4).

Finalmente nelle travi tubolari il montante estremo od ha il profilo di un I col gambo pieno o reticolato disposto normalmente al piano delle pareti a traliccio, od è esso pure tubolare con le pareti di lamiera, Fig. 324, o reticolate, Fig. 325.

207. Attaccatura delle travi trasversali alle principali. — I vari modi coi quali si può eseguire questo attacco dipendono dalla posizione dell'impalcato rispetto alle travi principali.

α) **Impalcato posto superiormente.** — Le travi trasversali o si dispongono sopra le tavolette delle nervature superiori delle travi principali e vi si chiodano direttamente, Fig. 177, oppure si attaccano al lamierone delle dette nervature valendosi di cantonali e di piastre di coprigiunto, Tav. 27 (Fig. 13, 14).

β) **Impalcato posto inferiormente.** — Le travi trasversali o si attaccano esclusivamente sia alla tavoletta che al lamierone delle nervature inferiori delle travi principali, Tav. 26 (Fig. 6, 10), Tav. 35 (Fig. 8), oppure l'attacco si estende anche su parte del traliccio, Tav. 23 (Fig. 7, 11).

γ) **Impalcato posto a mezza altezza.** — In questo caso se le travi principali sono a traliccio dissimetrico, cioè avente delle sbarre verticali, queste servono per l'attacco delle travi trasversali, Tav. 19 (Fig. 1), altrimenti si aggiungono alle travi prin-

cipali delle *aste* o *montanti verticali* collegati colle nervature ed anche colle sbarre del traliccio, ai quali si attaccano direttamente le travi trasversali col mezzo di piastre di coprigiunto, **Tav. 34** (Fig. 6), e servono poi anche a trasmettere i carichi su ambe le nervature della trave principale. L'attacco si può fare anche sul traliccio appoggiando le travi trasversali sui lamieroni delle nervature inferiori, **Tav. 17** (Fig. 1, 4), **Tav. 25** (Fig. 11, 12).

Si possono adoperare le sbarre verticali del traliccio od i montanti, per l'attaccatura delle travi trasversali alle principali, anche nei casi indicati in α), **Tav. 20** (Fig. 4), **Tav. 21** (Fig. 15), **Tav. 24** (Fig. 5, 12), **Tav. 28** (Fig. 2), **Tav. 33** (Fig. 4, 8), ed in β), **Tav. 21** (Fig. 6), **Tav. 22** (Fig. 5, 8, 10).

3. Controventi.

208. Generalità, (Franc. *Contrevent*, Ted. *Querverbände*). — Le travi principali a motivo della loro notevole altezza e della poca larghezza colla quale esse appoggiano per breve tratto ai loro estremi, non possono mantenere invariabile la loro posizione verticale dappoichè un piccolo sforzo laterale basta a farle deviare ed a ribaltarle. Due cause possono produrre la deviazione, e cioè: l'azione del vento, che alcune volte ed in certe località è molto violenta: l'azione del carico accidentale il quale nell'inflettere le travi trasversali tende a far ravvicinare od allontanare le nervature fra loro; e nei ponti per ferrovia col binario in curva anche l'azione della forza centrifuga. Queste deviazioni che tendono a deformare il sistema rettangolare dell'intera costruzione, producono dei forti brandimenti i quali oltre di riescire incomodi per la viabilità, tornano svantaggiosi alla resistenza ed alla durata. Perciò è necessario di opporsi a queste deformazioni, locchè si consegue con alcune membrature di collegamento fra le varie parti della travata e specialmente fra le travi principali, le quali membrature si chiamano *controventi*. Si distinguono due modi principali di controventatura, cioè *controventi verticali* o *trasversali* e *controventi orizzontali*.

209. Controventi verticali o trasversali, (Ted. *Verticalverbände*, *Querversteifungen*). — La loro conformazione varia a seconda della posizione che ha l'impalcato rispetto alle travi

principali, per cui è opportuno di distinguere l'*impalcato posto sopra* alle travi principali e l'*impalcato frapposto*, cioè alla mezzaria od alla parte inferiore.

α) **Impalcato posto sopra.** — In questo caso si ha la massima libertà di disposizione; in generale però i controventi sono costituiti da due traversi rigidi (Ted. *Querrigel*) collegati l'uno alle nervature superiori, l'altro a quelle inferiori delle travi principali, e fra questi si intercalano due diagonali formanti croce di Sant'Andrea in un piano verticale, **Tav. 22** (Fig. 11), **Tav. 27** (Fig. 12). Se vi sono travi trasversali, come è d'ordinario, esse servono anche da traversi, **Tav. 21** (Fig. 25), **Tav. 24** (Fig. 5, 6), **Tav. 27** (Fig. 14), **Tav. 33** (Fig. 4). — Si formano anche più croci di Sant'Andrea sovrapposte l'una all'altra, **Tav. 24** (Fig. 11), **Tav. 28** (Fig. 2) o contrapposte, **Fig. 275**, a seconda dell'altezza e della distanza delle travi principali.

La più opportuna inclinazione da assegnarsi alle diagonali è di 45°; ben di spesso però l'inclinazione alla verticale è minore di 45°, nè mai la si tiene maggiore, perchè allora le diagonali, inflettendosi facilmente richiedono forti riquadrature, ed in questo caso si preferisce di sostituire alle diagonali due saettoni che o concorrono al punto mediano del traverso inferiore, **Tav. 19** (Fig. 1), o di quello superiore, **Tav. 23** (Fig. 2, 5), **Tav. 34** (Fig. 6, 8), o finalmente a due punti simmetrici rispetto alla mezzaria di quest'ultimo, **Tav. 24** (Fig. 12). Se le travi principali hanno sbarre verticali o montanti si possono mettere anche dei traversi in corrispondenza ai punti d'intersezione delle diagonali attaccandoli ai suddetti montanti, **Fig. 326**, (che è la sezione trasversale del ponte sulla Comba Scura, **Fig. 291**).

β) **Impalcato frapposto.** — Se l'impalcato sta circa a metà altezza, si possono usare tanto le croci di Sant'Andrea, quanto i saettoni purchè vi sia uno spazio sufficiente sotto l'impalcato, altrimenti si dispongono soltanto dei traversi fra le nervature inferiori delle travi principali, **Tav. 25** (Fig. 4, 11). Quando invece l'impalcato si trova inferiormente, se le travi principali hanno molta altezza si controventano mediante traversi superiori a parete piena od a traliccio, **Tav. 26** (Fig. 9, 10), **Tav. 35** (Fig. 17), **Fig. 279**, od anche mediante sistemi a croci di Sant'Andrea disposti in uno o più ordini orizzontali, e ciò nelle travi di grandissima altezza; se esse hanno poca altezza è impossibile l'uso dei tra-

versi superiori, e non rimane altro che robustarle con dei *rinforzi laterali* o *montanti*, che si dispongono verticalmente su tutta o su parte della loro altezza in corrispondenza alle travi trasversali, ed i quali quindi possono anche vantaggiosamente servire per l'attacco delle medesime, § **208**, **Tav. 17** (Fig. 4), **Tav. 21** (Fig. 6), **Tav. 22** (Fig. 8). Questi rinforzi laterali si possono anche disporre al disotto dell'impalcato, quando esso giace superiormente, come si vede nella **Tav. 20** (Fig. 4), nel qual caso poi si aggiungono anche i traversi inferiori.

Merita particolare considerazione il caso in cui, essendo l'impalcato posto a circa metà altezza delle travi principali, si sono fatte le travi trasversali a traliccio, con molta altezza allo scopo di controventare le principali, **Tav. 25** (Fig. 4), **Fig. 277**. Tanto i traversi quanto le diagonali devono essere sbarre rigide, inquantochè devono specialmente resistere a sforzi di compressione e quindi sono fatti con ferri in forma di ⊤ ⊤ ⊤ ⊔, e dall'ispezione delle suddette tavole si può vedere in quali modi queste parti si attacchino alle travi principali, od alle travi trasversali, nonchè fra di loro, col mezzo di piastre di giunto.

210. Controventi orizzontali (Ted. *Horizontalverbände*, *Windverstrebung*). — Essi sono costituiti da tante croci di Sant'Andrea disposte lungo un piano orizzontale, che formano come un traliccio semplice, o multiplo, di cui esse rappresentano le diagonali stirate, mentre le aste rigide sono rappresentate dalle travi trasversali o dai traversi dei controventi verticali; e questo traliccio orizzontale può essere posto a varie altezze a seconda della posizione dell'impalcato.

Nei ponti coll'impalcato posto inferiormente senza controventi superiori, i controventi orizzontali si attaccano od alle nervature inferiori delle travi principali, o direttamente alle travi trasversali, od anche in entrambe queste due posizioni.

Nei ponti coll'impalcato posto inferiormente con controventi superiori, i controventi orizzontali si attaccano alle nervature superiori, nonchè inferiormente sia alle nervature inferiori, che alle travi trasversali.

Nei ponti coll'impalcato posto superiormente i controventi orizzontali si attaccano alle nervature inferiori, ed anche superiormente od alle nervature superiori od alle travi trasversali.

Quando i controventi orizzontali si attaccano alle travi principali qualunque sia la posizione dei medesimi, i loro nodi corrispondono a quelli delle nervature sui quali succede l'attacco delle travi trasversali, in modo che ogni croce di Sant'Andrea comprende uno o più scomparti, intendendosi per scomparto la distanza fra due travi trasversali successive, ed a seconda che il ponte sia più o meno largo, e detti nodi più o meno spaziati, risulta un traliccio doppio, **Fig. 327, Tav. 20** (Fig. 2), **Tav. 23** (Fig. 3), **Tav. 24** (Fig. 2), **Tav. 25** (Fig. 2), e **Fig. 328, Tav. 18** (Fig. 3), **Tav. 26** (Fig. 3), **Tav. 30** (Fig. 2), **Tav. 35** (Fig. 3), o quadruplo, **Fig. 329** e **Fig. 330, Tav. 34** (Fig. 4).

Alcune volte però i nodi delle controventature non si fecero corrispondere cogli anzidetti delle nervature principali, come si vede nella **Tav. 31** (Fig. 2), ma tale disposizione venne usata assai di rado.

Sulle stesse piastre di giunto che servono per attaccare i traversi dei controventi verticali, si attaccano anche le diagonali dei controventi orizzontali, e queste diagonali possono essere o ferri piatti, o ferri a ⌐⌐ T ⌙, come si vede nelle tavole sopraindicate.

Se i controventi orizzontali si attaccano alle travi trasversali, allora essi possono disporsi al di sotto od al disopra delle medesime nei modi indicati dalle **Fig. 337** e **338**, od anche come è rappresentato nelle **Fig. 331, Tav. 22** (Fig. 2) e **Fig. 332** e **333**.

4. Appoggi ed apparecchi di dilatazione.

211. Generalità. — Le travi principali si appoggiano liberamente sui piedritti, e sarebbe un grave errore, specialmente nelle grandi portate, di fissarle ai medesimi. Difatti il coefficiente di dilatazione lineare del ferro per ogni grado di variazione di temperatura è mediamente di metri 0,000015 per ogni metro di lunghezza: supponendo una trave lunga 50 metri e tenendo conto della massima variazione di temperatura (cioè la differenza fra la più alta e la più bassa temperatura della località) che per le nostre regioni si può prendere in media di 45°, si avrebbe un accorciamento od un allungamento di $50 \times 0{,}000015 \times 45 =$ metri 0,0337. Se la trave si fissa sui piedritti, essa è costretta a mantenere la sua lunghezza originale, mentre l'effetto fisico della dilatazione

non può essere impedito, cosicchè per abbassamenti di temperatura la trave subisce uno stiramento che la fa allungare di quanto si sarebbe accorciata, e viceversa negli aumenti di temperatura si accorcia di quanto tende ad allungarsi, oppure si piega. Ne consegue che la trave sarebbe soggetta ad un notevole sforzo di tensione longitudinale, indipendentemente dall'azione dei sopraccarichi, e quindi il metallo sarebbe cimentato soverchiamente, mentre poi si manifesterebbero anche delle dannose deformazioni nella trave. — Perciò non soltanto si deve appoggiare la trave liberamente, ma anzi si deve cercar che i movimenti longitudinali della medesima, dipendenti da variazioni di lunghezza, abbiano ad esser facilitati nel miglior modo possibile. Ciò si raggiunge coi così detti *apparecchi di dilatazione* od *appoggi mobili*. Di solito però l'appoggio mobile si colloca soltanto ad un estremo della trave, mentre all'altro estremo si mette un *appoggio fisso*.

212. Appoggi fissi. — Scopo di questi è di ripartire la pressione sul piedritto sopra una superficie ampia a sufficienza perchè la pressione unitaria non abbia a superare il limite pratico di resistenza delle murature. Constano ordinariamente di una piastra di ghisa fissata nella muratura, sulla quale appoggia direttamente la trave in corrispondenza al montante estremo. La piastra si fissa alle murature:

a) Internandola nelle medesime e munendola al disotto di una o più costole di ritegno, Fig. 334;

b) Inchiavardandovela mediante bolloni da muro, nel qual caso vi si sottopone una lastra di piombo, od uno strato di cemento, Fig. 335.

Onde impedire degli spostamenti laterali della trave, la piastra porta due ribordi sporgenti all'insù, fra i quali si addentra la tavoletta della trave ed in corrispondenza ad ogni fila longitudinale di chiodi si trova una scanalatura semicilindrica entro alla quale essi possono muoversi liberamente.

213. Appoggi mobili. — Gli appoggi mobili si distinguono in *appoggi a scorritoi* ed *appoggi a rulli*.

α) **Appoggi a scorritoi** (Ted. *Gleitlager*). — Questi appoggi vennero usati nei ponti di vecchia costruzione, ora però nei ponti

di grande portata non si addottano più perchè poco soddisfacenti, ma si impiegano invece nei ponti di piccola portata. Constano di una piastra di ghisa fissata alle murature, **Fig. 336**, simile a quella degli appoggi fissi, così detta *piastra d'appoggio inferiore*, e di un'altra piastra che va a sovrapporsi alla precedente ed è fissata alla nervatura della trave principale, detta *piastra d'appoggio superiore*, e le superficie di contatto delle due piastre devono essere perfettamente piane, levigate, e mantenute lubrificate con olio.

β) **Appoggi a rulli** (Ted. *Rollen-Lager*). — In questi apparecchi fra le due piastre inferiore e superiore si trovano dei rulli di frizione, onde diminuire l'attrito nei movimenti della trave, e quindi facilitarli. Questi rulli possono essere *cilindri massicci* (Ted. *Walzen*), **Tav. 27** (Fig. 9), oppure *segmenti di cilindro* (Ted. *Stelzen*), **Fig. 337, Tav. 35** (Fig. 16), e si fanno in ghisa od in acciaio. I vari rulli di un medesimo appoggio devono essere collegati fra loro in modo che sia impedito il loro spostamento sia per lungo che per traverso, ciò che si ottiene munendoli alle estremità di perni di ferro in corrispondenza al loro asse, i quali si infilano in sbarre longitudinali in forma di ferro piatto o di ⊓, che mantengono i rulli equidistanti e paralleli fra loro, e che sono poi collegate mediante due o più traversi in forma di ferro piatto, di ⊓ o di ferro tondo, i quali hanno l'ufficio di conservare l'equidistanza fra le stesse, **Fig. 338**. — Alcune volte l'estremità dei cilindri sono munite di risalti fra cui stanno entrambe le piastre d'appoggio, allo scopo d'impedire gli spostamenti laterali, **Tav. 28** (Fig. 12, 13). I segmenti cilindrici possono essere collegati con un solo ordine di sbarre longitudinali, **Fig. 338** o con un doppio ordine, **Tav. 35** (Fig. 16), ciò che è di uso più frequente. Nei ponti di portata molto grande, la piastra superiore si fa anche doppia, cioè costituita da due piastre, fra le quali si mettono delle biette, allo scopo di obbligare l'estremità della trave ad appoggiare su tutto l'apparecchio di dilatazione di modo che la pressione si distribuisca quanto più uniformemente è possibile. — Tale disposizione si adotta anche negli appoggi a scorritoi e negli appoggi fissi. È opportuno di mettere l'apparecchio di dilatazione al riparo dall'acqua di pioggia o degli ingombri che possono essere causati per la terra od altre materie che si possono accumulare, mediante una specie di copertura laterale in lamiera di ferro od in ghisa, **Tav. 27** (Fig. 9).

214. Appoggi oscillanti (Ted. *Kipplager*). — Si è già detto quanto sia importante che la pressione sull'appoggio si distribuisca uniformemente e che il suo punto d'applicazione si mantenga fisso e di determinata posizione. Ciò si ottiene col ridurre la superficie d'appoggio la minima possibile in modo da permettere un'oscillazione della trave intorno al punto di appoggio, cosicchè nel piegarsi della medesima non abbia a variare la distribuzione della pressione ed il punto d'applicazione di quest'ultima. Servono allo scopo gli appoggi oscillanti che si distinguono in fissi e mobili e quest'ultimi possono essere a scorritoi od a rulli. La faccia di contatto in questi appoggi sta fra il *bilanciere*, che è collegato direttamente colla trave, ed il *piastrone d'appoggio*, il quale giace direttamente sulla muratura negli appoggi fissi, o sopra i rulli negli appoggi mobili. Il contatto può avvenire o fra due superficie cilindriche e si hanno gli *appoggi oscillanti a perno*, o fra un piano ed una superficie cilindrica e si hanno gli *appoggi oscillanti tangenziali*.

α) **Appoggi oscillanti a perno** (Ted. *Zapfen-Kipplager*). — Il perno può avere differenti modi di forma e di posizione, cioè:

1° Il perno *semicilindrico* fa parte del bilanciere e si adagia nel piastrone d'appoggio, **Tav. 36** (Fig. 8, 14, 15).

2° Il perno *semicilindrico* fa parte del piastrone d'appoggio e si addentra nel bilanciere, **Tav. 20** (Fig. 3), **Tav. 28** (Fig. 12, 13).

3° Il perno *cilindrico* si adatta per metà grossezza nel bilanciere e per l'altra metà nel piastrone, **Tav. 19** (Fig. 11, 12), **Tav. 33** (Fig. 9, 11), **Tav. 39** (Fig. 7, 8).

Di solito le varie parti si fanno di ghisa e di rado si son fatte in acciaio, il quale metallo è da consigliarsi per i perni cilindrici del 3° tipo.

β) **Appoggi oscillanti tangenziali**. — In questi appoggi alla parte superiore del piastrone è congiunto un pezzo d'acciaio foggiato superiormente a superficie cilindrica sul quale si adagia il bilanciere con una superficie piana, il quale bilanciere di solito è una piastra in ferro od acciaio collegata alla nervatura della trave, **Tav. 19** (Fig. 8).

B) Calcoli di stabilità.

1. Impalcato.

215. Calcoli per l'impalcato dei ponti con binario in curva. — Per i ponti in curva bisogna procedere in modo differente da quello usato per i ponti rettilinei, nella determinazione del *momento inflettente* M_p, *dipendente dal carico accidentale, che cimenta le travi trasversali.* Infatti le rotaie, in causa della sopraelevazione di quella esterna e della forza centrifuga, non sono egualmente caricate e d'altronde hanno anche una posizione dissimetrica rispetto alle travi trasversali. Se si chiama P la pressione sulle rotaie nei tratti rettilinei, ed s la sopraelevazione della rotaia esterna, si può mediamente assumere:

$$\left.\begin{aligned} &\textit{La pressione sulla rotaia interna} = P\,(1 + 1{,}10\,s) \\ &\text{»} \qquad \text{»} \qquad \text{»} \qquad \textit{esterna} = P\,(1 - 1{,}10\,s) \end{aligned}\right\} \quad (269)$$

Bisogna poi aver particolare riguardo alla posizione delle lungarine metalliche.

α) **Disposizione simmetrica delle lungarine metalliche.** — Tale disposizione, mostrata dalla Fig. 339, è di solito adottata allorchè si impiegano traversine, e ciò per semplicità di costruzione. Indicando con P_o la pressione trasmessa dalle lungarine alle travi trasversali per binari rettilinei (la quale si valuta colle norme indicate al § **155**), e con P_i, P_e le pressioni trasmesse rispettivamente dalle lungarine interna ed esterna per binari in curva, è facile vedere che, siccome le rotaie cambiano continuamente di posizione rispetto alle lungarine, quest'ultime pressioni hanno differenti valori per ogni trave trasversale, le quali dunque sono cimentate con differente intensità. Siccome poi tale variazione non è molto notevole, e d'altronde per semplicità di costruzione si fanno le travi trasversali tutte eguali, così è da tener conto nei calcoli di stabilità del massimo valore di P_i e P_e, che si verifica per le travi trasversali estreme. Chiamando Δ la di-

stanza delle lungarine ed f la freccia massima dell'asse del binario, si può mediamente prendere

$$P_i = P_o\left(1+\frac{1{,}65\,s+2\,f}{\Delta}\right) \quad , \quad P_e = P_o\left(1-\frac{1{,}65\,s+2\,f}{\Delta}\right) \qquad (270)$$

Ciò posto è facile determinare il valore del massimo momento inflettente il quale si verifica per la sezione d'attacco della lungarina interna. Si determina la reazione A_P dell'estremo della trave trasversale, corrispondente alla lungarina interna, e chiamando a_i e a_e le distanze dei punti d'attacco delle lungarine da detto estremo è

$$A_P = \frac{P_i\,(l-a_i)+P_e\,(l-a_e)}{l} = \frac{P_i\,(l+\Delta)+P_e\,(l-\Delta)}{2\,l} \qquad (271)$$

e quindi

$$M_P = A_P\,a_i = A_P\,\frac{l-\Delta}{2} \qquad (272)$$

β) **Disposizione dissimetrica delle lungarine metalliche.** — Tale disposizione nella quale le lungarine corrono parallelamente alle rotaie, **Fig. 340**, si usa di rado, perchè le prime incontrano obliquamente le travi trasversali. Se però si usano lungarine di legname soprapposte alle lungarine metalliche, allora questa disposizione diviene necessaria. In questo caso le pressioni ai punti d'attacco delle lungarine sono

$$P_i = P_o\left(1+\frac{1{,}65\,s}{\Delta}\right) \quad , \quad P_e = P_o\left(1-\frac{1{,}65\,s}{\Delta}\right) \qquad (273)$$

i quali valori sono costanti per tutte le travi trasversali, ma variano le posizioni dei punti d'attacco delle lungarine, per cui le travi trasversali non sono egualmente cimentate. È facile scorgere che la più cimentata è la mediana per la quale si ha

$$A_P = \frac{P_i\,(l-a_i)+P_e\,(l-a_e)}{l} = \frac{P_i\,(l+\Delta-f)+P_e\,(l-\Delta-f)}{2\,l} \qquad (274)$$

e quindi

$$M_P = A_P a_i = A_P \frac{l - \Delta + f}{2} \qquad (275)$$

In entrambi i casi la sopraelevazione s si determina colla (262). Per ponti a due binari si procede in analoga maniera.

2. Travi principali.

216. Carico permanente. — Il carico permanente si compone di due parti cioè del peso dell'impalcato e di quello delle travi principali. Si denoti con p_i il primo, con p_t il secondo e con p il totale peso permanente, tutti riferiti al metro lineare, e si ha

$$p = p_i + p_t$$

α) **Ponti per strada ordinaria.** — Il peso dell'impalcato si può valutare in ogni caso con esattezza poichè basta premettere i calcoli di stabilità delle varie parti componenti l'impalcato stesso e dai risultati se ne deduce il peso complessivo. Però esso si può valutare speditamente con sufficiente approssimazione usando le seguenti formule:

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{Ponti con inghiaiata} & p_i = (430\,c + 120\,d)\,d \text{ Kg.} \\ \text{» } \textit{senza} \text{ » } & p_i = (180)\,d \text{ »} \end{array}\right\} (276)$$

Il peso delle travi principali non si può rigorosamente determinare a priori, ma in base ai dati sperimentali, oramai accertati, si può prendere mediamente:

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{Per ponti con inghiaiata} \;.\;. & p_t = 5{,}6\,d\,l \text{ Kg.} \\ \text{» } \textit{senza} \text{ » } \;.\;. & p_t = 3{,}8\,d\,l \text{ »} \end{array}\right\} (277)$$

nelle quali c indica la larghezza della carreggiata, d la larghezza del ponte compresi i marciapiedi, ancorchè sieno esterni, ed l la lunghezza teorica delle travi principali, da esprimersi in metri, mentre p_i e p_t sono riferiti al metro corrente di ponte.

Tabella XLVII.

Valori di p *in chilogrammi per ponti con inghiaiata.*

Larg. d	$l=10$ metri	$l=20$ metri	$l=30$ metri	$l=40$ metri	$l=50$ metri	$l=60$ metri	$l=70$ metri	$l=80$ metri	$l=90$ metri	$l=100$ metri
5	2668	2948	3028	3508	3788	4068	4348	4628	4908	5188
6	3234	3570	3906	4242	4578	4914	5250	5586	5922	6258
7	3912	4204	4596	4988	5380	5772	6164	6556	6948	7340
8	4400	4848	5296	5744	6192	6640	7088	7536	7984	8422
9	5000	5504	6008	6512	7012	7520	8030	8528	9032	9536
10	5610	6170	6730	7290	7850	8410	8970	9530	10090	10650

Tabella XLVIII.

Valori di p *in chilogrammi per ponti senza inghiaiata.*

Larg.	$l=10$ metri	$l=20$ metri	$l=30$ metri	$l=40$ metri	$l=50$ metri	$l=60$ metri	$l=70$ metri	$l=80$ metri	$l=90$ metri	$l=100$ metri
5	1030	1220	1410	1600	1790	1980	2170	2360	2550	2740
6	1258	1486	1714	1942	2170	2398	2626	2854	3082	3310
7	1492	1758	2024	2290	2556	2822	3208	3354	3620	3886
8	1734	2038	2342	2666	2950	3254	3558	3862	4166	4470
9	1984	2326	2668	3010	2352	3694	4036	4378	4720	5062
10	2240	2620	3000	3380	3760	4140	4520	4900	5280	5660

Nelle tabelle **XLVII XLVIII**, sono dati i valori di $p = p_i + p_t$ per metro corrente di ponte, relativi a varie larghezze di impalcato e lunghezze di travi principali.

β) **Ponti per ferrovia.** — Circa al peso dell'impalcato vale l'osservazione fatta in α), però lo si può prendere mediamente

$$p_i = (120\, d + 150) \text{ Kg.} \qquad (278)$$

mentre quello delle travi principali per ponti da 10 a 100 metri si può determinare mediamente colla

$$p_t = 30\, l \qquad (279)$$

Un'altra formula viene usata da 10 a 100 metri di portata e cioè

$$p = p_i + p_t = 650 + 24{,}5\,l + 0{,}11\,l^2 \text{ Kg.} \qquad (280)$$

Valendosi dei dati dell'ingegnere MULLER (*) per travate a traliccio dissimetrico da 15 a 200 metri di portata, coll'altezza di $^1/_8$ della portata, e colle diagonali inclinate di 45° si può prendere

$$p_t = 680 + 12\,l + 0{,}22\,l^2 \text{ Kg.} \qquad (281)$$

L'ingegnere HAGEN, detto C un coefficiente dipendente dalla posizione dell'impalcato, dà per ponti a traliccio dissimetrico ad un binario:

$$\left.\begin{array}{lll} \textit{Per ponti di costruzione leggiera} & p = (27{,}5\,l + C) \text{ Kg.} \\ \text{» \quad » \quad } \textit{pesante} & p = (30\,l + C) \text{ » } \\ \text{» \quad » \quad } \textit{pesantissima} & p = (35\,l + C) \text{ » } \end{array}\right\} \qquad (282)$$

nelle quali si deve porre

Per impalcato posto sopra con traversine in legno	$C = 150$
» » *sotto senza controventi superiori*	$C = 425$
» » » *con* » »	$C = 550$

Altre formule si hanno per valutare il peso p_t nei ponti ferroviari, le quali, oltre della lunghezza delle travi, tengono conto anche del rapporto m fra l'altezza e la portata delle medesime, nonchè della forma del traliccio.

Per traliccio dissimetrico semplice, coll'impalcato al basso, senza controventi superiori (per portate minori a metri 50) *e per un binario.*

$$p_t = \frac{202 + \frac{6{,}75}{m} + \left(8{,}72 + \frac{1{,}35}{m}\right) l + 11{,}73\,m^2\,l^2}{1 - 0{,}00088\,l\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{6\,m}\right)} \text{ Kg.} \qquad (283)$$

(*) *Zeitschrift des österreichischen Ingenieur und Architecten-Vereins* del 1874.

Per traliccio dissimetrico semplice coll'impalcato posto sopra (per portate minori di metri 50) *e per un binario*

$$p_t = \frac{238 + \frac{6{,}75}{m} + 59{,}8m + \left(8{,}72 + \frac{1{,}35}{m} + 17{,}8m\right) l + (4{,}69\,m^2 + 0{,}238\,m)\,l^2}{1 - 0{,}00088\,l\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{6m}\right)} \quad (284)$$

Per traliccio dissimetrico semplice coll'impalcato al basso e con controventi superiori (per portate superiori a metri 50) *e per un binario*

$$p_t = \frac{312 + \frac{23{,}47}{m} + \left(6{,}07 + \frac{1{,}026}{m}\right) l + (4{,}69\,m^2 + 0{,}238\,m)\,l^2}{1 - 0{,}00088\,l\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{6m}\right)} \text{ Kg.} \quad (285)$$

Per traliccio dissimetrico doppio.

$$p_t = \frac{312 + \frac{23{,}47}{m} + \left(6{,}07 + \frac{1{,}026}{m}\right) l + (6{,}16\,m^2 + 0{,}238\,m)\,l^2}{1 - 0{,}00088\,l\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{6m}\right)} \text{ Kg.} \quad (286)$$

Per ponti a due binari e con due sole travi principali a traliccio dissimetrico semplice.

$$p_t = \frac{515{,}2 + \frac{46{,}94}{m} + \left(12{,}14 + \frac{2{,}052}{m}\right) l + (4{,}69\,m^2 + 0{,}238\,m)\,l^2}{1 - 0{,}00088\,l\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{6m}\right)} \text{ Kg.} \quad (287)$$

Per ponti a due binari e con due sole travi principali a traliccio dissimetrico doppio.

$$p_t = \frac{515{,}2 + \frac{46{,}94}{m} + \left(12{,}14 + \frac{2{,}052}{m}\right) l + (6{,}16\,m^2 + 0{,}238\,m)\,l^2}{1 - 0{,}00088\,l\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{6m}\right)} \text{ Kg.} \quad (288)$$

NB. — *Tutte queste formule dànno i pesi riferiti ad un metro corrente di ponte.*

217. Carico accidentale. — Per carico accidentale si deve assumere nei calcoli di stabilità il massimo carico che eventualmente sarà per cimentare la costruzione, onde garantirne in ogni caso la stabilità durevole. Si indichi con k il carico uniformemente distribuito per ogni metro corrente di ponte, od anche quello che supposto uniformemente distribuito darebbe il medesimo sforzo massimo prodotto da un sistema mobile di carichi singoli.

α) **Ponti pedonali.** — Il carico massimo è dovuto al passaggio di una folla stipata di persone in ragione di 300, 400 o 450 chilogrammi per metro quadrato a seconda che il ponte debba costruirsi in aperta campagna, in prossimità a luoghi abitati, o nell'interno delle città e borgate. Indicando con k_0 il carico per metro quadrato e con d la larghezza del ponte è $k = k_0 d$.

β) **Ponti per strada ordinaria.** — Bisogna far distinzione fra il carico dei marciapiedi e quello della carreggiata.

Per i marciapiedi, su cui passano esclusivamente i pedoni, si deve considerare un carico uniformemente distribuito di 350 a 450 chilogrammi per metro quadrato su tutta la loro estesa, qualunque sia la portata del ponte. Indicando con λ la larghezza dei marciapiedi, e con k_m il carico per metro corrente dei due marciapiedi è $k_m = 2 k_0 \lambda$.

Per la carreggiata sulla quale possono transitare tanto i carri che i pedoni, bisogna ricercare in qual caso avvenga il massimo cimento. In generale per portate maggiori di 30 metri è sempre più sfavorevole il considerare il passaggio di una folla stipata che occupa tutto il piano del ponte in ragione di 350 a 450 chilogrammi per metro quadrato, e chiamando k_c il carico per metro corrente di carreggiata e c la larghezza della medesima è $k_c = k_0 c$.

Per portate minori di 30 metri invece è più sfavorevole l'azione di alcuni carri seguiti dalla folla, ed in questo caso, scelto il tipo del carro bisogna trovare la posizione più sfavorevole del sistema di carri seguiti da folla, e poi si determina il carico k_c uniformemente distribuito sull'unità corrente della carreggiata che è capace di produrre gli stessi sforzi massimi dati dal sistema anzidetto, e si tien conto del medesimo nei calcoli di stabilità.

Il carico complessivo per metro corrente di ponte è dunque

$$k = k_c + k_m = k_0 (c + 2\lambda)$$

nella quale deve porsi $\lambda = 0$ nei ponti senza marciapiedi. I signori Leissle e Scuebler, nell'ipotesi che la larghezza della carreggiata sia di metri 5,5 (che è la misura ordinaria) e considerando il passaggio dei carri rappresentati nella Fig. 184 del peso di 10 tonnellate, e quello della folla in ragione di 360 chilogrammi per metro quadrato hanno calcolato la tabella XLIX che dà il carico k_c uniformemente distribuito per ogni metro corrente di carreggiata equivalente all'azione dei carri seguiti dalla folla.

Tabella XLIX.

Portata in metri	7	10	15	20	30
Carico k_c in chilogrammi	3215	2910	2470	2080	1854

Considerando il solo passaggio della folla, il carico per metro corrente diventa di $5,5 \times 360 = 1980$ chilogrammi, cioè a dire per portate maggiori di metri 25 circa, e coi dati precedenti, è più sfavorevole il passaggio della folla, per cui dovrebbesi prendere $k_c = 1980$ chilogrammi.

γ) **Ponti per ferrovia.** — Per questi ponti il carico accidentale è dovuto esclusivamente al passaggio dei treni inquantochè essendo vietato il pubblico transito non potranno trovarsi sul ponte contemporaneamente ai treni che pochi pedoni, cioè a dire il personale di servizio e gli operai della manutenzione, il cui peso è affatto trascurabile. Che se in circostanze straordinarie dovesse verificarsi il passaggio di una folla stipata, per esempio in tempo di guerra quello della truppa, esso non può avvenire contemporaneamente alla marcia dei treni, e quindi un ponte calcolato per quest'ultimi si presta con tutta sicurezza anche per il passaggio provvisorio della folla.

Soltanto nel caso che esternamente alle travi principali si ponessero dei marciapiedi ad uso pubblico, e ciò in vicinanza a centri popolati, si dovrebbe tener conto del carico prodotto dalla folla sugli stessi, egualmente come per i ponti carrozzabili, ed il relativo carico k_m si dovrebbe aggiungere a quello derivante dal passaggio dei treni.

Siccome non tutti i veicoli ferroviari pesano egualmente, nè i treni sono sempre composti collo stesso numero e colla stessa specie di carri, è evidente che per assicurare la stabilità della costruzione bisogna considerare nei calcoli quella data composizione di treno per la quale risultano i massimi sforzi. E siccome le locomotive col tender pesano assai di più dei veicoli che esse devono rimorchiare, mentre i carri merci pesano più delle vetture per viaggiatori, è evidente che il treno più sfavorevole sarà costituito dal massimo numero di locomotive e di carri merci che potranno entrare nella sua composizione. In pratica tale treno, che si chiama anche *treno di prova*, inquantochè con esso si prova la solidità della costruzione, si compone di tre locomotive col relativo tender e di quanti carri merci occorrono per occupare la rimanente lunghezza del ponte. Siccome poi il peso delle ruote e la distanza degli assi variano tanto nelle locomotive che nel tender e carri merci a seconda del loro tipo, così per non restare imbarazzati nella scelta si può con sufficiente approssimazione assumere i tipi di macchina, tender e carri rappresentati nella **Fig. 187.**

I treni ferroviari agiscono alla guisa di un sistema mobile di carichi singoli, ed in pratica torna opportuno di ricercare il valore di quel carico uniformemente distribuito che cimenterebbe la travata nello stesso modo del dato sistema di carichi singoli corrispondenti al treno di prova. Questo carico si chiama *carico uniformemente distribuito equivalente al treno di prova*. La ricerca di questo carico deve essere fatta partitamente per gli sforzi di taglio e per i momenti inflettenti.

1) **Ricerca del carico uniformemente distribuito equivalente al treno di prova per gli sforzi di taglio.** — Si chiami k' questo carico riferito al metro corrente di binario. Se per ciascheduna sezione si determina il relativo valore di ${}_{mas}T_x$ dipendente dal dato sistema di carichi, allora col mezzo della (63) o (64) poste rispettivamente sotto la forma $k' = +\frac{2\,{}_{mas}T_x\,l}{(l-x)^2}$ e $k' = -\frac{2\,{}_{mas}T_x\,l}{x^2}$ si ricava facilmente il valore del carico uniformemente distribuito k' il quale produce per ciascuna sezione lo stesso sforzo di taglio massimo dovuto al sistema di carichi. La (63) si adopera per $x < {}^1/_2\,l$ e la (64) per $x > {}^1/_2\,l$. Si trova, così operando, che il valore di k' varia per ogni sezione, che esso va aumentando mano

a mano che si considerano sezioni che si avvicinano al mezzo della trave e che raggiunge il massimo valore per la sezione mediana. In pratica però — considerato che alle sbarre del traliccio si danno nel mezzo delle travi dimensioni maggiori di quelle risultanti dal calcolo — si assume per valore di k' quello corrispondente alle sezioni estreme della travata, per cui si ricava il valore di k' col mezzo della (63) o (64) [*la* (63) *è relativa ad un carico che si muove da destra a sinistra, e la* (64) *ad un carico che si muove da sinistra a destra*] e ponendovi rispettivamente $x = o$, ed $x = l$ si ha

$$k' = \frac{2\ {}_{mas}\mathrm{T}}{l} \qquad (289)$$

Il valore di ${}_{mas}\mathrm{T}$ si può determinare analiticamente nel modo indicato al § **50**, oppure graficamente col procedimento indicato al § **54.**

2) **Ricerca del carico uniformemente distribuito equivalente al treno di prova per i momenti inflettenti.** — Si chiami k questo carico riferito al metro corrente di binario. Determinato il valore del massimo momento inflettente ${}_{mas}\mathrm{M}_x$ per le varie sezioni, dipendente dal dato sistema di carichi, e sostituito nella (53) posta sotto la forma $k = \frac{2\ {}_{mas}\mathrm{M}_x}{x\,(l-x)}$, si determina per ciascheduna sezione il valore del carico uniformemente distributo k che la cimenta nel modo stesso del sistema di carichi singoli. — Il valore di k varia per ogni sezione, e va diminuendo mano a mano che si considerano sezioni che si avvicinano al mezzo della trave, e raggiunge il minimo valore per la sezione mediana. Siccome poi alle nervature o briglie si assegna agli estremi della trave sezioni molto maggiori di quelle derivanti dal calcolo, così in pratica si assume per k il valore relativo alla sezione mediana, che si determina colla (54) posta sotto la forma

$$k = \frac{8\ {}_{mas}\mathrm{M}}{l^2} \qquad (290)$$

Il valore di ${}_{mas}\mathrm{M}$ si può determinare analiticamente o graficamente.

a) Metodo analitico — Si determina il ${}_{mas}\mathrm{M}$ dipendente dal

sistema di carichi per la sezione mediana. Tale ricerca si fa nel modo indicato al § **50**-β)-1). Per avere il $_{mas}M_x$ per una sezione qualunque di ascissa x, per esempio **M** nella **Fig. 341**, si dispone il sistema di carichi (il cui movimento si suppone da destra verso sinistra) in modo che sulla sezione vi sia un carico e che sia soddisfatta la condizione contenuta nella disuguaglianza

$$R_s < R\frac{x}{l} \qquad (291)$$

nella quale R indica la risultante di tutti i carichi del sistema ed R_s quella dei carichi che stanno a sinistra della considerata sezione. Il carico poi che deve insistere sulla data sezione è quello il quale oltrepassando la medesima verso sinistra, rende inadempiuta la (291). Per la *sezione mediana* essendo $x = {}^1/_2\, l$ la (291) diventa

$$R_s < {}^1/_2\, R \qquad (291a)$$

Fissata in questo modo la posizione più sfavorevole del treno col solito procedimento, § **50**, si determina il relativo valore di $_{mas}M_x$.

b) *Metodo grafico.* — Costruito il poligono delle forze relativo al sistema di carichi, ed il corrispondente poligono funicolare, si considerano quelle posizioni del treno per le quali le ruote più pesanti si trovano aggruppate verso il mezzo della trave. Si porta parte per parte della linea d'azione di queste ruote più pesanti, metà della lunghezza della trave e si considerano le corrispondenti linee di chiusa. L'ordinata massima compresa fra il poligono funicolare e le varie linee di chiusa dà il $_{mas}M$.

Esempio.

Si abbia una travata di 22 metri di portata. Per questa travata basta formare il treno di prova con due sole locomotive seguite dal rispettivo tender, che occupano una larghezza di $2 \times 8 + 2 \times 6 = 28$ metri. — Si tien conto poi per ogni asse di metà peso onde avere i carichi ragguagliati all'unità di lunghezza di una sola trave.

a) Ricerca di h' per il calcolo degli sforzi di taglio. — Supponendo che la direzione del treno sia da destra a sinistra, e riferendosi all'appoggio di sinistra, ove si verifica $_{mas}T$, si ha per detto appoggio la posizione più sfavorevole del treno quando questo occupa tutta la travata in modo che le ruote più

pesanti si trovino il più vicino possibile al considerato appoggio, anzi una deve coincidere col medesimo. Perciò (considerato che le ruote della locomotiva sono più pesanti di quelle del tender) bisogna che le locomotive seguite dal proprio tender si susseguano l'una all'altra, e che la ruota anteriore della prima locomotiva coincida coll'appoggio considerato, come mostra la **Fig. 342.** Si procede ora alla ricerca di masT.

1) *Metodo analitico.* — Si determina la reazione A dell'appoggio di sinistra colla (47) ed è

$$mas\mathrm{T} = \mathrm{A} = \frac{6{,}5\left\{22+(22-1{,}3)+(22-2{,}6)\right\}+4{,}5\left\{(22-6{,}6)+(22-8{,}1)+(22-9{,}6)\right\}+ +6{,}5\left\{(22-14)+(22-15{,}3)+(22-16{,}6)\right\}+4{,}5(22-20{,}6)}{22} = 33{,}10 \text{ tonn.}$$

2) *Metodo grafico.* — Essendosi riferiti all'appoggio di sinistra, ed avendo considerato il movimento da destra verso sinistra, si dispone il sistema di carichi in senso opposto, facendo coincidere la 1ª ruota coll'appoggio di destra, **Fig. 343**; poi si costruisce il poligono delle forze in corrispondenza all'appoggio di sinistra portando i pesi delle successive ruote in una data scala (nella **Fig. 343** si è preso 1 millimetro per tonnellata). Preso il punto **B** per polo, e la lunghezza **A B** della trave per distanza polare (con che gli sforzi di taglio sono dati direttamente dalle rispettive ordinate), si conduce il relativo fascio di raggi polari **B** 1, **B** 2, **B** 3,... e si costruisce il poligono funicolare **B L** le cui ordinate dànno gli sforzi di taglio per le varie sezioni della trave e per il movimento del sistema da destra verso sinistra, e l'ordinata estrema **A L** che risulta di millimetri 33,1 dà il masT, cioè $mas\mathrm{T} = 33{,}1$ tonnellate.

Ricorrendo alla (289) si trova

$$k' = \frac{2 \times 33.10}{22} = 3 \text{ tonn.}$$

che è il carico per metro corrente di trave, perchè si è presa la metà dei pesi degli assi.

b) Ricerca di k per il calcolo dei momenti inflettenti. — Rispetto ad una qualunque sezione, la posizione più sfavorevole del treno ha luogo quando le più pesanti ruote si trovano ad essa vicine quanto più è possibile, ed anzi una vi coincide, e quando sulla trave si trova il massimo numero di ruote. Perciò, considerato che le ruote della locomotiva sono più pesanti di quelle del tender, si devono disporre le locomotive coi fumaiuoli rivolti l'uno contro l'altro, come mostra la **Fig. 344**. Si passa ora a determinare masM.

1) *Metodo analitico.* — Le ruote devono essere così distribuite verso il mezzo della trave, che abbia ad essere soddisfatta la disnguaglianza (291*a*). Ciò si verifica quando la ruota 5 coincide colla mezzaria. Difatti allora risulta $R_s = 4{,}5 \times 3 + 6{,}5 = 20$ tonnellate, mentre è $R = 6{,}5 \times 6 + 4{,}5 \times 3 = 52{,}5$ tonnellate, e quindi $R_s < {}^1/_2\, R$, cioè $20 < {}^1/_2\, 52{,}50 < 26{,}25$. Ma questa non è condizione sufficiente: bisogna cioè che spostando la ruota 5

verso sinistra non sussista più la disuguaglianza (291*a*). Ciò facendo diventa $R_8 = 20 + 6,5 = 26,50$, cioè superiore a $^1/_2 R = 26,25$, e quindi si conchiude che la ruota 5 giacendo sulla sezione mediana dà per questa la posizione più sfavorevole del treno. Per valutare il relativo momento inflettente si ricorre alle (47) (49) e si ha

$$A = \frac{4,5\{(22-2,70)+(22-4,2)+(22-5,70)\}+6,5\{(22-9,70)+(22-11)+(22-12,30)+(22-17,7)+(22-19+)(22-20,3)\}}{22} = 23,32 \text{ tonn.}$$

$$_{mas}M = 23,32 \times 11 - 4,5\,(8,3 + 6,80 + 5,30) - 6,5 \times 1,3 = 156,27 \text{ tonnm.}$$

2) *Metodo grafico.* — Costruito il poligono delle forze 0 — 12, nella scala di 1 millimetro per 2 tonnellate, **Fig. 345**, nonchè il relativo poligono funicolare, avendo preso per scala delle lunghezze 4 millimetri per metro, per distanza polare $b =$ metri 5,50 e supposto che il treno stia fermo e che la travata cambî di posizione rispetto ad esso (ciò che torna lo stesso di supporre il treno mobile sulla travata ferma) si sono considerate varie posizioni del treno. A tale scopo si è portata la lunghezza della travata sopra una orizzontale in varie posizioni, per esempio **A B**, $A_1 B_1$, $A_2 B_2$,... e precisamente metà per parte delle verticali 5, 4, 6, si individuarono poscia le corrispondenti linee di chiusa **M N**, $M_1 N_1$, $M_2 N_2$ del poligono funicolare, e si cercò la più grande ordinata che si poteva condurre fra le dette linee di chiusa ed il poligono stesso, la quale è **C D** = 14,2 millimetri, corrispondente alla linea di chiusa **M N**, cioè alla ruota 5 posta sulla mezzaria della trave, e quindi risultò $_{mas}M =$ **C D** $\times$ tonn. $2 \times b = 14,20 \times 2 \times 5,50 = 156,2$ tonnellametri.

Mediante la (290) si trova

$$k = \frac{8 \times 156,2}{22^2} = 2,583 \text{ tonn.}$$

che è il carico per metro corrente di trave, perchè si è presa la metà del peso degli assi.

Così si ebbe il massimo momento inflettente per la sezione mediana.

Se si volesse il *massimo assoluto* ecco come si procede: Determinata la posizione **A B** della trave rispetto al treno, per la quale risulta il massimo momento inflettente nella sezione mediana, si considera la ruota 5, che insistendo su questa sezione della trave dà ivi il massimo momento inflettente. Si determina allora

il momento inflettente massimo rispetto a questa ruota 5. Perciò si individua la linea d'azione della risultante R di tutti i pesi giacenti sulla trave nella posizione **A B** (quelli delle ruote 1 fino a 9), al quale scopo basta prolungare il primo ed il decimo lato del poligono funicolare, **Fig. 346**, ed il loro punto d'incontro **I** determina la posizione della anzidetta risultante R. Al punto di mezzo della distanza δ, fra la risultante R ed il peso 5, deve corrispondere la mezzaria della trave. Portata quindi da questo punto metà della lunghezza della trave, cioè $\frac{l}{2}$, parte per parte nei punti A_0 e B_0 e condotta la corrispondente linea di chiusa $M_0 N_0$, questa interseca sulla linea d'azione del peso 5 un'ordinata $C_0 D_0$, che dà il massimo momento per la ruota 5, ed è il *massimo assoluto*. La sezione in cui si verifica questo momento inflettente, ha manifestamente per ascissa in questo caso $x = \frac{l}{2} - \frac{\delta}{2}$.

Nella tabella **L** si sono elencati i valori di k' e k per metro corrente di ponte e per varie portate, calcolati nell'ipotesi che il treno di prova sia costituito di locomotive, tender e carri merci del tipo rappresentato nella **Fig. 187.**

Tabella L.

Carichi per metro corrente di ponte.

Portata l	Valore di		Portata l	Valore di		Portata l	Valore di	
	k'	k		k'	k		k'	k
1	26,0	26,0	7	9,23	8,39	40	5,43	4,70
2	17,6	13,0	10	7,82	6,45	50	5,18	4,65
3	14,7	11,0	15	6,48	5,40	80	4,52	4,07
4	13,4	11,0	20	6,17	5,18	100	4,22	3,76
5	11,6	10,2	30	5,63	4,75	150	3,78	3,25
metri	tonn.	tonn.	metri	tonn.	tonn.	metri	tonn.	tonn.

Travi a traliccio simmetrico multiplo con maglie piccole.

218. Generalità. — Allorchè il gambo della trave è costituito da un traliccio simmetrico multiplo con maglie molto fitte, dimodochè i nodi riescono molto vicini gli uni agli altri, si può ritenere con molta approssimazione che la trave si trovi nelle stesse condizioni di una trave a parete piena. Il gambo quindi si considera semplicemente come una membratura di collegamento fra le due nervature, destinato cioè a tenerle invariabilmente ad una notevole distanza dall'asse neutro, onde la loro resistenza abbia ad avere la massima efficacia in vantaggio dell'economia del metallo. Perciò si considerano come parti resistenti alla flessione prodotta dai sopraccarichi, le sole nervature, mentre il gambo, essendo suo ufficio quello di trasmettere le forze esterne da una nervatura all'altra, esso deve resistere allo sforzo di taglio. E siccome nelle travi di grande portata tanto il momento inflettente che lo sforzo tagliente vanno variando notevolmente nelle singole sezioni della trave, così, nell'intento di ridurre al minimo possibile il peso del ferro, si costruiscono queste travi di uniforme resistenza, cioè a dire si fanno variare le dimensioni delle varie parti proporzionatamente agli sforzi che le cimentano. Si tratta ora di vedere come si procede a determinare queste condizioni in modo che essendo garantita la stabilità durevole, sia anche raggiunta per quanto è possibile l'uniforme resistenza. Questa ricerca devesi fare separatamente per le nervature e per il traliccio, premettendovi la determinazione delle lunghezze totale L e teorica l della trave, nonchè dell'altezza h.

219. Lunghezza totale e teorica delle travi principali. — Non conviene tenere la lunghezza dell'appoggio della trave molto grande, sia per non aumentare la effettiva lunghezza delle travi oltre il necessario, sia per non rendere troppo incerto il punto d'applicazione della pressione. Nei ponti di vecchia costruzione detta lunghezza si trova piuttosto esuberante, senza nessun vantaggio, ma è opportuno invece di limitarsi al solo necessario. Nell'inflettersi delle travate sotto l'azione del sovraccarico, la pressione tende a portarsi verso lo spigolo anteriore della piastra inferiore d'appoggio, per cui se questo spigolo colli-

masse col vivo del piedritto, ivi le murature potrebbero frangersi facilmente. Onde evitare questo inconveniente, si tiene lo spigolo anteriore della piastra in ritiro dal vivo del piedritto di una quantità c, che varia colla luce della travata, Fig. 347, e che al minimo si può prendere mediamente

$$\left.\begin{array}{lll} \text{fino a } 6 \text{ metri di luce} & \ldots\ c = 0{,}10 & \text{metri} \\ \text{» » } 10 \text{ » » } & \ldots\ c = 0{,}15 & \text{»} \\ \text{» » } 50 \text{ » » } & \ldots\ c = 0{,}20 & \text{»} \\ \text{oltre » } 50 \text{ » » } & \ldots\ c = 0{,}25 & \text{»} \end{array}\right\} \quad (292)$$

Di solito le piastre d'appoggio si pongono orizzontali e quindi le travi nell'inflettersi, per essere liberamente appoggiate, si dispongono così che il centro di pressione non coincide col centro della piastra, ma tende a portarsi verso lo spigolo anteriore della medesima. Onde evitare questa eccentricità del centro di pressione si potrebbe inclinare la piastra di appoggio nella direzione della tangente all'elastica all'estremo della trave (per sopraccarico totale). In ogni modo però si può ritenere con sufficiente approssimazione che il centro di pressione coincida con quello della piastra (ciò che si verifica poi negli appoggi oscillanti) e quindi prendendo come portata teorica la distanza fra i centri delle piastre d'appoggio, si opera in favore della stabilità, inquantochè essa risulta di qualche poco maggiore della rigorosa. Chiamando L la lunghezza effettiva, l la lunghezza teorica delle travi, l_0 quella della parete sull'appoggio e D la distanza orizzontale fra i piedritti, si ha $L = D + 2c + 2l_0$. E siccome si può prendere mediamente

$$l_0 = 0{,}02\ D \qquad (293)$$

così diventa

$$L = 1{,}04\ D + 2c \qquad (294)$$

e quindi

$$l = L - l_0 = 1{,}02\ D + 2c \qquad (295)$$

220. Nervature. — Valendosi dei procedimenti indicati ai §§ **216** e **217** si determina il valore del peso permanente p e del carico mobile k uniformemente distribuiti sull'unità di lunghezza di ponte e prendendone la metà si ha quelli riferiti alla

unità di lunghezza della trave che si chiamano ancora per semplicità p e k. Le travi sono liberamente appoggiate agli estremi e quindi il momento inflettente massimo si verifica per la sezione mediana ed ha per valore

$$mas\mathrm{M} = {}^1/_8 (p + k) l^2 \qquad (296)$$

Per qualunque altra sezione della trave di ascissa x, riferendosi all'appoggio di sinistra, il momento inflettente è $\mathrm{M}_x = {}^1/_2 (p + k) x (l - x)$, ed è opportuno di fare la rappresentazione grafica della legge di variazione dei momenti inflettenti per le varie sezioni della trave, mediante la relativa parabola, §§ **44** e **47**. Questa parabola si descrive facilmente. Si porta sopra una orizzontale la lunghezza **A B** $= l$, **Fig. 348**, e dal punto di mezzo si innalza la verticale **C D** $= mas\mathrm{M}$. Si divide **C A**, **C B** e **C D** in un numero eguale di parti, numerando i punti di divisione come nella figura; per i punti **A** e **B** si fa passare due fasci di raggi che vanno ad intersecarsi nei punti 1, 2, 3,... della verticale **C D**, e dai punti 1, 2, 3,... delle orizzontali **C A** e **C B** si innalzano delle verticali; i punti d'intersezione dei raggi con quelle verticali che portano lo stesso loro numero progressivo, individuano altrettanti punti della parabola.

Stabilita la forma delle due nervature, che di solito si fanno a ⊤ composto e fra loro eguali, si scelgono a priori le dimensioni principali delle varie parti e cioè la larghezza λ della tavoletta, lo spessore s delle lamiere che la compongono, le dimensioni dei cantonali e quelle del lamierone verticale rispettivamente colle norme del § **202**-α)-β)-γ). Poi si calcola mediante la (31) il momento di resistenza μ_1 del sistema formato dai quattro cantonali coi due lamieroni interposti, e, chiamandone I_1 il momento di inerzia e d_1 la distanza delle fibre più lontane dall'asse neutro è $\mu_1 = \dfrac{\mathrm{R}\,\mathrm{I}_1}{d_1}$, e se ne porta il valore come ordinata a partire dalla orizzontale **A B** all'insù in **C E** e si guida l'orizzontale **M N**, **Fig. 349**, la quale indica che l'anzidetto sistema è capace di equilibrare su tutta l'estesa della trave un momento inflettente di valore eguale all'ordinata **C E**. Si determina in seguito il momento di resistenza del sistema formato dalla prima coppia di lamiere (quelle che stanno aderenti ai cantonali) servendosi ancora della (31), ed il valore si porta quale ordinata a partire dalla **M N** all'insù,

in **E F**, e si conduce l'orizzontale 1-1. Poscia per semplicità si ammette che le successive coppie di lamiere che si devono aggiungere presentino tutte il medesimo momento di resistenza, semprechè sieno tutte di eguali dimensioni. (Ciò non è rigoroso, inquantochè le successive coppie, distando sempre più dall'asse neutro, presentano un momento resistente sempre maggiore, ma la variazione però è così poca — trattandosi di pochi millimetri di differenza nell'altezza in confronto a parecchi metri — che la si può trascurare). In tal modo si opera anche in vantaggio della stabilità. Si ripete perciò l'ordinata **E F** all'insù tante volte quante occorrono a raggiungere od a sorpassare il vertice **D** della parabola, e conducendo le orizzontali 2-2, 3-3,... esse servono a rappresentare i momenti di resistenza delle successive coppie. Vedesi allora manifestamente che in luogo di tenere tutte le lamiere lunghe quanto la trave, si può limitare la loro lunghezza secondo il perimetro della parabola, cosicchè nella mezzaria della trave dove è massimo il momento inflettente, si ha il maggior numero di lamiere sovrapposte, e quindi il massimo momento di resistenza, e mano a mano che si va verso gli estremi il numero delle lamiere diminuisce e quindi anche il momento di resistenza della trave, proporzionatamente al decrescere del momento inflettente. A rigore, siccome all'estremo della trave il momento inflettente è nullo, non solo non vi dovrebbero essere lamiere, ma nemmeno cantonali. Però per necessità di costruzione, si estendono a tutta la lunghezza della trave i cantonali ed il lamierone, necessari per il solido attacco del traliccio, e di solito anche la prima lamiera.

Osservazione. — Se l'ordinata rappresentante il momento di resistenza dell'ultima coppia di lamiere sorpassasse di troppo il vertice della parabola, allora per non aver spreco di materiale o si diminuisce lo spessore di questa ultima coppia, o la si tralascia affatto e si aumenta invece lo spessore della penultima coppia in modo che il totale momento resistente nella mezzaria della trave abbia a coincidere col momento inflettente massimo, od a superarlo di poco.

Volendo poi procedere rigorosamente, si valuta per ogni successiva coppia di lamiere il relativo momento di resistenza, ed i valori si portano successivamente come ordinate a partire da **E** all'insù, cosicchè le orizzontali 1-1, 2-2, 3-3 invece di essere equidistanti vanno sempre più scostandosi l'una dall'altra. — Ciò si dovrebbe fare per portate molto grandi e qualora si volesse impiegare lamiere molto grosse, cioè più di 10 millimetri.

221. Traliccio. — Il peso permanente p è già noto dai calcoli precedenti sviluppati per le nervature ed il carico mobile, ossia l'accidentale, si determina nei modi indicati al § **212**-γ)-1), chiamando k' quello riferito al metro corrente di trave.

α) **Diagonali.** — È facile rappresentare la legge di variazione degli sforzi di taglio, tenendo conto del movimento del carico mobile tanto da destra a sinistra, che viceversa, e ciò ricorrendo ai procedimenti indicati ai §§ **53** e **56**.

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{Il mas. sforzo tag. agli appoggi è} & {}^{mas}T = {}^1/_2 (p + k')\, l \\ \text{» \quad » \quad » } \textit{nel mezzo} & {}^{mas}T_0 = {}^1/_8 k'\, l \end{array}\right\} \quad (297)$$

Portando questi valori rispettivamente come ordinate in **A A**, **B B**, **C C**, si può prendere la spezzata **A**, **C**, **B**, come linea degli sforzi di taglio, **Fig. 350**, per le varie sezioni della trave. — Le sbarre del traliccio dovendo resistere agli sforzi di taglio, e diminuendo questo continuamente dagli appoggi verso il mezzo, esse per l'uniforme resistenza si dovrebbero fare tutte di riquadrature differenti. Siccome però in pratica ciò non è facilmente conseguibile, sia per essere piccola la variazione degli sforzi da una sbarra all'altra, sia per evitare il bisogno di un grande assortimento di ferri di diverse dimensioni (difficilmente reperibili in commercio) si usa di aggruppare le sbarre, tenendo di riquadratura costante quelle dello stesso gruppo. È opportuno di far dipendere la divisione in gruppi dagli scomparti dell'impalcato (intendendosi per scomparto l'intervallo compreso fra due travi trasversali successive, e la relativa ampiezza si indica con λ), e si opera nel modo seguente. Si conducono le verticali che separano i vari scomparti fintantochè intersecano la linea degli sforzi di taglio, e la massima ordinata di questa linea, per ogni scomparto, si prende quale valore costante di detto sforzo per lo scomparto considerato, locchè è lo stesso di supporre che la variazione degli sforzi di taglio abbia a succedere secondo le ordinate della spezzata segnata in grosso nella **Fig. 350**. Risulta allora che lo sforzo di taglio T per uno scomparto qualunque è espresso da

$$T = {}^1/_8 k'\, l + (l - \alpha \cdot 2\lambda)\, ({}^1/_2 p + {}^3/_8 k') \quad (298)$$

nella quale si deve porre $\alpha = 0, 1, 2, 3, \ldots$ a seconda che si

tratti del 1°, 2°, 3°,... scomparto a partire dall'appoggio, mentre il valore rigoroso di T sarebbe dato dalla (65) ponendo in essa $x = \alpha\lambda$, conservando α e λ i precedenti significati. Negli scomparti centrali lo sforzo tagliente è piccolo e le sbarre dovrebbero avere quivi proporzionatamente delle riquadrature assai esili, e siccome in pratica non si adottano riquadrature minori di $^1/_4$ della riquadratura massima, così nel centro della trave si stabilisce un solo gruppo che comprende gli scomparti per i quali la riquadratura delle sbarre sarebbe teoricamente minore di $^1/_4$ della riquadratura massima, la quale è dovuta alle sbarre sugli appoggi. Si ammette che lo sforzo di taglio T per una sezione qualunque si ripartisca equabilmente sulle n sbarre incontrate dal piano della sezione, e chiamando β l'angolo di inclinazione delle medesime alla verticale, e t la tensione che cimenta una sbarra nel senso del suo asse è $t = \frac{T}{n \cos\beta}$, Fig. 223, 224.

Per ogni scomparto o gruppo la riquadratura ω_t delle sbarre tese si calcola colla (203) e quella ω_c delle sbarre compresse colla (204) o (205), nelle quali in luogo di masT si deve porre il valore di T corrispondente allo scomparto che si considera.

β) **Montanti di rinforzo.** — Se si facessero tutte le sbarre diagonali con ferri piatti allora si avrebbe un inevitabile piegamento del traliccio, per mancanza di rigidezza in questi ferri, e per impedirlo si rinforza il traliccio con *montanti verticali*, in forma di ⊓ T ⊓ semplici o doppî, che si dispongono in corrispondenza alle travi trasversali e che anche possono servire per l'attacco delle medesime. A questo scopo anzi si mettono i montanti anche nel caso che le sbarre sieno dei ferri sagomati. — Il calcolo di questi montanti si fa nell'ipotesi che essi abbiano a sopportare il carico totale P relativo ad uno scomparto, il cui valore è $P = \lambda (p_i + k')$. Se l'impalcato è posto inferiormente allora essi sono soggetti alla trazione, se l'impalcato è posto sopra sono soggetti alla compressione, ed usando i soliti procedimenti, ricorrendo alle (5) (15) si determina la loro riquadratura rispettivamente colle

$$\frac{\lambda (p_i + k')}{\omega_t} = R_t \quad , \quad \frac{\lambda (p_i + k')}{\omega_c} = \frac{R_c}{m} \qquad (299)$$

222. Pareti sugli appoggi. — *I montanti estremi* o *pareti sugli appoggi* devono resistere alla reazione massima dei piedritti, che ha per valore $_{mas}A = {}_{mas}B = {}_{mas}T = {}^1/_2 (p + k') l$ e la quale li cimenta alla compressione, e siccome essi sono molto lunghi per cui facilmente si piegherebbero, serve per determinarne la riquadratura la

$$\frac{{}_{mas}T}{\Omega} = \frac{R_c}{m} \quad \text{ossia} \quad \frac{(p + k') l}{2\,\Omega} = \frac{R_c}{m} \qquad (300)$$

nella quale Ω rappresenta la somma delle aree dei vari ferri che li compongono.

Esempio.

Si abbia a costruire un ponte per ferrovia ad un binario, della larghezza $d =$ *metri* 4,5 *nel quale la distanza fra i piedritti sia* $D =$ *metri* 34.

Si prenda $c =$ metri 0,2 e colla (294) si trova la lunghezza totale della trave $L = 1{,}04 \times 34 + 2 \times 0{,}2 = 35{,}76$ ed in cifra rotonda si tiene $L =$ = metri 36. — Si assuma $h = 0{,}10\ L = 0{,}10 \times 36 =$ metri 3,6 e si supponga di fare un traliccio quadruplo colle sbarre inclinate a 45°. Il tipo schematico della trave risulta allora come nella **Fig. 352**, nella quale le maglie hanno per ampiezza metri 1,8. Colla (293) si trova la lunghezza della parete sull'appoggio $l_0 = 0{,}02 \times 34 =$ metri 0,68; considerando però che per regolarità di costruzione è opportuno che il vivo interno di questa parete corrisponda ad un incrocio di sbarre, cioè che l_0 abbracci $^1/_2$, 1, $1\,^1/_2$, 2,... maglie, nel caso presente si farà $l_0 = {}^1/_2\ 1{,}8 = 0{,}9$. La lunghezza teorica si ricava dalla (295) $l = 36 - 0{,}90 = 35{,}1$. Il peso permanente per metro corrente di ponte, valendosi delle (278) (279), risulta

$$p = p_i + p_t = (120 \times 4{,}5 + 150) + (30 \times 35{,}10) = 1743,$$

e valendosi della (280)

$$p = 650 + 24{,}5 \times 35{,}10 + 0{,}11 \times 35{,}10^2 = 1645{,}5,$$

e prendendo il valor medio si ottiene

$$p = {}^1/_2\ (1743 + 1642{,}5) = 1694{,}25;$$

e per metro corrente di trave $p = {}^1/_2\ 1694{,}25 = 847$ ed in cifra rotonda $p = 850$ chilogrammi.

α) Nervature. — Il carico accidentale k per metro corrente di ponte o si ricava rigorosamente in base ai tipi di macchina e di carri prestabiliti, colle norme date al § **217**-γ)-a)-b) o si desume dalla tabella **L**, dalla quale prendendo un valor medio fra 4,75 e 4,7 tonnellate risulta $k = 4725$ chilogrammi e per metro di trave $k = {}^1/_2\ 4725 = 2362{,}5$ ed in cifra rotonda $k = 2370$. Mediante la (296) si trova ${}_{mas}M = {}^1/_8\ (850 + 2370)\ 35{,}10^2 = 495884$.

Si assuma di 2 millimetri per metro la scala delle lunghezze e di 1 millimetro per 15000 chilogrammetri quella dei momenti inflettenti e poscia col noto procedimento si descriva la parabola **a d b**. La larghezza delle tavolette si deduce dalla (263) $\lambda = 150 + 4 \times 35{,}10 = 290{,}4$ ed in cifra rotonda si è preso $\lambda = 300$ millimetri e lo spessore delle lamiere $s = 9$ millimetri; la riquadratura dei cantonali si deduce dalla (268) $\omega = {}^2/_3\ (300 \times 9) = 1782$ millimetri quadrati ed il loro spessore dalla (266) $s_1 = 10 + 0{,}06 \times 35{,}15 = 12$ millimetri, e quindi supponendoli ad ale eguali, mediante la (267) si trova $a = \dfrac{1782 + 12^2}{2 \times 12} = 80{,}2$ millimetri; siccome poi nella costruzione si devono usare i ferri del commercio, così bisogna ricorrere ai prontuari delle ferriere onde scegliere il cantonale più opportuno. Nella tabella **XXXVI** si trova che il cantonale che più si avvicina colle sue dimensioni ai valori di s_1 ed a è quello $80 \times 80 \times 13$, il quale si assumerà nei calcoli. — L'altezza e la grossezza del lamierone sono date dalla (264) $a_0 = 10 + 0{,}7 \times 35{,}10 = 34{,}6$ centimetri, ossia $a_0 = 350$ millimetri, $g_0 = 0{,}05 \times 35 = 1{,}75$ centimetri ed in cifra rotonda si prende $g_0 = 20$ millimetri e così ne risultano le nervature rappresentate dalla **Fig. 351.**

Per determinare il momento di resistenza del sistema formato dai 4 cantonali e 2 lamieroni interposti, si calcola il relativo momento di inerzia

$$I_1 = {}^1/_{12} \left\{ 0{,}18 \times 3{,}6^3 - 0{,}134 \times 3{,}574^3 - 0{,}026 \times 3{,}44^3 - 0{,}02 \times 2{,}9^3 \right\} =$$

$$= 0{,}06121$$

la distanza $d_1 = {}^1/_2\ 3{,}6 = 1{,}8$, e prendendo lo sforzo pratico $R = 6$ chilogrammi per millimetro quadrato, ossia $R = 6000000$ chilogrammi per metro quadrato, mediante la (31) si trova

$$\mu_1 = \frac{6000000 \times 0{,}06121}{1{,}80} = 204033 \text{ Kgm.}$$

il cui valore nell'assunta scala si è portato in **c e**, **Fig. 352.** Il momento di resistenza della prima coppia di lamiere, essendone

$$I_2 = {}^1/_{12}\, 0{,}3\ (3{,}618^3 - 3{,}6^3) = 0{,}017575 \text{ e } d_2 = {}^1/_2\ 3{,}618 = 1{,}809,$$

ha per valore

$$\mu_2 = \frac{6000000 \times 0{,}017575}{1{,}809} = 58292 \text{ Kgm.}$$

il quale preso nella scala del disegno e riportato da **e** all'insù ripetutamente, dopo 5 volte viene a cadere sotto il vertice **d**, però di una quantità trascurabile, vale a dire con 5 coppie di lamiere il momento di resistenza totale sarebbe $\mu = \mu_1 + 5\,\mu_2 = 204033 + 5 \times 58292 = 495693$ chilogrammetri, cioè assai prossimo a maxM. La figura mostra come deve essere praticata la variazione di lunghezza delle lamiere.

β) Traliccio. — Il carico accidentale k' per metro corrente di ponte si potrebbe determinare coi procedimenti indicati al § 217-7) - 1), ma lo si deduce dalla tabella L prendendo un valor medio fra 5,63 e 5,43, cioè

$$k' = {}^1/_2\ (5{,}63 + 5{,}43) = 5{,}53 \text{ tonn.}$$

e quindi per metro corrente di trave

$$k' = {}^1/_2\ 5530 = 2765 \text{ Kg.}$$

mentre si è trovato il permanente $p = 850$. — Supposto che l'impalcato sia diviso in dieci scomparti, **Fig. 354**, per cui risulterebbero di lunghezza $\lambda =$ metri 3,6, lo sforzo di taglio in un qualunque scomparto è dato dalla (298), cioè

$$T = {}^1/_8\ 2765 \times 35{,}10 + (35{,}10 - \alpha \times 2 \times 3{,}6)\ ({}^1/_2\ 850 + {}^3/_8\ 2765) =$$
$$= 12148 + (35{,}10 - \alpha \times 7{,}20)\ 1462,$$

nella quale ponendo $\alpha = 0, 1, 2, 3, \ldots$ si determinano gli sforzi di taglio rispettivamente per gli scomparti 1°, 2°, 3°,... e mediante le (203) (204), nelle quali si deve porre in luogo di masT il valore di T relativo allo scomparto che si considera, si determina la riquadratura dei singoli gruppi di sbarre.

In pratica però si procede nel modo seguente:

Si calcola masT e masT$_0$, i cui valori sono dati dalla (297) e si ha

$$mas\,T = {}^1/_2\ (850 + 2765)\ 35{,}10 = 63443$$
$$mas\,T_0 = {}^1/_8\ 2765 \times 35{,}10 = 12131$$

e si determinano gli sforzi che cimentano nel senso dell'asse le sbarre corrispondenti alla sezione d'appoggio e quelle corrispondenti alla mezzaria, i quali chiamati t e t_0, e ricordando che si è supposto il traliccio quadruplo e l'angolo di inclinazione di 45°, **Fig. 223** e **224**, risultano

$$t = \frac{mas\,T}{n \cos \beta} = \frac{63443}{4 \times \cos 45^\circ} = 22437$$

$$t_0 = \frac{mas\,T_0}{n \cos \beta} = \frac{12131}{4 \times \cos 45^\circ} = 4296.$$

Si portano questi valori quali ordinate rispettivamente agli appoggi e nel mezzo, **Fig. 352**, nella quale si è presa la scala di 1 millimetro per 1000 chilogrammi, e si tira la spezzata **A, C, B**, che rappresenta la legge di variazione degli sforzi longitudinali per le singole sbarre. Si prendono gli sforzi pratici per millimetro quadrato $R_t = 6$ chilogrammi per le sbarre tese, ed $\frac{R_c}{m} = 3{,}5$ chilogrammi per le sbarre compresse. Si sceglie poscia un conveniente tipo di ferri per le sbarre le più cimentate, cioè le estreme, e ciò

tanto per le tese che per le compresse in modo che la rispettiva resistenza risulti approssimativamente eguale; nel presente esempio per le sbarre compresse si è preso il ferro T, n° 18 della tabella XXXII, congiunto con un ferro piatto, di area complessiva $\omega_c = 6603$ millimetri quadrati, e per le sbarre tese un ferro piatto 200×19 di area $\omega_t = 3800$ millimetri quadrati, le cui resistenze sono rispettivamente $r_1 = 6603 \times 3{,}5 = 23110$, ed $r_1 = 3800 \times 6 = 22800$, cioè prossimamente eguali. — Poi si va gradatamente scegliendo ferri di area minore in modo che le resistenze delle sbarre tese e delle compresse dello stesso gruppo si corrispondano, e si prosegue fino a ridursi ad un' area circa un quarto della massima, e si forma uno specchio ordinato come il seguente (i ferri T furono scelti dalla tabella XXXII).

1	200×11 T $\frac{200 \times 100}{15 \times 16{,}5}$ — 200×19	$\omega_c = 6603$ mm□ $\omega_t = 3800$ »	$r_1 = 6603 \times 3{,}5 = 23110$ Kg $r_1 = 3800 \times 6 = 22800$ »
2	200×10 T $\frac{170 \times 90}{14 \times 14}$ — 200×16	$\omega_c = 5444$ mm□ $\omega_t = 3200$ »	$r_2 = 5444 \times 3{,}5 = 19054$ Kg. $r_2 = 3200 \times 6 = 19200$ »
3	T $\frac{200 \times 100}{15 \times 16{,}5}$ — 200×13	$\omega_c = 4403$ mm□ $\omega_t = 2600$ »	$r_3 = 4403 \times 3{,}5 = 15410$ Kg. $r_3 = 2600 \times 6 = 15600$ »
4	T $\frac{170 \times 90}{14 \times 14}$ — 170×12	$\omega_c = 3444$ mm□ $\omega_t = 2040$ »	$r_4 = 3444 \times 3{,}5 = 12054$ Kg. $r_4 = 2040 \times 6 = 12240$ »
5	T $\frac{150 \times 82}{11 \times 10}$ — 150×9	$\omega_c = 2360$ mm□ $\omega_t = 1350$ »	$r_5 = 2360 \times 3{,}5 = 8260$ Kg. $r_5 = 1350 \times 6 = 8100$ »

Osservazione. — *È opportuno di tenere le larghezze delle sbarre tese e compresse dello stesso gruppo fra loro eguali — come si è fatto nello specchio precedente — però se si vuole in ogni gruppo la maggior coincidenza nei valori delle resistenze, si possono anche adottare larghezze differenti.*

Si portano poscia i valori delle resistenze r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 nell'assunta scala delle forze, quali ordinate, dall'orizzontale A B all'ingiù e si guidano le corrispondenti orizzontali. Per avere finalmente la suddivisione dei gruppi di sbarre nel traliccio, basta condurre quelle tali verticali che, passando per un nodo, abbiano ad incontrare successivamente le orizzontali, esternamente

alla linea $A_1 C_1 B_1$, come si vede nella **Fig. 352.** Le sbarre comprese fra due successive di queste verticali costituiscono un gruppo e devono avere la riquadratura, ossia la resistenza, corrispondente all'orizzontale intercetta fra le verticali medesime.

Osservazione. — *Appartengono ad un dato gruppo o scomparto quelle sbarre che hanno il loro estremo, rivolto al più vicino appoggio, compreso nello scomparto medesimo. — È evidente che operando in questo modo la suddivisione in gruppi non corrisponde sempre a quella degli scomparti dell'impalcato, come, per esempio, si vede nella* **Tav. 29** (Fig. 3).

γ) Montanti di rinforzo. — Supponendo di farli con ferri a T, e che l'impalcato sia posto alla parte inferiore, essi sono soggetti a trazione. Prendendo ferri a T, colle dimensioni $\frac{80 \times 150}{10 \times 9}$, risulta $\omega_t = 2060$ millimetri quadrati e ricorrendo alla (278) si trova $p_i = (120 \times 4{,}5 + 150) = 690$ chilogrammi e per metro corrente di trave $p_i = {}^1/_2\ 690 = 345$ chilogrammi. Lo sforzo unitario che li cimenta si ha dalla (299), cioè

$$\frac{3{,}60\ (345 + 2765)}{2060} = 5{,}43 \text{ Kg. per mm}\square.$$

δ) Pareti sugli appoggi. — Le pareti sugli appoggi si suppongano colla sezione rappresentata nella **Fig. 353.** Si prendano i vari ferri colle dimensioni segnate in detta figura, per cui i quattro ferri a ⌝ fra loro eguali hanno l'area $\omega_I = 971$ millimetri quadrati, i due ferri a T hanno ognuno l'area $\omega_{II} = 2060$ millimetri quadrati, e la lamiera ha l'area $\omega_{III} = 10800$. La sezione resistente totale Ω si compone di quelle dei quattro ferri a ⌝, dei due ferri a T e della lamiera di lunghezza l_0. La parte di lamiera che sporge della quantità σ oltre la coppia di cantonali, sta fuori dell'appoggio, e serve per l'attacco delle sbarre del traliccio, per cui essa non entra nella resistenza della parete. Risulta dunque

$$\Omega = 4 \times \omega_I + 2\ \omega_{II} + \omega_{III} = 4 \times 971 + 2 \times 2060 + 10800 = 18804 \text{ mm}\square$$

Lo sforzo pratico $\frac{R_c}{m}$ si prende mediamente anche per le pareti sugli appoggi di 3,5 chilogrammi per millimetro quadrato; lo sforzo unitario reale che le cimenta è dato dalla (300), cioè

$$\frac{(850 + 2765)\ 35{,}10}{2 \times 18804} = 3{,}40 \text{ Kg. per mm}\square$$

il quale coincide assai prossimamente collo sforzo ammesso in pratica.

La trave così calcolata, è rappresentata schematicamente nella **Fig. 354.**

Travi a traliccio dissimetrico.

1. Procedimento numerico.

223. Generalità. — Il metodo indicato ai §§ **218** e seguenti per il calcolo delle travi a traliccio riceve una opportuna applicazione quando si tratti di travi a traliccio multiplo simmetrico con maglie fitte, inquantochè allora la parete a traliccio coi nodi molto vicini funziona con grande analogia come una parete piena, e quindi la trave a traliccio si può calcolare come una trave a parete piena, vale a dire le nervature come resistenti al momento inflettente e le sbarre del traliccio agli sforzi taglienti che si sviluppano nelle varie sezioni. Ma se il traliccio è a grandi maglie, e sopratutto se è dissimetrico, allora bisogna calcolare gli sforzi a cui sono soggette le varie parti della trave in modo più razionale. Conviene cioè considerare la trave come un sistema articolato le di cui sbarre sono soggette semplicemente a degli sforzi o tensioni longitudinali. In due modi si può procedere nel calcolo delle tensioni che si sviluppano tanto nelle sbarre del traliccio, quanto in quelle costituenti le nervature, cioè:

1° Valendosi del valore dei momenti inflettenti e degli sforzi taglienti che si verificano in corrispondenza dei vari nodi della trave (che si devono determinare a priori) e mediante i quali si valutano le ricercate tensioni;

2° Valendosi semplicemente delle forze esterne che cimentano il sistema (comprese le reazioni degli appoggi) nella supposizione che esse operino sui nodi e le quali, soltanto, bastano per determinare le tensioni incognite.

Questo secondo metodo si conosce sotto il nome di *Metodo dei momenti statici;* venne esposto ai §§ **74** a **77** e verrà seguito nella presente opera.

Per le travi dei ponti le forze esterne sono dovute al *carico permanente*, ed all'*accidentale* o *mobile*, che si considerano entrambi come uniformemente distribuiti, ed i relativi valori per unità corrente p, k e k_1 si determinano nei modi indicati ai §§ **216**, **217**. Si suppone poi che entrambi questi carichi agiscano nei nodi, sui quali vengono equabilmente ripartiti (ciò che realmente si verifica nell'impiego delle travi trasversali).

224. Azione dei carichi.

α) **Tensioni parziali** — Il *peso permanente* della costruzione cimenta una qualunque sbarra con uno sforzo costante che può essere o di trazione o di compressione, cioè una tensione o soltanto positiva o soltanto negativa. Il *carico accidentale* o mobile può cimentare indipendentemente dal carico permanente, una stessa sbarra alternativamente con sforzi di trazione e di compressione a seconda della posizione che esso assume rispetto alla sbarra. Il massimo sforzo di trazione prodotto dal carico mobile è una tensione positiva e si chiama *tensione* (*mas*), ed il massimo sforzo di compressione prodotto dal carico mobile è una tensione negativa e si chiama *tensione* (*min*). Tali denominazioni sono giustificate perciò che una quantità considerata algebricamente è maggiore di 0 se è positiva, e minore di 0 se è negativa — col crescere del valore numerico tanto più grande diventa se è positiva, mentre tanto minore diventa se è negativa. — Vedesi dunque che la tensione (*min*) può essere in valore numerico maggiore della tensione (*mas*).

Se si tien conto dell'*azione simultanea del carico permanente ed accidentale* è evidente che lo sforzo complessivo è eguale alla somma algebrica degli sforzi parziali. Si chiama ancora tensione (*mas*) e tensione (*min*) rispettivamente la somma algebrica della tensione (*mas*) e (*min*) dipendente dal carico mobile con quella dovuta al carico permanente. È facile vedere allora che la totale tensione (*mas*) può risultare anche negativa e rappresentare cioè uno sforzo di compressione, mentre la totale tensione (*min*) può diventare anche positiva ed indicare quindi uno sforzo di trazione.

β) **Tensioni totali.** — Nei calcoli bisogna tener conto della *tensione totale* cimentante le sbarre. Essa si deduce dalla somma algebrica delle *tensioni parziali* dipendenti dal carico mobile e dal permanente.

1) **Nervature.** — Essendo le sbarre componenti le nervature cimentate nel massimo modo per carico mobile completo, § **75**, le tensioni parziali devono essere calcolate entrambe per carico completo, e quindi risultano della stessa natura, cioè tutte e due negative per la nervatura superiore, e tutte e due positive per la inferiore, sicchè *per ogni sbarra non si ha che una sola tensione totale della stessa natura delle parziali*, e cioè una

tensione totale positiva (trazione) pelle inferiori, ed una tensione totale negativa (compressione) pelle superiori.

2) **Diagonali e verticali.** — Per le diagonali e verticali succede ben altrimenti. Il carico mobile dà due valori per le tensioni di ogni singola sbarra, § **75**, cioè il (*mas*) positivo, ed il (*min*) negativo, mentre il carico permanente non dà che un'unica tensione che può essere o negativa o positiva. Si indica ancora con (*mas*) la *tensione totale* che risulta dalla somma algebrica della tensione (*mas*) dovuta al carico accidentale, che è sempre positiva, con quella dovuta al carico permanente che può essere positiva o negativa; e con (*min*) la *tensione totale* risultante dalla somma algebrica della tensione (*min*) dipendente dal carico accidentale, che è sempre negativa, con quella che dipende dal carico permanente che può essere positiva o negativa.

Ordinariamente (per le sbarre centrali) la tensione totale (*mas*) acquista un valore positivo, e quindi indica trazione mentre la tensione totale (*min*) risulta negativa, e quindi denota compressione. Però può avvenire (per le sbarre estreme) che la tensione relativa al carico permanente sia negativa ed in valore numerico maggiore della tensione (*mas*) positiva dipendente dal carico mobile: in questo caso la tensione totale (*mas*) risulta negativa (compressione), ed in valor numerico minore della tensione totale (*min*) pure negativa.

Viceversa, se la tensione dipendente dal carico permanente è positiva, ed in valor numerico maggiore della tensione (*min*) negativa dovuta al carico mobile, allora la *tensione totale* (*min*) risulta positiva (trazione), ma in valore numerico minore della tensione totale (*mas*), pure positiva. — Concludendo dunque *tanto la tensione totale* (*mas*), *quanto la totale* (*min*) *possono risultare positive o negative, ed indicare quindi sia uno sforzo di trazione, che uno sforzo di compressione.*

225. Influenza della posizione dell'impalcato. — Il peso permanente si distribuisce tanto sui nodi superiori che sui nodi inferiori, mentre l'accidentale opera soltanto sugli uni o sugli altri, secondochè l'impalcato è posto sopra o sotto. Interessa ora di ricercare quale influenza abbia la posizione del carico sul valore delle tensioni nelle travi a traliccio dissimetrico secondochè esso agisca sui nodi superiori o sugli inferiori. Si

consideri un qualunque scomparto, per esempio il terzo, nelle Fig. 355, 356, e condotto il piano di sezione e presa in esame la porzione di trave alla sinistra si vede che il valore delle tensioni S, I, D dipende dalle forze esterne applicate alla sinistra del piano di sezione. Ora tanto che sieno carichi i nodi superiori, o che lo sieno gli inferiori, si mantiene eguale il numero dei nodi caricati nonchè la loro rispettiva distanza, per cui i valori delle tensioni sono in ogni caso fra loro eguali. Per queste sbarre adunque la posizione dell'impalcato non influisce minimamente sul valore delle tensioni. Non è così per le verticali, inquantochè dal semplice esame delle Fig. 357, 358 si vede facilmente che col mutare della posizione stessa, varia anche il numero dei nodi che stanno a sinistra del piano di sezione e quindi il valore delle corrispondenti tensioni. Bisogna dunque per le tensioni delle verticali tener conto anche della posizione dell'impalcato.

Onde mettere in tutta evidenza il metodo si procede per via d'esempio.

Esempio.

1. Travi a traliccio dissimetrico con sole diagonali tese — Si supponga la trave a traliccio dissimetrico di un ponte per ferrovia largo $d = 4{,}5$ metri, la quale sia lunga $l = 16$ metri, alta $h = 2$ metri e divisa in otto scomparti eguali, larghi $\lambda = 2$ metri cadauno. Il peso permanente per metro corrente di ponte calcolato colle (278) (279) è

$$p = p_i + p_t = (120 \times 4{,}5 + 150) + 30 \times 16 = 1170 \text{ Kg.}$$

colla (280)

$$p = 650 + 24{,}5 \times 16 + 0{,}11 \times 16^2 = 1298 \text{ Kg.}$$

e mediamente $p = 1234$, e per metro corrente di trave $p = {}^1/_2\ 1234 = 617$ chilogrammi, ed arrotondando $p = 600$.

α) Impalcato posto sopra.

1) *Nervature* (*Sbarre orizzontali*). — Il carico accidentale per metro corrente di trave dedotto dalla tabella L è $k = {}^1/_2\ 5400 = 2700$ chilogrammi, e quindi ogni nodo porta un carico permanente $P = p\lambda = 600 \times 2 = 1200$ chilogrammi, un carico accidentale $K = k\lambda = 2700 \times 2 = 5400$ e quindi un carico totale $Q = P + K = 1200 + 5400 = 6600$, e per i due nodi estremi i carichi si riducono alla metà. Le massime tensioni nelle sbarre delle nervature si hanno per carico mobile completo e quindi (*considerando l'azione*

simultanea del carico permanente e dell'accidentale) le reazioni degli appoggi sono fra loro eguali, cioè $A = B = {}^1/_2\ (1200 + 5400)\ 8 = 26400$ chilogrammi. Immaginando per ogni scomparto condotto il rispettivo piano di sezione, **Fig. 359**, e considerando sempre la parte di trave posta alla sinistra del medesimo, ricordando che i poli per le sbarre superiori sono i corrispondenti nodi inferiori, e per le inferiori i nodi corrispondenti superiori, si ottengono le *massime tensioni totali* per le varie sbarre col mezzo delle seguenti equazioni dei momenti statici.

$$0 = S_1 \times 2 + 26400 \times 2 - 3300 \times 2 \quad S_{1(min)} = -23100$$
$$0 = -I_1 \times 2 + 26400 \times 0 - 3300 \times 0 \quad I_{1(mas)} = 0$$

$$0 = S_2 \times 2 + 26400 \times 4 - 3300 \times 4 - 6600\ (2) \quad S_{2(min)} = -39600$$
$$0 = -I_2 \times 2 + 26400 \times 2 - 3300 \times 2 \quad I_{2(mas)} = +23100$$

$$0 = S_3 \times 2 + 26400 \times 6 - 3300 \times 6 - 6600\ (2+4) \quad S_{3(min)} = -49500$$
$$0 = -I_3 \times 2 + 26400 \times 4 - 3300 \times 4 - 6600\ (2) \quad I_{3(mas)} = +39600$$

$$0 = S_4 \times 2 + 26400 \times 8 - 3300 \times 8 - 6600\ (2+4+6) \quad S_{4(min)} = -52800$$
$$0 = -I_4 \times 2 + 26400 \times 6 - 3300 \times 6 - 6600\ (2+4) \quad I_{4(mas)} = +49500$$

$$0 = S_5 \times 2 + 26400 \times 10 - 3300 \times 10 - 6600\ (2+4+6+8) \quad S_{5(min)} = -49500$$
$$0 = -I_5 \times 2 + 26400 \times 8 - 3300 \times 8 - 6600\ (2+4+6) \quad I_{5(mas)} = +52800$$

$$0 = S_6 \times 2 + 26400 \times 12 - 3300 \times 12 - 6600\ (2+4+6+8+10) \quad S_{6(min)} = -39600$$
$$0 = -I_6 \times 2 + 26400 \times 10 - 3300 \times 10 - 6600\ (2+4+6+8) \quad I_{6(mas)} = +49500$$

$$0 = S_7 \times 2 + 26400 \times 14 - 3300 \times 14 - 6600\ (2+4+6+8+10+12) \quad S_{7(min)} = -23100$$
$$0 = -I_7 \times 2 + 26400 \times 12 - 3300 \times 12 - 6600\ (2+4+6+8+10) \quad I_{7(mas)} = +39600$$

$$0 = S_8 \times 2 + 26400 \times 16 - 3300 \times 16 - 6600\ (2+4+6+8+10+12+14) \quad S_{8(min)} = 0$$
$$0 = -I_8 \times 2 + 26400 \times 14 - 3300 \times 14 - 6600\ (2+4+6+8+10+12) \quad I_{8(mas)} = +23100$$

Osservazione. — Dallo specchio superiore si vede che due sbarre di indice S_n ed I_{n+1} hanno tensioni di egual valore numerico, per cui basta calcolare le tensioni delle sole sbarre superiori S, e da esse dedurre quelle delle inferiori I. Anche nelle sbarre superiori vi sono delle tensioni a due a due eguali, ma sta bene di calcolarle tutte perchè si servono reciprocamente di prova.

2) *Traliccio* (*Sbarre diagonali e verticali*). — Il carico accidentale per metro corrente di trave si desume dalla tabella L ed è $k' = {}^1/_2\ 6480 = 3240$, e quindi il carico per ogni nodo $K' = 3240 \times 2 = 6480$ e per i due nodi estremi la metà. Il carico permanente agisce costantemente su tutti i nodi e le relative reazioni degli appoggi, fra loro eguali, sono

$$A_p = B_p = \frac{1}{2}\ 1200 \times 8 = 4800.$$

In quanto al carico accidentale, esso si deve supporre in differenti posizioni, onde avere le tensioni (*mas*) e (*min*) per le varie sbarre; e ad ogni nuova posizione cambia il valore delle reazioni degli appoggi. Nella **Fig. 360** sono rappresentate con linee grosse le posizioni del carico mobile che danno la tensione (*mas*) per le diagonali e la (*min*) per le verticali, e con linee sottili quelle posizioni che danno la tensione (*min*) per le diagonali e la (*mas*) per le verticali. — Per ogni sbarra, immaginato il relativo piano di sezione, si considererà la parte di trave a sinistra del medesimo, per cui basta calcolare i valori che prende rispettivamente la reazione $A_{k'}$ dell'appoggio di sinistra. Per ogni sbarra si hanno due valori di $A_{k'}$ relativi alle posizioni del carico mobile che danno rispettivamente la tensione (*mas*) e (*min*). Il carico sui nodi estremi è $^1/_2$ K′, si può anche rappresentare con $^4/_8$ K′ e si trasmette per intero sull'appoggio. In quanto ai carichi sugli altri nodi essi trasmettono sull'appoggio di sinistra rispettivamente $^7/_8$, $^6/_8$, $^5/_8$, $^4/_8$, $^3/_8$, $^2/_8$, $^1/_8$ di K′. Ad esempio per la verticale V_3 la posizione (3) del carico mobile che dà la corrispondente tensione (*min*) produce una reazione

$$A_{k'} = {}^5/_8\,K' + {}^4/_8\,K' + {}^3/_8\,K' + {}^2/_8\,K' + {}^1/_8\,K' = {}^1/_8\,K'\,(5+4+3+2+1) =$$
$$= {}^1/_8\,6480 \times 15 = 12150;$$

e quella posizione che dà la tensione (*mas*) produce una reazione

$$A_{k'} = {}^4/_8\,K' + {}^7/_8\,K' + {}^6/_8\,K' = {}^1/_8\,K'\,(4+7+6) = {}^1/_8\,6480 \times 17 = 13770.$$

Procedendo in analogo modo si calcolano tutti gli altri valori della reazione $A_{k'}$, ed all'uopo è opportuno di formare la tabella seguente che serve a procedere speditamente e con tutta evidenza.

Reazioni $A_{k'}$ per le tensioni (*mas*) delle verticali				Reazioni $A_{k'}$ per le tensioni (*min*) delle verticali			
Verticali	fatt. cost. $^1/_8$ K′ = $^1/_8$ 6480 = 810	Fattore variabile	Prodotto	Verticali	fatt. cost. $^1/_8$ K′ = $^1/_8$ 6480 = 810	Fattore variabile	Prodotto
0		0	$A_{k'}$=0	0		4+7+6+5+4+3+2+1=32	$A_{k'}$=25920
1		4	» 3240	1		7+6+5+4+3+2+1=28	» 22680
2		4+7=11	» 8910	2		6+5+4+3+2+1=21	» 17010
3		4+7+6=17	» 13770	3		5+4+3+2+1=15	» 12150
4		4+7+6+5=22	» 17820	4		4+3+2+1=10	» 8100
5		4+7+6+5+4=26	» 21060	5		3+2+1=6	» 4860
6		4+7+6+5+4+3=29	» 23490	6		2+1=3	» 2430
7		4+7+6+5+4+3+2=31	» 25110	7		1	» 810
8		4+7+6+5+4+3+2+1=32	» 25920	8		0	» 0

Trovate le reazioni $A_{k'}$ si procede al calcolo delle tensioni cominciando dalle verticali. La tensione delle verticali è la somma algebrica delle forze verticali che stanno da una parte del rispettivo piano di sezione, per esempio,

a sinistra. Nella **Fig. 361** sono messe in evidenza queste forze per le tensioni (*mas*) delle verticali V_0, V_1, V_2, e nelle **Fig. 362** per le tensioni (*min*) delle stesse, e se ne deducono facilmente le equazioni che servono a ricavare le tensioni delle verticali. Quelle delle diagonali si ottengono valendosi della relazione (102*a*). Nel caso presente per essere $\varphi = 45°$, e quindi $sen\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, diventa

$$D_{(mas)} = -V_{(min)}\sqrt{2} \quad , \quad D_{(min)} = -V_{(mas)}\sqrt{2}$$

ricordando che *sono diagonali e verticali che si corrispondano quelle che concorrono ad un nodo scarico.* Risulta dunque

$$0 = -V_{0(mas)} - A_p = -V_{0(mas)} - 4800 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad V_{0(mas)} = -\ 4800$$

$$0 = -V_{0(min)} - (A_p + A_{k_r}) = -V_{0(min)} - (4800+25920) \;.\;.\;.\;. \quad V_{0(min)} = -\ 30720$$

$$0 = -V_{1(mas)} - (A_p + A_{k_r}) + \frac{Q_r}{2} = -V_{1(mas)} - (4800+3240)+3840 \quad V_{1(mas)} = -\ 4200$$

$$0 = -V_{1(min)} - (A_p + A_{k_r}) + \frac{P}{2} = -V_{1(min)} - (4800+22680)+600 \quad V_{1(min)} = -\ 26880$$

$$D_{1(mas)} = -(-26880)\sqrt{2} = +\ 38008$$
$$D_{1(min)} = -(-4200)\sqrt{2} = +\ 5939$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = -V_{2(mas)} - (A_p + A_{k_r}) + \frac{Q_r}{2} + Q_r = -V_{2(mas)} - \\ \quad -(4800+8910)+3840+7680 \end{array}\right\} \;.\;.\;.\;. \quad V_{2(mas)} = -\ 2190$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = -V_{2(min)} - (A_p + A_{k_r}) + \frac{P}{2} + P = -V_{2(min)} - \\ \quad -(4800+17010+)+600+1200 \end{array}\right\} \;.\;.\;.\;. \quad V_{2(min)} = -20010$$

$$D_{2(mas)} = -(-20010)\sqrt{2} = +\ 28294$$
$$D_{2(min)} = -(-\ 2190)\sqrt{2} = +\ 3097$$

Per le altre diagonali e verticali si ottiene in analogo modo

$$0 = -V_{3(mas)} - (4800+13770)+3840+7680\times 2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad V_{3(mas)} = +\ 630$$
$$0 = -V_{3(min)} - (4800+12150)+\ 600+1200\times 2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad V_{3(min)} = -\ 13950$$

$$D_{3(mas)} = -(-13950)\sqrt{2} = +\ 19725$$
$$D_{3(min)} = -(+\ 630)\sqrt{2} = -\ 891$$

$$0 = -V_{4(mas)} - (4800+17820)+3840+7680\times 3 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad V_{4(mas)} = +\ 4260$$
$$0 = -V_{4(min)} - (4800+\ 8100)+\ 600+1200\times 3 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad V_{4(min)} = -\ 8700$$

$$D_{4(mas)} = -(-8700)\sqrt{2} = +\ 12302$$
$$D_{4(min)} = -(+\ 4260)\sqrt{2} = +\ 6024$$

$$0 = -V_{5(mas)} - (4800+21060)+3840+7680\times 4 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad V_{5(mas)} = +\ 8700$$
$$0 = -V_{5(min)} - (4800+\ 4860)+\ 600+1200\times 4 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad V_{5(min)} = -\ 4260$$

$$D_{5(mas)} = -(-4260)\sqrt{2} = +6024$$
$$D_{5(min)} = -(+8700)\sqrt{2} = -12302$$

$0 = -V_{6(mas)} - (4800+23490)+3840+7680\times 5$ . . . . . $V_{6(mas)} = +13950$
$0 = -V_{6(min)} - (4800+2430)+600+1200\times 5$ . . . . . $V_{6(min)} = -630$

$$D_{6(mas)} = -(-630)\sqrt{2} = +891$$
$$D_{6(min)} = -(+13950)\sqrt{2} = -19725$$

$0 = -V_{7(mas)} - (4800+25110)+3840+7680\times 6$ . . . . . $V_{7(mas)} = +20010$
$0 = -V_{7(min)} - (4800+810)+600+1200\times 6$ . . . . . $V_{7(min)} = +2190$

$$D_{7(mas)} = -(+2190)\sqrt{2} = -3097$$
$$D_{7(min)} = -(+20010)\sqrt{2} = -28294$$

Per l'ultima verticale V_8, condotto il piano di sezione, si osservi che fra le forze che stanno a sinistra del medesimo si trovano anche le reazioni dell'appoggio di destra che hanno per valore $B_p = 4800$ per il carico permanente, e per l'accidentale $B_{k'} = 22680$ per la tensione (*mas*) e $B_{k'} = 3240$ per la tensione (*min*). Risulta dunque:

$0 = -V_{8(mas)} - (4800+25920)+3840+7680\times 7 - (4800+22680)$ . . $V_{8(mas)} = -600$
$0 = -V_{8(min)} - (4800+0)+600+1200\times 7 - (4800+3240)$ . . . . $V_{8(min)} = -3840$

Più brevemente però si procede considerando le forze verticali che stanno a destra del piano di sezione, poste in evidenza dalla **Fig. 363**, ed eguagliandone a zero la loro somma algebrica si ha

$$0 = V_{8(mas)} + \frac{P}{2} = V_{8(mas)} + 600 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad V_{8(mas)} = -600$$

$$0 = V_{8(min)} + \frac{Q'}{2} = V_{8(min)} + 3840 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad V_{8(min)} = -3840$$

Le tensioni della diagonale D_8 non si possono calcolare col mezzo della (102*a*), perchè il nodo nel quale essa si incontra colla rispettiva verticale V_8 non è scarico, ma soggetto alle reazioni dell'appoggio di destra. Esse si determinano però facilmente considerando la parte di trave che sta a sinistra del piano di sezione [illegible], **Fig. 364** e **359**, e scrivendo che la somma algebrica delle forze verticali che la cimentano (compresa la componente verticale della tensione D_8) è eguale a zero. Ricordando che le posizioni del carico mobile che danno la tensione (*mas*) e (*min*) sono inverse di quelle relative alle sbarre verticali, bisogna prendere nella tabella delle reazioni i valori di $A_{k'}$ invertiti, cioè

$$0 = D_{8(mas)} \operatorname{sen}\varphi - \left(A_p + A_{k'}\right) + \frac{P}{2} + 7P$$
$$D_{8(mas)} = \left\{(4800+0) - 600 - 7\times 1200\right\}\sqrt{2} = -5939$$
$$0 = D_{8(min)} \operatorname{sen}\varphi - \left(A_p + A_{k'}\right) + \frac{Q'}{2} + 7Q'$$
$$D_{8(min)} = \left\{(4800+25920) - 3840 - 7\times 7680\right\}\sqrt{2} = -38008$$

Nella **Fig. 365***a* sono scritte tutte le calcolate tensioni (*mas*) e (*min*) accanto alle rispettive sbarre.

Se si immagina ora che la trave abbia le diagonali dirette in senso contrario, è facile vedere che le tensioni risultano quelle stesse della **Fig. 365***a* ma invertite, inquantochè è lo stesso di supporre la stessa trave disposta in senso inverso, come si vede nella **Fig. 365***b*. Dall'esame di queste due figure si scorge che costruendo la trave nei modi da esse indicati si avrebbero delle diagonali sempre tese, delle altre sempre compresse, ed alcune ora tese ed ora compresse, sotto l'azione simultanea del peso permanente e del carico mobile procedente da sinistra a destra o viceversa. Così dicasi delle verticali. Bisognerebbe quindi assegnare ad esse forme differenti a seconda della natura dello sforzo che le cimenta, e ne risulterebbe una costruzione irregolare e non accettata in pratica. Si preferisce invece quella tal forma di trave per la quale le diagonali non abbiano a resistere altro che a sforzi di trazione; sieno cioè nell'impossibilità di resistere a sforzi di compressione, locchè si ottiene conformandole a ferro piatto. Ne consegue allora che le verticali, le quali stante la relazione (102*a*) ricevono tensioni di natura contraria a quella delle diagonali, riescono tutte soggette a compressione. Tale disposizione è molto razionale inquantochè vengono cimentate alla compressione le sbarre meno lunghe del traliccio le quali quindi resistono meglio al piegamento, e si può più facilmente costruirle con forme rigide, impiegando i soliti ferri sagomati. Per vedere come debba essere costruita una tale trave, basta ricorrere ai due sistemi rappresentati nelle **Fig. 365***a b*, e fare i seguenti cambiamenti nella disposizione delle diagonali:

1° Ad ogni diagonale che è soggetta sempre a compressione, per qualsiasi direzione del carico mobile (ciò che si verifica per le diagonali degli scomparti estremi), si **sostituisce** la corrispondente, inclinata in senso inverso, dell'opposto sistema.

2° Ad ogni scomparto nel quale la diagonale è alternativamente stirata e compressa, a seconda della direzione del carico mobile (ciò che si verifica negli scomparti mediani) si **aggiunge** la diagonale in senso contrario dell'opposto sistema. In questi scomparti adunque si trovano ambe le diagonali, le quali però non lavorano simultaneamente, ma ciascheduna entra in azione soltanto per quella tale posizione del carico mobile che produce in essa trazione, mentre l'altra riescirebbe compressa, ma non essendo capace di resistere a tale sforzo si dispone similmente ad un filo allentato senza tensione.

Riguardo alle verticali si è già visto, per la relazione (102*a*), che esse non possono essere cimentate con tensioni della stessa natura di quelle delle diagonali, per cui dal momento che queste sono tutte cimentate alla trazione, quelle saranno tutte cimentate alla compressione, e quindi si deve tener conto soltanto delle massime tensioni negative.

Considerato poi che in ogni scomparto non entra in azione che una sola diagonale, qualunque sia la posizione del carico mobile, e precisamente quelle che montano a sinistra per la parte di sinistra, e quelle che montano a destra per la parte di destra — è evidente che le sbarre orizzontali della metà di sinistra e quelle della metà di destra della nuova trave, hanno

rispettivamente le tensioni della metà sinistra della **Fig. 365***a*, e della metà destra della **Fig. 365***b*.

Effettuando le indicate sostituzioni risulta la forma di trave rappresentata nella **Fig. 365***c* per la quale è facile dedurre le tensioni dei vari pezzi colla scorta dei due diagrammi, **Fig. 365***a b*. Queste tensioni sono scritte nella **Fig. 365***c* avendo tenuto conto, per ogni sbarra avente tensioni (*mas*) e (*min*) dello stesso segno, di quella che ha il maggior valore numerico.

Con analogo procedimento si potrebbero determinare le tensioni di una trave di cui tutte le diagonali fossero costruite in modo da resistere alla compressione nel qual caso le verticali sarebbero soggette a trazione, ma siccome tale tipo di trave non si usa nei ponti metallici, è inutile di darne un esempio.

β) Impalcato posto sotto. — Quando l'impalcato è posto alla parte inferiore, allora si suppone tanto il peso permanente che il carico mobile concentrati nei nodi inferiori. È facile scorgere — per quanto si è detto precedentemente, **Fig. 361, 362** — che allora le tensioni delle sbarre orizzontali e diagonali conservano gli stessi valori e la stessa natura del caso precedente, ma che cambiano quelle delle verticali, le quali però si possono dedurre da quelle delle diagonali, ricordando che sono corrispondenti una verticale ad una diagonale che si incontrano in un nodo scarico. Per esempio, corrispondente alla verticale V_2 è la diagonale D_3, per cui si ha

$$V_{2(mas)} = -D_{3(min)} \operatorname{sen} 45^\circ = -(-\ 891)\ 0{,}70711 = +\ 630$$
$$V_{2(min)} = -D_{3(mas)} \operatorname{sen} 45^\circ = -(+\ 19725)\ 0{,}70711 = -\ 13950$$

in analogo modo si determinano le tensioni delle altre verticali. Per la verticale V_8, siccome essa non concorre con nessuna diagonale in un nodo scarico, se ne determinano speditamente le tensioni considerando la parte a destra del relativo piano di sezione, **Fig. 367**, e siccome sul nodo superiore non agisce nè il carico permanente, nè l'accidentale, ne viene che per qualunque posizione del carico mobile la sbarra è senza tensione, cioè $V_{8(mas)} = 0$, $V_{8(min)} = 0$.

I diagrammi delle tensioni dei due sistemi opposti, nonchè quello della trave sono rappresentati nelle **Fig. 366***a b c*.

γ) Impalcato posto circa a metà altezza. — Quando l'impalcato ha questa posizione, allora è attaccato direttamente alle verticali, ed i punti d'attacco si possono considerare quali punti d'applicazione del carico permanente e mobile, e quindi tanto i nodi superiori che gli inferiori devono considerarsi scarichi. Le tensioni delle sbarre orizzontali e diagonali non mutano perciò di valore, bensì quelle delle verticali. Ad ogni diagonale corrispondono due porzioni di verticale, una alla parte superiore l'altra alla parte inferiore, le quali concorrono in nodi scarichi, per cui hanno la stessa tensione verticale della diagonale, ma di segno opposto. Nella **Fig. 368***a*, per esempio, la diagonale D_3 ha le due tensioni

$$D_{3(mas)} = +\ 19725 \quad \text{e} \quad D_{3(min)} = -\ 891$$

le quali divise per $-\sqrt{2}$ danno rispettivamente — 13950 e + 630 quali

tensioni (*min*) e (*mas*) per la parte superiore della verticale V_2 confinante a sinistra, e per la parte inferiore della V_3 confinante a destra. Così procedendo per tutte le altre verticali si deducono i diagrammi delle tensioni rappresentati nelle **Fig. 368***a b*. Ogni verticale adunque avrebbe due tensioni (*min*) corrispondenti alle due parti superiore ed inferiore; in pratica però si tien conto della tensione di maggior valore numerico per il calcolo della riquadratura delle verticali, perchè si fanno a sezione costante.

Osservazione. — Il peso permanente per ogni nodo consta di quello P_i dell'impalcato, e di quello P_t delle travi principali. Il primo agisce o sui nodi superiori o sugli inferiori, o direttamente sulle verticali in un punto ad essi interposto, ed ivi opera anche il carico accidentale, poichè è portato direttamente dall'impalcato. Il secondo invece si scarica metà sui nodi superiori e metà sui nodi inferiori, mentre nei calcoli antecedenti esso venne supposto esclusivamente su quei nodi i quali giacciono in corrispondenza dell'impalcato. In quanto alle sbarre orizzontali e diagonali ciò non porta veruna conseguenza, inquantochè le loro tensioni sono indipendenti dalla posizione altimetrica dei punti di carico. Per le verticali invece, le di cui tensioni sono influenzate dalla detta posizione, è evidente che non si è operato a rigore, e bisogna portare una rettifica sul valore delle calcolate tensioni nel modo che ora si espone. Se l'impalcato sta al disopra allora il peso $^1/_2\,P_t$ operante sui nodi inferiori viene trasmesso col mezzo delle verticali ai superiori, le quali perciò sono soggette ad uno sforzo costante di trazione $+\,^1/_2\,P_t$ che si deve sommare algebricamente alle tensioni dell'asta. Se invece l'impalcato giace sotto, allora il peso $^1/_2\,P_t$ operante sui nodi superiori viene trasmesso agli inferiori col mezzo delle verticali che sono perciò cimentate con uno sforzo costante di compressione $^1/_2\,P_t$, il quale deve essere algebricamente aggiunto alle tensioni delle verticali. Nell'esempio considerato si può prendere in cifra rotonda $P_t = 500$ chilogrammi (vedi la determinazione del peso p in principio dell'esempio), e quindi $^1/_2\,P_t = 250$. Si consideri, per esempio, la verticale V_3 nella **Fig. 365***a* (*Impalcato posto sopra*), e sarà

$$V_{3(mas)} = +\ 630 + 250 = +\ 880$$
$$V_{3(min)} = -\ 13950 + 250 = -\ 13700$$

e per la stessa verticale nella **Fig. 366***a* (*Impalcato posto sotto*) si avrà

$$V_{3(mas)} = +\ 4260 - 250 = +\ 4010$$
$$V_{3(min)} = -\ 8700 - 250 = -\ 8950.$$

Nei ponti di portata non molto grande la differenza è così insignificante che si può tralasciare di eseguire l'indicata correzione, ma nei ponti di grande portata, nei quali il carico permanente dovuto alle travi principali è molto grande in confronto del carico mobile, questa correzione diventa necessaria.

Il carico accidentale viene trasmesso ai nodi coll' intermezzo delle travi

trasversali. Un nodo riceve quindi il suo pieno carico quando sono totalmente occupati dal carico mobile i due scomparti ad esso adiacenti. Ma per il calcolo delle tensioni delle sbarre verticali e diagonali, si sono presi i nodi posti da una parte del piano di sezione affatto scarichi, e quelli posti dall'altra parte, col loro pieno carico. Ora questa condizione non si può a rigore verificare. Considerato il piano di sezione mn e l'avanzarsi graduale del carico mobile sopra del corrispondente scomparto, **Fig. 369**, si vede che la porzione del carico mobile che vi insiste sopra agisce su ambi i nodi che conterminano il medesimo, e solo allora che lo scomparto è del tutto occupato, il nodo che sta da una parte del piano mn è completamente carico, mentre quello che sta dall'altra parte lo è già per metà. La fatta supposizione adunque non è esatta, ma dà per le tensioni valori alquanto maggiori dei rigorosi. La differenza però non è molto sensibile, specialmente se si tratta di nodi non molto distanti fra loro e molti di numero, e sopratutto nei ponti per ferrovia nei quali il carico mobile è costituito da un sistema di carichi concentrati, — che anzi se gli scartamenti delle ruote corrispondono a quelli dei nodi, la supposizione diventa esatta. Si può quindi accettare la fatta supposizione che è favorevole alla stabilità e d'altronde soddisfacente nella pratica, sia per la semplicità del procedimento, che per il grado d'approssimazione dei risultati.

2. Travi a traliccio dissimetrico composto con diagonali tese e compresse. — Qualora si vogliano in tutti gli scomparti della trave le due diagonali incrociate, allora una è tesa, l'altra è compressa e resistono simultaneamente, e si può considerare la trave come costituita dai due sistemi semplici di traliccio rappresentati nelle **Fig. 370***a b*, i quali sopportino il carico totale metà per cadauno, ma il primo caricato nei nodi superiori ed il secondo negli inferiori. Supponendo i dati antecedenti, ogni nodo viene ad essere caricato con carichi metà dei precedenti, cioè

$$^1/_2 P = {}^1/_2 1200 = 600 \ , \ {}^1/_2 K = {}^1/_2 5400 = 2700 \ , \ {}^1/_2 K' = {}^1/_2 6480 = 3240$$

ed i nodi estremi con questi ultimi carichi dimezzati. Le tensioni quindi avranno metà valore di quelle delle **Fig. 365***a* e **366***b*, come è mostrato nelle **Fig. 370***a b*.

Si immagini ora che i due sistemi vengano posti uno accosto all'altro ed insieme congiunti così da formare un sistema unico, **Fig. 370***c* ; allora le sbarre che si sovrappongono, cioè le *orizzontali e verticali*, riceveranno una tensione che è la somma algebrica delle parziali, mentre le *diagonali*, le quali si incrociano, restano ognuna colla propria tensione. Per le verticali, ad eccezione delle due estreme, risulterebbe adunque una tensione nulla, perchè nei due sistemi semplici esse hanno tensioni di eguale valore numerico, ma di segno opposto, sempre però che metà carico operi sui nodi superiori e metà sugli inferiori. In realtà però il carico agisce soltanto o sui nodi superiori, o sugli inferiori, o fra essi sulle verticali a seconda della posizione dell'impalcato. Rispetto alle sbarre orizzontali e diagonali, siccome si è già veduto che il valore delle tensioni è indipendente dalla posizione alti-

metrica dei carichi, così è accettabile la fatta supposizione; ma per le sbarre verticali bisogna tener conto anche della posizione dell'impalcato. Se esso giace sopra, le verticali devono trasmettere metà del carico totale dei nodi superiori sugli inferiori e sono allora soggette ad una compressione

$$Q_0 = -\,{}^1/_2\,Q' = -\,{}^1/_2\,(1200 + 6480) = -\,3840$$

per l'impalcato posto sotto esse devono trasmettere metà del carico totale dei nodi inferiori ai superiori e sono soggette ad una trazione

$$Q_0 = +\,{}^1/_2\,Q' = +\,{}^1/_2\,(1200 + 6480) = +\,3840$$

quando l'impalcato è posto a circa metà altezza allora le verticali devono trasmettere un carico $Q_0 = {}^1/_2\,Q' = 3840$ tanto ai nodi superiori che agli inferiori e quindi sono stirate nella parte superiore con uno sforzo

$$+\,Q_0 = +\,3840$$

e compresse nella parte inferiore con uno sforzo

$$-\,Q_0 = -\,3840$$

Le verticali estreme devono trasmettere ai nodi superiori od agli inferiori un carico ${}^1/_2\,Q_0 = {}^1/_2\,3840 = 1920$, e quindi la loro tensione totale è

$$V_0 = V_8 = V_{0(min)} - {}^1/_2\,Q_0 = -\,15360 - 1920 = -\,17280$$

quando l'impalcato è posto sopra,

$$V_0 = V_8 = V_{0(min)} + {}^1/_2\,Q_0 = -\,15360 + 1920 = -\,13440$$

quando l'impalcato sta al basso, mentre, quando l'impalcato giace a circa metà altezza, la tensione di dette verticali ha il primo ed il secondo dei trovati valori rispettivamente per la porzione inferiore e superiore. Nelle **Fig. 370***c d e* sono segnate le tensioni delle varie sbarre valutate nel modo indicato.

3. Travi a traliccio dissimetrico multiplo con sole diagonali tese. — Si supponga il sistema doppio rappresentato nella **Fig. 375** colle due diagonali estreme concorrenti l'una al capo e l'altra al piede del relativo montante estremo, § **206**. Lo si scompone nei relativi sistemi semplici che lo costituiscono, **Fig. 373, 374**, e se ne deducono le tensioni. Supponendo l'impalcato posto sopra, e ritenendo i dati precedentemente assunti per la trave semplice calcolata in 1°, pag. 435, e considerato che i nodi distano un metro l'uno dall'altro, si vede che essi ricevono un carico dimezzato, cioè

$$P = \frac{1200}{2} = 600 \quad , \quad K = \frac{5400}{2} = 2700 \quad , \quad K' = \frac{6480}{2} = 3240.$$

Per il sistema **Fig. 373** dunque le tensioni sono quelle stesse della **Fig. 370***a*. Per il sistema **Fig. 374** invece bisogna calcolarle espressamente.

Nervature. (*Sbarre orizzontali*). — La distribuzione dei carichi è messa in evidenza dalla **Fig. 371**, ogni nodo cioè porta un carico P + K = 600 + 2700 = = 3300, e col procedimento indicato in 1° si deducono le tensioni delle varie sbarre, le quali sono scritte nella **Fig. 374**.

Traliccio. (*Sbarre diagonali e verticali*). — La distribuzione dei carichi e le posizioni del carico mobile che danno le tensioni (*mas*) e (*min*) per le varie sbarre si vedono nella **Fig. 372**, colla scorta della quale è facile formare la tabella delle reazioni che qui segue.

Reazioni $A_{k'}$ per le tensioni (*mas*) delle verticali				Reazioni $A_{k'}$ per le tensioni (*min*) delle verticali			
Verticali	fatt. cost.	Fattore variabile	Prodotto	Verticali	fatt. cost.	Fattore variabile	Prodotto
0	$^1/_{16}$ K' = $^1/_{16}$ 3240 = 202,5	0	$A_{k'}$ = 0	0	$^1/_{16}$ K' = $^1/_{16}$ 3240 = 202,5	15+13+11+9+7+5+3+1=64	$A_{k'}$ = 12960
1		0	» 0	1		15+13+11+9+7+5+3+1=64	» 12960
2		15	» 3038	2		13+11+9+7+5+3+1=49	» 9922
3		15+13=28	» 5670	3		11+9+7+5+3+1=37	» 7290
4		15+13+11=39	» 7898	4		9+7+5+3+1=25	» 5062
5		15+13+11+9=48	» 9720	5		7+5+3+1=16	» 3240
6		15+13+11+9+7=55	» 11138	6		5+3+1=9	» 1822
7		15+13+11+9+7+5=60	» 12150	7		3+1=4	» 810
8		15+13+11+9+7+5+3=63	» 12758	8		1	» 202
9		15+13+11+9+7+5+3+1=64	» 12960	9		0	» 0

Ciò fatto si determinano le tensioni (*mas*) e (*min*) per le varie sbarre, nello stesso modo indicato in 1°, ad eccezione della prima ed ultima diagonale, le quali formano coll'orizzonte un angolo $\varphi_1 > 45°$. Si vede nella figura che è $\operatorname{sen} \varphi_1 = \dfrac{2}{\sqrt{2^2+1}}$, per cui ricorrendo alla (102*a*) si ha

$$D_{1(mas)} \operatorname{sen} \varphi_1 = -V_{1(min)} \; ; \; D_{1(mas)} = -\left(-15360 \frac{\sqrt{2^2+1}}{2}\right) = +17172$$

$$D_{1(min)} \operatorname{sen} \varphi_1 = -V_{1(mas)} \; ; \; D_{1(min)} = -\left(-2400 \frac{\sqrt{2^2+1}}{2}\right) = +2683$$

È facile rilevare che gli stessi valori invertiti e col segno opposto danno le tensioni per la diagonale D_9, cioè

$$D_{9(mas)} = -2683 \quad , \quad D_{9(min)} = -17172$$

Nella **Fig. 374** sono scritte tutte le corrispondenti tensioni. Si immagini ora che i due sistemi semplici, **Fig. 373, 374**, si uniscano indissolubilmente l'uno all'altro, cosicchè le parti che si sovrappongono (cioè le sbarre orizzontali, e le verticali estreme) ricevono una tensione che è la somma algebrica delle tensioni parziali, mentre le altre parti (sbarre verticali e diagonali) conservano ognuna la propria tensione. È facile così desumere le tensioni del sistema doppio, che sono scritte nella **Fig. 375**.

Valendosi di quest'ultimo diagramma è facile di dedurre, colle norme già esposte in 1°, la forma che deve avere la trave acciocchè vi sieno sole diagonali stirate, nonchè le tensioni del maggior valore numerico per ogni sbarra, come si vede nella **Fig. 376**, avvertendo che per ogni scomparto dove le diagonali sono alternativamente stirate e compresse si deve porre le due diagonali incrociate.

In analogo modo si procede alloraquando l'impalcato è posto al basso od a mezza altezza.

2. Formule generali.

226. Generalità. — Il calcolo delle tensioni a cui sono soggette le varie sbarre costituenti le travi con nervature (correnti) parallele a traliccio dissimetrico si può fare mediante semplicissime espressioni generali, qualora a base dei calcoli si assuma tanto il peso permanente che l'accidentale come uniformemente distribuiti. In vari modi si è proceduto alla ricerca di queste espressioni:

1° Cercandole in funzione del valore numerico che assumono il momento inflettente e lo sforzo di taglio in corrispondenza ai nodi della trave relativi alle sbarre che si considerano. Queste formule, per usare le quali bisogna prima procedere alla ricerca dei valori numerici del massimo momento inflettente e del massimo sforzo di taglio per i vari nodi della trave, furono sviluppate dagli ingegneri Laissle e Schuebler (*) e dal professore Winkler (**).

2° Determinando prima l'espressione generale del momento inflettente e dello sforzo di taglio, per i detti nodi, in funzione del numero totale N dei campi o scomparti in cui è divisa la trave, del numero progressivo m di detti scomparti, dell'ampiezza λ dei medesimi, dell'altezza massima h della trave, dei carichi unitari permanente p e mobile k uniformemente distribuiti, e poscia (valendosi di dette espressioni) determinando le espressioni generali delle massime tensioni per le varie sbarre in funzione delle anzidette quantità, le quali altro non sono che altrettanti dati

(*) *Calcul et construction des ponts métalliques.* — Traduzione dal tedesco. — Stuttgart, 1871.

(**) *Vorträge über Brückenbau. — Theorie der Brücken.* — II. Heft. — Lieferung 2. — Vienna, 1875.

della questione. Queste formule colle quali si procede direttamente al calcolo delle tensioni, furono sviluppate dall'HEINZERLING (*).

3° Valendosi di procedimenti in parte grafici, in parte analitici quali sono quelli dovuti al professore E. MULLER (**), e quelli svolti dall'ingegnere CAMILLO GUIDI (***).

4° Si possono finalmente dedurre in modo assai semplice le dette espressioni in funzione delle note quantità N, m, λ, h, p, k, applicando il metodo dei momenti statici, e si procede ora a tale ricerca.

Essendo ogni trave simmetrica rispetto alla sua mezzaria, basta fare i calcoli per le sole sbarre di mezza trave, epperò nelle seguenti ricerche si prenderà in esame la metà di sinistra. Siccome in uno scomparto possono esservi ambe le diagonali, si chiamerà *diagonale principale*, o semplicemente *diagonale*, quella che incontra l'asse di simmetria della trave al di sotto della trave stessa e *controdiagonale* l'altra; cioè per la mezza trave di sinistra sono diagonali quelle che si innalzano verso sinistra, e controdiagonali quelle che s'innalzano verso destra.

Le sbarre della nervatura superiore, quelle della nervatura inferiore, le diagonali, controdiagonali e verticali, nonchè le corrispondenti tensioni si indicano rispettivamente colle lettere S, I, D, C, V ed i loro bracci di leva rispetto al polo colle lettere s, i, d, c, v. Le lunghezze delle diagonali e delle controdiagonali si indicano rispettivamente colle lettere δ, γ.

Per essere tutti gli scomparti in cui è divisa la trave di eguale lunghezza λ, ed i carichi uniformemente distribuiti, tutti i nodi sono egualmente caricati, ad eccezione degli estremi, i quali portano un peso che è metà di quello che carica i nodi intermedi.

Il carico permanente per ogni nodo intermedio è . $P = p\lambda$
» mobile per ogni nodo intermedio e per le *nervature* è . . . . . $K = k\lambda$

(*) *Grundzüge der constructiven Anordung, etc.* — Zweiter Theile. — Erstes Heft. — *Die statische Berechnung der Balkenbrüken.* — Lipsia, 1873.

(**) *Prontuario dell'ingegnere*, pubblicato dalla Società Hütte. — Traduzione italiana — 1879.

(***) *Giornale del Genio civile* — Parte non ufficiale. — Vol. I, 4ª serie. — Settembre, 1881.

Il carico totale per ogni nodo intermedio è . . $Q = (p + k)\lambda$
» mobile per ogni nodo intermedio e per il *traliccio* è . . . . . $K' = k\lambda$
» totale per ogni nodo intermedio e per il *traliccio* è . . . . . $Q' = (p + k)\lambda$
Per i nodi estremi i carichi sono rispettivamente $^1/_2 P$, $^1/_2 K$, $^1/_2 Q$, $^1/_2 K'$, $^1/_2 Q'$.

Nelle ricerche che seguono si prenderà sempre in considerazione la parte di trave che sta a sinistra del piano di sezione, e quindi fra le forze esterne sollecitanti il sistema si dovrà tener conto della reazione dell'appoggio di sinistra. Si indica con A_p la reazione dovuta al peso permanente, con A_k quella dipendente dal carico accidentale, per cui è $A_p + A_k$ la reazione totale, che si indica con A se è costante, e con A_m se è variabile.

227. Travi a traliccio dissimetrico semplice, con sole diagonali stirate. — Si consideri lo scomparto m^{mo} nella trave rappresentata dalla Fig. 377, al quale appartengono le sbarre S_m, I_m, D_m, V_m.

α) **Nervature.** — Il massimo sforzo in tutte le sbarre delle nervature ha luogo per carico completo, quando cioè tutti i nodi sono caricati di Q, e quindi la reazione d'appoggio ha un valore costante.

Per la sbarra qualunque S_m della *nervatura superiore* la tensione è fornita dalla (103) cioè

$$S_m = -\frac{Q\lambda}{2}\,\frac{m\,(N - m)}{s_m} \qquad (I)$$

Nelle travi rettilinee il braccio s_m è eguale per tutte le sbarre, ed ha per valore $s_m = h$, essendo h l'altezza della trave, per cui la (I) diventa

$$S_m = -\frac{Q\lambda}{2h}\,m\,(N - m) \qquad (301)$$

Per la sbarra I_m della *nervatura inferiore* la tensione è data dalla (104), cioè

$$I_m = \frac{Q\lambda}{2}\,\frac{(m - 1)\,(N - m + 1)}{i_m} \qquad (II)$$

e per essere il braccio i_m eguale per tutte le sbarre e di valore $i_m = h$, sostituendo risulta

$$I_m = \frac{Q\,\lambda}{2\,h}\,(m-1)\,(N+1-m) \qquad (302)$$

E siccome la tensione della sbarra S_{m-1} si ricava dalla (301) ponendo $(m-1)$ in luogo di m, cioè

$$S_{m-1} = -\frac{Q\,\lambda}{2\,h}\,(m-1)\,(N+1-m)$$

confrontando quest'ultima colla (302) si trova la seguente relazione

$$I_m = -S_{m-1} \qquad (303)$$

per cui le tensioni I si desumono direttamente dalle tensioni S.

β) **Traliccio.** — Il modo più sfavorevole di cimento per le sbarre del traliccio ha luogo per carico mobile parziale, per cui la reazione d'appoggio è variabile, e bisogna per ciascheduna di esse determinare le due tensioni totali (*mas*) e (*min*) dipendenti cioè dall'azione simultanea del carico permanente ed accidentale, essendo P il carico permanente di un nodo, e K' l'accidentale.

1) **Diagonali principali** (*che si innalzano a sinistra*) — Si chiami φ l'angolo d'inclinazione delle diagonali coll'orizzontale. — La componente verticale della tensione D di queste sbarre è dunque D sen φ. La tensione (*mas*) per la diagonale D_m, dovuta alla posizione di carico rappresentata nella Fig. 378*a*, è data dalla (105), la quale, considerato che è

$$d_m = (a_m + m\,\lambda)\,\frac{h_{m-1}}{\delta_m} = v_m\,\frac{h_{m-1}}{\delta_m},$$

si può porre sotto la forma

$$D_{m(mas)} = \left[\frac{P}{2}\left\{(N+1-2\,m) - \frac{\lambda\,m\,(m-1)}{a_m}\right\} + \right.$$
$$\left. + \frac{K'}{2}\left\{\frac{(N-m)\,(N-m+1)}{N}\right\}\right]\frac{a_m\,\delta_m}{v_m\,h_{m-1}} \qquad (III)$$

Nelle travi rettilinee per essere le nervature parallele diventa la distanza $a_m = \infty$, nonchè $v_m = \infty$ e per essere costante il rapporto $\frac{\delta_m}{h_{m-1}} = \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}$, la (III) si cambia nell'altra

$$D_{m(mas)} = \left[\frac{P}{2}(N+1-2m) + \frac{K'}{2N}(N-m)(N+1-m)\right]\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi} \qquad (304)$$

Per la medesima diagonale D_m, la tensione (min), dipendente dalla posizione di carico rappresentata nella Fig. 378*b*, è data dalla (106), che si può mettere sotto la forma

$$D_{m(min)} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{P}{2}\left\{(N+1-2m) - \dfrac{\lambda m(m-1)}{a_m}\right\} - \\ -\dfrac{K'}{2}\left\{\dfrac{m(m-1)}{N} + \dfrac{\lambda m(m-1)}{a_m}\right\} \end{array}\right] \frac{a_m\,\delta_m}{v_m\,h_{m-1}} \qquad (IV)$$

ed essendo

$$a_m = \infty \quad , \quad v_m = \infty \quad , \quad \frac{\delta_m}{h_{m-1}} = \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}$$

la (IV) diventa

$$D_{m(min)} = \left[\frac{P}{2}(N+1-2m) - \frac{K'}{2N}m(m-1)\right]\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi} \qquad (305)$$

Se si considera la diagonale di indice $(N+1-m)$ si ottengono le relative tensioni ponendo nella (304) e (305) $N+1-m$ in luogo di m. Fatte queste sostituzioni risulta

$$D_{(N+1-m)\,(mas)} = \left[-\frac{P}{2}(N+1-2m) + \frac{K'}{2N}m(m-1)\right]\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}$$

$$D_{(N+1-m)\,(min)} = \left[-\frac{P}{2}(N+1-2m) - \frac{K'}{2N}(N-m)(N+1-m)\right]\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}$$

le quali confrontate colle (304) e (305) porgono le relazioni

$$\left.\begin{array}{l} D_{m(min)} = -D_{(N+1-m)\,(mas)} \\ D_{m(mas)} = -D_{(N+1-m)\,(min)} \end{array}\right\} \qquad (V)$$

2) **Controdiagonali** (*che si innalzano a destra*). — Per queste diagonali, dirette in senso contrario delle precedenti, Fig. 379, è facile vedere che le posizioni del carico mobile che dànno le tensioni (*mas*) e (*min*) sono quelle stesse, *ma invertite*, che si devono assumere, per le corrispondenti diagonali principali, mentre la componente verticale della tensione delle controdiagonali è diretta all'insù, cioè in senso contrario a quella delle diagonali principali. Perciò servono le stesse equazioni dell'equilibrio statico colla differenza che per le controdiagonali bisogna assegnare il segno + alla componente verticale della tensione ed invertire i simboli (*mas*) e (*min*). È facile dunque, dietro queste considerazioni, stabilire le relazioni seguenti:

$$C_{m(mas)} = -D_{m(min)} \quad , \quad C_{m(min)} = -D_{m(mas)} \qquad (306)$$

Confrontando le (306) colle (V) risulta

$$C_{m(mas)} = D_{(N+1-m)(mas)} \quad , \quad C_{m(min)} = D_{(N+1-m)(min)} \qquad (306a)$$

e tanto le (306) come le (306*a*) servono a dedurre speditamente le tensioni delle controdiagonali una volta note quelle delle diagonali principali.

In pratica si usa di costruire la trave in modo che le diagonali non abbiano a resistere altro che a sforzi di trazione. Onde raggiungere tale intento si fanno le diagonali con ferri piatti, i quali sono incapaci di resistere alla compressione. Perciò, in tutti quei scomparti nei quali le diagonali principali hanno tanto la tensione (*mas*) quanto la tensione (*min*) con segni positivi (sforzi di trazione), si lascia la sola diagonale principale, la quale per qualunque posizione del carico mobile non viene mai cimentata con sforzi di compressione; mentre in quei scomparti nei quali le diagonali principali hanno la tensione (*mas*) positiva e la tensione (*min*) negativa si mette la controdiagonale; con che si ottiene che per la posizione del carico mobile che produce la tensione (*mas*) *positiva* lavora la diagonale principale, e per la posizione del carico mobile che produce la tensione (*min*) *negativa*, la diagonale principale rimane inerte (perchè non è capace di resistere a sforzi negativi, cioè di compressione) e lavora invece la controdiagonale, che riceve uno sforzo di trazione.

Anche le controdiagonali devono resistere soltanto alla trazione, e per esse basta calcolare dunque la sola tensione (*mas*) mediante la (306), e basta altresì limitare il calcolo a quei soli scomparti nei quali la tensione (*min*) delle diagonali principali risulta negativa.

Dal fin qui detto si scorge che in queste travi alcuni scomparti hanno una sola diagonale (gli estremi), ed alcuni altri hanno ambe le diagonali incrociate (gli intermedi) e solo dalle risultanze dei calcoli si potrà stabilire in ogni caso, quali saranno gli uni e quali gli altri.

3) **Verticali.** — Indicando con ΣF la somma algebrica delle forze esterne che stanno a sinistra del piano di sezione, compresa la reazione dell'appoggio, *nel caso dell'impalcato posto sopra*, **Fig. 380***a*, sezionando la diagonale D_m si ha

$$\Sigma F - D_m \operatorname{sen}\phi = 0 \qquad \text{(VI)}$$

e sezionando la verticale V_m

$$\Sigma F + V_m = 0 \qquad \text{(VII)}$$

e siccome il valore di ΣF è eguale nelle (VI) e (VII), dal loro confronto risulta

$$V_m = - D_m \operatorname{sen}\phi \qquad \text{(VIII)}$$

e *nel caso dell'impalcato posto sotto*, **Fig. 380***b*, sezionando la diagonale D_{m+1} si trova

$$\Sigma F - D_{m+1} \operatorname{sen}\phi = 0 \qquad \text{(IX)}$$

e sezionando la verticale V_m

$$\Sigma F + V_m = 0 \qquad \text{(X)}$$

e per essere ΣF eguale nelle (IX) e (X) dal loro confronto si trova

$$V_m = - D_{m+1} \operatorname{sen}\phi \qquad \text{(XI)}$$

Le (VIII) e (XI) servono al calcolo delle tensioni delle verticali in funzione di quelle delle diagonali, osservando che le prime

sono di natura contraria delle seconde, e che sono verticali e diagonali che si corrispondono, *quelle che concorrono ad un nodo scarico*. Volendo che la trave abbia sole diagonali stirate, ne viene che le verticali saranno sempre compresse e quindi basta calcolare la sola tensione (*min*) di quest'ultime la quale si determina:

Per l'impalcato posto sopra colla

$$V_{m(min)} = - D_{m(mas)} \operatorname{sen} \phi \qquad (307)$$

e *per l'impalcato posto sotto* colla

$$V_{m(min)} = - D_{m+1(mas)} \operatorname{sen} \phi \qquad (308)$$

La (307) cade in difetto per la prima verticale V_0 (quella sull'appoggio) inquantochè la diagonale corrispondente sarebbe quella di indice D_0 che manca. Condotto per la verticale V_0 il rispettivo piano di sezione, Fig. 380*a*, alla sinistra del medesimo non si trova che la sola reazione dell'appoggio, cioè A_0 la quale ammette due valori, e cioè per ponte scarico $A_0 = \frac{N}{2} P$, e per ponte carico $A_0 = \frac{N}{2} (P + K')$, il primo dei quali è relativo alla tensione (*mas*) ed il secondo alla tensione (*min*), e siccome si tiene conto soltanto di quest'ultima (come quella del massimo valore assoluto) e ricordando sussistere la relazione $V_0 + A_0 = 0$, si ha

$$V_{0(min)} = - \frac{N}{2} (P + K') \qquad (307a)$$

Esempio.

Si supponga un ponte per ferrovia ad un binario, colla portata fra i centri d'appoggio delle travi principali di metri 32,00. — Ogni trave sia divisa in un numero di scomparti $N = 10$, e quindi l'ampiezza d'ogni scomparto è $\lambda = \frac{32}{10} =$ metri 3,20. Prendendo l'altezza della trave $^1/_{10}$ della portata si ha $h = {}^1/_{10}\ 32 = 3{,}2$ per cui le diagonali hanno l'inclinazione di 45° e quindi risulta

$$\frac{1}{\operatorname{sen} \varphi} = \sqrt{2} = 1{,}414 \quad , \quad \operatorname{sen} \varphi = 0{,}7072$$

Per ogni nodo poi si hanno i seguenti carichi:

Carico permanente	$P = 700 \times 3{,}20 = 2240$
» mobile pel calcolo delle *nervature* .	$K = 2350 \times 3{,}20 = 7520$
» » » del *traliccio* . .	$K' = 2800 \times 3{,}20 = 8960$

I nodi estremi portano carichi metà dei precedenti.

Nervature. — Il carico totale per ogni nodo è

$$Q = P + K = 2240 + 7520 = 9760.$$

Per il calcolo delle tensioni delle sbarre appartenenti alla nervatura superiore serve la (301) che si riduce alla seguente forma

$$S_m = -\frac{9760 \times 3{,}2}{2 \times 3{,}2} m\,(10 - m) = -4880\, m\,(10 - m)$$

mentre le tensioni delle sbarre appartenenti alla nervatura inferiore si deducono mediante la (303).

Ponendo $m = 1, 2, 3, 4, 5$ nella superiore si trova

$S_1 = -4880 \times 1\,(10 - 1) = -43920$	$I_1 = 0$
$S_2 = -4880 \times 2\,(10 - 2) = -78080$	$I_2 = -S_1 = +43920$
$S_3 = -4880 \times 3\,(10 - 3) = -102480$	$I_3 = -S_2 = +78080$
$S_4 = -4880 \times 4\,(10 - 4) = -117120$	$I_4 = -S_3 = +102480$
$S_5 = -4880 \times 5\,(10 - 5) = -122000$	$I_5 = -S_4 = +117120$

Traliccio. — *Diagonali principali.* — La tensione (*mas*) di queste diagonali si calcola colla (304) che si mette sotto la forma seguente:

$$D_{m\,(mas)} = \left[\frac{2240}{2}(10 + 1 - 2m) + \frac{8960}{2 \times 10}(10 - m)(10 + 1 - m)\right]\sqrt{2} =$$

$$= \left[1120\,(11 - 2m) + 448\,(10 - m)(11 - m)\right] 1{,}414$$

nella quale, ponendo $m = 1, 2, 3, 4, 5$, si trova

$$D_{1(mas)} = +71266$$
$$D_{2(mas)} = +56696$$
$$D_{3(mas)} = +43393$$
$$D_{4(mas)} = +31357$$
$$D_{5(mas)} = +20588$$

La tensione (*min*) delle sbarre diagonali si calcola colla (305) posta sotto la seguente forma

$$D_{m\,(min)} = \left[\frac{2240}{2}(10 + 1 - 2m) - \frac{8960}{2 \times 10} m\,(m-1)\right]\sqrt{2} =$$

$$= \left[1120\,(11 - 2m) - 448\,m\,(m-1)\right] 1{,}414$$

nella quale, facendo $m = 1, 2, 3, 4, 5$, risulta

$$D_{1(min)} = + 14253$$
$$D_{2(min)} = + 9819$$
$$D_{3(min)} = + 4118$$
$$D_{4(min)} = - 2851$$
$$D_{5(min)} = - 11086$$

Controdiagonali. — I scomparti nei quali si deve mettere la controdiagonale sono il 4° ed il 5° perchè in essi la diagonale principale ha la tensione (*min*) negativa. La tensione (*mas*) delle controdiagonali è data dalla (306) e si ha

$$C_{4(mas)} = - D_{4(min)} = - (- 2851) = + 2851$$
$$C_{5(mas)} = - D_{5(min)} = - (- 11086) = + 11086$$

Verticali. — La tensione di queste sbarre dipende anche dalla posizione dell'impalcato.

1) *Impalcato posto sopra.* — In questo caso la tensione (*min*) si calcola colla (307), eccetto che per la verticale estrema V_0 per la quale serve la (307*a*) e si trova

$$V_{0(min)} = - \frac{10}{2}(2240 + 8960) = - 56000$$

$$V_{1(min)} = - (71266 \times 0{,}7072) = - 50399$$
$$V_{2(min)} = - (56696 \times 0{,}7072) = - 40095$$
$$V_{3(min)} = - (43393 \times 0{,}7072) = - 30688$$
$$V_{4(min)} = - (31357 \times 0{,}7072) = - 22176$$
$$V_{5(min)} = - (20588 \times 0{,}7072) = - 14556$$

2) *Impalcato posto sotto.* — In questo caso la tensione (*min*) si calcola colla (308) applicando la quale risulta

$$V_{0(min)} = - (71266 \times 0{,}7072) = - 50399$$
$$V_{1(min)} = - (56696 \times 0{,}7072) = - 40095$$
$$V_{2(min)} = - (43393 \times 0{,}7072) = - 30688$$
$$V_{3(min)} = - (31357 \times 0{,}7072) = - 22176$$
$$V_{4(min)} = - (20588 \times 0{,}7072) = - 14556$$
$$V_{5(min)} = - D_{6(mas)} \operatorname{sen} \varphi =$$

$$= - \left[1120\,(11 - 12) - 448\,(10 - 6)\,(11 - 6)\right] \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \varphi} = - 7840$$

Nella **Fig. 381** sono annotate le tensioni accanto alle relative sbarre, alla parte sinistra **a** per l'impalcato posto sopra, alla parte destra **b** per l'impalcato posto sotto.

228. Travi a traliccio dissimmetrico composto con diagonali tese e compresse.

α) **Sistemi semplici.** — Se si vuole costruire la trave colle due diagonali incrociate in tutti gli scomparti, onde esse abbiano a resistere simultaneamente all'azione dei carichi, in allora si può supporre la trave composta di due sistemi a traliccio dissimmetrico semplice aventi le diagonali inversamente inclinate, e si può ritenere che ogni sistema porti metà dei carichi totali, ma operanti nell'uno sui nodi superiori, e nell'altro sui nodi inferiori, **Fig. 382***a b*. Pel calcolo delle tensioni di tutte le sbarre di questi sistemi semplici servono ancora le (301), (303), (304), (305), (306), (307), (308), coll'avvertenza però che in luogo di P, K, K′ e Q, si devono prendere valori dimezzati, cioè

$$P_0 = \frac{1}{2} p\lambda \quad , \quad K_0 = \frac{1}{2} k\lambda \quad , \quad K_0' = \frac{1}{2} k'\lambda$$

$$Q_0 = \frac{1}{2}(p+k)\lambda \quad , \quad Q_0' = \frac{1}{2}(p+k')\lambda$$

cosicchè pel primo sistema, **Fig. 382***a*, avente le diagonali che si innalzano a sinistra, col sopraccarico sui nodi superiori, esse diventano

$$S_m = -\frac{Q_0\lambda}{2h} m\,(N-m) \qquad (XII)$$

$$I_m = -S_{m-1} = \frac{Q_0\lambda}{2h}(m-1)\,(N+1-m) \qquad (XIII)$$

$$D_{m(mas)} = \left\{ \frac{P_0}{2}(N+1-2m) + \frac{K_0'}{2N}(N-m)\,(N+1-m) \right\} \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi} \qquad (XIV)$$

$$D_{m(min)} = \left\{ \frac{P_0}{2}(N+1-2m) - \frac{K_0'}{2N} m\,(m-1) \right\} \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi} \qquad (XV)$$

$$V_{m(mas)} = -D_{m(min)} \operatorname{sen}\varphi \quad , \quad V_{m(min)} = -D_{m(mas)} \operatorname{sen}\varphi \qquad (XVI)$$

$$V_{0(mas)} = -\frac{N}{2} P_0 \quad , \quad V_{0(min)} = -\frac{N}{2}(P_0 + K_0') \qquad (XVII)$$

Il secondo sistema, Fig. 382*b*, avente le diagonali che si innalzano a destra, col sopraccarico sui nodi inferiori, non è altro che il primo girato in modo che l'estremo di sinistra passi a destra, e quello di destra a sinistra. — E siccome le tensioni delle nervature e delle diagonali si conservano le stesse tanto che sieno caricati i nodi superiori, oppure gli inferiori, ne viene che le tensioni di queste sbarre mantengono nel secondo sistema i valori del sistema precedente, ma in ordine inverso; si ricorda sussistere inoltre la relazione $I_m = -S_{m-1}$, dal che si scorge che le tensioni S ed I del primo sistema diventano rispettivamente le I ed S del secondo. D'altronde per aver le diagonali cangiato di direzione, le tensioni (*mas*) e (*min*) del primo sistema, cambiate di segno, diventano rispettivamente le (*min*) e (*mas*) del secondo.

In quanto alle verticali si ricorda che sono diagonali e verticali che si corrispondono quelle che concorrono in nodi scarichi (pel secondo sistema i nodi superiori) e che la tensione di una verticale è eguale e di segno opposto alla componente verticale della tensione della corrispondente diagonale.

Pel secondo sistema dunque si hanno le seguenti espressioni:

$$S_m = -\frac{Q_0 \lambda}{2h}(m-1)(N+1-m) \qquad \text{(XVIII)}$$

$$I_m = \frac{Q_0 \lambda}{2h} m (N-m) \qquad \text{(XIX)}$$

$$D_{m(mas)} = -\left\{\frac{P_0}{2}(N+1-2m) - \frac{K_0'}{2N} m (m-1)\right\} \frac{1}{\operatorname{sen}\phi} \qquad \text{(XX)}$$

$$D_{m(min)} = -\left\{\frac{P_0}{2}(N+1-2m) + \frac{K_0'}{2N}(N-m)(N+1-m)\right\} \frac{1}{\operatorname{sen}\phi} \qquad \text{(XXI)}$$

$$V_{m(mas)} = -D_{m(min)} \operatorname{sen}\phi \quad , \quad V_{m(min)} = -D_{m(mas)} \operatorname{sen}\phi \qquad \text{(XXII)}$$

le quali ultime cadono in difetto per la verticale estrema V_0, poichè questa non concorre con nessuna diagonale ad un nodo scarico. Condotto per la verticale V_0 il relativo piano di sezione, Fig. 383, e considerato che a sinistra del medesimo non si trova mai alcuna forza, si deduce facilmente essere

$$V_{0(mas)} = 0 \quad , \quad V_{0(min)} = 0 \qquad \text{(XXIII)}$$

β) **Sistema composto.** — Si supponga ora che i due sistemi semplici si sovrapponghino e si colleghino saldamente fra loro, in modo da formare un solo tutto: in allora nel sistema composto così risultante le parti sovrapposte e congiunte avranno una tensione eguale alla somma algebrica delle parziali (*sbarre delle nervature*, e *verticali*), mentre le sbarre che rimangono ugnole (le *diagonali*) conservano la loro primitiva tensione, **Fig. 382***c d*.

La tensione delle *nervature* è data rispettivamente dalla somma delle (XII) e (XVIII), (XIII) e (XIX), per cui è facile vedere che nel sistema composto le S ed I hanno tensioni eguali rispettivamente in ogni scomparto, e cioè:

$$\begin{matrix} S_m = - \\ I_m = + \end{matrix} \left[\frac{Q_0 \lambda}{2h} m (N - m) + \frac{Q_0 \lambda}{2h} (m - 1)(N + 1 - m) \right]$$

e ponendo $^1/_2 Q$ in luogo di Q_0

$$\begin{matrix} S_m = - \\ I_m = + \end{matrix} \left[\frac{Q \lambda}{4h} \left\{ 2m (N + 1 - m) - (N + 1) \right\} \right] \qquad (309)$$

Le tensioni delle *diagonali che si innalzano a sinistra*, ponendo $^1/_2 P$ in luogo di P_0, ed $^1/_2 K'$ in luogo di K_0' nelle (XIV) e (XV) diventano

$$D_{m(mas)} = \left\{ \frac{P}{4} (N + 1 - 2m) + \frac{K'}{4N} (N - m)(N + 1 - m) \right\} \frac{1}{\operatorname{sen} \phi} \qquad (310a)$$

$$D_{m(min)} = \left\{ \frac{P}{4} (N + 1 - 2m) - \frac{K'}{4N} m (m - 1) \right\} \frac{1}{\operatorname{sen} \phi} \qquad (310b)$$

Le *diagonali che si innalzano a destra* diventano controdiagonali nel sistema composto, per cui denotate con C e ricordando la relazione (306), si deduce

$$C_{m(mas)} = - D_{m(min)} \quad , \quad C_{m(min)} = - D_{m(mas)} \qquad (311)$$

Riguardo alle *verticali* poi è facile vedere dall'esame delle (XVI) e (XXII), che per ogni sbarra la somma algebrica delle tensioni parziali è eguale a zero, eccetto che per le estreme: ciò sarebbe esatto se veramente i carichi fossero distribuiti metà sui

nodi superiori e metà sugli inferiori; invece il carico è direttamente applicato o solo sugli uni o solo sugli altri. Se l'impalcato è applicato superiormente (caricati i nodi superiori) allora le verticali devono trasmettere metà del carico totale dei nodi superiori sugli inferiori, e sono allora tutte soggette ad uno sforzo di compressione $Q'_0 = -\frac{1}{2}(P + K') = -\frac{1}{2}Q'$. Se invece l'impalcato è posto sotto (caricati i nodi inferiori) allora le verticali devono trasmettere metà del carico totale dei nodi inferiori sui superiori, e sono allora tutte soggette ad uno sforzo di trazione $Q_0' = \frac{1}{2}(P + K') = +\frac{1}{2}Q'$. Ed in questo modo resta giustificata la ripartizione dei carichi fatta nei due sistemi semplici.

Le verticali estreme hanno sempre tanto la tensione (*mas*) che la tensione (*min*) negative (compressione), e la (*min*), che corrisponde a carico mobile completo, maggiore della (*mas*), che corrisponde invece a ponte scarico, **Fig. 383, 384**. Basta dunque tener conto della sola tensione (*min*). Esse inoltre devono trasmettere sul nodo inferiore uno sforzo $-\frac{1}{2}Q_0' = -\frac{1}{4}Q'$ se l'impalcato è posto sopra: e sul nodo superiore uno sforzo $+\frac{1}{2}Q'_0 = +\frac{1}{4}Q'$ se l'impalcato è posto sotto; per cui complessivamente la tensione nelle verticali estreme diventa per *l'impalcato posto sopra*

$$-\frac{N}{2}Q_0' - \frac{1}{2}Q_0' = -\frac{N+1}{2}Q_0' \qquad \text{(XXIV)}$$

e per *l'impalcato posto sotto*

$$-\frac{N}{2}Q_0' + \frac{1}{2}Q_0' = -\frac{N-1}{2}Q_0' \qquad \text{(XXV)}$$

Per le *tensioni delle verticali nel sistema composto* bisogna dunque prendere in considerazione anche la posizione dell'impalcato, e attenendosi a quanto si è detto sopra risulta:

Per l'*impalcato posto sopra* la tensione costante delle verticali intermedie è data da

$$V_m = -\frac{1}{2}Q' \qquad (312)$$

e quella delle verticali estreme, è data dalla (XXIV) la quale, ricordando che $Q_0 = {}^1/_2\, Q$, diventa

$$V_0 = V_N = -\frac{N+1}{4} Q' \qquad (313)$$

Per l'*impalcato posto sotto* la tensione costante delle verticali intermedie è data da

$$V_m = +\frac{1}{2} Q' \qquad (314)$$

e quella delle verticali estreme è data dalla (XXV), che per $Q_0' = {}^1/_2\, Q'$ diventa

$$V_0 = V_N = -\frac{N-1}{4} Q' \qquad (315)$$

Esempio.

Conservando i dati assunti nell'esempio precedente, cioè

$$N = 10 \;,\quad \lambda = 3{,}2 \;,\quad h = 3{,}2 \;,\quad \operatorname{sen}\varphi = 0{,}7072 \;,\quad \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi} = \sqrt{2}$$

i carichi da considerare applicati ai nodi del sistema composto sono:

Carico permanente	P = 2240
» mobile pel calcolo delle nervature	K = 7520
» » » del traliccio	K′ = 8960

Basta poi limitare i calcoli alle sbarre di mezza trave essendo il *sistema composto* simmetrico rispetto alla mezzaria; e si prende in considerazione la metà di sinistra.

Nervature. — Il carico totale per nodo è

$$Q = P + K = 2240 + 7520 = 9760.$$

Pel calcolo delle tensioni di queste sbarre serve la (309) ridotta alla forma

$$\left.\begin{matrix} S_m = - \\ I_m = + \end{matrix}\right\} \frac{9760 \times 3{,}2}{4 \times 3{,}2} \Big[2m\,(10 + 1 - m) - (10 + 1) \Big]$$

$$\left.\begin{matrix} = - \\ = + \end{matrix}\right\} 2440 \Big[2m\,(11 - m) - 11 \Big]$$

nella quale, ponendo $m = 1, 2, 3, 4, 5$, si ottiene

$$S_1 = -\ 21960 \qquad I_1 = +\ 21960$$
$$S_2 = -\ 61000 \qquad I_2 = +\ 61000$$
$$S_3 = -\ 90280 \qquad I_3 = +\ 90280$$
$$S_4 = -\ 109800 \qquad I_4 = +\ 109800$$
$$S_5 = -\ 119560 \qquad I_5 = +\ 119560$$

Traliccio. — *Diagonali che si innalzano a sinistra.* — Le tensioni (*mas*) e (*min*) di queste sbarre si calcolano colle (310*a b*) ridotte alle seguenti forme:

$$D_{m\,(mas)} = \left[\frac{2240}{4}(10+1-2m) + \frac{8960}{4\times 10}(10-m)(10+1-m)\right]\sqrt{2} =$$
$$= \left[560\,(11-2m) + 224\,(10-m)\,(11-m)\right] 1{,}414$$

$$D_{m\,(min)} = \left[\frac{2240}{4}(10+1-2m) - \frac{8960}{4\times 10}m\,(m-1)\right]\sqrt{2} =$$
$$= \left[560\,(11-2m) - 224\,m\,(m-1)\right] 1{,}414$$

nelle quali, ponendo $m = 1, 2, 3, 4, 5$, si ottiene

$$D_{1(mas)} = +\ 35633 \qquad D_{1(min)} = +\ 7127$$
$$D_{2(mas)} = +\ 28348 \qquad D_{2(min)} = +\ 4909$$
$$D_{3(mas)} = +\ 21696 \qquad D_{3(min)} = +\ 2059$$
$$D_{4(mas)} = +\ 15678 \qquad D_{4(min)} = -\ 1425$$
$$D_{5(mas)} = +\ 10294 \qquad D_{5(min)} = -\ 5543$$

Diagonali che si innalzano a destra. — Le tensioni (*mas*) e (*min*) di queste sbarre si calcolano colle (311), cioè

$$C_{1(mas)} = -D_{1(min)} = -(+7127) = -7127 \qquad C_{1(min)} = -D_{1(mas)} = -(+35633) = -35633$$
$$C_{2(mas)} = -D_{2(min)} = -(+4909) = -4909 \qquad C_{2(min)} = -D_{2(mas)} = -(+28348) = -28348$$
$$C_{3(mas)} = -D_{3(min)} = -(+2059) = -2059 \qquad C_{3(min)} = -D_{3(mas)} = -(+21696) = -21696$$
$$C_{4(mas)} = -D_{4(min)} = -(-1425) = +1425 \qquad C_{4(min)} = -D_{4(mas)} = -(+15678) = -15678$$
$$C_{5(mas)} = -D_{5(min)} = -(-5543) = +5543 \qquad C_{5(min)} = -D_{5(mas)} = -(+10294) = -10294$$

Osservazione. — Si fa il calcolo di tutte due le tensioni (*mas*) e (*min*) delle diagonali per il motivo che si va esponendo:

Le diagonali che hanno tanto la tensione (*mas*) che la tensione (*min*) con segno positivo (trazione) si possono fare con ferri piatti, giacchè non saranno mai cimentate da sforzi di compressione (*e sono le estreme*); quelle che hanno la tensione (*mas*) positiva e la tensione (*min*) negativa (compressione) è prudente di farle con ferri rigidi (*e sono le intermedie*). Il ferro rigido

(cioè un cantonale od una coppia di cantonali, od un T, od un ferro ad U), deve essere tale da poter resistere allo sforzo maggiore, che è quello di trazione prodotto dalla tensione (*mas*), e deve altresì resistere allo sforzo minore, che è quello di compressione prodotto dalla tensione (*min*) il quale però tenderebbe ad inflettere il ferro, e quindi si deve prendere un *carico di sicurezza* molto più piccolo di quello che vale per la trazione, per cui quest'ultimo modo di cimento potrebbe essere più sfavorevole del precedente.

Ed è soltanto dalle risultanze del calcolo che si può essere guidati nella scelta della forma più conveniente da adottarsi per i ferri delle varie diagonali.

Si può però limitarsi a considerare le sole tensioni (*min*) delle diagonali C che s'innalzano a destra, perchè in esse la tensione (*min*) è sempre negativa (compressione) ed inoltre maggiore della tensione (*mas*), per cui bisogna farle tutte con ferri rigidi.

Verticali. — Per il calcolo delle tensioni di queste sbarre bisogna riferirsi alla posizione dell'impalcato. — Ogni nodo porta un carico totale

$$Q' = P + K' = 2240 + 8960 = 11200.$$

α) *Impalcato posto sopra.* — La tensione costante delle verticali intermedie si calcola colla (312), cioè

$$V = -\frac{1}{2} 11200 = -5600$$

e quella delle verticali estreme colla (313), cioè

$$V_0 = V_{10} = -\frac{10+1}{4} 11200 = -30800$$

β) *Impalcato posto sotto.* — La tensione costante delle verticali intermedie è data dalla (314), cioè

$$V = +\frac{1}{2} 11200 = +5600$$

e quella delle verticali estreme colla (315), cioè

$$V_0 = V_{10} = -\frac{10-1}{4} 11200 = -25200$$

Nella Fig. 382 sono annotate le tensioni delle varie sbarre, a sinistra **c** per l'impalcato posto sopra, a destra **d** per l'impalcato posto sotto.

3. Procedimento grafico.

229. Generalità. — Considerato che tutte le sbarre delle nervature sono cimentate nel modo più sfavorevole per carico

completo, cosicchè le reazioni degli appoggi sono costanti per ogni sbarra, conviene applicare il metodo delle figure reciproche esposto al § **79** per il calcolo delle tensioni di queste sbarre. Per le sbarre del traliccio essendo più sfavorevole l'azione del carico parziale con che la reazione d'appoggio cambia per ogni sbarra, è opportuno invece di applicare il metodo che si basa sul teorema dei momenti statici, e che fu esposto nel § **81**. Nel caso però delle travi rettilinee, siccome i poli per le diagonali e verticali cadono a distanza infinita, non occorre più considerare i momenti, ma soltanto la somma algebrica delle forze esterne sollecitanti la porzione di travata relativa al piano di sezione condotto per la sbarra che si considera.

Tenendo dunque separato il carico permanente dall'accidentale, e se, relativamente a quest'ultimo, si usa l'artificio di considerare la parte di travata scarica, vedesi che la somma algebrica delle forze esterne accidentali si riduce alla sola reazione di appoggio. Basta dunque procurarsi il valore della reazione di appoggio, sbarra per sbarra, con che si tien conto assai speditamente dell'azione del carico accidentale sulle stesse.

In quanto al carico permanente siccome la corrispondente reazione d'appoggio è costante, basta dalla stessa sottrarre successivamente i varî carichi sui nodi e si ottengono le rispettive somme algebriche che servono a dedurre speditamente l'azione del medesimo sulle varie sbarre.

230. Travi a traliccio dissimetrico semplice con sole diagonali stirate, Tav. 55. — Si considera il tipo di trave colle diagonali innalzantesi da una sola parte e si stabilisce la lunghezza e l'altezza della trave, il numero e l'ampiezza degli scomparti. Nella Fig. 1 (Tav. 55), che si prende ad esempio, le diagonali si innalzano a sinistra. Coi ben noti procedimenti si valuta il carico permanente nonchè l'accidentale per ogni nodo, e supponendo gli stessi dati dell'esempio a pagina 435 risulta

$$P = 1200 \text{ Kg.} \quad , \quad K = 5400 \text{ Kg.} \quad , \quad K' = 6480 \text{ Kg.}$$

α) **Impalcato posto sopra.** — In questo caso sono i nodi superiori quelli che si devono ritenere sollecitati tanto dal carico permanente che dall'accidentale, ricordando che i nodi estremi portano un carico metà di quello degli intermedi.

1) **Nervature.** — Essendo le nervature sollecitate nel massimo modo per carico completo, tutti i nodi si prendono caricati del peso permanente P e dell'accidentale K, e cioè ogni nodo porta un carico totale $Q = P + K$, mentre le reazioni degli appoggi A_q e B_q, fra loro eguali, valgono metà del carico totale. — Applicando il metodo delle figure reciproche per il calcolo delle tensioni, si portano sopra una verticale (che è la linea d'azione comune a tutte le forze sollecitanti il sistema) i varî pesi Q sui nodi in una determinata scala, Fig. 2 (**Tav. 55**), nella quale si è assunta la scala di 3 millimetri per tonnellata. Operando poi nodo per nodo della Fig. 1 (**Tav. 55**) tanto per i superiori come per gli inferiori, nel modo esposto al § 79-β) si viene a determinare la grandezza e la natura delle tensioni per le sbarre S ed I, quali sono rappresentate nella Fig. 2 (**Tav. 55**).

2) **Traliccio.** — Per il traliccio bisogna considerare separatamente il peso permanente dall'accidentale, poichè il primo agisce in modo costante, il secondo in modo variabile. — Il carico accidentale inoltre può sollecitare la trave muovendosi da destra a sinistra o viceversa, originando rispettivamente nelle varie sbarre le tensioni (*mas*) e (*min*) parziali. — Si consideri per primo il movimento del carico accidentale da destra a sinistra, che origina la tensione (*mas*) nelle diagonali e la tensione (*min*) nelle verticali. In allora è facile scorgere, se per ogni sbarra si conducesse il relativo piano di sezione, che resterebbe alla sinistra la parte di travata scarica, e perciò si determinano i valori della reazione per l'appoggio di sinistra. A tale scopo condotta una orizzontale **A B**, lunga quanto la trave, — parte superiore della Fig. 3 (**Tav. 55**) — dall'estremo di sinistra **A** si portano all'insù, sopra una verticale, tanti segmenti proporzionali alle forze o carichi sui nodi K', ommettendo i carichi sui nodi estremi, poichè il loro effetto viene distrutto dalla reazione d'appoggio. Si innalzano poi tante verticali corrispondenti ai nodi, cioè *v v v v* ..... le quali vengono a rappresentare le linee d'azione dei carichi su essi nodi. Presa la lunghezza **A B** della trave come distanza polare e quindi l'estremo **B** come polo e proiettato un fascio di raggi sulla retta poligono delle forze, si costruisce il poligono funicolare $B\ V_7\ V_6\ V_5 \ldots\ldots V_1$. Le ordinate di questo poligono misurate sulle verticali anzidette rappresentano nell'assunta scala del disegno i valori della reazione variabile A_k dell'appoggio di

sinistra per le corrispondenti sbarre verticali, ossia l'azione del carico accidentale sulle stesse.

In quanto al peso permanente si portano tanti segmenti proporzionali ai carichi sui nodi simmetricamente sopra e sotto l'orizzontale **A B** all'estremo **B**, con che è facile determinare la reazione costante A_p dalla quale si sottrano successivamente i vari carichi e si progettano le risultanti somme algebriche sulle successive verticali V_1, V_2, V_3..... Le ordinate che si ottengono parte sotto e parte sopra l'asse **A B** rappresentano l'azione del carico permanente sulle rispettive verticali ed è facile sommarle algebricamente colle ordinate rappresentanti l'azione del carico accidentale.

I segmenti risultanti da questa somma rappresentano l'azione totale dei carichi che agiscono simultaneamente e misurati nell'assunta scala del disegno — nella Fig. 3 (**Tav. 55**) si è presa di 3 millimetri per tonnellata — porgono la tensione totale (*min*) per le *verticali*.

In quanto alle *diagonali* si ricorda che esse hanno la componente verticale della loro tensione eguale e di segno contrario alla tensione delle corrispondenti verticali, ciò che è espresso dalla relazione (102*a*)

$$D \operatorname{sen}\phi = -V$$

ed inoltre che sono diagonali e verticali che si corrispondono quelle che concorrono a nodi scarichi, § 77. Per l'impalcato posto sopra sono corrispondenti le diagonali D_m e V_m, risulta dunque che le tensioni determinate nel modo sopra indicato per le verticali di indice m valgono anche per determinare la tensione delle diagonali dello stesso indice m, basta cioè progettarle sulla direzione delle diagonali e nelle linee inclinate si hanno le tensioni delle diagonali corrispondenti.

Il movimento del carico accidentale da sinistra verso destra, origina la tensione (*min*) nelle diagonali e la tensione (*mas*) nelle verticali. Se dunque per ogni sbarra si conducesse il piano di sezione, resterebbe alla destra dello stesso la parte di trave scarica e quindi si deve valutare la reazione variabile B_k per l'appoggio di destra. Condotto un nuovo asse orizzontale **A B** — parte inferiore della Fig. 3 (**Tav. 55**) — si opera al disotto dello stesso come

si è fatto prima, servendo la stessa verticale dei carichi K', e lo stesso fascio di raggi per tracciare il nuovo poligono funicolare, che parte da sinistra. È da osservarsi però che il primo lato di questo poligono deve staccarsi dal secondo nodo, poichè sulle sbarre V_1 e D_1 il carico accidentale non produce nessuna azione. Per il peso permanente, portati simmetricamente i carichi P sui nodi sopra e sotto del nuovo asse **A B** all'estremo **B**, ed individuata la reazione costante d'appoggio B_p, si opera nella stessa guisa tenuta per il caso inverso.

Nella somma algebrica delle azioni parziali dovute al carico permanente ed all'accidentale progettata sulle corrispondenti verticali V_0, V_1, V_2 ..... si ha la loro tensione (*mas*), e basta progettare la stessa sulla direzione delle diagonali per avere la tensione (*min*) delle medesime.

β) **Impalcato posto sotto.** — In questo caso sono i nodi inferiori quelli che ricevono i carichi, tanto permanente che accidentale, ed i nodi estremi sono caricati metà degli altri.

1) **Nervature.** — Siccome la posizione altimetrica del carico sui nodi non ha nessuna influenza sulle tensioni delle nervature, **§ 225**, lo stesso diagramma, Fig. 2 (**Tav. 55**), costruito per l'impalcato posto sopra, serve a valutare le tensioni delle medesime per l'impalcato posto sotto.

2) **Traliccio.** — La posizione altimetrica dell'impalcato non influisce neppure sulle tensioni delle *diagonali* e quindi basta costruire il diagramma rappresentato nella Fig. 4 (**Tav. 55**) identicamente a quello costruito nella Fig. 3 (**Tav. 55**) per avere le tensioni (*mas*) e (*min*) delle diagonali.

Per le *verticali* invece bisogna tener conto anche della posizione altimetrica dell'impalcato. Sono diagonali e verticali che si corrispondono quelle che concorrono a nodi scarichi e quindi, essendo l'impalcato posto al basso, sono quelle che concorrono ai nodi superiori, cosicchè sono corrispondenti le V_{m-1} con le D_m. — Progettando dunque le componenti verticali delle tensioni, relative alle diagonali di indice m — che si ottengono come nella Fig. 3 (**Tav. 55**) — sulle verticali di indice $(m-1)$, si limita su queste la corrispondente tensione, come è rappresentato nella Fig. 4 (**Tav. 55**).

γ) **Valori numerici delle tensioni.** — Valendosi dei diagrammi costruiti in base ai dati assunti, nella **Tav. 55**, e misu-

rando i varî segmenti nella scala del disegno (3 millimetri per tonnellata) si trovano i valori numerici per le tensioni delle varie sbarre.

1) **Nervature.** — È facile vedere dall' ispezione della Fig. 2 (**Tav. 55**), che nel caso di diagonali inclinate di 45° — come di solito si usa in pratica — le tensioni delle nervature sono multipli del carico sui nodi, per cui basta, colla scorta della figura, determinare i successivi multipli del carico $Q = 6600$ chilogrammi. Inoltre è facile avvertire che fra le tensioni della nervatura superiore e quelle della nervatura inferiore sussiste la relazione

$$S_m = - I_{m+1}$$

cosicchè valutati i valori delle S, questi valgono anche per le I. Questi valori sono raccolti nel seguente specchio:

$S_1 = 3{,}5 \times 6600 = -23100$	$I_1 = 0$
$S_2 = 6 \times 6600 = -39600$	$I_2 = +23100$
$S_3 = 7{,}5 \times 6600 = -49500$	$I_3 = +39600$
$S_4 = 8 \times 6600 = -52800$	$I_4 = +49500$
$S_5 = 7{,}5 \times 6600 = -49500$	$I_5 = +52800$
$S_6 = 6 \times 6600 = -39600$	$I_6 = +49500$
$S_7 - 3{,}5 \times 6600 = -23100$	$I_7 = +39600$
$S_8 = 0$	$I_8 = +23100$

2) **Traliccio.** — Le tensioni delle sbarre del traliccio si deducono dalla misurazione diretta dei rispettivi segmenti, le cui lunghezze sono annotate fra parentesi in millimetri nei seguenti specchi. È poi facile stabilire, dall'esame dei diagrammi rappresentati nelle Fig. 3 e 4 (**Tav. 55**), che fra le tensioni (*mas*) e le tensioni (*min*) esiste la relazione

$$\text{tensione}_{m(min)} = - \text{tensione}_{(N+1-m)\,(mas)}$$

laonde valutate le tensioni (*mas*) gli stessi valori invertiti servono anche per le tensioni (*min*).

Impalcato posto sopra.

(*mas*)	(*min*)	(*min*)	(*mas*)
	$V_0 = -$ 30733 (92,2)		$V_0 = -$ 4800 (14,4)
$D_1 = +$ 38200 (114,6)	$V_1 = -$ 27000 (81,0)	$D_1 = +$ 6000	$V_1 = -$ 4230 (12,7)
$D_2 = +$ 28400 (85,2)	$V_2 = -$ 20130 (60,4)	$D_2 = +$ 3000	$V_2 = -$ 2270
$D_3 = +$ 19800 (59,4)	$V_3 = -$ 14000 (42,0)	$D_3 = -$ 800	$V_3 = +$ 530
$D_4 = +$ 12400 (37,2)	$V_4 = -$ 8730 (26,2)	$D_4 = -$ 6000	$V_4 = +$ 4270
$D_5 = +$ 6000 (18,0)	$V_5 = -$ 4270 (12,8)	$D_5 = -$ 12400	$V_5 = +$ 8730
$D_6 = +$ 800 (2,4)	$V_6 = -$ 530 (1,6)	$D_6 = -$ 19800	$V_6 = +$ 14000
$D_7 = -$ 3000 (9,0)	$V_7 = +$ 2270 (6,8)	$D_7 = -$ 28400	$V_7 = +$ 20130
$D_8 = -$ 6000 (18,0)	$V_8 = -$ 3840	$D_8 = -$ 38200	$V_8 = -$ 600

Impalcato posto sotto. — Le diagonali mantengono le tensioni precedenti, variano soltanto le tensioni delle verticali.

(*min*)	(*mas*)
$V_0 = -$ 27000 (81,0)	$V_0 = -$ 4230
$V_1 = -$ 20130 (60,4)	$V_1 = -$ 2270
$V_2 = -$ 14000 (42,0)	$V_2 = +$ 530
$V_3 = -$ 8730 (26,2)	$V_3 = +$ 4270
$V_4 = -$ 4270 (12,8)	$V_4 = +$ 8730
$V_5 = -$ 530 (1,6)	$V_5 = +$ 14000
$V_6 = +$ 2270 (6,8)	$V_6 = +$ 20130
$V_7 = +$ 4230 (12,7)	$V_7 = +$ 27000
$V_8 = 0$	$V_8 = 0$

Osservazione. — È da ripetersi l'osservazione fatta a pagina 442 circa l'influenza del carico permanente dipendente dal peso proprio delle travi principali sulle tensioni delle verticali.

δ) **Forma pratica della trave.** — Determinate le tensioni di tutte le sbarre nel modo anzidetto, per stabilire poi la forma del traliccio, cioè quali sieno gli scomparti che devono avere una sola diagonale e quali gli scomparti che richiedono le due diagonali inversamente inclinate onde raggiungere l'intento che esse sieno cimentate soltanto alla trazione, si opera nel modo indicato nell'esempio a pagina 440.

231. Travi a traliccio dissimetrico doppio, Tav. 56. — Si considera il tipo di trave colle diagonali innalzantesi da una sola parte, stabilendo il numero e l'ampiezza degli scomparti, nonchè l'altezza della trave. — Nella Fig. 1 (**Tav. 56**), che si

prende ad esempio, le diagonali si innalzano a sinistra, e l'impalcato è posto alla parte superiore. — Valendosi dei noti procedimenti si determinano i carichi sui nodi, prendendo per ampiezza di scomparto la distanza fra nodo e nodo del traliccio doppio. Supponendo i dati dell'esempio precedente risulta

$$P = 600 \text{ Kg.} \quad , \quad K = 2700 \text{ Kg.} \quad , \quad K' = 3240 \text{ Kg.}$$

Si opera poi separatamente sui due sistemi semplici che costituiscono il sistema doppio, conservando in essi i carichi che direttamente vi corrispondono nel sistema composto.

α) **Sistema primo.** — Il primo sistema, rappresentato nella Fig. 2 (**Tav. 56**), è un traliccio dissimetrico semplice con scomparti tutti eguali, ed è identico a quello studiato nella **Tav. 55**, soltanto che i carichi sui nodi sono dimezzati. — Tanto per le nervature come per il traliccio si opera dunque nel modo stesso indicato nel paragrafo precedente, e si costruiscono così il diagramma, Fig. 3 (**Tav. 56**), che dà le tensioni delle nervature, ed il diagramma, Fig. 4 (**Tav. 56**), che dà le tensioni (*mas*) e (*min*) del traliccio le quali si raccolgono nel seguente specchio:

$$\left.\begin{array}{ll} S_1 = 3{,}5 \times 3300 = -11550 & I_1 = 0 \\ S_2 = 6 \times 3300 = -19800 & I_2 = +11550 \\ S_3 = 7{,}5 \times 3300 = -24750 & I_3 = +19800 \\ S_4 = 8 \times 3300 = -26400 & I_4 = +24750 \\ S_5 = 7{,}5 \times 3300 = -24750 & I_5 = +26400 \\ S_6 = 6 \times 3300 = -19800 & I_6 = +24750 \\ S_7 = 3{,}5 \times 3300 = -11550 & I_7 = +19800 \\ S_8 = 0 & I_8 = +11550 \end{array}\right\} (A)$$

(*mas*)	(*min*)	(*min*)	(*mas*)
$D_1 = +19100$ (57,3)	$D_1 = +3000$	$V_0 = -15366$ (46,2)	$V_0 = -2400$ (7,2)
$D_2 = +14200$ (42,6)	$D_2 = +1500$	$V_1 = -13500$ (40,5)	$V_1 = -2115$ (6,35)
$D_3 = +9900$ (29,7)	$D_3 = -400$	$V_2 = -10065$ (30,2)	$V_2 = -1135$
$D_4 = +6200$ (18,6)	$D_4 = -3000$	$V_3 = -7000$ (21,0)	$V_3 = +265$
$D_5 = +3000$ (9,0)	$D_5 = -6200$	$V_4 = -4365$ (13,1)	$V_4 = +2135$
$D_6 = +400$ (1,2)	$D_6 = -9900$	$V_5 = -2135$ (6.4)	$V_5 = +4365$
$D_7 = -1500$ (4,5)	$D_7 = -14200$	$V_6 = -265$ (1,3)	$V_6 = +7000$
$D_8 = -3000$ (9,0)	$D_8 = -19100$	$V_7 = +1135$ (3,4)	$V_7 = +10065$
		$V_8 = -1920$	$V_8 = -300$

β) **Sistema secondo.** — Il secondo sistema rappresentato nella Fig. 5 (**Tav. 56**), è un traliccio dissimetrico semplice avente i due scomparti estremi con ampiezza metà di quella degli intermedî, ed un numero di scomparti maggiore di uno di quello del primo sistema.

1) **Nervature.** — Il diagramma delle tensioni per queste sbarre si costruisce applicando il metodo delle figure reciproche, come si scorge nella Fig. 6 (**Tav. 56**), nulla di particolare essendovi da aggiungere. Soltanto si osserva che tutti i segmenti rappresentanti le tensioni I si sovrappongono su quello rappresentante la tensione S_5, la qual cosa però è posta in evidenza nella figura, avendo segnato in sottile la parte mediana dei vari segmenti I.

2) **Traliccio.** — *Pel movimento da destra a sinistra* del carico accidentale è la parte di sinistra della trave che resta scarica, cosicchè si deve valutare la reazione d'appoggio A_k di sinistra variabile per le diverse sbarre. Perciò condotta l'orizzontale **A B**, lunga quanto la trave — parte superiore della Fig. 7 (**Tav. 56**) — sull'estremo **A** di sinistra si costruisce all'insù la verticale dei carichi K', si prende la lunghezza **A B** come distanza polare, **B** come polo, e progettato il corrispondente fascio di raggi si costruisce il poligono funicolare $\mathbf{B\,V_8\,V_7\,V_6 \ldots\ldots V_1}$, avvertendo che i vertici di detto poligono invece che cadere sulle verticali dei nodi, si devono trovare sulle verticali intermedie **V**, in causa delle ineguaglianze degli scomparti estremi. Le ordinate poi del poligono misurate sulle verticali dei nodi rappresentano l'azione del carico accidentale per le sbarre verticali corrispondenti.

In quanto al carico permanente portati i carichi P sui nodi simmetricamente sopra e sotto dell'orizzontale **A B** ed individuata la reazione A_p, non resta che sottrarre da questa i successivi carichi parziali e progettare le risultanti somme algebriche sulle verticali corrispondenti. Le ordinate, che così si originano parte sotto e parte sopra l'orizzontale **A B**, rappresentano l'azione del carico permanente sulle sbarre verticali. Sommando algebricamente l'azione del carico accidentale e del permanente si hanno le tensioni totali (*min*) per le verticali. — Progettando queste sulle direzioni delle varie diagonali se ne deduce speditamente la loro tensione (*mas*).

Per il movimento da sinistra a destra del carico accidentale si opera in modo analogo, partendo da un nuovo asse orizzontale **A B**

— parte inferiore della Fig. 4 (**Tav. 56**). — È però da avvertire che il primo lato del poligono funicolare invece che partire da **A** deve staccarsi dalla prima verticale intermedia, inquantochè il carico accidentale non ha nessuna influenza sulla tensione delle sbarre D_1 e V_1.

Per la già avvertita relazione

$$\text{tensione}_{m(mas)} = -\,\text{tensione}_{(N+1-m)(min)}$$

basta valutare le sole tensioni (*mas*) le quali opportunamente invertite danno le tensioni (*min*).

Servendosi dei diagrammi, Fig. 6 e 7 (**Tav. 56**), determinando mediante il primo i multipli del carico Q, e misurando le lunghezze dei segmenti proporzionali alle tensioni del secondo, si determinano i valori numerici delle tensioni raccolti nel seguente specchio:

$$\left.\begin{array}{ll} S_1 = 2 \times 3300 = -\ 6600 & I_1 = 0 \\ S_2 = 5 \times 3300 = -\ 16500 & I_2 = +\ 6600 \\ S_3 = 7 \times 3300 = -\ 23100 & I_3 = +\ 16500 \\ S_4 = 8 \times 3300 = -\ 26400 & I_4 = +\ 23100 \\ S_5 = 8 \times 3300 = -\ 26400 & I_5 = +\ 26400 \\ S_6 = 7 \times 3300 = -\ 23100 & I_6 = +\ 26400 \\ S_7 = 5 \times 3300 = -\ 16500 & I_7 = +\ 23100 \\ S_8 = 2 \times 3300 = -\ 6600 & I_8 = +\ 16500 \\ S_9 = 0 & I_9 = +\ 6600 \end{array}\right\} \text{(B)}$$

(*mas*)	(*min*)	(*mas*)	(*min*)
$D_1 = +\ 17300$ (51,9)	$V_0 = -\ 15366$ (46,1)	$D_1 = +\ 2700$	$V_0 = -\ 2400$ (7,2)
$D_2 = +\ 16700$ (50,1)	$V_1 = -\ 15366$ (46,1)	$D_2 = +\ 2266$	$V_1 = -\ 2400$ (7,2)
$D_3 = +\ 12000$ (36,0)	$V_2 = -\ 12266$ (36,8)	$D_3 = +\ 533$	$V_2 = -\ 1600$
$D_4 = +\ 8000$ (24,0)	$V_3 = -\ 8600$ (25,8)	$D_4 = -\ 1800$	$V_3 = -\ 400$
$D_5 = +\ 4666$ (14,0)	$V_4 = -\ 5666$ (17,0)	$D_5 = -\ 4666$	$V_4 = +\ 1300$
$D_6 = +\ 1800$ (5,4)	$V_5 = -\ 3300$ (9,9)	$D_6 = -\ 8000$	$V_5 = +\ 3300$
$D_7 = -\ 533$ (1,6)	$V_6 = -\ 1300$ (3,9)	$D_7 = -\ 12000$	$V_6 = +\ 5666$
$D_8 = -\ 2266$ (6,8)	$V_7 = +\ 400$ (1,2)	$D_8 = -\ 16700$	$V_7 = +\ 8600$
$D_9 = -\ 2700$ (8,1)	$V_8 = +\ 1600$ (4,8)	$D_9 = -\ 17300$	$V_8 = +\ 12266$
	$V_9 = 0$		$V_9 = 0$

γ) **Sistema composto** — Sovrapponendo i due sistemi semplici così da formare il sistema doppio, si ha modo di ottenere speditamente le tensioni di quest'ultimo. — Per le sbarre che si coprono (*nervature* e *verticali estreme*) le tensioni nel sistema composto sono eguali alla somma delle corrispondenti tensioni nei sistemi semplici, come si è fatto nel seguente specchio:

— 11550	— 11550	— 19800	— 19800	— 24750
— 6600	— 16500	— 16500	— 23100	— 23100
$S_1 = -18150$	$S_2 = -28050$	$S_3 = -36300$	$S_4 = -42900$	$S_5 = -47850$
— 24750	— 26400	— 26400	— 24750	— 24750
— 26400	— 26400	— 26400	— 26400	— 23100
$S_6 = -51150$	$S_7 = -52800$	$S_8 = -52800$	$S_9 = -51150$	$S_{10} = -47850$
— 19800	— 19800	— 11550	— 11550	0	0
— 23100	— 16500	— 16500	— 6600	— 6660	0
$S_{11} = -42900$	$S_{12} = -36300$	$S_{13} = -28050$	$S_{14} = -18150$	$S_{15} = -6600$	$S_{16} = 0$

Per le tensioni I basta ricordare la relazione $I_m = -S_{(N+1-m)}$

$I_1 = 0$, $I_2 = 6600$, $I_3 = 18150$, $I_4 = 28050$, $I_5 = 36300$, $I_6 = 42900$
$I_7 = 47850$, $I_8 = 51150$, $I_9 = 52800$, $I_{10} = 52800$, $I_{11} = 51150$
$I_{12} = 47850$, $I_{13} = 42900$, $I_{14} = 36300$, $I_{15} = 28050$, $I_{16} = 18150$

Per le verticali estreme agli appoggi risulta

— 15366	— 2400	— 300	— 1620
— 15366	— 2400	— 0	0
$V_{0(mas)} = -30732$	$V_{0(min)} = -4800$	$V_{8(mas)} = -300$	$V_{8(min)} -1620$

Per le sbarre che non si coprono (*diagonali* e *verticali intermedie*) le tensioni nel sistema composto conservano il valore corrispondente del sistema semplice da cui derivano. — Valutate così tutte le tensioni del sistema composto, si procede nel modo indicato a pagina 440 per stabilire la forma definitiva della trave, ossia quali debbano essere gli scomparti con diagonali ugnole e quali gli scomparti con diagonali doppie, onde esse abbiano ad essere cimentate con soli sforzi di trazione e purchè sieno conformate a ferro piatto.

Osservazione. — Per l'impalcato posto sotto i diagrammi delle tensioni del traliccio si costruiscono analogamente a quelli rappresentati nella Fig. 4 (**Tav. 55**).

232. Travi a traliccio dissimetrico ugnolo con diagonali stirate e compresse, **Tav. 56.** — Questo tipo di trave è rappresentato dalla Fig. 8 (**Tav. 56**). Stabilito il numero e l'ampiezza degli scomparti si determina il carico sui nodi. Si passa allora a considerare i due sistemi semplici che lo compongono, i quali sono due tralicci dissimetrici semplici con egual numero di scomparti della medesima ampiezza, ma l'uno con le diagonali che si innalzano a sinistra, l'altro colle diagonali che si innalzano a destra, i quali sono rappresentati nella Fig. 9 (**Tav. 56**). — Questi sistemi semplici si assumono caricati tanto del peso permanente come dell'accidentale, l'uno sui nodi superiori, l'altro sui nodi inferiori, ed ogni carico parziale è metà di quello corrispondente determinato per il sistema composto. — Supponendo i dati del caso precedente, si ha dunque per i due sistemi semplici

$$P = 600 \text{ Kg.} \quad , \quad K = 2700 \text{ Kg.} \quad , \quad K' = 3240 \text{ Kg.}$$

α) **Sistema primo.** — È facile vedere che il primo sistema, Fig. 9 (**Tav. 56**), si trova nelle stesse condizioni di forma e di carico del primo sistema considerato nel tipo precedente, al § **231**, e rappresentato dalla Fig. 2 (**Tav. 56**). Gli stessi diagrammi, Fig. 3 e 4 (**Tav. 56**), costruiti nel modo già indicato servono dunque a dare le tensioni anche per il tipo in questione, e se ne riportano i valori numerici nel seguente specchio:

$$\left.\begin{array}{ll} S_1 = -11550 & I_1 = 0 \\ S_2 = -19800 & I_2 = +11550 \\ S_3 = -24750 & I_3 = +19800 \\ S_4 = -26400 & I_4 = +24750 \\ S_5 = -24750 & I_5 = +26400 \\ S_6 = -19800 & I_6 = +24750 \\ S_7 = -11550 & I_7 = +19800 \\ S_8 = 0 & I_8 = +11550 \end{array}\right\} \quad (A)$$

(mas)	(min)	(min)	(mas)
		$V_0 = -15366$	$V_0 = -2400$
$D_1 = +19100$	$D_1 = +3000$	$V_1 = -13500$	$V_1 = -2115$
$D_2 = +14200$	$D_2 = +1500$	$V_2 = -10065$	$V_2 = -1135$
$D_3 = +9900$	$D_3 = -400$	$V_3 = -7000$	$V_3 = +265$
$D_4 = +6200$	$D_4 = -3000$	$V_4 = -4365$	$V_4 = +2135$
$D_5 = +3000$	$D_5 = -6200$	$V_5 = -2135$	$V_5 = +4365$
$D_6 = +400$	$D_6 = -9900$	$V_6 = -265$	$V_6 = +7000$
$D_7 = -1500$	$D_7 = -14200$	$V_7 = +1135$	$V_7 = +10065$
$D_8 = -3000$	$D_8 = -19100$	$V_8 = -1920$	$V_8 = -300$

β) **Sistema secondo.** — Considerato che questo sistema, Fig. 9 (**Tav. 56**), non è altro che il precedente girato in modo che l'estremo di destra passi a sinistra e viceversa, e che la posizione altimetrica dei carichi sui nodi non influisce sulle tensioni delle nervature e diagonali, si vede che dette tensioni si desumono senza altro da quelle del primo sistema invertendole successivamente. — Essendo poi nel secondo sistema caricati i nodi inferiori, le verticali si trovano nelle stesse condizioni di carico di quelle del primo sistema, cioè le tensioni di queste ultime, convenientemente invertite, forniscono le tensioni per le verticali del secondo sistema. Soltanto è da avvertire che essendo cambiata la direzione delle diagonali, cambia nel secondo sistema anche la natura delle tensioni tanto per le diagonali come per le verticali. E precisamente per il movimento del carico accidentale da destra a sinistra, si hanno le tensioni $D_{(mas)}$ e $V_{(min)}$ nel primo sistema e le tensioni $D_{(min)}$ e $V_{(mas)}$ nel secondo sistema. — L'inverso succede pel movimento del carico accidentale da sinistra a destra. Bastano queste considerazioni per stabilire il valore delle tensioni del secondo sistema, le quali si trascrivono nel seguente specchio:

$$\left.\begin{array}{ll} S_1 = -0 & I_1 = +11550 \\ S_2 = -11550 & I_2 = +19800 \\ S_3 = -19800 & I_3 = +24750 \\ S_4 = -24750 & I_4 = +26400 \\ S_5 = -26400 & I_5 = +24750 \\ S_6 = -24750 & I_6 = +19800 \\ S_7 = -19800 & I_7 = +11550 \\ S_8 = -11550 & I_8 = 0 \end{array}\right\} \quad (B)$$

(*mas*)	(*min*)	(*mas*)	(*min*)
		$V_0 = 0$	$V_0 = 0$
$D_1 = -\ 3000$	$D_1 = -\ 19100$	$V_1 = +\ 13500$	$V_1 = +\ 2115$
$D_2 = -\ 1500$	$D_2 = -\ 14200$	$V_2 = +\ 10065$	$V_2 = +\ 1135$
$D_3 = +\ 400$	$D_3 = -\ 9900$	$V_3 = +\ 7000$	$V_3 = -\ 265$
$D_4 = +\ 3000$	$D_4 = -\ 6200$	$V_4 = +\ 4365$	$V_4 = -\ 2135$
$D_5 = +\ 6200$	$D_5 = -\ 3009$	$V_5 = +\ 2135$	$V_5 = -\ 4365$
$D_6 = +\ 9900$	$D_6 = -\ 400$	$V_6 = +\ 265$	$V_6 = -\ 7000$
$D_7 = +\ 14200$	$D_7 = +\ 1500$	$V_7 = -\ 1135$	$V_7 = -\ 10065$
$D_8 = +\ 19100$	$D_8 = +\ 3000$	$V_8 = -\ 2100$	$V_8 = -\ 13440$

γ) **Sistema composto.** — Le tensioni del sistema composto si deducono dalla sovrapposizione dei due sistemi semplici sommando le tensioni delle sbarre che si coprono (*nervature* e *verticali*) e lasciando invariate le tensioni delle sbarre che rimangono a sè (*diagonali*).

1) **Nervature.** — Dall'esame degli specchi (A) e (B) si vede che le tensioni S ed I del primo sistema sono rispettivamente eguali alle tensioni I ed S del secondo, per cui se in uno qualsivoglia dei due sistemi si sommano ordinatamente le tensioni S ed I per ogni scomparto nelle successive somme si hanno le tensioni del sistema composto, eguali in valor numerico tanto per le sbarre S come per le sbarre I. Laonde si conclude che basta costruire il solo diagramma rappresentato nella Fig. 3 (**Tav. 56**), per il primo sistema, e nella somma delle S e delle I dello stesso indice si ottengono le corrispondenti tensioni di ambe le nervature nel sistema composto.

Così operando si trova

	0		11550		19800		24750
	11550		19800		24750		26400
$S_1 = -$	11550	$S_2 = -$	31350	$S_3 = -$	44550	$S_4 = -$	51150
$I_1 = +$		$I_2 = +$		$I_3 = +$		$I_4 = +$	

2) **Traliccio.** — Si è già veduto che le diagonali dei due sistemi hanno nei varî scomparti tensioni di egual valore numerico, ma di segno contrario. — Basta dunque costruire il solo diagramma rappresentato nella Fig. 4 (**Tav. 56**) per il primo sistema e le tensioni delle diagonali cambiate di segno forniscono anche quelle del secondo sistema.

Anche le verticali intermedie hanno nei due sistemi le tensioni ordinatamente eguali e di segno opposto, cosicchè nella sovrapposizione dei due sistemi si annullano vicendevolmente. — Non è però a credersi che nel sistema composto sieno nulle le tensioni delle verticali, poichè ciò sarebbe esatto qualora i carichi fossero effettivamente ripartiti metà sui nodi superiori e metà sugli inferiori. Invece i carichi sono applicati o tutti sopra o tutti sotto, a seconda della posizione dell'impalcato, e perciò influenzano le verticali obbligandole a trasmettere una metà del loro carico rispettivamente sotto o sopra cimentandole tutte con la stessa intensità alla compressione od alla trazione.

Non occorrono speciali costruzioni grafiche per dedurre le tensioni di queste sbarre, e basta riferirsi ai semplici procedimenti esposti a pagina 443 e 456.

Travi a traliccio simmetrico multiplo a grandi maglie.

1. Procedimento numerico.

233. Generalità. — Dato il tipo della trave, si comincia dal determinare la distribuzione dei carichi sui nodi, la cui distanza sia λ. Il peso permanente sul metro corrente di trave consta di quello dell'impalcato p_i e di quello della trave p_t (che si determinano colle norme del § **215**). Il peso della trave s'immagina distribuito metà sui nodi superiori e metà sui nodi inferiori, i quali dunque portano ognuno un peso $^1/_2\, p_t\, \lambda$; quello dell'impalcato agisce soltanto o sui nodi superiori o sugli inferiori a seconda della sua posizione, e per ogni nodo si ha un peso $p_i\, \lambda$. Si chiami P_s il carico permanente sui nodi superiori e P_i quello sui nodi inferiori:

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Per l'impalcato posto sopra è}\ P_s = \lambda\,(p_i + {}^1/_2\, p_t)\ ;\ P_i = {}^1/_2\, p_t\, \lambda \\ \quad\text{»}\qquad\qquad\text{»}\quad \textit{sotto è}\ P_s = {}^1/_2\, p_t\, \lambda\ ;\ P_i = \lambda\,(p_i + {}^1/_2\, p_t) \end{array}\right\} \quad (316)$$

Il carico accidentale agisce sugli stessi nodi ai quali è applicato il peso dell'impalcato; sieno k e k' i carichi per metro corrente di trave rispettivamente per il calcolo delle nervature e per quello del traliccio, tabella L, e quindi ogni nodo carico porta un peso $K = k\,\lambda$, oppure $K' = k'\,\lambda$.

Si scompone poscia la trave nei sistemi semplici di cui è costituita, ed usando il solito procedimento esposto per le travi a traliccio dissimetrico, (esempio a pagina 444) si determinano le corrispondenti tensioni. Ciò fatto si immagina di sovrapporre successivamente l'uno all'altro i sistemi semplici, e per le parti che si sovrappongono (*sbarre orizzontali* e *verticali estreme*) si ha la tensione nella somma algebrica delle parziali, mentre le altre parti (*diagonali*) conservano ognuna la propria tensione, ed in tal modo si ottengono le tensioni delle varie sbarre per il sistema multiplo considerato.

Esempio 1°

Traliccio doppio. — Ritenendo i dati assunti nell'esempio a pagina 435 e supponendo una trave a traliccio doppio, **Fig. 385***c*, è $\lambda = 2$ metri, $h = 2$ metri, e si può prendere in cifra rotonda $p_t = 500$ e $p_i = 700$ per metro corrente di ponte, e quindi per metro corrente di trave risulta $p_t = 250$ chilogrammi e $p_i = 350$ chilogrammi. Nell'ipotesi che l'impalcato sia posto sopra valendosi delle (316) è

$$P_s = 2\,(350 + \frac{1}{2}\,250) = 950 \quad , \quad P_i = \frac{1}{2}\,250 \times 2 = 250$$

Per le nervature è ancora $K' = 2700 \times 2 = 5400$ chilogrammi e per il traliccio $K' = 3240 \times 2 = 6480$ chilogrammi. I due sistemi semplici che compongono la trave si vedono nelle **Fig. 385***a b*, nelle quali si sono poste in evidenza le distribuzioni dei carichi tanto per il calcolo delle nervature, come per quello del traliccio.

Col noto procedimento si determinano le tensioni dei sistemi semplici, bastando limitarsi a mezza trave per la simmetria del sistema, e si considera la mezza trave di sinistra.

α) **Sistema primo.** — Per le *nervature* il carico totale dà una reazione costante $A = 13200$.

$$S_1 \times 2 + 13200 \times 2 - (475 + 2700)\,2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad S_1 = -10025$$

$$S_2 \times 2 + 13200 \times 6 - (950 + 5400)\left(\frac{6}{2} + 2\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad S_2 = -23725$$

$$-I_1 \times 2 + 13200 \times 0 - (475 + 2700)\,0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad I_1 = 0$$

$$-I_2 \times 2 + 13200 \times 4 - (475 + 2700)\,4 - 250 \times 2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad I_2 = +19800$$

$$-I_3 \times 2 + 13200 \times 8 - (950 + 5400)\left(\frac{8}{2} + 4\right) - 250\,(6 + 2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad I_3 = +26400$$

Per il *traliccio* il peso permanente dà una reazione costante $A_p = 2400$, mentre il carico mobile dà una reazione A_{kr} variabile.

$$
\begin{aligned}
&D_{1(mas)} \operatorname{sen} 45^\circ - (2400+9720)+475=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad D_{1(mas)} = +16466\\
&D_{1(min)} \operatorname{sen} 45^\circ - (2400+3240)+(475+3240)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad D_{1(min)} = +2722\\
-&D_{2(mas)} \operatorname{sen} 45^\circ - (2400+3240)+(475+3240)+250=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad D_{2(mas)} = -1675\\
-&D_{2(min)} \operatorname{sen} 45^\circ - (2400+9720)+475+250=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad D_{2(min)} = -16112\\
&D_{3(mas)} \operatorname{sen} 45^\circ - (2400+4860)+950\,(1/2+1)+250=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad D_{3(mas)} = +7897\\
&D_{3(min)} \operatorname{sen} 45^\circ - (2400+8100)+(950+6480)\,(1/2+1)+250=0 \quad . \quad . \quad D_{3(min)} = -1265\\
-&D_{4(mas)} \operatorname{sen} 45^\circ - (2400+8100)+(950+6480)\,(1/2+1)+250\times 2=0 \quad . \quad D_{4(mas)} = +1619\\
-&D_{4(min)} \operatorname{sen} 45^\circ - (2400+4860)+950\,(1/2+1)+250\times 2=0 \quad . \quad . \quad . \quad D_{4(min)} = -7544
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-V_{a(mas)} - 2400 = 0 \quad , \quad V_{a(mas)} = -2400\\
&-V_{a(min)} - (2400+12960) = 0 \quad , \quad V_{a(min)} = -15360
\end{aligned}
$$

β) **Sistema secondo.** — Per le *nervature* il carico totale dà ancora una reazione costante $A = 13200$.

$$
\begin{aligned}
&S_1\times 2+(13200-125)\,0=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad S_1 = 0\\
&S_2\times 2+13200\times 4-(950+5400)\,2-125\times 4=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad S_2 = -19800\\
&S_3\times 3+13200\times 8-(950+5400)\,(6+2)-250\left(\frac{8}{2}+4\right)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad S_3 = -26400
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-&I_1\times 2+13200\times 2-125\times 2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad I_1 = +13075\\
-&I_2\times 2+13200\times 6-(6350)\,4-250\left(\frac{6}{2}+2\right)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad I_2 = +26275
\end{aligned}
$$

Per il *traliccio* è ancora costante $A_p = 2400$, mentre A_{kr} è variabile.

$$
\begin{aligned}
-&D_{1(mas)} \operatorname{sen} 45^\circ - (2400+0)+125=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad D_{1(mas)} = -3217\\
-&D_{1(min)} \operatorname{sen} 45^\circ - (2400+12960)+125=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad D_{1(min)} = -21542\\
&D_{2(mas)} \operatorname{sen} 45^\circ - (2400+7290)+950+125=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad D_{2(mas)} = +12182\\
&D_{2(min)} \operatorname{sen} 45^\circ - (2400+5670)+(950+6480)+125=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad D_{2(min)} = +728\\
-&D_{3(mas)} \operatorname{sen} 45^\circ - (2400+5670)+(950+6480)+(250)\,(1/2+1)=0 \quad . \quad . \quad D_{3(mas)} = -375\\
-&D_{3(min)} \operatorname{sen} 45^\circ - (2400+7290)+950+250\,(1/2+1)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad D_{3(min)} = -11828\\
&D_{4(mas)} \operatorname{sen} 45^\circ - (2400+3240)+950\times 2+250\,(1/2+1)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad D_{4(mas)} = +4758\\
&D_{4(min)} \operatorname{sen} 45^\circ - (2400+9720)+(950+6480)\,2+250\,(1/2+1)=0 \quad . \quad . \quad D_{4(min)} = -4405
\end{aligned}
$$

$$V_{a(mas)} = 0 \quad , \quad V_{a(min)} = 0$$

Sistema composto — Dalla sovrapposizione dei due sistemi semplici si ottengono le tensioni del sistema composto.

Per le *nervature* bisogna fare la somma delle tensioni parziali

$$\begin{array}{cccc} -10025 & -10025 & -23225 & -23225 \\ 0 & -19800 & -19800 & -26400 \\ \hline S_1 = -10025 & S_2 = -29825 & S_3 = -43025 & S_4 = -49625 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 19800 & 19800 & 26400 \\ 13075 & 13075 & 26275 & 26275 \\ \hline I_1 = 13075 & I_2 = 32875 & I_3 = 46075 & I_4 = 52675 \end{array}$$

Osservazione. — *La differenza fra le tensioni* S *ed* I *è costante ed è eguale a metà della differenza fra i carichi dei nodi superiori e quelli dei nodi inferiori*, esiste cioè la relazione

$$S_m = I_m \mp \frac{1}{2} \left\{ K \mp (P_i - P_s) \right\} \qquad (317)$$

valendo il segno — quando l'impalcato è applicato alla parte *superiore* delle travi ed il segno + quando l'impalcato è applicato alla parte *inferiore*.

Nel caso considerato, essendo l'impalcato posto sopra, la (317) diventa

$$S_m = I_m - \frac{1}{2} \left\{ 5400 - (250 - 950) \right\} \quad , \quad S_m = I_m - 3050$$

Volendo dunque si può risparmiare di calcolare le tensioni delle S o delle I nei sistemi semplici, che costituiscono il composto, potendosi ottenere le corrispondenti tensioni di quest'ultimo in modo assai spedito mediante la (317).

Per le *diagonali* si tengono le tensioni di maggior valore numerico del rispettivo sistema semplice, **Fig. 385c**.

Le diagonali stirate centrali si dovrebbero poi considerare come sbarre compresse, perchè lo sforzo di compressione a cui sono soggette è di poco inferiore a quello di trazione.

In generale avviene nelle diagonali centrali stirate, specialmente se la trave ha molti scomparti, che lo sforzo di compressione (*min*), sebbene sia in valor numerico inferiore a quello di trazione (*mas*), pure riesce notevole; e quindi bisogna costruire le medesime con forme rigide, tali da resistere al piegamento dovuto alla tensione (*min*) nonchè alla trazione dipendente dalla tensione (*mas*).

Dal confronto di questo tipo di trave con quello rappresentato dalla **Fig. 395c** si vede che il primo è più vantaggioso per le nervature, inquantochè le sbarre compresse ricevono tensioni minori che non nel secondo, mentre esso è più sfavorevole per le diagonali compresse poichè sono più cimentate di quelle dell'altro tipo; si ha però il risparmio dei montanti.

Esempio 2°

Traliccio quadruplo. — Se il traliccio è quadruplo, **Fig. 386*e***, allora i quattro sistemi semplici che lo compongono sono quelli rappresentati nelle **Fig. 386*a b c d***.

Si supponga un ponte per ferrovia ad un binario coll'impalcato avente la larghezza di metri 4,50, e nell'ipotesi che l'impalcato sia posto inferiormente, il carico accidentale si deve ritenere applicato ai nodi inferiori, **Fig. 387**.

La distanza fra i nodi si prenda $\lambda =$ metri 1,60, l'altezza della trave $h = 2\,\lambda =$ metri 3,20, dimodochè le diagonali hanno l'inclinazione di 45°.

Il peso permanente per metro corrente di trave è dato: per l'*impalcato* dalla (278), cioè

$$p_i = \frac{1}{2}(120\,d + 150) = \frac{1}{2}(120 \times 4{,}5 + 150) = 345 \text{ Kg.}$$

ed arrotondando

$$p_i = 350 \text{ Kg.}$$

e per le travi principali dalla (279), cioè

$$p_t = \frac{1}{2}\,30\,l = \frac{1}{2}\,30 \times 32 = 480$$

Il carico accidentale ragguagliato al treno di prova come carico uniformemente distribuito si desume dalla tabella **L**, cioè:

$$\text{Per le } \textit{nervature} \quad k = \frac{1}{2}\,4700 = 2350$$

$$\text{Per il } \textit{traliccio} \quad k' = \frac{1}{2}\,5600 = 2800$$

Mediante le (316) si valutano i pesi permanenti sui nodi P_s e P_i, e cioè essendo l'impalcato posto sotto si ha:

$$P_s = \frac{1}{2}\,p_t\,\lambda = \frac{1}{2}480 \times 1{,}6 = 384$$

ed arrotondando $P_s = 400$

$$P_i = \lambda\,(p_i + \frac{1}{2}\,p_t) = 1{,}6\,(350 + \frac{1}{2}480) = 944$$

ed arrotondando $P_i = 950$.

Il carico accidentale sui nodi inferiori si deve prendere:

$$\text{Per il calcolo delle } \textit{nervature} \quad K = 2350 \times 1{,}6 = 3760$$

$$\text{del } \textit{traliccio} \quad K' = 2800 \times 1{,}6 = 4480$$

I nodi estremi portano carichi metà di quelli dei nodi intermedi. — Essendo poi le diagonali inclinate di 45° si ha *sen* 45° = 0,707.

Si passa al calcolo delle tensioni dei quattro sistemi semplici costituenti il traliccio quadruplo.

Sistema primo, Fig. 388.

NERVATURE — Il calcolo delle tensioni si fa per carico mobile completo. La reazione A dovuta ai carichi permanente e mobile è costante, ed ha per valore

$$A = \frac{5 \times 400}{2} + \frac{5\,(950 + 3760)}{2} = 12775.$$

Mediante le equazioni dei momenti statici, ricordando che è $\lambda = 1{,}60$, si determinano le tensioni delle varie sbarre.

$S_1 \times 3{,}2 + 12775\,(2 \times 1{,}6) - 400\,(^1/_2\,2)\,1{,}6 = 0$ . . . . . $S_1 = S_5 = -12575$
$S_2 \times 3{,}2 + 12775\,(6 \times 1{,}6) - 400\,(2 + ^1/_2\,6)\,1{,}6 - 4710\,(4)\,1{,}6 = 0$ . . . $S_2 = S_4 = -27905$
$S_3 \times 3{,}2 + 12775\,(10 \times 1{,}6) - 400\,(2 + 6 + ^1/_2\,10)\,1{,}6 - 4710\,(4 + 8)\,1{,}6 = 0$ $S_3 = -33016$

$-I_1 \times 3{,}2 + 12775\,(0) - 400\,(0) = 0$ . . . . . $I_1 = I_6 = 0$
$-I_2 \times 3{,}2 + 12775\,(4 \times 1{,}6) - 400\,(^1/_2\,4)\,1{,}6 - 4710\,(2)\,1{,}6 = 0$ . . $I_2 = I_5 = +20440$
$-I_3 \times 3{,}2 + 12775\,(8 \times 1{,}6) - 400\,(4 + ^1/_2\,8)\,1{,}6 - 4710\,(2 + 6)\,1{,}6 = 0$ $I_3 = I_4 = +30660$

TRALICCIO. — Il carico permanente produce una reazione costante sull'appoggio di sinistra di valore $A_p = \frac{5\,(400 + 950)}{2} = 3375$, mentre il carico accidentale produce una reazione variabile calcolata per le varie diagonali, tanto rispetto alla tensione (*mas*) che alla tensione (*min*) e raccolte nella seguente tabella:

Sbarre	$\frac{K'}{N} = \frac{4480}{20} = 224$	Per la tensione (*mas*)	Valori di $A_{k'}$	Sbarre	$\frac{K'}{N} = \frac{4480}{20} = 224$	Per la tensione (*min*)	Valori di $A_{k'}$
1		18+14+10+6+2 = 50	11200	1		0	0
2		18	4032	2		14+10+6+2 = 32	7168
3		14+10+6+2 = 32	7168	3		18	4032
4		18+14 = 32	7168	4		10+6+2 = 18	4032
5		10+6+2 = 18	4032	5		18+14 = 32	7168

NB. — Vi sono N = 20 scomparti di ampiezza λ. — Si moltiplica il fattore costante della seconda finca per quello variabile della terza e si ottiene il corrispondente valore della reazione $A_{k'}$ dipendente dal carico mobile, elencato nella quarta finca. Mediante le equazioni dell'equilibrio statico si determinano le tensioni delle varie diagonali.

$+ D_{1(mas)} \times 0{,}707 - (3375 + 11200) + 400\,(^1/_2) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad D_{1(mas)} = D_{10(mas)} = + 20326$
$- D_{2(mas)} \times 0{,}707 - (3375 + 4032) + 400\,(^1/_2) + (950 + 4480) = 0 \quad . \quad D_{2(mas)} = D_{9\,(mas)} = - 2512$
$+ D_{3(mas)} \times 0{,}707 - (3375 + 7168) + 400\,(^1/_2 + 1) + 950 = 0 \quad . \; . \; . \quad D_{3(mas)} = D_{8\,(mas)} = + 12716$
$- D_{4(mas)} \times 0{,}707 - (3375 + 7168) + 400\,(^1/_2 + 1) + (950 + 4480)2 = 0 \quad D_{4(mas)} = D_{7\,(mas)} = + 1296$
$+ D_{5(mas)} \times 0{,}707 - (3375 + 4302) + 400\,(^1/_2 + 2) + 950 \times 2 = 0 \quad . \; . \quad D_{5(mas)} = D_{6\,(mas)} = + 6372$

$+ D_{1(min)} \times 0{,}707 - (3375 + 0) + 400\,(^1/_2) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad D_{1(min)} = D_{10(min)} = + 4489$
$- D_{2(min)} \times 0{,}707 - (3375 + 7168) + 400\,(^1/_2) + 950 = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad D_{2(min)} = D_{9\,(min)} = - 13282$
$+ D_{3(min)} \times 0{,}707 - (3375 + 4032) + 400\,(^1/_2 + 1) + (950 + 4480) = 0 \quad . \quad D_{3(min)} = D_{8\,(min)} = + 19467$
$- D_{4(min)} \times 0{,}707 - (3375 + 4032) + 400\,(^1/_2 + 1) + 950 \times 2 = 0 \quad . \; . \quad D_{4(min)} = D_{7\,(min)} = - 6938$
$+ D_{5(min)} \times 0{,}707 - (3375 + 7168) + 400\,(^1/_2 + 2) + (950 + 4480)\,2 = 0 \quad D_{5(min)} = D_{6\,(min)} = - 1862$

In quanto alle verticali denotando con V_a quella che insiste sull'appoggio A di sinistra e con V_b quella che insiste sull'appoggio B di destra, si ha

$V_{a(mas)} = V_{b(mas)} = - {}^5/_2\,(400 + 950) = - 3375 \qquad V_a + A = 0 \qquad V_a = - A$
$V_{a(min)} = V_{b(min)} = - {}^5/_2\,(400 + 950 + 4480) = - 14575 \qquad V_b + B = 0 \qquad V_b = - B$

Sistema secondo, Fig. 389.

Nervature. — Le tensioni si calcolano per carico completo. — La reazione costante degli appoggi è

$$A = \frac{5}{2}\,(400 + 950 + 3760) = 12775$$

Mediante le equazioni dei momenti statici si trova

$S_1 \times 3{,}2 + 12775 \times 0 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad S_1 = S_6 = 0$
$S_2 \times 3{,}2 + 12775\,(4 \times 1{,}6) - 400\,(2)\,1{,}6 - 4710\,(^1/_2\,4)\,1{,}6 = 0 \quad . \; . \quad S_2 = S_5 = - 20440$
$S_3 \times 3{,}2 + 12775\,(8 \times 1{,}6) - 400\,(2 + 6)\,1{,}6 - 4710\,(4 + {}^1/_2\,8)\,1{,}6 = 0 \quad S_3 = S_4 = - 30660$

$- I_1 \times 3{,}2 + 12775\,(2 \times 1{,}6) - 4710\,(^1/_2\,2)\,1{,}6 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad I_1 = I_5 = + 10420$
$- I_2 \times 3{,}2 + 12775\,(6 \times 1{,}6) - 4710\,(2 \times {}^1/_2\,6)\,1{,}6 - 400\,(4)\,1{,}6 = 0 \quad . \; . \quad I_2 = I_4 = + 25750$
$- I_3 \times 3{,}2 + 12775\,(10 \times 1{,}6) - 4710\,(2 + 6 + {}^1/_2\,10)\,1{,}6 - 400\,(4 + 8)\,1{,}6 = 0 \quad I_3 = + 30860$

Traliccio. — La reazione costante dell'appoggio di sinistra prodotta dal carico permanente è $A_p = {}^5/_2\,(400 + 950) = 3375$ mentre la reazione variabile $A_{k'}$ prodotta dal carico mobile è calcolata e raccolta nella seguente tabella:

Sbarre		Per la tensione (*mas*)	Valori di $A_{k'}$	Sbarre		Per la tensione (*min*)	Valori di $A_{k'}$
1	$\frac{K'}{N} = \frac{4480}{20} = 224$	$^1/_2\,20 = 10$	2240	1	$\frac{K'}{N} = \frac{4480}{20} = 224$	$16 + 12 + 8 + 4 = 40$	8960
2		$16 + 12 + 8 + 4 = 40$	8960	2		$^1/_2\,20 = 10$	2240
3		$^1/_2\,20 + 16 = 26$	5824	3		$12 + 8 + 4 = 24$	5376
4		$12 + 8 + 4 = 24$	5376	4		$^1/_2\,20 + 16 = 26$	5824
5		$^1/_2\,20 + 16 + 12 = 38$	8512	5		$8 + 4 = 12$	2688

$-D_{1(mas)} \times 0{,}707 - (3375+2240)+(950+4480)(^1/_2) = 0 \ldots D_{1(mas)}=D_{10(mas)}=-4100$

$D_{2(mas)} \times 0{,}707 - (3375+8960)+950\,(^1/_2)+400 = 0 \ldots D_{2(mas)}=D_{9\,(mas)}=+16204$

$-D_{3(mas)} \times 0{,}707 - (3375+5824)+(950+4480)(^1/_2\,1)+400 = 0 \ldots D_{3(mas)}=D_{8\,(mas)}=-925$

$D_{4(mas)} \times 0{,}707 - (3375+5376)+950\,(^1/_2+1)+400 \times 2 = 0 \ldots D_{4(mas)}=D_{7\,(mas)}=+9228$

$-D_{5(mas)} \times 0{,}707 - (3375+8512)+(950+4480)(^1/_2+2)+400 \times 2=0 \quad D_{5(mas)}=D_{6\,(mas)}=+3518$

$-D_{1(min)} \times 0{,}707 - (3375+8960)+950\,(^1/_2)=0 \ldots D_{1(min)}=D_{10(min)}=-16770$

$D_{2(min)} \times 0{,}707 - (3375+2240)+(950+4480)(^1/_2)+400=0 \ldots D_{2(min)}=D_{9\,(min)}=+3535$

$-D_{3(min)} \times 0{,}707 - (3375+5376)+950(^1/_2+1)+400=0 \ldots D_{3(min)}=D_{8\,(min)}=-9793$

$D_{4(min)} \times 0{,}707 - (3375+5824)+(950+4480)(^1/_2+1)+400 \times 2=0 \quad D_{4(min)}=D_{7\,(min)}=+359$

$-D_{5(min)} \times 0{,}707 - (3375+2688)+950\,(^1/_2+2)+400 \times 2=0 \ldots D_{5(min)}=D_{6\,(min)}=-4084$

È facile scorgere che in questo sistema le verticali sono senza tensione per qualunque posizione del carico mobile e quindi

$$V_a = V_b = 0$$

Sistema terzo, Fig. 390.

NERVATURE. — La reazione costante dell'appoggio di sinistra dovute al carico permanente ed accidentale è

$$A = \frac{400}{20}(19+15+11+7+3)+\frac{4710}{20}(17+13+9+5+1) = 11697{,}5$$

e quindi mediante le equazioni dei momenti statici si trova:

$S_1 \times 3{,}2 - 11697{,}5 \times 1{,}6 = 0 \ldots S_1=+5849$

$S_2 \times 3{,}2 + 11697{,}5\,(3 \times 1{,}6) - 400(2)1{,}6 = 0 \ldots S_2=-17146$

$S_3 \times 3{,}2 + 11697{,}5\,(7 \times 1{,}6) - 400(2+6)1{,}6 - 4710\,(4)1{,}6 = 0 \ldots S_3=-29921$

$S_4 \times 3{,}2 + 11697{,}5\,(11 \times 1{,}6) - 400(2+6+10)1{,}6 - 4710\,(4+8)1{,}6 = 0 \ldots S_4=-32476$

$S_5 \times 3{,}2 + 11697{,}5\,(15 \times 1{,}6) - 400(2+6+10+14)1{,}6 - 4710\,(4+8+12)1{,}6 = 0 \ldots S_5=-24811$

$S_6 \times 3{,}2 + 11697{,}5\,(19 \times 1{,}6) - 400\,(2+6+10+14+18)\,1{,}6 - 4710\,(4+8+12+16)\,1{,}6 = 0 \ldots S_6=-7551$

$-I_1 \times 3{,}2 + 11697{,}5\,(1{,}6) = 0 \ldots I_1=+5849$

$-I_2 \times 3{,}2 + 11697{,}5\,(5 \times 1{,}6) - 400(4)1{,}6 - 4710(2)1{,}6 = 0 \ldots I_2=+23734$

$-I_3 \times 3{,}2 + 11697{,}5\,(9 \times 1{,}6) - 400(4+8)1{,}6 - 4710(2+6)1{,}6 = 0 \ldots I_3=+31399$

$-I_4 \times 3{,}2 + 11697{,}5\,(13 \times 1{,}6) - 400(4+8+12)1{,}6 - 4710(2+6+10)1{,}6 = 0 \ldots I_4=+28844$

$-I_5 \times 3{,}2 + 11697{,}5\,(17 \times 1{,}6) - 400(4+8+12+16)1{,}6 - 4710(2+6+10+14)1{,}6 = 0 \quad I_5=+16064$

$-I_6 \times 3{,}2 + 11697{,}5\,(21 \times 1{,}6) - 400\,(4+8+12+16+20)\,1{,}6 - 4710(2+6+10+14+18)1{,}6 = 0 \quad I_6=-6926$

TRALICCIO. — La reazione costante dell'appoggio di sinistra prodotta dal carico permanente è

$$A_p = \frac{400}{20}(19+15+11+7+3)+\frac{950}{20}(17+13+9+5+1) = 3237{,}5$$

e la reazione variabile $A_{k,}$ dovuta al carico accidentale è calcolata e raccolta nella seguente tabella.

Sbarre		Per la tensione (*mas*)	Valore di A_k	Sbarre		Per la tensione (*min*)	Valore di $A_{k,}$
1		0	0	1		17+13+9+5+1 = 45	10080
2		17+13+9+5+1 = 45	10080	2		0	0
3		17	3808	3		13+9+5+1 = 28	6272
4		13+9+5+1 = 28	6272	4		17	3808
5	$\frac{4480}{20} = 224$	17+13 = 30	6720	5	$\frac{4480}{20} = 224$	9+5+1 = 15	3360
6		9+5+1 = 15	3360	6		17+13 = 30	6720
7		17+13+9 = 39	8736	7		5+1 = 6	1344
8		5+1 = 6	1344	8		17+13+9 = 39	8736
9		17+13+9+5 = 44	9856	9		1	224
10		1	224	10		17+13+9+5 = 44	9856
11		17+13+9+5+1 = 45	10080	11		0	0

$-D_1\,(mas) \times 0{,}707 - (3237{,}5+0) = 0 \quad \ldots \quad D_1\,(mas) = -\ 4578$

$D_2\,(mas) \times 0{,}707 - (3237{,}5+10080)+400 = 0 \quad \ldots \quad D_2\,(mas) = +18265$

$-D_3\,(mas) \times 0{,}707 - (3237{,}5+\ 3808)+400+(950+4480) = 0 \quad \ldots \quad D_3\,(mas) = -\ 1719$

$D_4\,(mas) \times 0{,}707 - (3237{,}5+\ 6272)+400 \times 2+950 = 0 \quad \ldots \quad D_4\,(mas) = +10972$

$-D_5\,(mas) \times 0{,}707 - (3237{,}5+\ 6720)+400 \times 2+(950+4480)2 = 0 \quad \ldots \quad D_5\,(mas) = +\ 2407$

$D_6\,(mas) \times 0{,}707 - (3237{,}5+\ 3360)+400 \times 3+950 \times 2 = 0 \quad \ldots \quad D_6\,(mas) = +\ 4945$

$-D_7\,(mas) \times 0{,}707 - (3237{,}5+\ 8736)+400 \times 3+(950+4480)3 = 0 \quad \ldots \quad D_7\,(mas) = +\ 7800$

$D_8\,(mas) \times 0{,}707 - (3237{,}5+\ 1314)+400 \times 4+950 \times 3 = 0 \quad \ldots \quad D_8\,(mas) = +\ 186$

$-D_9\,(mas) \times 0{,}707 - (3237{,}5+\ 9856)+400 \times 4+(950+4480)4 = 0 \quad \ldots \quad D_9\,(mas) = +14460$

$D_{10}(mas) \times 0{,}707 - (3237{,}5+\ 224)+400 \times 5+950 \times 4 = 0 \quad \ldots \quad D_{10}(mas) = -\ 3165$

$-D_{11}(mas) \times 0{,}707 - (3237{,}5+10080)+400 \times 5+(950+4480)5 = 0 \quad \ldots \quad D_{11}(mas) = +22489$

$-D_1\,(min) \times 0{,}707 - (3237{,}5+10080) = 0 \quad \ldots \quad D_1\,(min) = -18831$

$D_2\,(min) \times 0{,}707 - (3237{,}5+\ 0)+400 = 0 \quad \ldots \quad D_2\,(min) = +\ 4012$

$-D_3\,(min) \times 0{,}707 - (3237{,}5+\ 6272)+400+950 = 0 \quad \ldots \quad D_3\,(min) = -11538$

$D_4\,(min) \times 0{,}707 - (3237{,}5+\ 3808)+400 \times 2+(950+4480) = 0 \quad \ldots \quad D_4\,(min) = +\ 1153$

$-D_5\,(min) \times 0{,}707 - (3237{,}5+\ 3360)+400 \times 2+950 \times 2 = 0 \quad \ldots \quad D_5\,(min) = -\ 5511$

$D_6\,(min) \times 0{,}707 - (3237{,}5+\ 6720)+400 \times 3+(950+4480)2 = 0 \quad \ldots \quad D_6\,(min) = -\ 2973$

$-D_7\,(min) \times 0{,}707 - (3237{,}5+\ 1344)+400 \times 3+950 \times 3 = 0 \quad \ldots \quad D_7\,(min) = -\ 751$

$D_8\,(min) \times 0{,}707 - (3237{,}5+\ 8736)+400 \times 4+(950+4480)3 = 0 \quad \ldots \quad D_8\,(min) = -\ 8364$

$-D_9\,(min) \times 0{,}707 - (3237{,}5+\ 224)+400 \times 4+950 \times 4 = 0 \quad \ldots \quad D_9\,(min) = -\ 2741$

$D_{10}(min) \times 0{,}707 - (3237{,}5+\ 9856)+400 \times 5+(950 \times 4480)4 = 0 \quad \ldots \quad D_{10}(min) = -15026$

$-D_{11}(min) \times 0{,}707 - (3237{,}5+\ 0)+400 \times 5+950 \times 5 = 0 \quad \ldots \quad D_{11}(min) = -\ 4967$

Per le verticali si ottiene il valore della tensione (*mas*) supponendo tutti i nodi scarichi, e quello della tensione (*min*) supponendoli tutti carichi, si ha perciò:

$$-V_{a(mas)} - \left\{ \frac{400}{20}(19+15+11+7+3) + \frac{950}{20}(17+13+9+5+1) \right\} = 0 \quad . \quad V_{a(mas)} = -3237$$

$$-V_{b(mas)} - \left\{ \frac{400}{20}(17+13+9+5+1) + \frac{950}{20}(19+15+11+7+3) \right\} = 0 \quad . \quad V_{b(mas)} = -3512$$

$$-V_{a(min)} - \left\{ \frac{400}{20}(19+15+11+7+3) + \frac{950+4480}{20}(17+13+9+5+1) \right\} = 0 \quad . \quad V_{a(min)} = -13317$$

$$-V_{b(min)} - \left\{ \frac{400}{2}(17+13+9+5+1) + \frac{950+4480}{20}(19+15+11+7+3) \right\} = 0 \quad . \quad V_{b(min)} = -15832$$

Sistema quarto, Fig. 391. — Il quarto sistema ricade nel terzo, poichè lo si ottiene rovesciando questo ultimo, e quindi non occorre fare il calcolo delle relative tensioni, che si deducono da quelle del precedente sistema.

Sistema composto. — Segnate le varie tensioni accanto alle rispettive sbarre nei quattro sistemi semplici, e supponendo di sovrapporre e congiungere insieme quest'ultimi, è facile dedurre le tensioni del sistema composto, **Fig. 392***a b c d e*.

Per le nervature le tensioni del sistema composto si hanno nella somma algebrica delle corrispondenti tensioni del sistema semplice, e così per le verticali.

Le diagonali invece del sistema composto conservano le tensioni che hanno nei rispettivi sistemi semplici.

NERVATURE. — Per le nervature il calcolo si dispone come nel seguente specchio:

Sbarre superiori — S.

— 12575	— 12575	— 12575	— 12575	— 27905
0	0	— 20440	— 20440	— 20440
— 6926,25	— 6926,25	— 6926,25	— 24811,25	— 24811,25
— 19501,25	— 17146,25	— 17146,25	— 17146,25	— 17146,25
+ 5848,75				
— 13652,50	— 36647,50	— 57087,50	— 74972,25	— 90302,50
— 27905	— 27905	— 27905	— 33015	— 33015
— 20440	— 30660	— 30660	— 30660	— 30660
— 24811,25	— 24811,25	— 32476,25	— 32476,25	— 32476,25
— 29921,25	— 29921,25	— 29921,25	— 29921,25	— 32476,25
— 103077,50	— 113297,50	— 120962,50	— 126072,50	— 128627,50

Sbarre inferiori — I.

0	0	+ 20440	+ 20440	+ 20440
+ 10420	+ 10420	+ 10420	+ 10420	+ 25750
+ 5848,75	+ 16068,75	+ 16068,75	+ 16068,75	+ 16068,75
+ 16268,75	+ 5848,75	+ 5848,75	+ 23733,75	+ 23733,75
— 6926,25				
+ 9342,50	+ 32337,50	+ 52777,50	+ 70662,50	+ 85992,50
+ 20440	+ 30660	+ 30660	+ 30660	+ 30660
+ 25750	+ 25750	+ 25750	+ 30860	+ 30860
+ 28843,75	+ 28843,75	+ 28843,75	+ 28843,75	+ 31398,75
+ 23733,75	+ 23733,75	+ 31398,75	+ 31398,75	+ 31398,75
+ 98767,50	+ 108987,50	+ 116652,50	+ 121762,50	+ 124317,50

Osservazione. — Una importante relazione esiste fra le tensioni S ed I e cioè la loro differenza è costante ed è eguale alla differenza fra i carichi dei nodi superiori e quelli dei nodi inferiori, cioè

$$S_m = I_m \mp \left\{ K \mp (P_i - P_s) \right\} \qquad (318)$$

valendo il segno — quando l'impalcato è posto superiormente, ed il segno + quando l'impalcato è posto inferiormente.

Nell'esempio considerato è

$$S_m = I_m + \left\{ 3760 + (950 - 400) \right\}$$

$$S_m = I_m + 4310 \qquad \text{ossia} \qquad S_m - I_m = 4310$$

e dal confronto dei valori S ed I si trova sussistere costantemente tale differenza:

13652,50	36647,50	57087,50	74972,50	90302,50
— 9342,50	— 32337,50	— 52777,50	— 70662,50	— 85992,50
4310,00	4310,00	4310,00	4310,00	4310,00
103077,50	113297,50	120962,50	126072,50	128627,50
— 98767,50	— 108987,50	— 116652,50	— 121762,50	— 124317,50
4310,00	4310,00	4310,00	4310,00	4310,00

Si può dunque risparmiare di calcolare le tensioni S, oppure le I, nei sistemi semplici che costituiscono il composto, potendosi ottenere le corrispondenti tensioni di quest'ultimo speditamente mediante le (318).

Diagonali. — Per queste sbarre si tengono le tensioni di maggior valore numerico del rispettivo sistema semplice. Nelle diagonali centrali però essendo la tensione (*min*) negativa, abbenchè abbia il valor numerico inferiore a

quello della tensione (*mas*) pure si tien conto anche di quella onde provvedere al possibile piegamento a cui di conseguenza vengono cimentate.

Verticali. — Per le verticali estreme, o montanti sugli appoggi, la tensione (*mas*) quanto la (*min*) sono negative, e quest'ultima quindi di maggior valore numerico, basta tener conto dunque soltanto della (*min*) ed inoltre basta considerare una sola verticale.

Si dispone il calcolo come nel seguente specchio:

Metà superiore	Metà inferiore
— 14575	— 14575
0	0
0	— 15832
0	— 13317
— 14575	— 43724

Modificazione. — Secondo alcuni costruttori sarebbe conveniente portare una modificazione agli estremi della trave, e cioè far concorrere tutte le diagonali ai nodi superiori ed inferiori, in modo che il montante sull'appoggio non sia sollecitato da nessuna forza obliqua in qualche suo punto intermedio, la quale producendo flessione tenderebbe a farlo piegare in un alla reazione d'appoggio e desso quindi si troverebbe in condizione poco favorevole di cimento. Tale modificazione si vede nella **Fig. 393**, nella quale le due ultime diagonali non hanno più 45° di inclinazione, ma formano coll'orizzontale un angolo φ di cui è

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{2\lambda}{\sqrt{(2\lambda)^2 + \lambda^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0{,}894$$

Necessariamente le tensioni delle sbarre S_1 I_1 e quelle delle due ultime diagonali e del montante V_a nel sistema composto si devono calcolare in modo differente da quello prima tenuto. Variano cioè le tensioni delle corrispondenti sbarre nei sistemi semplici terzo e quarto nei quali diventa:

Sistema terzo, Fig. 394.

$S_1 = -6926{,}25$ . . . . . $I_1 = 0$

$D_{1(mas)} = \dfrac{(+3512{,}5 + 12320)}{0{,}894} = +17700$ . . . . $V_{a\,(mas)} = -3512$

$D_{1(min)} = \dfrac{3512{,}5}{0{,}894} = +3927$ . . . . . $V_{a\,(min)} = -15832$

Sistema quarto, Fig. 395.

$S_1 = 0$ . . . . . $I_1 = +5848{,}75$

$D_{1(mas)} = -\dfrac{3237{,}5}{0{,}894} = -3620$ . . . . . $V_{a\,(mas)} = 0$

$D_{1(min)} = -\dfrac{(3237{,}5 + 10080)}{0{,}894} = -14889$ . . . . $V_{a\,(min)} = 0$

e quindi diventa nel

Sistema composto, Fig. 393.

$$S_1 = \begin{array}{r} -12575 \\ 0 \\ -6926{,}25 \\ 0 \\ \hline -19501{,}25 \end{array} \qquad I_1 = \begin{array}{r} 0 \\ +10420 \\ 0 \\ +5848{,}75 \\ \hline +16268{,}75 \end{array}$$

fra le quali non sussiste più la relazione (318).

Per il montante sull'appoggio si ha

$$V_{a\,(min)} = \begin{array}{r} -14575 \\ 0 \\ -15832 \\ 0 \\ \hline -30407 \end{array}$$

Osservazione. — Per un ordine di traliccio superiore al quadruplo conviene seguire il procedimento indicato al § **217.**

2. Procedimento grafico.

234. Travi a traliccio simmetrico doppio a grandi maglie, Tav. 57. — Stabilito il numero e l'ampiezza degli scomparti per il sistema doppio si valutano i carichi sui nodi colle norme date al § **231.** Si considerano poscia separatamente i due sistemi semplici, che conservano sui nodi i carichi da essi portati direttamente nel sistema composto. Supponendo i dati assunti nell'esempio a pagina 477 il sistema doppio è rappresentato nella Fig. 1 (**Tav. 57**), ed i carichi sono:

$$P_s = 950\ \text{Kg.}\ ,\quad P_i = 250\ \text{Kg.}\ ,\quad K = 5400\ \text{Kg.}\ ,\quad K' = 6480\ \text{Kg.}$$

α) **Sistema primo.** — È quello rappresentato nella Fig. 2 (**Tav. 57**), caratterizzato da ciò, che i nodi sugli appoggi sono carichi.

1) **Nervature.** — In questo tipo i nodi inferiori non si trovano sull'appiombo dei superiori, ne nasce quindi la necessità di tener conto del carico su gli uni e su gli altri. Col solito procedimento delle figure reciproche si costruisce il diagramma delle tensioni,

Fig. 3 (**Tav. 57**), per il quale sulla verticale dei carichi si porta quelli dei nodi superiori

$$P_s + K = 950 + 5400 = 6350 \text{ Kg.}$$

nonchè quelli dei nodi inferiori

$$P_i = 250 \text{ Kg.}$$

2) **Traliccio.** — Il movimento del carico accidentale da destra a sinistra origina la tensione parziale (*mas*) nelle diagonali che si innalzano a sinistra, e la tensione parziale (*min*) nelle diagonali che si innalzano verso destra. La componente verticale di queste tensioni è data dalla reazione variabile A_k dell'appoggio di sinistra. Questa reazione si ottiene formando la verticale dei carichi K' all'estremo **A** di sinistra dell'asse orizzontale **A B** — parte superiore della Fig. 4 (**Tav. 57**) — prendendo l'estremo **B** per polo, guidando le verticali corrispondenti ai nodi superiori carichi di K' e costruendo mediante il fascio di raggi proiettato sulla verticale dei carichi il poligono funicolare corrispondente. Le ordinate di questo poligono misurate sulle verticali **v** intermedie a quelle dei carichi K', cioè quelle che corrispondono ai nodi inferiori, dànno il cercato valore della reazione variabile A_k per le diagonali che concorrono a questi nodi. Il poligono funicolare deve partire dall'ultimo dei nodi intermedî, poichè il carico accidentale non ha nessuna azione sulla diagonale D_s. Per valutare l'azione del carico permanente basta portare i carichi P_s P_i simmetricamente parte per parte dell'orizzontale **A B**, determinare la reazione costante A_p e sottrarre da questa i successivi carichi permanenti, e progettare le risultanti somme algebriche sulle verticali intermedie **v**, con che si ottengono delle ordinate poste parte sotto e parte sopra l'orizzontale **A B**, le quali rappresentano la componente verticale della tensione dovuta al carico permanente. Sommando algebricamente le ordinate relative al carico accidentale con quelle dovute al carico permanente, si hanno le componenti che si riferiscono all'azione simultanea dei carichi e quindi basta proiettarle sulla direzione delle varie diagonali per avere la tensione totale di queste ultime.

Per il movimento del carico accidentale da sinistra a destra, che origina le tensioni (*mas*) nelle diagonali che si innalzano a

destra e le tensioni (*min*) in quelle che si innalzano a sinistra, si opera in modo analogo, ed il relativo diagramma è segnato nella parte inferiore della Fig. 4 (**Tav. 57**), avendo preso un nuovo asse orizzontale **A B**.

β) **Sistema secondo.** — È quello che ha i nodi sugli appoggi senza carico, ed è rappresentato dalla Fig. 5 (**Tav. 57**).

1) **Nervature.** — Si forma la verticale dei carichi portando quelli sui nodi superiori e quelli sui nodi inferiori, Fig. 6 (**Tav. 57**), e sempre col procedimento delle figure reciproche, si costruisce il diagramma delle tensioni.

2) **Traliccio.** — Il procedimento è analogo a quello indicato per il primo sistema, soltanto che le verticali dei nodi carichi di K′ e le intermedie **v** si invertono, per cui il poligono funicolare deve avere i vertici sulle verticali intermedie **v**, relative ai nodi inferiori, e le rispettive ordinate dànno le componenti verticali della tensione per le diagonali che concorrono a questi nodi.

γ) **Sistema doppio.** — Costruiti i diagrammi delle tensioni per i due sistemi semplici e misurati i rispettivi segmenti nella scala delle forze — 4 millimetri per tonnellata per i diagrammi della **Tav. 57** — se ne deduce il valore numerico. Dalla sovrapposizione dei due sistemi semplici si ottengono le tensioni del sistema composto sommando le tensioni per le sbarre che si coprono (*nervature* e *verticali estreme*) e conservando quelle delle sbarre isolate (*diagonali*). Quest'ultima operazione del tutto numerica si conduce in modo identico a quello sviluppato nell'esempio a pagina 469 e nulla occorre aggiungere in proposito.

Controventi.

235. Controventi verticali. — Per il calcolo delle croci di Sant'Andrea verticali, **Fig. 396**, si accetta in pratica l'ipotesi che le diagonali di esse debbano sopportare ognuna la metà del peso dell'impalcato e del sovraincombente carico accidentale che corrispondono ad uno scomparto, cioè all'intervallo compreso fra due croci di Sant'Andrea successive. Detto Q il carico totale che agisce verticalmente su caduna diagonale e λ la lunghezza dell'intervallo si ha

$$Q = \frac{1}{2}(p_1 + k)\lambda \qquad (319)$$

nella quale p_i si determina colle (233) se si tratta di ponti per strada ordinaria, e colla (236) per i ponti di ferrovia, mentre k si valuta colle norme del § **212**-β per i ponti per strada ordinaria, e ricorrendo alla tabella **L** quando si tratta di ponti ferroviari. La tensione D delle diagonali ha dunque per valore

$$D = \frac{Q}{\cos\phi} = (p_i + k)\frac{\lambda}{2\cos\phi} \qquad (320)$$

la quale manifestamente è uno sforzo di compressione.

Il traverso inferiore poi è soggetto ad uno sforzo di trazione T che ha per valore

$$T = Q\,\text{tang}\,\phi = \frac{1}{2}(p_i + k)\,\lambda\,\text{tang}\,\phi \qquad (321)$$

236. Controventi orizzontali. — Queste membrature sono destinate a resistere agli sforzi orizzontali prodotti nella travata dalle varie cause indicate al § **208**.

La pressione del vento è proporzionale al quadrato della sua velocità ed il relativo valore per unità quadrata si può esprimere, allorchè la direzione del vento è normale alla superficie premuta, con $p_v = 0{,}12\,v^2$, essendo v la velocità in metri, col mezzo della qual formula è calcolata la tabella **LI** che dà la pressione in chilogrammi per metro quadrato.

Tabella LI.

Indicazione del vento	Velocità	Press. per m□	Indicazione del vento	Velocità	Press. per m□
Vento forte	15	27	Violenta burrasca . .	30	108
Vento fortissimo . .	20	48	Uragano	40	192
Burrasca	25	75	Il più violento uragano	48	278

In pratica però si prende mediamente $p_v = 150$ chilogrammi per metro quadrato. Per quanto riguarda la valutazione della superficie colpita dal vento, chiamando s quella relativa ad un

metro corrente di travata ed h l'altezza delle travi principali, si può porre mediamente, considerando l'influenza del vento,

$$\left.\begin{array}{lll} \textit{Sopra una sola trave} & \ldots & s = 0{,}20 + 0{,}33\ h\ \text{m}\square \\ \text{»} \quad \textit{due travi} & \ldots & s = 0{,}22 + 0{,}48\ h\ \text{»} \end{array}\right\} \quad (322)$$

Siccome poi l'azione del vento si fa sentire anche sul treno transitante, si può valutarne la superficie colpita in ragione di 3 metri quadrati per metro corrente.

Gli sforzi prodotti dalle oscillazioni trasversali di un treno in movimento non possono essere determinati esattamente ed in modo attendibile, è certo però che essi aumentano col crescere del carico mobile e della velocità del movimento. Volendo calcolare anche il valore di questi sforzi si può ritenere secondo il Winkler, che si sviluppi una forza orizzontale eguale a 0,1 del peso della locomotiva.

L'intensità della forza centrifuga giunge al massimo al 4 per 100 del carico mobile.

Praticamente nel fare il calcolo degli sforzi che cimentano i controventi si tien conto soltanto dell'azione del vento e le riquadrature da ciò risultanti si aumentano convenientemente onde conseguire la necessaria resistenza anche contro gli sforzi prodotti dalle oscillazioni e vibrazioni dipendenti dal passaggio del treno. In quanto all'azione della forza centrifuga essa si può trascurare essendo di poca entità. I controventi orizzontali si considerano come una travatura a traliccio dissimetrico con ambe le diagonali per ogni scomparto, nella quale funzionano da nervature le stesse nervature delle travi principali, mentre i traversi, oppure le travi trasversali, qualora vi siano, funzionano in analogo modo delle verticali, e le croci di Sant'Andrea alla guisa delle diagonali. Valendosi quindi dei dati precedenti si determinano le pressioni per ogni nodo, e seguendo i procedimenti indicati nell'esempio a pagina 435 e susseguenti, si determinano le tensioni dei traversi e delle croci di Sant'Andrea.

Esempio.

Riferendosi all'esempio sviluppato a pagina 427, si supponga che l'impalcato sia posto sopra, e che vi sia per ogni scomparto una croce di Sant'Andrea

verticale con traverso inferiore, **Fig. 397**, e che le travi principali sieno rinforzate da un doppio ordine di controventi orizzontali, cioè uno collegante le nervature superiori e l'altro le nervature inferiori, ed aventi la disposizione mostrata nella **Fig. 398.**

CONTROVENTI VERTICALI. — L'altezza della trave è $h = 3{,}6$ la distanza fra le travi principali si supponga di metri 3,5, per cui risulta la lunghezza delle diagonali di metri 5,02, e quindi $\cos\varphi = \frac{3{,}6}{5{,}02} = 0{,}717$, ed essendo

$$\lambda = 3{,}6 \quad , \quad p_i = 120 \times 4{,}5 + 150 = 690 \quad , \quad k = 4725$$

risulta applicando la (320)

$$D = (690 + 4725)\frac{3{,}6}{2 \times 0{,}717} = 13594.$$

Supponendo di fare le diagonali con dei ferri a T $\frac{150 \times 130}{23 \times 14}$, il rapporto fra la loro lunghezza ed il lato minore del rettangolo circoscrivente il ferro a T è $r = \frac{5{,}02}{0{,}14} = 31$ ed il corrispondente coefficiente di riduzione, tabella **XII**, è prossimamente $m = 2{,}5$ per cui lo sforzo pratico ammissibile diventa $\frac{R_c}{m} = \frac{6}{2{,}5} = 2{,}4$ chilogrammi per millimetro quadrato. Essendo l'area dei ferri a T di $150 \times 130 - 127 \times 116 = 4768$ millimetri quadrati, lo sforzo reale cimentante la diagonale è di $\frac{13594}{4768} = 2{,}8$ chilogrammi, cioè assai prossimo allo sforzo ammissibile in pratica, prima trovato.

CONTROVENTI ORIZZONTALI. — Le pressioni per ogni nodo, dipendenti dall'azione del vento, si valutano nel modo seguente. La superficie unitaria premuta si ricava dalla (322), cioè $s = 0{,}20 + 0{,}33 \times 3{,}6 = 1{,}388$ metri quadrati ed in cifra rotonda $s = 1{,}4$ metri quadrati, per cui, ricordando che gli scomparti hanno una lunghezza $\lambda = 3{,}6$, i nodi della controventatura superiore, sulla quale opera anche l'azione del vento sul treno, sono caricati con $(1{,}4 + 3{,}0)\ 150 \times 3{,}6 = 2376$ chilogrammi; mentre i nodi delle controventature inferiori, i quali non sono influenzati dall'azione del vento sul treno, ricevono un carico di $1{,}4 \times 150 \times 3{,}6 = 756$ chilogrammi. Considerando poi i sistemi semplici che costituiscono i due ordini di controventatura, si deve ritenere che sui nodi rispettivi operino carichi metà di quelli precedentemente trovati, come si vede nei tipi schematici rappresentati dalle **Fig. 399**, e cioè per il controvento superiore il carico di ogni nodo è $^1/_2\ 2376 = 1188$ chilogrammi, e per il controvento inferiore il carico è $^1/_2\ 755 = 378$ chilogrammi, mentre le corrispondenti reazioni agli estremi del sistema sono:

Per il superiore . . . . . $A_s = \frac{1188 \times 9}{2} = 5346$

» l'inferiore . . . . . $A_i = \frac{378 \times 9}{2} = 1701$

Le diagonali estreme sono le più cimentate, e siccome è $\cos\varphi = \frac{3,5}{5,02}$ sopportano una tensione che ha per valore:

Nel sistema superiore . . . $D_s = A_s \frac{1}{\cos\varphi} = 5346 \frac{5,02}{3,5} = 7666$ Kg.

» inferiore . . . $D_i = A_i \frac{1}{\cos\varphi} = 1701 \frac{5,02}{3,5} = 2439$ »

e prendendo lo sforzo pratico di 3 chilogrammi per millimetro quadrato, onde tener conto delle vibrazioni prodotte dal carico mobile, si deducono le loro riquadrature nette:

Per il sistema superiore . . . . . $\omega_s = \frac{7666}{3} = 2555$ mm□

» » inferiore . . . . . $\omega_i = \frac{2439}{3} = 813$ »

Fino a circa 30 metri di portata si possono far tutte le diagonali di eguale riquadratura e precisamente con quella che compete alle più cimentate, cioè le estreme. Per portate superiori, volendo per ragioni di economia diminuire le riquadrature delle diagonali col diminuire della loro tensione massima, si valutano queste tensioni nei modi indicati negli esempi a pagina 435 e seguenti.

Appoggi ed apparecchi di dilatazione.

237. Appoggi fissi. — Chiamata A la reazione dell'appoggio, λ_o ed l_o rispettivamente la larghezza e la lunghezza della piastra ed R_c lo sforzo pratico relativo alla muratura impiegata nella costruzione dei piedritti, acciò sia garantita la stabilità della medesima rispetto allo schiacciamento deve essere

$$A = \lambda_o \, l_o \, R_c \qquad (323)$$

La larghezza λ_o dipende da quella λ delle nervature della trave e si può prendere mediamente:

Per travi a pareti ugnole ad un binario $\lambda_o = 1,5\ \lambda$

» » *doppie ed a due binari* $\lambda_o = 1,25\ \lambda$ (324)

238. Appoggi mobili. — Per questi appoggi bisogna tener conto dello scorrimento delle travi dovuto sia al loro cambiamento

di lunghezza per variazioni di temperatura, sia al loro incurvamento sotto l'azione dei sopraccarichi. Indicando con t^0 la massima differenza di temperatura corrispondente alla località dove si costruisce il ponte, con Θ il coefficiente di dilatazione del ferro fucinato, con H ed L l'altezza e la lunghezza della trave, con ϕ l'angolo di incurvamento all'estremo della nervatura inferiore, con $a_,$ la variazione di lunghezza della trave per cambiamenti di temperatura, con $a_{,,}$ lo spostamento di ciascun estremo della trave per l'inflessione, è $a_, = \Theta\, t^0\, L$, $a_{,,} = \frac{H}{2}\, tang\, \phi$. Denotando con k il carico mobile e con p il permanente per metro corrente di trave è $tang\, \phi = \frac{k\, l^3}{24\, E\, I}$; ricorrendo alla (31$a$) si ha $I = \frac{M\, d}{R}$, ed essendo $M = {}^1/_8\, (p+k)\, l^2$, $d = \frac{H}{2}$, risulta $I = \frac{(p+k)\, l^2}{8\, R} \cdot \frac{H}{2}$ e quindi $tang\, \phi = \frac{2\, k\, l\, R}{3\, E\, (p+k)\, H}$ per cui diventa $a_{,,} = \frac{k\, l\, R}{3\, E\, (p+k)}$. Lo scorrimento totale a della trave è dunque

$$a = a_, + 2\, a_{,,} = l \left(\Theta\, t^0 + \frac{2\, R\, k}{3\, (p+k)\, E} \right) \qquad (325)$$

α) **Rulli cilindrici.** — La lunghezza λ_r dei rulli si prende di solito eguale a quella λ^0 delle piastre fisse; alcune volte però, quando si fa la piastra superiore con ribordi all'ingiù per opporsi allo spostamento laterale dei rulli, si tiene la lunghezza di questi alcun poco minore, e precisamente di quanto è l'ampiezza dei ribordi. Chiamando rispettivamente N e D il loro numero e diametro, ed R_0 lo sforzo riferito all'unità di superficie della loro proiezione orizzontale deve essere $A = N\, D\, \lambda_r\, R_0$ da cui

$$N = \frac{A}{D\, \lambda_r\, R_0} \qquad (326)$$

Il diametro D dei cilindri si può determinare colle seguenti formule empiriche:

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{Per ponti ad un binario} & D = 10 + 0{,}10\, l \text{ cm.} \\ \text{» } \textit{a due binari} & D = 10 + 0{,}13\, l \text{ »} \end{array}\right\} \qquad (327)$$

mentre si deve assumere:

Per rulli di ghisa $R_0 = 20$ fino a 24 Kg. per cm□
» *di acciaio* $R_0 = 30$ » 36 » »

β) **Segmenti di cilindro.** — La loro lunghezza si determina come quella dei rulli cilindrici, ed il diametro od altezza D si valuta colle seguenti formule:

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{Per ponti ad un binario} & D = 15 + 0{,}16\, l \text{ cm.} \\ \text{» } \textit{a due binari} & D = 15 + 0{,}2\, l \text{ »} \end{array}\right\} \quad (328)$$

mentre la loro larghezza D_0 si prende mediamente $D_0 = 0{,}5\, D$ e la grossezza δ del gambo in corrispondenza alla metà della loro altezza $\delta = 0{,}16\, D$. Circa al loro numero N, lo si prende più grande che pei rulli cilindrici, onde ottenere il meglio possibile una uniforme distribuzione della pressione sulle murature. Secondo il Winkler si può prendere:

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{Per ponti ad un binario} & N = 3 + 0{,}045\, l \\ \text{» } \textit{a due binari} & N = 4{,}5 + 3{,}045\, l \end{array}\right\} \quad (329)$$

locchè corrisponde ad un numero circa una volta e mezza più grande di quello dei cilindri.

γ) **Piastre d'appoggio.** — Tanto la superiore che la inferiore devono avere almeno tale lunghezza da permettere al treno di rulli di muoversi senza sortire dalle medesime.

1) **Piastra superiore.** — La larghezza λ_0 si determina come quella degli appoggi fissi; in quanto alla lunghezza l_0, siccome si lascia un intervallo i fra un rullo e l'altro (che varia fra 1 e 3 centimetri) così deve essere

$$l_0 = N\,D + (N - 1)\, i + a \quad (330)$$

nella quale si deve porre D_0 in luogo di D per segmenti di cilindro.

La grossezza g delle piastre si può mediamente prendere:

Per piastre di ghisa $g = 0{,}5\, D$ *con cilindri*; $g = 0{,}40\, D$ *con segmenti*
» *di ferro* $g = 0{,}3\, D$ » ; $g = 0{,}2\, D$ »

2) **Piastra inferiore.** — La larghezza di questa piastra λ'_0 si tiene maggiore della lunghezza dei rulli cioè si fa $\lambda'_0 = 1{,}4\,\lambda_r$ mentre si assume la lunghezza $l'_0 = 1{,}1\,l_0$ avvertendo che la lunghezza l'_0 non deve poi essere minore di quella l_0 che si ricava dalla (323) per gli appoggi fissi.

La grossezza g_r di queste piastre (ritenuto ch'esse sieno di ghisa, come è di solito) si prende:

Per cilindri . . . . . $g_r = 0{,}6\,D$

» *segmenti* . . . . . $g_r = 0{,}4\,D$

239. Appoggi oscillanti. — Si chiami r il raggio del perno, la cui lunghezza λ_0 si fa eguale a quella dei rulli.

1) **Appoggi a perno.** — Secondo il WINKLER è opportuno di assumere:

$$\left.\begin{array}{lll} \textit{Per perni di ghisa} \ . \ . \ . \ . & r = \dfrac{2\,A}{R\,\lambda_0} & \text{cm.} \\ \text{» » } \textit{d'acciaio} \ . \ . \ . \ . & r = \dfrac{1{,}5\,A}{R\,\lambda_0} & \text{»} \end{array}\right\} \quad (331)$$

nelle quali si deve porre lo sforzo pratico $R = 600$ chilogrammi per centimetro quadrato.

2) **Appoggi tangenziali.** — Il perno si fa in questi sempre di acciaio ed il raggio si determina colla

$$r = \frac{4000\,A^2}{R^3\,\lambda_0^2} \text{ cm.} \qquad (332)$$

dove A è da esprimersi in chilogrammi, R in chilogrammi per centimetro quadrato, λ_0 in centimetri. Lo sforzo pratico conserva il valore $R = 600$ chilogrammi per centimetro quadrato. La piastra piana soprastante al perno si tiene larga quanto questo è lungo, e le si assegna una lunghezza $l''_0 = 7 + 0{,}4\,l$ centimetri (essendo l la lunghezza della trave).

3) **Piastrone d'appoggio e bilanciere.** — La lunghezza l_0 e la larghezza λ_0 del *piastrone d'appoggio* si determinano come per la piastra superiore degli appoggi mobili a cilindri. La lunghezza

del *bilanciere* dipende dalla conformazione del montante estremo, però la si tiene ordinariamente eguale a quella del piastrone di appoggio.

Esempio.

Si supponga un ponte per ferrovia ad un binario, le cui travi principali abbiano la portata teorica $l = 40$ metri. La (263) dà la larghezza delle tavolette $\lambda = 150 + 4 \times 40 = 310$ millimetri, ed in cifra rotonda si prende $\lambda = 32$ centimetri. Il peso permanente per metro corrente di ponte si ha dalla (280) $p = 650 + 24{,}5 \times 40 + 0{,}11 \times 40^2 = 1806$, e l'accidentale si desume dalla tabella L, cioè $k_1 = 5430$ e $k = 4700$ e quindi per metro corrente di trave si ha $p = {}^1/_2\ 1806 = 903$ chilogrammi, $k_1 = {}^1/_2\ 5430 = 2715$ chilogrammi, $k = {}^1/_2\ 4700 = 2350$ chilogrammi. La reazione dell'appoggio è $A = mas T = {}^1/_2 (p + k_1)\ l = {}^1/_2 (903 + 2815)\ 40 = 72360$ chilogrammi.

Appoggio fisso. — La larghezza della piastra si ha dalla (324) $\lambda_0 = 1{,}5 \times 32 = 48$ centimetri e supponendo la testata costruita con pietra calcare ordinaria, per la quale è in media $R_c = 20$ chilogrammi per centimetro quadrato, mediante la (323) si ricava la lunghezza della piastra

$$l_0 = \frac{72360}{48 \times 20} = 74{,}4 \text{ cm.}$$

Appoggio mobile. — Il diametro dei rulli o cilindri, valendosi della (327) risulta $D = 10 + 0{,}1 \times 40 = 14$ centimetri, e prendendo $R_c = 20$ chilogrammi per centimetro quadrato nella supposizione che essi sieno di ghisa, mediante la (326) si ricava il loro numero $N = \frac{72360}{14 \times 48 \times 20} = 5{,}4$ ed in cifra rotonda $N = 6$. Supponendo la massima differenza di temperatura $t^0 = 45^0$ ed essendo (riferendosi al centimetro) $l = 4000$; $p = 9{,}03$; $k = 23{,}5$ ricorrendo alla (325) si ha lo scorrimento totale della trave

$$a = 4000 \left\{ 0{,}000015 \times 45 + \frac{2 \times 600 \times 23{,}5}{3\,(9{,}03 + 23{,}5)\ 1860000} \right\} = 3{,}32$$

ed in cifra rotonda $a = 3{,}5$ centimetri. Assumendo $i = 1{,}5$ centimetri mediante la (330) si trova la lunghezza della *piastra d'appoggio superiore* $l_0 = 6 \times 14 + (6 - 1)\ 1{,}5 + 3{,}5 = 95$ centimetri e la relativa grossezza $g = 0{,}5 \times 14 = 7$ centimetri. Per la *piastra inferiore* si ha $\lambda'_0 = 1{,}1 \times 95 = 104{,}5$ centimetri; $g_1 = 0{,}6 \times 14 = 8{,}4$ centimetri.

Osservazione. — Ordinariamente in pratica, per regolarità di costruzione, si tiene la piastra dell'appoggio fisso eguale alla piastra superiore dell'appoggio mobile.

Appoggi oscillanti. — Volendo fare l'*appoggio a perno* di ghisa allora il raggio di quest'ultimo dovrebbesi calcolare colla (331) cioè

$$r = \frac{2 \times 72360}{600 \times 48} = 5 \text{ cm.}$$

per un *appoggio tangenziale* invece si dovrebbe ricorrere alla (332) che dà

$$r = \frac{4000 \times 72360^2}{600^3 \times 48^2} = 42{,}1 \text{ cm.}$$

ed alla piastra soprastante si assegnerebbe una lunghezza

$$l_0'' = 7 + 0{,}4 \times 40 = 23 \text{ cm.}$$

C) Ponti a più travate rettilinee continue.

1. Costruzione.

240. Generalità. — Qualora oltre ai piedritti di sponda si devono intercalare degli altri piedritti intermedi, quando cioè il ponte è a più travate, si può disporre la costruzione in due modi distinti.

1° Si costruiscono tante travate indipendenti, appoggiandole sopra due piedritti successivi, cioè a dire l'intera costruzione viene costituita dal complesso di tanti ponti ad una travata, per cui se tutte le travate sono della stessa portata basta fare lo studio per una soltanto, mentre se esse hanno portate differenti, bisogna fare uno studio particolare per ognuna delle stesse, usando i procedimenti indicati per i ponti ad una campata ai **§§ 192 a 234.**

2° Si costruisce il ponte facendo portare l'impalcato da due o più travi principali che corrono continuamente dall'uno all'altro dei piedritti di sponda appoggiandosi anche sugli intermedi.

Il primo modo ricade nel caso dei ponti ad una travata e non occorrono per esso speciali indicazioni; nel secondo modo invece, le travi principali, essendo sostenute da un numero n di appoggi maggiore di due, in causa della reazione dei medesimi si trovano in speciali condizioni di resistenza, che bisogna studiare particolarmente, onde vedere come si possa conseguire anche in questo caso l'uniforme resistenza delle travi.

Di solito le travi principali si fanno a traliccio simmetrico multiplo a piccole maglie e tanto alle nervature che alle sbarre del traliccio si assegnano le stesse forme indicate ai §§ **199** a **205** per i ponti ad una travata.

I montanti estremi sono conformati come si è veduto al § **206**, ma in questo caso si devono considerare anche i montanti sopra gli appoggi intermedi, destinati a resistere alla reazione dei medesimi, ed i quali possono essere costruiti nei vari modi indicati dalle Fig. 401.

Così pure le disposizioni dell'impalcato sono quelle stesse indicate nei capitoli precedenti, e per i controventi e gli apparecchi di dilatazione servono le norme date ai §§ **208** a **214**.

2. Calcoli di stabilità.

241. Generalità. — Il calcolo di stabilità per le travi continue sopra più appoggi si fa in base alla teoria sviluppata ai §§ **66** a **73**. È necessario però introdurre in questa ricerca alcune ipotesi non affatto rigorose, ma accettabili in pratica, onde rendere possibile l'applicazione della teoria surricordata, le quali ipotesi si passa ora a stabilire:

I piedritti hanno una notevole grossezza e le travi vi si appoggiano coll'intermezzo degli apparecchi di dilatazione, sicchè il contatto fra trave ed appoggi è piuttosto di notevole ampiezza; si trascura però di tener conto dell'ampiezza del contatto e si suppone che la trave sia appoggiata sui piedritti come su altrettanti spigoli situati in corrispondenza all'asse di essi. Si ammette inoltre che le travi abbiano sezione trasversale costante onde potervi applicare le formule della indicata teoria per il calcolo degli sforzi che le cimentano, noti i quali si determinano le condizioni di stabilità delle travi in modo che esse risultino pressochè di uniforme resistenza.

242. Carico permanente ed accidentale. — I carichi unitari si determinano usando le stesse norme date ai §§ **216** e **217**. Se tutte le travate costituenti il ponte hanno la stessa portata, si prendono per p e k i valori relativi alla loro lunghezza, ma se hanno portate differenti si prendono valori medi fra quelli relativi alle varie lunghezze. Alcuni costruttori consi-

gliano però molto opportunamente di prendere i più grandi valori in vantaggio della stabilità e cioè quello relativo alla più grande travata per il carico permanente, e quello relativo alla più piccola travata per il carico mobile. — In ultima analisi dunque *tanto il carico permanente che il carico mobile sono da considerarsi come uniformemente distribuiti sulle varie travate.*

243. Formule numeriche per i momenti sugli appoggi. — I momenti sugli appoggi sono le incognite ausiliarie che servono a risolvere il problema avente per iscopo la determinazione degli sforzi esterni nelle travi continue sopra più appoggi. È necessario dunque far precedere la loro ricerca.

α) **Appoggi fissi.** — I momenti sugli appoggi fissi si determinano mediante la *formula dei tre momenti* (**85** - a), seguendo le norme esposte al § **70**. Per ragioni che si chiariranno in seguito le due travate estreme si fanno fra loro eguali e di lunghezza minore di quella delle travate centrali, pure fra loro egualmente lunghe. Detta l la lunghezza delle travate centrali, si può esprimere con αl quella delle travate estreme, essendo α un coefficiente minore dell'unità. Si possono anche fare le travate tutte eguali, specialmente quando trattasi di piccole luci, nel qual caso hanno tutte la eguale lunghezza l. Ciò posto, applicando i procedimenti indicati, si ottengono i risultati seguenti:

a) *Ponti a* **due** *campate.* — Se le campate hanno lunghezze differenti l_1 ed l_2 si ha $m_1 = m_3 = 0$ ed $m_2 = \frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2)}$ e se diventa $l_1 = l_2 = l$ allora $m_2 = \frac{l^2}{16}(p_1 + p_2)$.

b) *Ponti a* **tre** *campate.*

$m_1 = m_4 = 0$ e per $l_1 = l_3 = \alpha l$ ed $l_2 = l$ si ha

$$m_2 = \frac{l^2}{4(4\alpha^2+8\alpha+3)}\left\{2(\alpha^4+\alpha^3)p_1+(2\alpha+1)p_2-\alpha^3 p_3\right\}$$

$$m_3 = \frac{l^2}{4(4\alpha^2+8\alpha+3)}\left\{-\alpha^3 p_1+(2\alpha+1)p_2+2(\alpha^4+\alpha^3)p_3\right\}$$

e per $\alpha = 1$, cioè $l_1 = l_2 = l_3 = l$

$$m_2 = \frac{l^2}{60}\left(4p_1+3p_2-p_3\right) \; ; \; m_3 = \frac{l^2}{60}\left(-p_1+3p_2+4p_3\right)$$

c) *Ponti a* **quattro** *campate.*

$m_1 = m_5 = 0$ e per $l_1 = l_4 = \alpha l$ ed $l_2 = l_3 = l$ si ha

$$m_2 = \frac{l^2}{16(4\alpha^2+7\alpha+3)}\left\{(8\alpha^4+7\alpha^3)\,p_1+(6\alpha+5)\,p_2-(2\alpha+1)\,p_3+\alpha^3 p_4\right\}$$

$$m_3 = \frac{l^2}{8(4\alpha+3)}\left\{-\alpha^3\,(p_1+p_4)+(2\alpha+1)\,(p_2+p_3)\right\}$$

$$m_4 = \frac{l^2}{16(4\alpha^2+7\alpha+3)}\left\{\alpha^3 p_1-(2\alpha+1)\,p_2+(6\alpha+5)\,p_3+(8\alpha^4+7\alpha^3)\,p_4\right\}$$

e per $\alpha = 1$, cioè $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l$

$$m_2 = \frac{l^2}{224}\left(15p_1+11p_2-3p_3+p_4\right) \;;\; m_3 = \frac{l^2}{56}\left(-p_1+3p_2+3p_3-p_4\right)$$

$$m_4 = \frac{l^2}{224}\left(p_1-3p_2+11p_3+15p_4\right)$$

d) *Ponti a* **cinque** *campate.*

$m_1 = m_6 = 0$ e per $l_1 = l_5 = \alpha l$ ed $l_2 = l_3 = l_4 = l$ si ha

$$m_2 = \frac{l^2}{4(60\alpha^2+104\alpha+45)}\left\{(30\alpha^4+26\alpha^3)\,p_1+(22\alpha+19)\,p_2-(6\alpha+5)\,p_3+(2\alpha+1)\,p_4-\alpha^3 p_5\right\}$$

$$m_3 = \frac{l^2}{4(60\alpha^2+104\alpha+45)}\left\{\begin{array}{l}-(8\alpha^4+7\alpha^3)\,p_1+(16\alpha^2+22\alpha+7)\,p_2+(12\alpha^2+22\alpha+10)\,p_3-\\-(4\alpha^2+6\alpha+2)\,p_4+(2\alpha^4+2\alpha^3)\,p_5\end{array}\right\}$$

$$m_4 = \frac{l^2}{4(60\alpha^2+104\alpha+45)}\left\{\begin{array}{l}(2\alpha^4+2\alpha^3)\,p_1-(4\alpha^2+6\alpha+2)\,p_2+(12\alpha^2+22\alpha+10)\,p_3+\\+(16\alpha^2+22\alpha+7)\,p_4-(8\alpha^4+7\alpha^3)\,p_5\end{array}\right\}$$

$$m_5 = \frac{l^2}{4(60\alpha^2+104\alpha+45)}\left\{-\alpha^3 p_1+(2\alpha+1)\,p_2-(6\alpha+5)\,p_3+(22\alpha+19)\,p_4+(30\alpha^4+26\alpha^3)\,p_5\right\}$$

e per $\alpha = 1$, cioè $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l_5 = l$

$$m_2 = \frac{l^2}{836}\left(56p_1+41p_2-11p_3+3p_4-p_5\right) \;;\; m_3 = \frac{l^2}{836}\left(-15p_1+45p_2+44p_3-12p_4+4p_5\right)$$

$$m_4 = \frac{l^2}{836}\left(4p_1-12p_2+44p_3+45p_4-15p_5\right) \;;\; m_5 = \frac{l^2}{836}\left(-p_1+3p_2-11p_3+41p_4+56p_5\right)$$

e) *Ponti a* **sei** *campate.*

$m_1 = m_7 = 0$ e per $l_1 = l_6 = \alpha l$ ed $l_2 = l_3 = l_4 = l_5 = l$ si ha

$$m_2 = \frac{l^2}{4(224\alpha^2+388\alpha+168)}\left\{\begin{array}{l}(112\alpha^4+97\alpha^3)\,p_1+(82\alpha+71)\,p_2-(22\alpha+19)\,p_3+\\+(6\alpha+5)\,p_4-(2\alpha+1)\,p_5+\alpha^3 p_6\end{array}\right\}$$

$$m_3 = \frac{l^2}{4(224\alpha^2+388\alpha+168)}\left\{\begin{array}{l}-(30\alpha^4+26\alpha^3)\,p_1+(60\alpha^2+82\alpha+26)\,p_2+(44\alpha^2+82\alpha+38)\,p_3- \\ -(12\alpha^2+22\alpha+10)\,p_4+(4\alpha^2+6\alpha+2)p_5-(2\alpha^4+2\alpha^3)\,p_6\end{array}\right\}$$

$$m_4 = \frac{l^2}{4(224\alpha^2+388\alpha+168)}\left\{\begin{array}{l}(8\alpha^4+7\alpha^3)\,p_1-(16\alpha^2+22\alpha+7)\,p_2+(48\alpha^2+82\alpha+35)\,p_3+ \\ +(48\alpha^2+82\alpha+35)\,p_4-(16\alpha^2+22\alpha+7)\,p_5+(8\alpha^4+7\alpha^3)\,p_6\end{array}\right\}$$

$$m_5 = \frac{l^2}{4(224\alpha^2+388\alpha+168)}\left\{\begin{array}{l}-(2\alpha^4+2\alpha^3)\,p_1+(4\alpha^2+6\alpha+2)\,p_2-(12\alpha^2+22\alpha+10)\,p_3+ \\ +(44\alpha^2+82\alpha+38)\,p_4+(60\alpha^2+82\alpha+26)\,p_5-(30\alpha^4+26\alpha^3)\,p_6\end{array}\right\}$$

$$m_6 = \frac{l^2}{4(224\alpha^2+388\alpha+168)}\left\{\begin{array}{l}\alpha^3 p_1-(2\alpha+1)\,p^2+(6\alpha+5)\,p_3-(22\alpha+19)\,p_4+ \\ +(82\alpha+71)\,p_5+(112\alpha^4+97\alpha^3)\,p_6\end{array}\right\}$$

e per $\alpha = 1$, cioè $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l_5 = l_6 = l$, si ha

$$m_2 = \frac{l^2}{3120}\left(209p_1+153p_2-41p_3+11p_4-3p_5+p_6\right)$$

$$m_3 = \frac{l^2}{3120}\left(-56p_1+168p_2+164p_3-44p_4+12p_5-4p_6\right)$$

$$m_4 = \frac{l^2}{3120}\left(15p_1-45p_2+165p_3+165p_4-45p_5+15p_6\right)$$

$$m_5 = \frac{l^2}{3120}\left(-4p_1+12p_2-44p_3+164p_4+168p_5-56p_6\right)$$

$$m_6 = \frac{l^2}{3120}\left(p_1-3p_2+11p_3-41p_4+153p_5+209p_6\right)$$

f) *Ponti a* **sette** *campate.*

$m_1 = m_8 = 0$ e per $l_1 = l_7 = \alpha l$ ed $l_2 = l_3 = l_4 = l_5 = l_6 = l$ si ha

$$m_2 = \frac{l^2}{4(836\alpha^2+1448\alpha+627)}\left\{\begin{array}{l}(418\alpha^4+362\alpha^3)\,p_1+(306\alpha+265)p_2-(82\alpha+71)\,p_3+ \\ +(22\alpha+19)\,p_4-(6\alpha+5)\,p_5+(2\alpha+1)\,p_6-\alpha^3 p_7\end{array}\right\}$$

$$m_3 = \frac{l^2}{4(836\alpha^2+1448\alpha+627)}\left\{\begin{array}{l}-(112\alpha^4+97\alpha^3)\,p_1+(224\alpha^2+306\alpha+97)\,p_2+ \\ +(164\alpha^2+306\alpha+142)\,p_3-(44\alpha^2+82\alpha+38)\,p_4+ \\ +(12\alpha^2+22\alpha+10)\,p_5-(4\alpha^2+6\alpha+2)\,p_6+(2\alpha_4+2\alpha^3)\,p_7\end{array}\right\}$$

$$m_4 = \frac{l^2}{4(836\alpha^2+1448\alpha+627)}\left\{\begin{array}{l}(30\alpha^4+26\alpha^3)\,p_1-(60\alpha^2+82\alpha+26)\,p_2+(180\alpha^2+306\alpha+130)\,p_3+ \\ +(176\alpha^2+306\alpha+133)\,p_4-(48\alpha^2+82\alpha+35)\,p_5+ \\ +(16\alpha^2+22\alpha+7)\,p_6-(8\alpha^4+7\alpha^3)\,p_7\end{array}\right\}$$

$$m_5 = \frac{l^2}{4(836\alpha^2+1448\alpha+627)}\left\{\begin{array}{l}(8\alpha^4+7\alpha^3)\,p_1+(16\alpha^2+22\alpha+7)\,p_2-(48\alpha^2+82\alpha+35)\,p_3+ \\ +(176\alpha^2+306\alpha+133)\,p_4+(180\alpha^2+306\alpha+130)\,p_5- \\ -(60\alpha^2+82\alpha+26)\,p_6+(30\alpha^4+26\alpha^3)\,p_7\end{array}\right\}$$

$$m_6 = \frac{l^2}{4(836\alpha^2+1448\alpha+627)}\left\{\begin{array}{l}(2\alpha^4+2\alpha^3)\,p_1-(4\alpha^2+6\alpha+2)\,p_2+(12\alpha^2+22\alpha+10)\,p_3- \\ -(44\alpha^2+82\alpha+38)\,p_4+(164\alpha^2+306\alpha+142\,(p_5+ \\ +(224\alpha^2+306\alpha+97)\,p_6-(112\alpha^4+97\alpha^3)\,p_7\end{array}\right\}$$

$$m_7 = \frac{l^2}{4(836\alpha+1448\alpha+627)}\left\{\begin{array}{l}-\alpha^3 p_1+(2\alpha+1)\,p_2-(6\alpha+5)\,p_3+(22\alpha+19)\,p_4- \\ -(82\alpha+71)\,p_5+(306\alpha+265)\,p_6+(418\alpha^4+362\alpha^3)\,p_7\end{array}\right\}$$

e per $\alpha = 1$, cioè $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l_5 = l_6 = l_7 = l$, si ha

$$m_2 = \frac{l^2}{11644}\left(780p_1+571p_2-153p_3+41p_4-11p_5+3p_6-p_7\right)$$

$$m_3 = \frac{l^2}{11644}\left(-209p_1+627p_2+612p_3-164p_4+44p_5-12p_6+4p_7\right)$$

$$m_4 = \frac{l^2}{11644}\left(56p_1-168p_2+616p_3+615p_4-165p_5+45p_6-15p_7\right)$$

$$m_5 = \frac{l^2}{11644}\left(-15p_1+45p_2-165p_3+615p_4+616p_5-168p_6+56p_7\right)$$

$$m_6 = \frac{l^2}{11644}\left(4p_1-12p_2+44p_3-164p_4+612p_5+627p_6-209p_7\right)$$

$$m_7 = \frac{l^2}{11644}\left(-p_1+3p_2-11p_3+41p_4-153p_5+571p_6+780p_7\right)$$

β) **Appoggi mobili.** — I momenti sugli appoggi mobili si determinano mediante la *formula degli abbassamenti* (93) e la *formula dei tre momenti e dei tre abbassamenti* (94).

La condizione degli appoggi mobili si può presentare in pratica qualora trattasi di travate continue sopra chiatte galleggianti. In questo caso le chiatte si fanno tutte eguali fra loro per forma e dimensioni cosicchè il loro abbassamento, occasionato dai carichi sollecitanti la sovraposta travata, è proporzionale alla pressione che le gravita, ossia alla reazione d'appoggio. Si chiami a l'abbassamento d'una chiatta qualunque sotto la pressione R, rappresentante anche la reazione, e K il coefficiente di proporzionalità; sarà

$$a = \mathrm{K}\,\mathrm{R} \qquad \text{da cui} \qquad \mathrm{R} = \frac{a}{\mathrm{K}} \qquad (333)$$

Determinazione del coefficiente *K.* — Prima di tutto bisogna stabilire la forma della chiatta. Per semplicità di costruzione sarebbe a preferirsi la forma parallelepipeda, dunque *a pareti verticali con base o fondo rettangolare*, la cui area denotasi con ω. La contropressione idrostatica sul fondo della chiatta di sotto in su sarebbe $1000\,\omega\,a$, la quale necessariamente deve equilibrare la pressione sulla chiatta o reazione R, per cui deve essere

$$\mathrm{R} = 1000\,\omega\,a \qquad (334)$$

laonde in questo caso sarebbe

$$\mathrm{K} = \frac{1}{1000\,\omega}$$

In modo analogo si procederebbe a determinare K per altre forme di chiatte.

È facile scorgere dalla (334) che l'abbassamento a diventa grande per poco che R sia notevole, in quanto ω non può assumere qualsivoglia valore, ma deve essere contenuto fra limiti assai ristretti. E siccome per l'abbassamento a non si possono tollerare che pochi centimetri, tale intento non può essere raggiunto che con una reazione R molto piccola, ciò che costringe ad adottare travate di piccola luce. Vedesi allora come sia opportuno tenere tutte le travate di egual luce l. Ciò posto le (93) e (94) diventano

$$\frac{a_{III}}{K} = \frac{2\,m_{II} - m_I - m_{III}}{l} + \frac{1}{2}(p_I + p_{II})\,l \qquad (335)$$

$$6\,\varepsilon\,(a_I - 2a_{II} + a_{III}) = (m_I + 4\,m_{II} + m_{III})\,l^2 - \frac{1}{4}(p_I + p_{II})l^4 \qquad (336)$$

applicando le quali nel modo indicato al § **73** si ottengono i i seguenti risultati:

a) *Ponti a* **due** *campate.*

$$m_2 = \frac{(p_I + p_{II})\,l^2\,(1 - 4\,C)}{16\,(3\,C + 1)}$$

$$a_1 = \left(-2\,m_2 + p_1\,l^2\right)\frac{K}{2\,l} \quad , \quad a_2 = \left(4\,m_2 + (p_1 + p_2)\,l^2\right)\frac{K}{2\,l}$$

$$a_3 = \left(-2\,m_2 + p_2\,l^2\right)\frac{K}{2\,l}$$

b) *Ponti a* **tre** *campate.*

$$m_2 = \frac{l^2\left\{(-16C^2 - 8C + 4)\,p_1 + (-80C^2 + 8C + 3)\,p_2 + (-80C^2 - 4C - 1)\,p_3\right\}}{64\,(3C+1)^2 - 4\,(1-8C)^2}$$

$$m_3 = \frac{l^2\left\{(-80C^2 - 4C - 1)\,p_1 + (-80C^2 + 8C + 3)\,p_2 + (-16C^2 - 32C + 4)\,p_3\right\}}{64\,(3C+1)^2 - 4\,(1-8C)^2}$$

$$a_1 = \left\{-2\,m_2 + p_1\,l^6\right\}\frac{K}{2\,l}$$

$$a_2 = \left\{4\,m_2 - 2\,m_3 + (p_1 + p_2)\,l^2\right\}\frac{K}{2\,l}$$

$$a_3 = \left\{4\,m_3 - 2\,m_2 + (p_2 + p_3)\,l^2\right\}\frac{K}{2\,l}$$

$$a_4 = \left\{-2\,m_3 + p_3\,l^2\right\}\frac{K}{2\,l}$$

nelle quali espressioni la quantità C ha per valore

$$C = \frac{6\,\varepsilon\,K}{2\,l^3}$$

Negli appoggi fissi è $K = 0$ e quindi anche $C = 0$: per i quali valori le superiori formule (*a*) e (*b*) dei momenti si trasformano nelle formule (*a*) e (*b*) del § **243**, mentre gli abbassamenti *a* diventano nulli.

Osservazione. — È preferibile però adottare delle travate indipendenti sopra le chiatte galleggianti, le quali non permetteranno in ogni modo che piccolissime luci.

244. Ipotesi sulla posizione del carico mobile. — Mentre il carico permanente cimenta la costruzione con un'azione sempre costante, il carico mobile invece, il quale cambia continuamente di posizione, agisce sul ponte in differente guisa a seconda delle varie posizioni che esso prende. Volendo garantire la stabilità della costruzione nel caso il più sfavorevole, bisognerebbe considerare tutte le infinite posizioni che può prendere il carico mobile, calcolare per ognuna gli sforzi prodotti nella trave, ed adottare gli sforzi massimi. Per rendere il problema di pratica soluzione è necessario considerare un numero limitato di posizioni, ed ammettere cioè che ogni travata abbia ad essere o completamente occupata dal carico mobile, o completamente scarica. Ma questa sola semplificazione non è sufficiente, imperocchè si possono fare diverse ipotesi circa alla disposizione del sopraccarico, cioè:

1° Le travate cariche esclusivamente ad una ad una, a due a due, a tre a tre.....

2° Le travate cariche alternativamente due sì ed una no, due sì e due no, due sì e tre no..... tre sì ed una no, tre sì e due no, tre sì e tre no..... e così di seguito fino ad esaurire tutte le combinazioni possibili che si possono effettuare supponendo il carico sulle travate ad una ad una, a due a due, a tre a tre..... talchè per poco che il numero delle campate sia grande, il corrispondente numero delle ipotesi diventa rilevantissimo. Difatti essendo *n* il numero delle campate, quello delle ipotesi si può esprimere con $2^n - 1$ e quindi

per	2	3	4	5	6	7	8	9	campate
si hanno	3	7	15	31	63	127	255	511	ipotesi.

Di solito però le travate sono o tutte eguali fra loro, oppure più di frequente le estreme fra loro eguali, e fra loro eguali le intermedie, e quindi per la disposizione simmetrica delle campate rispetto alla mezzaria della trave, il numero delle ipotesi si può ridurre alla metà. D'altronde non è di alcun giovamento per i pratici risultati di prendere in esame tutte le ipotesi possibili di sopraccarico, ma basta limitarsi a quelle tali che dànno i massimi momenti inflettenti sui varî appoggi o pile, i massimi momenti inflettenti *centrali* delle travate (*quelli che corrispondono al vertice delle parabole*), ed i massimi sforzi di taglio e reazioni degli appoggi.

Si è veduto che qualsiasi travata deve considerarsi o carica o scarica completamente; nel primo caso il peso unitario che la cimenta è $q = (p + k)$ ed è il *massimo* che può operare, nel secondo caso il peso unitario è il solo permanente p ed è il *minimo* che può venire in azione. I varî pesi unitari $p_1\ p_2\ p_3 \ldots\ p_n$ relativi alle varie travate non possono adunque assumere altri valori all'infuori di q e p, a seconda che la travata si considera carica o scarica. — Dall'esame delle formule sviluppate in *a*) *b*) *c*) *d*) *e*) *f*) al § **243** si può vedere che i momenti inflettenti sulle pile dipendono dai carichi $p_1\ p_2 \ldots\ p_n$ operanti sulle singole travate moltiplicati da coefficienti numerici, e siccome questi termini hanno alcuni segni positivi ed altri segni negativi, ne consegue che il massimo valore dei momenti sulle pile si avrà quando sarà massimo il valore dei pesi con segni positivi e minimo quello dei pesi con segni negativi, quando cioè saranno cariche le travate i cui pesi hanno segno positivo e scariche quelle i cui pesi hanno segno negativo. Importa quindi di osservare i segni da cui sono affetti questi pesi nelle formule suddette. Si scorge facilmente che, nell'espressione del momento inflettente sopra un dato appoggio, i pesi che stanno sulle due travate adiacenti all'appoggio considerato hanno segni positivi e quelli delle altre travate hanno segni alternativamente negativi e positivi a partire dai precedenti. Per esempio in una trave a sette campate il momento inflettente sul quarto appoggio, § **243**-*f*) diventa massimo quando sono massimi i pesi positivi, cioè $p_1\ p_3\ p_4\ p_6$ e minimi i negativi cioè $p_2\ p_5$, ossia quando sono cariche soltanto la terza e quarta campata adiacenti all'appoggio considerato, nonchè la prima e sesta; ed in generale l'espressione del massimo valore

del momento inflettente sull'appoggio m^{mo} chiamando r il denominatore di l^2 e c_{m-3} c_{m-2} ..... c_m ..... c_{m+2} c_{m+3} i coefficienti dei pesi p_{m-3} p_{m-2} ..... p_m ..... p_{m+2} p_{m+3} e ponendo in luogo di questi pesi nelle travate che si devono supporre cariche il valore q, e nelle scariche il valore p, diventa

$$mas\, m_m = \frac{l^2}{r}\,(\cdots\cdots + c_{m-3}q - c_{m-2}p + c_{m-1}q + c_m q - c_{m+1}p + \\ + c_{m+2}q - c_{m+3}p + \cdots\cdots)$$

Senza entrare, per brevità, nelle particolari discussioni, che hanno per iscopo di determinare quali sono le ipotesi da farsi onde ottenere i massimi suindicati per gli sforzi di taglio, le reazioni degli appoggi, ed i momenti inflettenti centrali delle travate, se ne espongono in succinto le risultanze, e cioè gli sforzi di taglio sopra un appoggio e la reazione del medesimo diventano massimi per quella posizione del sopraccarico che dà il massimo momento inflettente sull'appoggio stesso; ed il momento inflettente centrale invece diventa massimo per le travate pari quando esse sono tutte cariche e le dispari no, e viceversa per le travate dispari.

Riassumendo dunque si possono stabilire i seguenti principî:

1° Il valor massimo della reazione A sopra una spalla (appoggio estremo) corrisponde all'ipotesi del carico su tutte le travate dispari (contando dalla spalla che si considera).

2° Il massimo della reazione su una pila qualunque (appoggio intermedio) ha luogo quando sono caricate le due travate ad essa adiacenti, ed inoltre tutte le altre di due in due.

3° Il massimo del momento inflettente sopra una pila qualunque è dato dalla stessa ipotesi che dà il massimo per la corrispondente reazione.

4° Il massimo del momento inflettente centrale di una travata qualunque corrisponde al massimo della reazione A se la travata è impari, ed all'ipotesi inversa se la travata è pari.

I minimi corrispondono alle ipotesi opposte a quelle che dànno i massimi.

Applicando questi principî ad una trave di nove travate eguali, se ne mettono in evidenza i risultati, graficamente, nello specchio, **Fig. 402.**

Concludendo adunque le ipotesi da farsi per ottenere i massimi sforzi, in base agli annunciati principî, sono le seguenti:

a) cariche tutte le travate pari;

b) cariche tutte le travate dispari;

c) cariche le due travate adiacenti ad un appoggio e tutte le altre una ogni due, applicando questa disposizione a tutti gli appoggi;

d) bisogna aggiungere poi l'ipotesi delle travate tutte cariche e secondo alcuni costruttori anche quella delle travate tutte scariche. È da ricordare che per travate eguali o simmetricamente poste verso il mezzo, basta limitare le suddette ipotesi alle prime $^1/_2\, n$ travate se n è pari, ed alle prime $^1/_2\,(n+1)$ travate se n è dispari.

Osservazioni pratiche. — Tali osservazioni sono dedotte nella supposizione che le travate sieno tutte eguali ed egualmente caricate, per cui chiamando q il carico unitario ed l la lunghezza di una travata è $Q = q\,l$ il *carico totale sopportato da ogni travata.*

1° Se il numero delle travate è dispari la reazione della spalla diminuisce col crescere del numero delle travate da 0,5 Q verso il limite 0,3934337 Q, che corrisponde ad un numero infinito di travate.

2° Se il numero delle travate è pari questa reazione cresce coll'aumentare del numero delle medesime da 0,375 Q verso lo stesso limite.

3° Le reazioni delle pile di numero pari sono tutte più grandi e quelle di numero dispari sono tutte più piccole di Q. Le une e le altre convergono verso Q a misura che si va verso il mezzo del ponte; avvertendo che la numerazione delle pile deve esser fatta sul dato che la prima pila porta il numero 2, essendo il secondo appoggio.

4° I momenti inflettenti centrali delle travate dispari sono tutti maggiori e quelli delle travate pari sono tutti minori della quantità $\frac{Q\,l}{24} = \frac{q\,l^2}{24}$ che è il loro limite comune.

5° I momenti inflettenti sulle pile di numero pari sono tutti più grandi e quelli sulle pile di numero dispari sono tutti più piccoli della quantità $\frac{Q\,l}{12} = \frac{q\,l^2}{12}$ che è il limite verso cui convergono.

6° Col crescere del numero delle travate i successivi momenti sulle pile e quelli centrali delle travate si avvicinano assai rapidamente, procedendo verso il mezzo, ai limiti suindicati, ma il rapporto dei momenti centrali delle due prime travate $(M_0^{(1)} : M_0^{(2)})$ è molto grande e converge verso 2,294 e così pure quello dei momenti sulle due prime pile $(m_2 : m_3)$, che converge verso 1,366.

Paragonando i dati dei numeri 4°, 5° e 6° colla Fig. 11, Tabella XVIII e relative formule, si deduce che le travate centrali di un ponte a campate eguali ed egualmente caricate possono

essere considerate come incastrate allorchè il numero n delle travate è molto grande. Infatti nell'ipotesi di una trave con sole 7 campa teeguali ed egualmente caricate, ponendo nelle formule f) del § **243** $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = p_7 = p$, si ottiene

$$m_2 = 0{,}1056\, p\, l^2 \quad , \quad m_3 = 0{,}0774\, p\, l^2 \quad , \quad m_4 = 0{,}0845\, p\, l^2$$
$$m_5 = 0{,}0845\, p\, l^2 \quad , \quad m_6 = 0{,}0774\, p\, l^2 \quad , \quad m_7 = 0{,}1056\, p\, l^2$$

cioè i momenti inflettenti (m_4, m_5) sugli appoggi della travata mediana (la 4ª) hanno un valore assai prossimo a quello relativo ad una trave incastrata che è $m = {}^1/_{12}\, p\, l^2 = 0{,}0833\, p\, l^2$. Considerato il rapidissimo convergere dei momenti inflettenti centrali e di quelli sulle pile verso i limiti indicati in 4° e 5°, vedesi adunque che per un numero n di travate maggiori di sette i momenti inflettenti delle travate centrali risultano pressochè eguali fra loro, e quindi in questo caso i calcoli si fanno come se si trattasse di una trave in sole sei o sette campate, a seconda che n è pari o dispari, cioè per le travate centrali 4ª, 5ª, 6ª..... $(n-4)^a$, $(n-3)^a$ si assumono i risultati della 3ª travata di una trave a sei campate se n è pari, e quelli della 4ª travata di una trave in sette campate se n è dispari.

È evidente inoltre che, sia per regolarità di costruzione, sia per mettere tutte le travate in eguali condizioni di cimento, è necessario che i momenti sulle pile e quelli centrali delle travate, nell'ipotesi di carico completo su tutto il ponte, sieno rispettivamente eguali fra loro. Ciò si verifica con molta approssimazione per le travate intermedie (e tanto più esattamente, quanto maggiore è il numero delle travate), ma grande divario invece corre fra le due prime travate. Incastrando la trave agli estremi si otterrebbe l'eguaglianza delle condizioni di resistenza in tutte le travate, ma ciò non è effettuabile praticamente (onde non impedire le dilatazioni della trave), e siccome i momenti inflettenti sono proporzionali alla lunghezza delle travate, così non resta altro che diminuire la lunghezza della prima ed ultima travata in modo che i rapporti indicati in 6° abbiano a ridursi all'unità.

245. Rapporto fra le travate estreme ed intermedie. — Chiamando rispettivamente l_0 ed l le lunghezze delle travate estreme ed intermedie, ed α il rapporto fra queste lunghezze,

è $l_0 = \alpha l$. Il Bresse in una delle sue pregiatissime memorie intorno alle travi continue dei ponti, ponendo per dato che i momenti inflettenti sulle pile sieno eguali fra loro per carico completo, ha trovato che deve essere $\alpha = 0{,}8165$. L'Ingegnere Piarron de Mondesir ponendo invece per condizione che sieno eguali i momenti centrali delle travate ha trovato:

Per ponti a tre campate . . . $\alpha = 0{,}794$
» » a quattro campate . . $\alpha = 0{,}787$

arrestando i calcoli complicatissimi a solo quattro travate. Dietro la considerazione che i momenti sulle pile sono del maggior valore assoluto, che il valore di $\alpha = 0{,}8165$ che li rende tutti eguali vale per un numero qualunque di travate, e che nello stesso tempo rende fra loro eguali i momenti centrali delle travate intermedie e di assai poco differenti quelli delle due travate estreme, così si può ritenere quest'ultimo valore di α come il più opportuno, ed in cifra rotonda si prende $\alpha = 0{,}8 = {}^4/_5$. Se però altre condizioni del progetto non permettono di assumere per α questo valore, si cercherà di non sortire dai limiti $\alpha = 0{,}75$, $\alpha = 0{,}85$.

246. Tracciamento del diagramma dei momenti inflettenti. — Determinato il numero e l'ampiezza delle travate, i carichi unitari permanente e mobile, e stabilite le ipotesi da farsi sulla posizione del sopraccarico, si opera come segue:

1° Si determinano i momenti inflettenti sugli appoggi per ciascheduna ipotesi valendosi delle espressioni generali sviluppate al § **243** e sostituendo in esse per ciascheduna ipotesi in luogo di $p_1\, p_2 \ldots\ldots p_n$ il solo carico permanente p nelle travate scariche, e la somma dei carichi permanente e mobile $q = (p + k)$ nelle travate cariche. Per ogni appoggio si ottengono tanti particolari valori del rispettivo momento inflettente quante sono le ipotesi, e tutti questi valori si portano in una data scala quali ordinate sull'asse verticale del corrispondente appoggio dalla sommità all'ingiù, Fig. 403.

2° Si determinano le posizioni del vertice della parabola dei momenti inflettenti per ciascheduna travata e per ciascheduna ipotesi valendosi delle espressioni generali delle rispettive coordinate x_0 ed M_0 nelle quali per l_m si deve porre la lunghezza

della travata che si considera, per p_m il valore di q o p a seconda che la travata, nell'ipotesi che si considera, è carica o scarica, e per m_s m_d successivamente i corrispondenti valori delle varie ipotesi. Per ogni travata si hanno tanti vertici quante sono le ipotesi e per ciaschedun vertice si guidano altrettante verticali che rappresentano l'asse delle rispettive parabole e che si numerano col numero relativo alla corrispondente ipotesi.

3°. Per ciascheduna ipotesi si descrive travata per travata la relativa parabola dei momenti inflettenti il cui parametro dipende esclusivamente dal carico unitario che insiste sulla travata. Considerato che questo carico non può avere che due soli valori, cioè p e q, vedesi che per tutte le parabole non si avranno che due sole sagome paraboliche. Perciò onde rendere spedito il tracciamento di queste parabole, si costruiscono sopra un cartoncino le due sagome paraboliche, una relativa al carico permanente di parametro $\frac{2}{p}$ e l'altra relativa al carico totale di parametro $\frac{2}{p+k}$, e si ritagliano esattamente le due sagome, avendo cura che resti segnato sopra di esse il loro asse, praticando anche un foro longitudinale, come mostra la **Fig. 76**, il quale serve a render sicuro l'uso delle sagome. L'uso di queste sagome è semplicissimo. Stabilita l'ipotesi e la travata si prende la sagoma del carico permanente o quella del carico totale a seconda che la travata è scarica o carica nella considerata ipotesi, e si fa coincidere il vertice e l'asse della sagoma rispettivamente col vertice e colla verticale del diagramma che portano il numero della ipotesi, e con una matita od un tiralinee si segue il contorno della sagoma, tracciando così nel diagramma la voluta parabola. Si ha la verifica di aver operato bene quando la sagoma incontra gli assi dei piedritti nei punti che determinano in scala i momenti inflettenti sui medesimi nell'ipotesi assunta. Tracciate le parabole su tutte le travate per una data ipotesi, il complesso di queste parabole si chiama l'*inviluppo dei momenti inflettenti* per la considerata ipotesi. Si hanno dunque tanti inviluppi quante sono le ipotesi. Questi inviluppi rimangono parte sopra l'asse della trave, parte sotto; le ordinate degli uni rappresentano momenti inflettenti negativi, quelle degli altri momenti inflettenti positivi, e cioè le porzioni dell'elastica relative ai primi sono inflesse in un senso (colla concavità volta all'insù) e quelle relativi agli ultimi sono

inflesse in senso contrario (colla concavità volta all'ingiù). Siccome il senso della flessione non influisce sulla resistenza, basta tener conto della sola intensità dei momenti inflettenti nelle varie porzioni della trave e quindi per le ricerche successive torna opportuno di rappresentare da una sola parte dell'asse i varî inviluppi. Di solito si riportano al di sopra dell'asse le porzioni di inviluppi che stanno al disotto. Per ciò fare, sulle corrispondenti verticali si portano le ordinate dei vertici dall'asse orizzontale della trave all'ingiù, determinando altrettanti punti coi quali facendo coincidere i vertici delle sagome paraboliche capovolte, si ha il mezzo di tracciare al di sopra dell'asse quelle porzioni di inviluppi che stanno al di sotto, **Fig. 403.**

Ora è evidente che la inviluppante che contorna esternamente tutti i varî inviluppi riportati da una sola parte della trave è la linea dei massimi momenti inflettenti, cioè le sue ordinate rappresentano per ciaschedun punto della trave, e per qualsiasi distribuzione di sopraccarico, il valore del massimo momento inflettente. Questa linea si chiama **linea inviluppo utile dei momenti inflettenti**, **Fig. 405.**

Distribuzione delle lamiere. — Per fare la distribuzione delle lamiere componenti le tavolette delle nervature si opera come per le travi sostenute da due soli appoggi, osservando che in questo caso, dovendo nella distribuzione delle lamiere seguire le stesse accidentalità della linea inviluppo utile, le lamiere dei successivi ordini non sono continue, ma a tratti alternati posti in corrispondenza al centro delle travate e sopra gli appoggi come si vede nelle **Fig. 405.**

247. Tracciamento del diagramma degli sforzi di taglio. — Col mezzo delle (90) si calcolano le ordinate estreme T_i, T_{ii} delle linee degli sforzi di taglio per ogni travata e per ogni ipotesi e si portano in una data scala le T_i all'insù e le T_{ii} all'ingiù rispettivamente sull'appoggio di sinistra e di destra della travata che si considera, e congiungendo gli estremi di queste ordinate si hanno le linee degli sforzi di taglio. Ognuna di queste linee deve passare per il punto di ascissa x_0 relativo al vertice della parabola dei momenti inflettenti che corrisponde alla stessa ipotesi, e ciò serve a verificare l'esattezza della costruzione. Il complesso delle linee degli sforzi di taglio di tutte le

travate per una data ipotesi si chiama *inviluppo degli sforzi di taglio* per questa ipotesi, e per ogni ipotesi si ha un differente inviluppo. Questi inviluppi parte stanno sopra, parte sotto l'asse del solido, cioè in parte hanno ordinate positive ed in parte negative. Siccome il senso dello sforzo non influisce sulla intensità dello stesso, così si possono rappresentare gli inviluppi da una stessa parte dell'asse della trave e di solito si riportano al disotto le porzioni d'inviluppo che stanno al disopra, **Fig. 403.** La linea che contorna esternamente tutti gli inviluppi è la linea degli sforzi massimi di taglio per le corrispondenti sezioni della trave e si chiama **linea inviluppo utile degli sforzi di taglio, Fig. 405.**

Distribuzione delle sbarre del traliccio. — Questa distribuzione si fa nello stesso modo indicato per le travi sostenute da due soli appoggi, osservando che il raggruppamento delle sbarre si deve effettuare partitamente per tutte le travate, **Fig. 405.**

248. Montanti sugli appoggi. — Si deve far distinzione fra gli appoggi estremi e gli intermedi.

α) **Appoggi estremi** (*Spalle*). — Per il calcolo dei montanti sugli appoggi estremi serve lo stesso procedimento indicato al § **222**, e quindi si deve usare la (300) nella quale in luogo di $_{mas}T$ si deve porre il più grande valore dello sforzo T, relativo all'appoggio di sinistra della prima travata.

β) **Appoggi intermedi** (*Pile*). — Col mezzo della (84) si calcolano i valori della reazione A_m per ogni pila e per ciascheduna ipotesi. Per ogni pila si avrà un valor massimo della reazione, cioè $_{mas}A_m$, noto il quale si determinano le condizioni di stabilità del montante o parete piena colla (300) nella quale si deve porre $_{mas}A_m$ in luogo di $_{mas}T$. Se le travate intermedie sono ognuna di differente lunghezza si fa il calcolo separatamente per ogni pila variando proporzionatamente la riquadratura dei rispettivi montanti, ma d'ordinario essendo dette travate tutte eguali si tien conto del più grande valore possibile di $_{mas}A_m$ fra i massimi delle varie pile, e col mezzo della (300) si determinano le riquadrature dei montanti; che si fanno eguali per tutte le pile.

Esempio.

Si supponga un ponte per ferrovia in quattro campate di cui le lunghezze sieno per le due centrali $l_2 = l_3 = l = 30$ metri e per le due estreme $l_1 = l_4 = l_0 = 0{,}8 \times 30 = 24$ metri. Il carico permanente, valendosi della (280) e prendendo la maggior lunghezza di travata, è

$$p = 650 + 24{,}5 \times 30 + 0{,}11 \times 30^2 = 1484$$

e per metro corrente di trave $p = {}^1/_2\, 1484 = 742$ ed in cifra rotonda $p = 740$. Il carico accidentale si desume dalla tabella L, il quale mediamente risulta $k = {}^1/_2\,(5{,}18 + 4{,}75) = 4{,}965$ tonnellate e per metro corrente di trave $k = {}^1/_2\, 4965 = 2482$ chilogrammi ed in cifra rotonda $k = 2500$. Il carico totale risulta dunque $q = p + k = 740 + 2500 = 3240$. Le ipotesi, che basta limitare alle prime ${}^1/_2\, n = {}^1/_2\, 4 = 2$ travate sono rappresentate nello specchio della **Fig. 405.**

Tracciamento del diagramma dei momenti inflettenti. —

1° Determinazione dei momenti inflettenti sugli appoggi. — Le espressioni generali dei momenti inflettenti $m_2\, m_3\, m_4$ sono date dalle (*c*) del § **243**, nelle quali ponendo $\alpha = 0{,}8$ ed $l = 30$ si ottiene

$$m_2 = 5{,}04032 \left\{ 6{,}8608\, p_1 + 9{,}8\, p_2 - 2{,}6\, p_3 + 0{,}512\, p_4 \right\}$$
$$m_3 = 18{,}145161 \left\{ -0{,}512\,(p_1 + p_4) + 2{,}6\,(p_2 + p_3) \right\}$$
$$m_4 = 5{,}04032 \left\{ 0{,}512\, p_1 - 2{,}6\, p_2 + 9{,}8\, p_3 + 6{,}8608\, p_4 \right\}$$

In queste espressioni in luogo di $p_1\, p_2\, p_3\, p_4$ si deve porre $p = 740$ o $q = 3240$ a seconda dell'ipotesi che si considera.

1ª Ipotesi: $p_1 = p_3 = 3240$, $p_2 = p_4 = 740$.

$$m_2^{(1)} = 5{,}04032 \left\{ 6{,}8608 \times 3240 + 9{,}8 \times 740 - 2{,}6 \times 3240 + 0{,}512 \times 740 \right\} = 108044$$
$$m_3^{(1)} = 18{,}14516 \left\{ -0{,}512\,(3240 + 740) + 2{,}6\,(740 + 3240) \right\} = 150790$$
$$m_4^{(1)} = 5{,}04032 \left\{ 0{,}512 \times 3240 - 2{,}6 \times 740 + 9{,}8 \times 3240 + 6{,}8608 \times 740 \right\} = 184294$$

Così operando nelle altre ipotesi si trova

2ª Ipotesi:	$m_2^{(2)} = 184294$	$m_3^{(2)} = 150790$	$m_4^{(2)} = 108044$
3ª »	$m_2^{(3)} = 270745$	$m_3^{(3)} = 127565$	$m_4^{(3)} = 114495$
4ª »	$m_2^{(4)} = 145080$	$m_3^{(4)} = 291960$	$m_4^{(4)} = 145080$
5ª »	$m_2^{(5)} = 237973$	$m_3^{(5)} = 245508$	$m_4^{(5)} = 237973$
6ª »	$m_2^{(6)} = 54354$	$m_3^{(6)} = 56073$	$m_4^{(6)} = 54354$

2° Determinazione dei vertici delle parabole. — Basta limitarsi alle prime due travate.

α) *Ascisse.* — Per il calcolo delle ascisse serve la (87) cioè

$$x_0 = -\frac{m_d - m_s}{p_m\, l_m} + \frac{1}{2}\, l_m$$

1ª Ipotesi $\begin{cases} 1^a \text{ travata: } m_d = m_2^{(1)} = 108044\ ,\ m_s = m_1 = 0\ ,\ l_m = l_1 = 24\ ,\ p_m = p_1 = 3240 \\ 2^a \quad » \quad m_d = m_3^{(1)} = 150790\ ,\ m_s = m_2^{(1)} = 108044\ ,\ l_m = l_2 = 30\ ,\ p_m = p = 740 \end{cases}$

$$1^a \text{ travata: } x_0^{(1)} = -\frac{108044 - 0}{3240 \times 24} + \frac{1}{2}\, 24 = 10{,}61 \text{ m.}$$

$$2^a \quad » \quad x_0^{(1)} = -\frac{150790 - 108044}{746 \times 30} + \frac{1}{2}\, 30 = 13{,}075 \text{ m.}$$

Procedendo in questo modo anche per le altre ipotesi si trova:

	2ª Ipotesi	3ª Ipotesi	4ª Ipotesi	5ª Ipotesi	6ª Ipotesi
1ª travata:	$x_0^{(2)} = 1{,}567$	$x_0^{(3)} = 8{,}518$	$x_0^{(4)} = 3{,}831$	$x_0^{(5)} = 8{,}94$	$x_0^{(6)} = 8{,}94$
2ª »	$x_0^{(2)} = 15{,}344$	$x_0^{(3)} = 16{,}473$	$x_0^{(4)} = 13{,}489$	$x_0^{(5)} = 14{,}923$	$x_0^{(6)} = 14{,}923$

β) *Ordinate* (momenti inflettenti centrali). — Queste ordinate si calcolano colla (88), ossia $M_0 = m_s - {}^1/_2\, p_m\, x_0^2$

1ª Ipotesi $\begin{cases} 1^a \text{ travata: } m_s = m_1 = 0\ ,\ p_m = p_1 = 3240\ ,\ x_0 = x_0^{(1)} = 10{,}61 \\ 2^a \quad » \quad m_s = m_2^{(1)} = 108044\ ,\ p_m = p_2 = 740\ ,\ x_0 = x_0^{(1)} = 13{,}075 \end{cases}$

$$1^a \text{ travata: } M_0^{(1)} = 0 - \frac{1}{2}\, 3240 \times 10{,}61^2 = -182366$$

$$2^a \quad » \quad M_0^{(1)} = 108044 - \frac{1}{2}\, 740 \times 13{,}075^2 = 44791$$

Lo stesso procedimento si tiene anche per le altre ipotesi e risulta:

	2ª Ipotesi	3ª Ipotesi	4ª Ipotesi	5ª Ipotesi	6ª Ipotesi
1ª travata:	$M_0^{(2)} = -908$	$M_0^{(3)} = -117540$	$M_0^{(4)} = -5430$	$M_0^{(5)} = -129476$	$M_0^{(6)} = -29572$
2ª »	$M_0^{(2)} = -197365$	$M_0^{(3)} = -168858$	$M_0^{(4)} = -149683$	$M_0^{(5)} = -122794$	$M_0^{(6)} = -28043$

3° Tracciamento degli inviluppi dei momenti inflettenti. — Si comincia dal formare le sagome paraboliche del carico permanente e del totale, i cui parametri hanno rispettivamente per valore analitico

$$\frac{2}{p} = \frac{2}{740} \quad \text{e} \quad \frac{2}{q} = \frac{2}{3240}$$

Per trovare il valore grafico bisogna scegliere le scale del diagramma. Nella **Fig. 405** le ascisse o lunghezze si sono prese nel rapporto di 2 millimetri per metro, e le ordinate o momenti inflettenti nel rapporto di 1 millimetro per 10000 chilogrammetri, ossia millimetri 0,0001 per un chilogrammetro. La (II), pagina 141, dà $\frac{2}{p_m} = \frac{x_1^2}{y_1}$ dalla quale si vede che il valore grafico del parametro si ottiene moltiplicando quello analitico per il rapporto $\frac{2^2}{0{,}0001}$ (ossia il quadrato della scala delle ascisse diviso per la scala delle ordinate) e quindi si hanno i seguenti valori grafici:

Per il carico permanente
$$\begin{cases} \textit{Parametro} = \frac{2}{740} \cdot \frac{2^2}{0{,}0001} = 108{,}1 \text{ mm.} \\ \textit{Distanza focale} = \frac{108{,}1}{4} = 27{,}02 \text{ mm.} \end{cases}$$

Per il carico totale . . .
$$\begin{cases} \textit{Parametro} = \frac{2}{3240} \cdot \frac{2^2}{0{,}0001} = 24{,}69 \text{ mm.} \\ \textit{Distanza focale} = \frac{24{,}69}{4} = 6{,}17 \text{ mm.} \end{cases}$$

e quindi col procedimento indicato per la **Fig. 76** si sono costruite e ritagliate le sagome paraboliche disegnate nella **Fig. 405**. Valendosi di queste sagome si sono segnati i sei inviluppi relativi alle fatte ipotesi, limitandosi alle sole due prime travate, poi si sono ribaltate al di sopra le porzioni che cadono sotto l'asse, ed infine si è segnata la linea inviluppo utile.

4° Distribuzione delle lamiere. — Assunti i ferri colle dimensioni segnate nella **Fig. 404***a*, si trova

$$I_1 = \frac{1}{12}\left\{ 0{,}175 \times 2{,}42^3 - 0{,}138 \times 2{,}398^3 - 0{,}022 \times 2{,}26^3 - 0{,}15 \times 1{,}78^3 \right\} = 0{,}02$$

$$d_1 = \frac{1}{2} 2{,}42 = 1{,}21$$

e prendendo R = 6000000 chilogrammi per metro quadrato risulta il momento resistente dei quattro cantonali e due lamieroni (31*a*)

$$M_1 = \frac{0{,}02 \times 6000000}{1{,}21} = 100000 \text{ Km.}$$

che si è portato come ordinata nell'assunta scala, individuando l'orizzontale M N. Prese le lamiere delle piattabande larghe 300 millimetri e grosse 9 millimetri si ottiene per la prima coppia, **Fig. 404*b***,

$$I_{''} = \frac{1}{12}\left\{0{,}3\,(2{,}438^3 - 2{,}42^3)\right\} = 0{,}007965 \quad , \quad d_{''} = \frac{1}{2}\,2{,}438 = 1{,}219$$

e quindi il relativo momento resistente risulta

$$M_{''} = \frac{0{,}007965 \times 6000000}{1{,}219} = 39262 \text{ Km.}$$

portando il quale cinque volte all'insù come ordinata si sorpassa dovunque la linea inviluppo utile. La **Fig. 405** mostra come deve esser fatta la distribuzione delle lamiere, arrestandole in corrispondenza al detto inviluppo ed esternamente allo stesso.

Tracciamento del diagramma degli sforzi di taglio. — Anche questo diagramma si limita alle sole due prime travate.

1° Calcolo delle ordinate estreme. — Queste ordinate si calcolano colle (90) cioè $T_{'} = -p_m x_0$, $T_{''} = p_m (l_m - x_0)$

1ª Ipotesi

1ª travata: $p_m = p_1 = 3240$, $x_0 = x_0^{(1)} = 10{,}61$, $l_m = l_1 = 24$

2ª » $p_m = p_1 = 740$, $x_0 = x_0^{(1)} = 13{,}075$, $l_m = l_2 = 30$

1ª travata $T_{'}^{(1)} = -3240 \times 10{,}61 = -34376$, $T_{''}^{(1)} = 3240\,(24 - 10{,}61) = 43384$

2ª » $T_{'}^{(1)} = -740 \times 13{,}075 = -9676$, $T_{''}^{(1)} = 740\,(30 - 13{,}075) = 12524$

Operando nello stesso modo anche per le altre ipotesi si trova

		2ª Ipotesi	3ª Ipotesi	4ª Ipotesi	5ª Ipotesi	6ª Ipotesi
1ª travata	$T_{'}$ =	- 1160	-27598	- 2835	-28966	- 6616
	$T_{''}$ =	16600	50162	14925	48794	11144
		17760	77760	17760	77760	17760
2ª »	$T_{'}$ =	-49715	- 53373	-43704	-48351	-11042
	$T_{''}$ =	47485	43827	53496	48849	11158
		97200	97200	97200	97200	22200

Si ha la verifica di aver operato bene quando la somma dei valori numerici di $T_{'}$ e $T_{''}$ eguaglia la quantità $p_m\ l_m$ nella quale per p_m si deve met-

tere p o q, secondochè la travata è carica o scarica nell'ipotesi che si considera, e per l_m la lunghezza della travata rispettiva.

Per le travate estreme { cariche è $p_m\, l_m = 3240 \times 24 = 77760$; scariche è $p_m\, l_m = 740 \times 25 = 17760$

» » centrali { cariche è $p_m\, l_m = 3240 \times 30 = 97200$; scariche è $p_m\, l_m = 740 \times 30 = 22200$

2° Tracciamento degli inviluppi. — Onde ottenere direttamente gli inviluppi tutti al di sotto dell'asse si sono portate per ogni travata e per ogni ipotesi le corrispondenti ordinate T′ e T″ all'ingiù rispettivamente sugli appoggi di sinistra e di destra nella scala di 6 millimetri per 10000 chilogrammi e dagli estremi di queste ordinate si sono tirate delle rette ai corrispondenti punti di ascissa x_0 che furono individuati mediante il prolungamento delle verticali dei vertici delle parabole, e dopo di aver segnato i vari inviluppi si è tracciato l'inviluppo utile.

3° Distribuzione delle sbarre del traliccio. — Si è scelta opportunamente l'altezza della trave in modo da ottenere una regolare disposizione di sbarre in tutte le travate, e si è trovato che assegnando alla trave l'altezza di metri 2,42, ed assumendo un traliccio quadruplo, risultano 24 maglie nelle travate centrali e 18 nelle estreme dell'ampiezza di metri 1,21, ed i montanti o pareti piene sulle pile della lunghezza di metri 0,96, e quelli sulle spalle della lunghezza di metri 0,53. — Se è t lo sforzo a cui può resistere una sbarra nel senso del suo asse, essendo l'inclinazione di 45°, è $t\ sen\ 45°$ la resistenza verticale di una sbarra, e per essere il traliccio quadruplo risulta che lo sforzo di taglio che può esser equilibrato in una data sezione, ossia la resistenza verticale del traliccio è $T = 4\ t\ sen\ 45° = 2{,}83\ t$. Siccome le sbarre sono alternativamente stirate e compresse, sta bene di farle tutte con ferri rigidi e quindi prendendo per sforzo pratico $R_c = 3{,}5$ chilogrammi per millimetro quadrato e chiamando ω_c l'area di una sbarra è $t = \omega_c R_c$. Si sono scelti convenientemente alcuni ferri a T e si sono valutate le resistenze parziali t e totali T, come mostra il seguente specchio:

$\overline{\overline{\mathrm{T}}}\ \frac{200 \times 11}{90 \times 170} \atop \frac{}{14 \times 14}$	$\omega_c = 5644$ mm□	$t_1 = 5664 \times 3{,}5 = 19754$	$T_1 = 2{,}83 \times 19754 = 55904$	Kg.
$\mathrm{T}\ \frac{100 \times 200}{16{,}5 \times 15}$	$\omega_c = 4403$ »	$t_2 = 4403 \times 3{,}5 = 15410$	$T_2 = 2{,}83 \times 15410 = 43327$	»
$\mathrm{T}\ \frac{90 \times 170}{14 \times 14}$	$\omega_c = 3444$ »	$t_3 = 3444 \times 3{,}5 = 12054$	$T_3 = 2{,}83 \times 12054 = 34112$	»
$\mathrm{T}\ \frac{82 \times 150}{10 \times 11}$	$\omega_c = 2360$ »	$t_4 = 2360 \times 3{,}5 = 8260$	$T_4 = 2{,}83 \times 8260 = 23376$	»
$\mathrm{T}\ \frac{71 \times 130}{8 \times 9}$	$\omega_c = 1670$ »	$t_5 = 1670 \times 3{,}5 = 5845$	$T_5 = 2{,}83 \times 5845 = 16541$	»

Portate le resistenze totali nell'assunta scala in OT_1 OT_2 OT_3 OT_4 OT_5 si sono tirate tante orizzontali, poi si sono condotte delle verticali le quali partendo da un nodo andassero ad incontrare le anzidette orizzontali esternamente alla linea inviluppo utile, come mostra la **Fig. 405**, e così si è ottenuta la suddivisione delle sbarre del traliccio in gruppi di date dimensioni.

4° MONTANTI SUGLI APPOGGI. — Per questi basta limitarsi a valutare la massima reazione; in quanto alla forma ed alla sezione si determinano come per i ponti ad una sola campata.

α) *Montanti sulle spalle.* — La massima reazione è il valore massimo di T_r per la 1ª travata, che in questo caso ha luogo nella 1ª ipotesi ed ha per valore $A_1^{(1)} = T_r^{(1)} = -34376$ il quale è il valore da sostituire nella (300) in luogo di *mas*T.

β) *Montanti sulle pile.* — La massima reazione si verifica sulla 2ª pila (la mediana) per la 4ª ipotesi, nella quale ipotesi è facile scorgere che si avrebbe per la 3ª travata $T_r^{(4)} = -53496$, $T_{rr}^{(4)} = 43704$ (cioè i valori inversi della 2ª travata). Ricorrendo alla (284) è $A_m = A_3^{(4)}$, $T_d = T_r^{(4)}$ *della* 3ª *trapata* $= -53496$, $T_s = T_{rr}^{(4)}$ *della* 2ª *travata* $= 53496$ e quindi

$$A_3^{(4)} = -53496 - 53496 = -106992$$

il quale è il valore da sostituire nella (300) in luogo di *mas*T.

NB. — Le reazioni risultano tutte negative e questo segno non fa altro che indicare che esse cospirano di sotto in sù, avendosi presa positiva la direzione dei pesi.

Chiodature.

249. Generalità. — La stabilità di una costruzione metallica dipende principalmente dall'essere le chiodature ben eseguite e ben proporzionate. Difatti se le chiodature, che devono congiungere solidamente fra loro le varie parti, e riportare gli sforzi dall'una all'altra, non hanno resistenza sufficiente, ancorchè queste parti avessero riquadrature esuberanti, succederebbe egualmente la rottura della costruzione. È di molta importanza adunque lo studio della forma, della disposizione e della stabilità delle chiodature.

1. Costruzione.

250. Bulle e Bolloni. — Nei ponti metallici le chiodature si fanno generalmente con *bulle* o *chiodi* ribaditi a caldo, ed è soltanto per la congiunzione delle parti in ghisa, o nelle posi-

zioni ove la ribaditura riescirebbe troppo incomoda, e quindi difficile e malsicura, che si impiegano i *bolloni* o *chiavarde*.

α) **Bulle** (Franc. *Rivet*, Ted. *Nieten*). — Le bulle hanno un gambo cilindrico con una testa in forma di calotta massiccia. Arroventate fino al color rosso bianco (200° — 250°) si fanno entrare nei fori, già preparati, dei pezzi da congiungere, e si ribatte il gambo dalla parte sporgente martellando rapidamente e con molta forza sopra uno stampo nel quale è incavata la forma della testa, e ciò fintantochè si è formata una seconda testa eguale all'altra, e fra le quali restano strette fortemente le parti da congiungere. La ribaditura si deve effettuare così rapidamente che la bulla conservi ancora una elevata temperatura allorchè la seconda testa è già formata. Sta in ciò il vantaggio della chiodatura a caldo. Diffatti nel raffreddamento il gambo tende ad accorciarsi, ma ne è impedito dai ferri frapposti, per cui si manifesta in esso uno sforzo di trazione per il quale le due teste tendono ad avvicinarsi e quindi stringono fortemente i ferri stessi, fra cui nasce una così forte aderenza, che il solo attrito vale ad opporsi alla disgiunzione che sarebbe prodotta dalle forze cimentanti. La ribaditura però deve ultimarsi ad una temperatura non superiore a 150°, altrimenti il gambo tenderebbe ad accorciarsi di tanto da vincere la resistenza delle teste, che si staccherebbero da esso. — Per congiungere fra di loro due o più ferri, prima di tutto occorre approntare i fori per introdurvi i chiodi. Perchè la congiunzione riesca ben fatta è necessario che questi fori si corrispondano perfettamente nei vari pezzi sia per calibro, sia per la distanza reciproca, cosicchè nella sovrapposizione abbia a risultare un unico foro di calibro costante. Perciò bisogna segnare in ciaschedun pezzo la esatta posizione dei relativi fori, i quali si possono eseguire o col trapano, o col punzone (Franc. *Emportepiece*, Ted. *Durchstosse*). L'impiego del trapano è preferibile per l'esattezza del lavoro, sia per ottenere i fori alla loro giusta posizione, sia perchè risultino circolari senza contorcimenti negli orli. Generalmente però in pratica si adopera il punzone per la rapidità del lavoro, e per la economia che con esso si consegue, ad onta della irregolarità dei fori e dei contorcimenti che subiscono i ferri. — Ma nei riguardi di una buona esecuzione e di una sicura riuscita si dovrebbe rigettare l'uso del punzone, e sarebbe ottima cosa di introdurre nei capitolati

d'appalto un particolare articolo che obbligasse i costruttori ad eseguire i fori col trapano, sorvegliandone sopratutto la rigorosa osservanza, non dimenticandosi poi di accordare un equo compenso per questa mano d'opera più costosa. Perforati i pezzi, si congiungono provvisoriamente fra loro con chiavarde in alcuni punti, valendosi dei fori già preparati oppure, usando di opportuni strettoi, onde si mantengano nella loro giusta posizione durante la ribaditura delle bulle.

Le teste delle bulle sono foggiate a segmento di sfera o di elissoide, e le loro dimensioni riferite al diametro sono notate nelle Fig. 407*a b*. La lunghezza g del gambo deve essere eguale allo spessore totale s dei pezzi da congiungere, più quel tanto che è necessario a formare la seconda testa, e la si valuta colla seguente formula

$$g = 1{,}1\ (s + d) + 1 \text{ mm.} \qquad (337)$$

nella quale d indica il diametro del gambo.

Se si hanno, per esempio, a congiungere 6 lamiere dello spessore di 15 millimetri con chiodi del diametro di 20 millimetri risulta $g = 1{,}1\ (6 \times 15 + 20) + 1 = 122$ millimetri. In alcune parti della costruzione può essere necessario che le teste dei chiodi non abbiano a sporgere sulla faccia esterna delle lamiere da congiungere, ed allora i fori dell'ultima lamiera vengono allargati ad imbuto col profilo di 45°, e la testa delle bulle, che prende la forma di un tronco di cono, vi si interna tutta od in parte, in modo che l'altezza del tronco di cono non abbia mai ad essere minore di $0{,}4\ d$, Fig. 407*c*. Per calcolare il valore di g in questo caso bisogna porre nella (337) lo spessore totale s diminuito di quello dell'ultima lamiera. Il diametro del gambo, nelle chiodature per ponti, varia da 12 a 30 millimetri e la lunghezza del medesimo dopo la ribaditura non deve essere superiore a $4\ d$. Ogni qualvolta è $s > 4\ d$ si deve fare la giunzione mediante bolloni. I chiodi si dispongono in file longitudinali e trasversali, e queste file non devono distare col loro asse dall'orlo dei ferri meno di $1{,}5\ d$, e fra di loro meno di $3\ d$. È altresì buona pratica di conservare lo stesso diametro per le chiodature delle parti principali, e di variare soltanto per i pezzi secondari, qualora sia conveniente di adoperare chiodi con diametri più piccoli.

La congiunzione di due lamiere si può fare o per semplice sovrapposizione, Fig. 408, e si dice *giunzione semplice*, oppure ponendole a contatto e servendosi di una lamiera sussidiaria o *coprigiunto* chiodato ad entrambe, che serve a trasmettere lo sforzo dall'una all'altra, Fig. 415. Questi modi presentano l'inconveniente che gli sforzi non si trasmettono nella stessa direzione ai pezzi da congiungere, e ne succede uno sforzo obliquo che è tanto più sensibile quanto maggiore è la grossezza di questi pezzi, per cui è assai opportuno di adottare un terzo modo che consiste nell'adoperare due coprigiunti posti uno per parte dei pezzi da congiungere, Fig. 416.

I ferri speciali si congiungono sempre col mezzo di coprigiunti. Per ferri in forma di ⌐ si adopera come coprigiunto un altro ferro ⌐ di minori dimensioni posto dalla parte interna, Fig. 409*a*, oppure oltre al ferro ad angolo anche due lamiere poste esternamente alle ali, Fig. 409*b*. Per ferri a T si possono adoperare due cantonali ed una lamiera, Fig. 409*e*, oppure semplicemente delle lamiere, Fig. 409*d*. I ferri a I si congiungono sempre mediante lamiere, Fig. 409*f g*, e così pure quelli a ⌋, Fig. 409*h i*. Qualora la congiunzione si deve effettuare fra pezzi composti, bisogna avere una importante avvertenza e cioè che le giunture dei vari ferri che li compongono non cadano nella stessa sezione trasversale, ma che, stabilito l'asse del giunto, esse si trovino in piani diversi disposti simmetricamente rispetto al detto asse.

β) **Bolloni.** — La testa del bollone è quadrata od esagonale mentre la madrevite o dado è sempre esagonale; le dimensioni riferite al diametro del gambo sono indicate nelle Fig. 410*a b*. Anche nell'impiego dei bolloni può occorrere che la testa rimanga nascosta ed allora essa ha la forma di un tronco di piramide a base quadrata, Fig. 411*b*.

Per fissare le parti metalliche alla muratura si adoperano i così detti bolloni da muro, conformati come mostra la Fig. 412.

Il vuoto che rimane fra il gambo del bollone e la muratura si riempie con piombo, zolfo, gesso o cemento, dopo di avere centrato il bollone con biette di legno.

Calcoli di stabilità.

251. Resistenza delle chiodature. — Onde farsi un'idea della resistenza che viene provocata nelle chiodature si prenda

in esame il sistema rappresentato nella Fig. 413*a b*, formato da due aste **A A** alle quali è congiunta l'interposta sbarra **B** mediante una bulla ribadita a caldo. Il foro della sbarra **B** sia allungato per cui sia possibile uno scorrimento longitudinale di essa fra le altre due **A A**. Fatta la ribaditura a caldo, la bulla nel ritornare alla temperatura normale subisce un raffreddamento in causa del quale il gambo tende ad accorciarsi e quindi a ravvicinare fra loro le due teste, le quali perciò esercitano una pressione sulle lamiere interposte. In virtù di questa pressione la sbarra intermedia **B** soggetta alla forza F, non può più scorrere fra le altre due perchè si sviluppa resistenza d'attrito. Da apposite esperienze istituite risulta che questa resistenza, detta *aderenza*, è proporzionale alla sezione del gambo, che in media nei limiti di stabilità varia fra 3,5 e 5 chilogrammi per millimetro quadrato della stessa, e mediamente si può valutare in ragione di 4 chilogrammi per millimetro quadrato. Se lo sforzo F è così grande da vincere l'aderenza, allora la sbarra **B** scorre fra le **A A** fintantochè l'orlo superiore del suo foro viene a battere contro il gambo del chiodo, che si oppone ad un ulteriore movimento, Fig. 413*c*. Lo sforzo F che cimenta la sbarra **B** viene allora trasmesso al gambo del chiodo, il quale se non ha resistenza sufficiente si rompe lungo le due faccie di contatto della sbarra **B** colle **A A**, cioè viene in esso provocata la resistenza al taglio o scorrimento trasversale. Questa resistenza è circa $^3/_5$ della resistenza alla trazione, in pratica però lo sforzo unitario R_s non lo si valuta di più di 5 chilogrammi per millimetro quadrato. Nelle congiunzioni che si fanno in pratica i fori per le chiodature devono essere perfettamente circolari ed eguali fra loro e riempiuti completamente dal gambo. È da ritenersi dunque che entrino in azione tanto l'aderenza, quanto la resistenza al taglio; è certo però che non si può far assegnamento sulla concomitanza assoluta delle due resistenze e d'altronde non è possibile stabilire quanta parte della resistenza totale spetti all'una e quanta all'altra. Meglio è valersi dei risultati sperimentali i quali provarono che una accurata chiodatura a caldo presenta una resistenza eguale alla resistenza alla trazione. — Onde poi tener conto degli inevitabili difetti di costruzione non si valuta la resistenza delle chiodature maggiore di $^3/_4$ della resistenza alla trazione. In pratica anzi si ammette che entri in azione soltanto la resistenza al taglio e si

prende lo sforzo R_s compreso fra 4,5 e 5 chilogrammi per millimetro quadrato. Alcuni Ingegneri, sulla considerazione che le bulle si fanno con ferro della migliore qualità, vorrebbero prendere $R_s = R_t$ (cioè fra 6 e 8 chilogrammi per millimetro quadrato), ma ciò non è da consigliarsi.

252. Chiodature per le sbarre stirate. — Si immagini divisa ogni sbarra (secondo lo SCHWEDLER) in singole *striscie* le quali si intreccino alle singole bulle nei modi indicati dalle **Fig. 414**, ed affinchè diventi possibile questa formazione a striscie e con essa l'uniforme distribuzione della trazione sopra le bulle si deve esigere che il materiale superfluo sia tolto, cioè che gli angoli sieno smussati e che le bulle sieno disposte come mostrano le **Fig. 414**. In allora si vede che la sezione utile è la sezione totale diminuita in larghezza del diametro di un solo gambo di chiodo.

α) **Senza coprigiunto.** — Sia λ la larghezza di una di tali striscie, s lo spessore della sbarra, d il diametro del gambo di un chiodo, e, stante l'uniforme distribuzione dello sforzo F sui chiodi, si ha $^1/_4 \pi d^2 R_s = 2 s \lambda R_t$. Se è n il numero dei chiodi ed L la larghezza totale della sbarra diventa $L = 2 n \lambda + d$ e sostituendovi il valore di λ dato dalla precedente, cioè

$$\lambda = \frac{\pi d^2}{8 s} \frac{R_s}{R_t} = 0{,}3927 \frac{d^2}{s} \frac{R_s}{R_t},$$

si ottiene

$$L = 0{,}7854 \frac{n d^2}{s} \frac{R_s}{R_t} + d.$$

La sezione utile ω della sbarra è $\omega = (L - d) s$ nella quale sostituito il valore di L si ottiene

$$\omega = 0{,}7854 \, n d^2 \frac{R_s}{R_t}$$

Questa sezione ω deve esser calcolata in modo che sia

$$F = \omega R_t = 0{,}7854 \, n d^2 R_s$$

ossia

$$n = 1{,}273 \frac{\omega}{d^2} \frac{R_t}{R_s} = 1{,}273 \frac{F}{d^2 R_s} \qquad (338)$$

col mezzo della quale, dato il numero n dei chiodi se ne determina il diametro d e viceversa, avendo cura di disporre i chiodi a seconda del loro numero nei modi indicati dalle **Fig. 414.** (F rappresenta lo sforzo di trazione cimentante la sbarra).

β) **Con un solo coprigiunto.** — Si devono disporre le bulle d'ambo le parti del giunto, calcolando ogni gruppo nello stesso modo indicato in α). Ad esempio la **Fig. 415** mostra la chiodatura della stessa resistenza corrispondente alla **Fig. 414***e*. La sezione ω_1 del coprigiunto deve essere eguale a quella della sbarra, cioè $\omega_1 = \omega$, inquantochè esso deve trasmettere lo sforzo F da uno all'altro dei pezzi da congiungere.

γ) **Con due coprigiunti.** — In questo caso le bulle sono soggette a doppio taglio, quindi presentano una doppia resistenza del caso precedente, per cui deve essere

$$L = 1{,}5708 \frac{n d^2}{s} \frac{R_s}{R_t} + d \quad , \quad F = 1{,}5708\, n d^2 R_s \quad , \quad n = 0{,}636 \frac{F}{d^2 R_s} \qquad (339)$$

cioè in questo caso a parità di condizioni i chiodi si riducono alla metà di quelli del caso precedente. In pratica però si usa di prender un numero alquanto maggiore, e cioè i $^2/_3$ dell'anzidetto, si usa cioè la formula

$$F = 1{,}2\, n d^2 R_s \quad , \quad n = 0{,}84 \frac{F}{d^2 R_s} \qquad (340)$$

In quanto ai coprigiunti basterebbe che essi avessero una sezione ω_{11} eguale alla metà di quella della sbarra, però in pratica la si tiene alquanto più abbondante e cioè si prende $\omega_{11} = {}^2/_3\, \omega$. La **Fig. 416** mostra una chiodatura di egual resistenza di quella delle **Fig. 414***e*.

253. Sbarre compresse. — Nel caso di sbarre compresse non occorre far detrazione dei fori dei chiodi nel calcolo della

sezione utile delle sbarre, per cui in questo caso, conservando $F\ \omega\ \omega_1\ \omega_{11}\ d\ s\ n$ i soliti significati, è:

Per la giunzione semplice ed un solo coprigiunto

$$F = \omega\ R_c = \frac{1}{3}\ n\ \pi\ d^2\ R_s \quad , \quad \omega_1 = \omega \qquad (341)$$

e per doppio coprigiunto

$$F = \omega\ R_c = \frac{1}{2}\ n\ \pi\ d^2\ R_s \quad , \quad \omega_{11} = \frac{2}{3}\ \omega \qquad (342)$$

le quali servono a determinare il numero od il diametro dei chiodi, e la riquadratura dei coprigiunti qualunque sia la forma della sezione delle sbarre.

Nel caso di un attacco come quello mostrato dalla Fig. 417, onde ottenere nel miglior modo possibile una uniforme distribuzione della pressione sui chiodi, si dispone nella prima fila il massimo numero di chiodi e si va gradatamente scemando fino all'ultima, disponendo inoltre i chiodi alternati, inquantochè si può ritenere che la prima fila, sulla quale agisce direttamente la forza, sia proporzionatamente più cimentata dell'ultima.

Osservazione. — Per il calcolo delle chiodature eseguite con bolloni servono le stesse regole esposte per le bulle.

254. Chiodature per le travi composte. — Nelle travi in forma di T I composti, soggette a sforzi di flessione, le tavolette ed i cantonali tendono a staccarsi dal gambo per scorrimento longitudinale, dipendentemente dalle forze radenti orizzontali che si sviluppano nella trave, e quindi le chiodature che servono al loro reciproco collegamento sono cimentate al taglio. Al § **61** si è veduto che le forze radenti orizzontali hanno una doppia variazione, cioè variano di intensità colla stessa legge degli sforzi di taglio, ed altresì diminuiscono dall'asse neutro fino ai lembi orizzontali superiore ed inferiore, ove hanno un valor nullo. — Vedesi adunque che se si volesse fare le chiodature di uniforme resistenza si dovrebbe diminuire il diametro od aumentare la distanza dei chiodi mano a mano che dagli estremi

della trave si va verso il mezzo. In pratica però per semplicità di costruzione si fanno le chiodature con chiodi di egual diametro ed egualmente distanti su tutta la lunghezza della trave, ed il calcolo degli stessi si fa in base al massimo valore che possono assumere le forze radenti orizzontali a cui sono soggetti. — L'asse neutro è lo strato di massimo cimento, e la (71*a*) porge il valore delle forze radenti orizzontali riferite all'unità di lunghezza relativamente al detto asse, le quali non vi si mantengono costanti, ma variano da sezione a sezione col variare dello sforzo di taglio T_x, e siccome questo diventa massimo per le sezioni estreme, così anche le forze radenti orizzontali acquistano il maggior valore possibile, che si indica con $\binom{mas}{mas}O$, in corrispondenza agli estremi della trave e sull'asse neutro, ed il relativo valore si ottiene ponendo nella (71*a*) ${}_{mas}T$ in luogo di T_x; cioè

$$\binom{mas}{mas}O = \frac{{}_{mas}T}{H_f} \qquad (343)$$

nella quale per H_f si può porre con sufficiente approssimazione: nelle travi di poca altezza, la distanza dei baricentri delle nervature; e nelle travi di grande altezza, la stessa altezza della trave. È questo massimo sforzo possibile (343) che si assume in pratica per il calcolo delle chiodature.

α) **Chiodature delle tavolette ai cantonali** — Le tavolette, qualunque sia il numero di lamiere che le compongono, si attaccano ai cantonali con una doppia fila di chiodi, cioè una fila per ogni cantonale, e quindi se è n il numero dei chiodi occorrenti in ogni fila sull'unità di lunghezza, sarà $2n$ il numero dei chiodi sulle due file, la cui resistenza al taglio deve equilibrare la forza massima radente orizzontale $\binom{mas}{mas}O$, e quindi si hanno le relazioni

$$\frac{{}_{mas}T}{H_f} = 2n\frac{\pi d^2}{4}R_s \quad , \quad n = 0{,}637\frac{{}_{mas}T}{H_f d^2 R_s} \qquad (344)$$

che servono a determinare il diametro d dei chiodi, od il loro numero n per ogni fila, e per l'unità di lunghezza, da cui si deduce la loro reciproca distanza.

β) **Chiodatura dei cantonali al gambo.** — Se il sistema formato dalle tavolette coi cantonali di già solidamente collegati insieme avesse a staccarsi dal gambo, i chiodi che ve lo congiungono si

romperebbero per doppio taglio, e quindi l'area resistente di ogni chiodo è $2\frac{\pi d^2}{4} R_s$, per cui detto n il loro numero per unità di lunghezza, dovendo essi equilibrare la forza radente $\binom{mas}{mas} O$, deve essere

$$\frac{{}^{mas}T}{H_f} = 2n\frac{\pi d^2}{4} R_s \quad , \quad n = 0{,}637 \frac{{}^{mas}T}{H_f d^2 R_s} \qquad (345)$$

cioè il numero dei chiodi occorrenti sull'unità di lunghezza per attaccare i cantonali al gambo è eguale a quello di una fila dei chiodi occorrenti all'attacco delle tavolette ai cantonali.

γ) **Chiodatura delle lamiere formanti una tavoletta.** — Nelle grandi travi, le tavolette si formano con più lamiere sovrapposte, ognuna delle quali si compone di vari pezzi, per cui risultano dei giunti per ogni ordine orizzontale di lamiere. In questo caso i pezzi di lamiera da congiungere nel medesimo ordine non si possono sovrapporre, ma bisogna metterli in continuazione l'uno accanto all'altro e quindi la giunzione deve essere fatta mediante coprigiunto. Per semplificare la distribuzione delle chiodature è opportuno di far sì che i giunti dei vari ordini di lamiere possano essere collegati con un unico coprigiunto, originando un così detto *giunto composto*, e questa disposizione deve essere conservata su tutta la lunghezza della tavoletta, ciò che si ottiene variando opportunamente la lunghezza dei vari pezzi di lamiera per ogni ordine, nel fare la quale variazione si avrà cura di conservare pezzi di una lunghezza costante nel maggior numero possibile e di variare soltanto la lunghezza dei pezzi che cadono in corrispondenza alla mezzaria ed agli estremi dei vari ordini, come mostra la **Fig. 352.** Studiata la disposizione dei vari giunti composti, ecco come si calcola il numero n dei chiodi di diametro d occorrenti per cadaun giunto. Sia s lo spessore totale della tavoletta, λ la sua larghezza, ed R lo sforzo che cimenta la trave nella fibra più lontana dall'asse neutro. Si può ammettere per semplicità che l'intera sezione λs di una tavoletta resista collo sforzo unitario R, per cui la totale resistenza della medesima si può rappresentare con $\lambda s R$ (nel qual modo risulta qualche cosa maggiore del vero, § **35**) e rappresenta uno sforzo di trazione o di compressione a seconda che si considera la tavoletta supe-

riore od inferiore, ed a seconda del senso dell'incurvamento che subisce la trave nell'inflettersi. Dove cade un giunto composto deve essere trasmessa la forza $\lambda s R$ da una parte all'altra del medesimo mediante i chiodi, i quali sono cimentati al taglio semplice, inquantochè se la loro resistenza fosse deficiente succederebbe la rottura secondo l'andamento tratteggiato, **Fig. 418.** Per la stabilità del giunto deve dunque essere

$$\lambda s R = n \frac{\pi d^2}{4} R_s \quad \text{ossia} \quad n = 1{,}273 \frac{\lambda s}{d^2} \frac{R}{R_s} \qquad (346)$$

Esempio.

Si prenda in considerazione la trave calcolata nell'esempio a pagina 427, **Fig. 351, 354,** per la quale è $mas T = 63443$, e trattandosi di una trave di grande altezza si può prendere $H_f = H = 3{,}6$; si suppongano chiodi di diametro $d = 22$ millimetri, e si prenda $R_s = 4$ chilogrammi per millimetro quadrato.

Chiodatura dei cantonali al gambo ed alle tavolette. — Il numero n di chiodi per metro corrente di trave, e per ogni fila, necessari all'attacco delle tavolette ai cantonali è dato dalla (344), e riferendosi al metro è $d = 0{,}022$, $R = 4000000$, per cui risulta

$$n = 0{,}637 \frac{63443}{3{,}6 \times 0{,}022^2 \times 4000000} = 5{,}8$$

ed in cifra rotonda $n = 6$, e quindi la loro distanza diventa $\frac{1^m}{6} =$ metri 0,1666 ed in cifra rotonda 170 millimetri.

Il numero di chiodi occorrenti per l'attacco dei cantonali al gambo risulta dalla (345) egualmente di $n = 6$, cioè hanno la stessa distanza di 170 millimetri: e la chiodatura si dispone in modo che i centri di questi ultimi chiodi sieno in corrispondenza della mezzaria degli intervalli dei sopraindicati, come mostra la parte superiore della **Fig. 418.**

Chiodatura delle lamiere delle tavolette. — Si consideri il giunto composto dove vi sono 3 lamiere sovrapposte dello spessore di 9 millimetri per cui è $s = 3 \times 9 = 27$ millimetri; la larghezza teorica delle lamiere è $\lambda = 300$ millimetri e si è preso $R = 6$ chilogrammi per millimetro quadrato. I chiodi devono avere lo stesso diametro dei precedenti e quindi $d = 22$ millimetri, per cui la (346) porge il loro numero

$$n = 1{,}273 \frac{300 \times 27}{22^2} \frac{6}{4} = 32$$

i quali dovendo essere distribuiti su tre ordini di lamiere di eguale spessore,

si dividono in tre gruppi di $\frac{32}{3} = 10{,}6$ chiodi, ed in cifra rotonda 10 chiodi per scaglione o lamiera. Questi chiodi si devono distribuire in file regolari le cui distanze tanto nel senso longitudinale che trasversale sono vincolate a quelle dei chiodi precedentemente calcolati, che servono alla chiodatura delle tavolette al gambo, e quindi si avrà la disposizione indicata nella parte inferiore della **Fig. 418**. La larghezza reale delle tavolette deve farsi eguale a quella teorica λ, aumentata di tanti diametri d quanti corrispondono al massimo numero di chiodi che si trovano lungo una fila trasversale, e quindi in questo caso essa diventa $300 + 2 \times 22 = 344$ millimetri. Gli scaglioni avranno la lunghezza $L_0 = 2{,}5 \times 170 = 425$ millimetri, e chiamando N il loro numero (eguale a quello delle lamiere sovrapposte) dovrà essere il coprigiunto lungo $(N + 1) L_0 = (3 + 1) 425 = 1700$ millimetri, e si avrà un quarto gruppo nel quale si dovranno disporre altri 10 chiodi.

Osservazione. — Se si deve calcolare la resistenza di un chiodo che congiunge fra loro più lamiere nel modo indicato dalla **Fig. 419** è da osservarsi che il chiodo presenta tante sezioni di rottura quante sono le lamiere meno una: per cui se è N il numero di queste, la resistenza del chiodo è espressa da $(N - 1) \frac{\pi d^2}{4} R_s$ e quindi, detta Ω la totale sezione utile delle sbarre da congiungere, deve essere $(N - 1) \frac{\pi d^2}{4} R_s = \Omega R_t$ ossia

$$d = \sqrt{1{,}273 \frac{\Omega}{N - 1} \frac{R_t}{R_s}}$$

Per esempio nella **Fig. 419** è $N = 5$: la sezione utile debba essere $\Omega = 3000$ millimetri quadrati, in allora il diametro del chiodo sarà

$$d = \sqrt{1{,}273 \frac{3000}{5 - 1} \frac{6}{4}} = 37{,}8 \text{ mm.}$$

ed in cifra rotonda 38 millimetri, per cui la sezione totale delle sbarre si potrebbe assumere colle dimensioni segnate nella **Fig. 419** con che la sezione utile corrisponde precisamente a 3000 millimetri quadrati.

Piedritti.

1. Costruzione.

255. Generalità. — I piedritti possono essere o di struttura murale, oppure col nucleo di opera murale e rivestimento metallico, impiegando nella loro costruzione il procedimento dell'aria compressa, e finalmente interamente metallici.

256. Piedritti di muratura. — Nulla di particolare è a dirsi dei piedritti di struttura murale, senonchè alle spalle si assegnano gli stessi profili indicati al § **191** pei ponti di piccola portata, mentre le pile, che possono essere profilate verticalmente od anche a scarpa, vanno munite di rostri, che si raccordano col fusto, i quali di solito sono a base semicircolare od anche conformata a triangolo equilatero mistilineo, **Fig. 420**, la qual forma si presta meglio a diminuire il numero e la potenza dei vortici che si formano in tempo di piena.

257. Piedritti ad aria compressa. — I piedritti fondati col metodo dell'aria compressa, di cui si vedono esempi nelle Fig. 8, 13, 14, 15 della **Tav. 31**, sono costituiti da una o più colonne di grande diametro, a base circolare od ellittica, collegate fra loro da armature metalliche. Le modalità ed i dettagli di costruzione dei sistemi ad aria compressa formano una parte speciale ed importante delle costruzioni, la quale verrà trattata separatamente in un'appendice alla presente opera.

258. Piedritti interamente metallici. — Sono i piedritti di struttura interamente metallica quelli di cui conviene particolarmente occuparsi. Questi piedritti d'ordinario si impiegano esclusivamente per le pile, mentre le spalle si fanno in muratura. Si distinguono in *stilate* e *palate*.

α) **Stilate.** — Nei ponti a più travate di piccola portata è conveniente l'uso delle stilate metalliche specialmente se il corso d'acqua, essendo soggetto a piene abbondanti e repentine, abbisogna della massima luce libera fra i piedritti. Le stilate sono formate da due o più colonne (ordinariamente tante quante sono le travi principali da sorreggere) collegate fra loro da traversi orizzontali detti anche *architravi* e da croci di Sant'Andrea, che sono disposte in uno e più ordini sia orizzontali che verticali, Fig. 10 (**Tav. 32**). Se le colonne di una stilata sono molte, e quindi poco distanti fra loro, bastano per congiungerle i soli traversi. Le colonne possono essere di ghisa, Fig. 15, 22, 23 (**Tav. 29**), ed allora sono formate da un solo cilindro cavo, o da più pezzi cilindrici collegati fra loro allorchè sono molto lunghe; oppure sono di ferro ed allora o sono massiccie, Fig. 3, 6 (**Tav. 29**), oppure conformate con ferri speciali, così detti a quadrante, come

mostra in sezione la **Fig. 421**; i quali furono adoperati nei ponti sull'Adige ad Alberedo ed a Pescantina. Se le colonne sono di ghisa portano ai punti necessari degli orecchioni che servono all'attacco delle armature, fusi tutti di un pezzo colla colonna, Fig. 22 (**Tav. 29**); se sono di ferro massiccio, portano dei collari di ferro che si fissano a caldo sulle colonne ed i quali hanno delle ali sporgenti per l'attacco suddetto, Fig. 6 (**Tav. 29**); finalmente se sono fatte con ferri speciali si stringono fra i medesimi dei pezzi di lamiera che servono all'uopo, **Fig. 421**. I traversi e le croci di Sant'Andrea possono essere in ghisa massicci o traforati, oppure di ferri conformati a ⊤ ⊥ ⊔ I semplici o composti, ed il loro collegamento colle colonne si ottiene d'ordinario mediante chiavarde.

Sistemi di fondazione delle stilate. — In vari modi si possono fondare le stilate. Un sistema adoperato con molto successo dallo *Stabilimento di costruzioni metalliche del cav.* Rocchetti *di Padova* (*), è quello delle palafitte in legno; in corrispondenza ad ogni colonna della stilata, si piantano con diligenza dei gruppi di 2, 3 o 4 pali con puntazza di ferro, ben diritti e squadrati in modo che risultino a perfetto contatto, avendo ogni cura perchè sieno battuti a rifiuto. Le teste dei pali di ogni gruppo si stringono fra un cappello di ghisa terminato superiormente da una placca orizzontale, ed i vari cappelli si collegano con dei traversi, **Fig. 422**. Le colonne della stilata, terminate al loro piede da un largo ribordo, si fissano per esso con chiavarde ai detti cappelli, Fig. 15 a 19 (**Tav. 29**). Si può anche disporre sopra dei cappelli una robusta piattaforma orizzontale inchiavardata agli stessi e fusa in un solo pezzo od in più pezzi congiunti con chiavarde, la quale porta superiormente dei bossoli cilindrici, venuti di fusione colla stessa piattaforma, entro i quali si infilano i piedi delle colonne che, volendo, si fissano con caviglie, Fig. 23 a 27 (**Tav. 29**). Allorchè si adotta questo sistema bisogna avere una importante avvertenza e cioè i pali di legno devono restare sempre immersi nell'acqua, altrimenti se in tempo di magra, sporgono dal pelo dell'acqua avviene che, coll'avvicendarsi dell'umido e del secco, essi infracidiscono e deperiscono prontamente, ed allora si è costretti di rimetterli a nuovo con un lavoro difficilissimo e dispendioso assai. Si dovrà dunque sempre disporre i cappelli colla loro placca superiore sottoposta al livello delle magre di parecchi centimetri onde provvedere ad un eventuale abbassamento delle stesse. Se, per una causa qualunque, i pali di legno avessero a sporgere dall'acqua, si può preservarli dall'accennato deperimento battendo all'ingiro della stilata una paratìa di semplici tavoloni posti a contatto fra loro ed annegandovi del calcistruzzo fino al livello dei cappelli di ghisa, il quale rivestendo i pali, serve loro di riparo.

(*) Ora della Società Veneta per imprese e pubbliche costruzioni.

Quando la natura del terreno si presta, quando cioè si trova a poca profondità un buon banco sodo da potervisi sicuramente appoggiare, si può costruire una gettata di calcistruzzo entro paratie, lunga quanto la stilata, larga convenientemente, e ricoperta da un zoccolo di pietra da taglio, sopra il quale si può fissare con bolloni da muro la piastra di ghisa coi bossoli, dinanzi descritta, che serve di imbasamento alle colonne della stilata, Fig. 23 (Tav. 29).

Nei terreni argillosi e sabbiosi torna opportuno il sistema dei pali ad elica, che sono colonne di ghisa cave, o di ferro massiccio che portano all'estremità un'elica con un solo o più passi. L'elica è in ghisa, e venuta di fusione in sol pezzo colle colonne, se esse pure sono di ghisa, od unita mediante caviglie alle colonne se esse sono di ferro. L'eliche sono cilindriche o coniche: le cilindriche si usano per terreni pantanosi nei quali, potendosi affondare facilmente, si possono adoperare eliche di largo diametro ciò che è vantaggioso alla stabilità, in causa dell'ampia superficie di terreno che riceve la pressione prodotta dalla colonna, ed in questo caso le colonne si fanno di ghisa, cave, e di grande diametro: le coniche invece si prestano benissimo ad attraversare terreni di maggior consistenza, ed anzi, purchè il loro diametro sia limitato, con esse si può penetrare anche nelle ghiaie di mezzana grossezza, che possono venire facilmente spostate, e perfino si possono perforare roccie tenere. Bisogna però essere molto oculati nell'adottare questo sistema, il quale torna vantaggioso ogni qualvolta si può far penetrare le colonne a rifiuto nel terreno. Nei terreni con grosse ghiaie, ed in quelli nei quali si trovano sparse delle concrezioni calcari o dei *trovanti* (grossi pezzi di pietra) può avvenire che la punta dell'elica si incontri con questi ostacoli i quali o fanno deviare l'elica dalla sua verticalità ed anche la spostano, difficultando e magari impedendo la formazione della stilata al suo giusto posto, oppure si oppongono ad un ulteriore affondamento della colonna presentando un rifiuto apparente e poscia sotto il carico della costruzione il terreno sottostante al masso cede, causando abbassamenti nella stilata con danno gravissimo e forse colla rovina del manufatto. In questi casi è miglior partito l'abbandonare siffatto sistema ed adottare invece l'uno e l'altro di quelli dinanzi indicati. Una cautela importante è poi da aversi allorchè per la opportuna indole del terreno si fondano le stilate con pali ad elica, e cioè stabilita col mezzo delle terrebrazioni la posizione altimetrica del banco di fondazione non si fisserà a priori la lunghezza dei pali fino a giungere soltanto al detto banco, ma si terrà una lunghezza maggiore di un metro, ed anche più, onde nel caso di una impreveduta cedevolezza del terreno si possa ottenere un maggior approfondimento così da conseguire un vero rifiuto, *del quale si dovrà accertarsi colla maggiore diligenza.*

L'affondamento dei pali ad elica si opera mediante un congegno detto *cabestan*, **Fig. 423**, che consta di una robusta ghiera di ghisa nella quale si innestano 8 o più bracci egualmente lunghi di legno o metallici trattenuti mediante tiranti, (disposti secondo i lati di un poligono regolare) ad eguale distanza alla loro estremità esterna, ed ivi sono conformati in modo da poter ricevere una catena. Il cabestan si infila colla ghiera nella colonna, e facendolo girare intorno al suo asse, come indica la **Fig. 423**, gira con

esso anche la colonna, che perciò va approfondendosi nel terreno. Sta bene poi, quando la colonna ha raggiunto una certa profondità ed incontra molta resistenza al suo affondamento, di ricorrere anche alla percussione con un battipalo, che deve essere di non molto peso e cadere da non molta altezza onde sotto i colpi dello stesso non abbia a spezzarsi l'elica. L'azione del battipalo torna veramente efficace quando sia adoperato di conserva col cabestan e cioè si deve fare in modo che replicatamente uno sforzo potente di questo, e la caduta del maglio sieno contemporanei. Certo che il battipalo si deve usare con molta parsimonia e cautela, poichè se avviene la rottura dell'elica sotto i suoi colpi troppo spessi e violenti, si incontra grandissima difficoltà a svellere il palo, a togliere i frantumi dell'elica, e soprattutto a riaffondare nel medesimo sito una nuova colonna. Importa poi, per la buona riescita dell'operazione, che la ghiera del cabestan non abbia a scorrere intorno alla colonna, al qual fine se essa è in ghisa porta una o più nervature longitudinali, che vanno ad internarsi entro corrispondenti incavi della ghiera, mentre se il palo è di ferro si praticano in esso degli incavi longitudinali entro ai quali si innestano delle nervature fuse di un pezzo colla ghiera. In luogo del cabestan si può adoperare una testa d'argano che si adatti esattamente ai pali da piantare, ed in questo caso i manovratori agiscono direttamente sulle stanghe infisse nella testa suddetta. I pali ad elica di solito si elevano fino al pelo delle magre e ad essi si congiungono, con manicotti di giunzione e traversi di ritegno, le colonne che compongono la stilata propriamente detta, Fig. 3, 7, 9 (**Tav. 29**).

β) **Palate.** — Quando la lunghezza delle travate è notevole (supera i 15 o 20 metri) allora occorrono dei sostegni più robusti e le pile sono costituite invece che da un solo ordine di colonne, da un castello o palata, di cui si vede un esempio nelle Fig. 8 a 12 (**Tav. 30**). Negli alti viadotti si possono fare delle pile metalliche costituite da robuste colonne di ghisa formanti un castello piramidale a pianta rettangolare o poligonale, congiunte da parecchi traversi orizzontali e da interposti sistemi di traliccio più o meno fitto, come mostrano le Fig. 8 a 12 (**Tav. 34**).

2. Calcoli di stabilità.

259. Spalle o testate. — Le testate devono resistere alla spinta del terrapieno stradale loro addossato, nonchè ad una forza orizzontale dovuta all'accorciamento della travata per abbassamenti di temperatura, che agisce in corrispondenza al piano di posa della travata stessa e che concorre colla spinta del terra-

pieno a far ruotare la testata intorno al piede rivolto all'acqua, Fig. 424. Questa forza orizzontale dipende dall'attrito che deve esser vinto nel movimento della travata; gli apparecchi di dilatazione servono appunto a diminuire questo attrito, che è proporzionale alla pressione prodotta dalla travata. Chiamata σ_0 questa forza orizzontale, P_0 la pressione prodotta dalla travata sulla testata ed f_0 il coefficiente d'attrito è

$$\sigma_0 = f_0 P_0 \qquad (347)$$

nella quale si deve porre $f_0 = 0{,}5$ allorchè si impiegano scorritoi, mentre f_0 varia fra 0,15 e 0,05 allorchè si impiegano rulli, ed ordinariamente in pratica si prende $f_0 = 0{,}1$.

La testata deve esser posta in condizione di resistere tanto al rovesciamento intorno a **B**, quanto allo schiacciamento, ed ordinariamente essa è profilata verso terra a scaglioni, e verso acqua a scarpa. Le forze che sollecitano la testata sono la spinta σ del terrapieno stradale, che agisce orizzontalmente, la forza orizzontale σ_0, la pressione della travata P_0 ed il peso proprio della testata P_r, compreso quello della terra sovraincombente ai scaglioni, le quali ultime agiscono verticalmente. Perchè vi sia stabilità rispetto allo schiacciamento ed anche rispetto al rovesciamento, bisogna che la risultante R di tutte queste forze passi entro il terzo mediano della base **AB**, o per lo meno passi per il punto **C** che si trova ad una distanza $d = CB = {}^1/_3\,AB$ dallo spigolo più premuto, altrimenti se è $d < {}^1/_3\,AB$ la pressione non si diffonde su tutta la base **AB**, e la pressione unitaria sullo spigolo **B** diventa grandissima (vedi § 22) con molto pericolo di schiacciamento delle murature. La pressione della testata sul piano di fondazione è la componente verticale della risultante R, cioè è la somma delle forze verticali $P_r + P_0$ ed il detto piano reagisce con una forza eguale e direttamente contraria. Esso si può supporre rimosso ed allora, per non alterare le condizioni di equilibrio del sistema, bisogna aggiungere alle forze operanti anche la reazione del medesimo cospirante verticalmente di sotto in su, e di intensità $P_r + P_0$. Per l'equilibrio del sistema la somma algebrica dei momenti di tutte le forze che lo sollecitano, presi rispetto allo spigolo di rotazione **B**, deve essere eguale a zero, cioè chia-

mando rispettivamente s, s_0, p_1, p_0 i bracci di leva delle forze σ, σ_0, P_1, P_0, e d quello della reazione $P_1 + P_0$, deve essere

$$\sigma s + \sigma_0 s_0 - P_1 p_1 - P_0 p_0 + (P_1 + P_0) d = 0 \qquad (348)$$

Esprimendo il momento del peso della testata $P_1 p_1$ in funzione della grossezza g in sommità della medesima, ed attribuendo a d il valore che meglio si crede (di solito si prende $d = {}^1/_3$ **A B**) si ricava dalla (348) il valore di g per il quale il punto di passaggio **C** della risultante R è vincolato di posizione nel modo che si è stabilito. D'ordinario però in pratica si assegna a priori un opportuno valore a g, e si determina quale è il corrispondente valore di d, cioè la posizione del punto di passaggio della risultante R mediante la (348) posta sotto la forma

$$d = \frac{P_1 p_1 + P_0 p_0 - \sigma s - \sigma_0 s_0}{P_1 + P_0} \qquad (348a)$$

e si deve accettare una tale grossezza per la quale risulti $d \geq {}^1/_3$ **A B**. I valori dei bracci di leva p_0 s s_0 e del momento $P_1 p_1$ dipendono dalle dimensioni della testata.

Considerato che sulla testata si possono appoggiare n travi principali, chiamando A_p la reazione della testata sopra una trave scarica risulta $P_0 = \Sigma A_p$. Siccome poi ordinariamente sonvi due sole travi principali, per cui è $P_0 = 2 A_p$, in allora nei ponti ad una travata è $A_p = {}^1/_2 pl$, indicando con p il peso permanente per metro corrente di trave, e nei ponti a più travate si deve prendere A_p eguale al valore che assume lo sforzo di taglio T_1 in corrispondenza all'appoggio di sinistra della prima travata nell'ipotesi di ponte scarico, la quale pressione P_0 si immagina operante nel piano verticale che passa per i centri degli apparecchi di dilatazione. Chiamando l la lunghezza della testata (nel senso normale alla travata) ed S la spinta del terrapieno sull'unità di lunghezza è $\sigma = S l$, dove S si calcola di solito colla (130) cioè

$$S = \frac{1}{2} p h (h + 2 h_1) \left\{ \sqrt{1 + f^2} - f \right\}^2$$

nella quale f è il coefficiente d'attrito delle terre, p il peso unitario delle stesse, h l'altezza della faccia premuta, h_1 l'altezza fittizia sul terrapieno del sopraccarico ridotto a masso di terra; mentre il braccio di leva è dato dalla (136) cioè

$$s = \frac{h}{3}\left(\frac{h + 3h_1}{h + 2h_1}\right)$$

e con sufficiente approssimazione si può prendere $s = \frac{1}{3}h$.

260. Pile. — Bisogna fare distinzione fra pile in muratura e pile metalliche.

α) **Pile in muratura.** — Servono gli stessi criteri esposti per le testate, però sulle pile non agisce la spinta del terrapieno, per cui basta porre $\sigma = 0$ nella (348a), e si ha l'equazione di condizione per la stabilità delle pile, cioè

$$d = \frac{P_1 p_1 + P_0 p_0 - \sigma_0 s_0}{P_1 + P_0} \qquad (349)$$

avvertendo che in questo caso nel valore di $P_0 = 2A_p$ si deve porre per A_p il massimo fra i valori delle reazioni delle pile nell'ipotesi di ponte scarico, ritenendo ben inteso la travata continua.

β) **Stilate in ferro.** — Le colonne si devono considerare come solidi incastrati alla parte inferiore, ed affatto liberi all'estremo superiore. Si chiami P_0 la pressione massima sopportata da ognuna, e P_p quella dovuta al solo peso permanente. In quanto alle forze cimentanti si possono fare due distinte ipotesi:

1° Considerare la travata carica e tener conto soltanto della pressione verticale massima P_0 sopportata da ogni colonna che è in allora cimentata da uno sforzo unitario dato dalla (79) cioè

$$R_c = \frac{\left(1 + \alpha \frac{\omega L^2}{I}\right) P_0}{\omega} \qquad (350)$$

2° Considerare la travata scarica ed allora ogni colonna è caricata di punta da una forza P_p passante per il suo asse e

dipendente dal peso permanente, e soggetta eziandio ad una forza orizzontale σ_0 dipendente dalla dilatazione della travata, di valore $\sigma_0 = f_0 P_p$, applicata all'estremo superiore. Lo sforzo unitario dovuto alla pressione verticale P_p si ricava dalla (79) cioè

$$R = \frac{\left(1 + \alpha \frac{\omega L^2}{I}\right)}{\omega} P_p$$

e quello dovuto alla forza orizzontale σ_0 e dato dalla (31*a*)

$$R = \frac{M d}{I}$$

nella quale, chiamando l la lunghezza della colonna, si deve mettere il momento inflettente $M = \sigma_0 l$. Lo sforzo totale è la somma algebrica dei due parziali cioè

$$R_c = \frac{\left(1 + \alpha \frac{\omega L^2}{I}\right)}{\omega} P_p + \frac{\sigma_0 l d}{I} \qquad (351)$$

In queste formule L indica la lunghezza teorica della colonna che si deve prendere eguale al doppio della effettiva l, cioè $L = 2l$, ed ω, I e d indicano l'area, il momento di inerzia, e la distanza delle fibre più lontane dall'asse neutro della sezione retta della colonna mentre il coefficiente α ha il valore dato dallo specchio a pagina 132. Questa seconda ipotesi, conduce generalmente a sforzi unitari più grandi, ed è opportuno di attenervisi onde esser certi che le colonne possono resistere alla spinta σ_0 prodotta dalla dilatazione della trave.

Osservazione. — Per le *palate* si rimanda lo studioso ad una pregievole e recente pubblicazione di Autore italiano (*), oppure ad altra importante pubblicazione di Autore francese (**).

(*) Equilibrio interno delle pile metalliche. — L. Allievi.
(**) Memoire sur les piles en charpente métallique. — M. W. Nordling.

Esempio.

Si riferisce al ponte in più travate studiato nell'esempio sviluppato a pagina 515.

Testata. — Il profilo sia quello segnato nella **Fig. 425**; le dimensioni altimetriche sono vincolate dalle condizioni del progetto, così pure la larghezza del piano di posa della travata; si scelgono invece ad arbitrio l'inclinazione del paramento verso acqua, la sporgenza e l'altezza dei scaglioni verso terra, le quali dimensioni restano tutte fisse, e per ultimo si assume la grossezza in sommità, la quale deve essere tale da garantire la stabilità della testata, senza che vi sia spreco di muratura, e la si varia opportunamente fintantochè essa arrivi al giusto limite. La verifica si conduce nel modo seguente. Si calcola il valore di d colla (348a). Si comincia dal formare P_0: il ponte ha due sole travi principali, e quindi $n = 2$; l'ipotesi di ponte scarico è la 6ª e si ha $A_p = A_1^{(6)} = T_r^{(6)}$ *per la* 1ª *travata* $= 6616$ e quindi $P_0 = 2 \times 6616 = 13232$ chilogrammi; dall'esame della figura si vede che è $p_0 = 0{,}47 + 0{,}33 = 0{,}8$. Supponendo terre ordinarie il loro peso unitario è $p = 1500$ chilogrammi ed il coefficiente d'attrito $f = 1$: l'altezza della faccia premuta è $h = 2{,}5 + 2{,}5 + 2{,}6 = 7{,}6$ ed il carico prodotto dal treno sul terrapieno si può valutare in ragione di 2000 chilogrammi per metro quadrato, per cui è $h_r = \frac{2000}{1500} = 1{,}33$; risulta dunque dalla (130).

$$S = \frac{1}{2}\, 1500 \times 7{,}6\,(7{,}6 + 2 \times 1{,}33)\left\{\sqrt{1 - l^2} + l\right\}^2 = 10024 \text{ Kg.}$$

e prendendo la lunghezza della testata $l =$ metri 5,5 si ottiene

$$\sigma = 10024 \times 5{,}5 = 55132\,,$$

mentre è $s = {}^1/_3\, 7{,}6 = 2{,}53$. Prendendo $f_0 = 0{,}1$ si ottiene

$$\sigma_0 = 0{,}1 \times 13232 = 1323\,,$$

e si vede dalla figura essere $s_0 = 5$ metri. Tenendo conto dell'azione della terra soprastante agli scaglioni, il peso P_r ed il suo momento $P_r p_r$, si trovano facendo la somma dei pesi e dei momenti delle porzioni in cui è suddivisa la testata mediante le punteggiate verticali; supponendo la testata di pietrame calcare del peso di 2200 chilogrammi per metro cubo è

$$P_r = \left\{ \begin{array}{l} 2200 \times 5{,}5\,(2{,}5 \times 0{,}5 + 5{,}0 \times 0{,}5 + 7{,}6 \times 1{,}2 + 5{,}0 \times 0{,}8 + \\ + \frac{1}{2}\, 5{,}0 \times 0{,}33) + 1500 \times 5{,}5\,(4{,}1 \times 0{,}5 + 2{,}6 \times 0{,}5) \end{array} \right\} = 250057 \text{ Kg.}$$

$$P_r p_r = 2200 \times 5{,}5 \left\{ \begin{array}{l} 2{,}5 \times 0{,}5 \left(\frac{0{,}5}{2} + 0{,}5 + 1{,}2 + 0{,}8 + 0{,}33 \right) + 5{,}0 \times 0{,}5 \left(\frac{0{,}5}{2} + 1{,}2 + 0{,}8 + 0{,}33 \right) + \\ + 7{,}6 \times 1{,}2 \left(\frac{1{,}2}{2} + 0{,}8 + 0{,}33 \right) + 5{,}0 \times 0{,}8 \left(\frac{0{,}8}{2} + 0{,}33 \right) + \frac{1}{2} 5{,}0 \times 0{,}33 \times \frac{2}{3} 0{,}33 \end{array} \right\} +$$

$$+ 1500 \times 5{,}5 \left\{ \begin{array}{l} 5{,}1 \times 0{,}5 \left(\frac{0{,}5}{2} + 0{,}5 + 1{,}2 + 0{,}8 + 0{,}33 \right) + \\ + 2{,}6 \times 0{,}5 \left(\frac{0{,}5}{2} + 1{,}2 + 0{,}8 + 0{,}33 \right) \end{array} \right\} = 458337 \text{ Kgm.}$$

e sostituendo nella (348a) si trova

$$d = \frac{458337 + 13232 \times 0{,}8 - 55132 \times 2{,}53 - 1323 \times 5}{250057 + 13232} = 1{,}23 \text{ m.}$$

ed essendo la base $\mathbf{AB} = 0{,}5 + 0{,}5 + 1{,}2 + 0{,}8 + 0{,}33 = 3{,}33$ risulta $d > {}^1/_3$ $3{,}33 > 1{,}11$, cioè la distanza d essendo di poco superiore ad ${}^1/_3$ **AB** vi è stabilità senza spreco.

Volendo trovare la pressione unitaria massima, quella cioè che ha luogo sullo spigolo più premuto (**B**) serve la (22a) nella quale si deve porre

$$F = P_r + P_0 = 250057 + 13232 = 263289, \quad d = 1{,}23, \quad a = \mathbf{AB} = 3{,}33,$$

$\omega = \mathbf{AB} \times l = 3{,}33 \times 5{,}5 = 183{,}15$ per cui la cercata pressione ha per valore

$$\frac{2 \times 263289}{183{,}15} \left(2 - \frac{3 \times 1{,}23}{3{,}33} \right) = 2560 \text{ Kg. per m}\square$$

mentre la pietra calcare ordinaria può essere caricata fino a 250000 chilogrammi per metro quadrato.

Pile. — La massima reazione A_p delle pile nell'ipotesi del ponte scarico ha luogo per la pila mediana ed ha per valore $A_p = 2 \times 11157 = 22314$ e quindi è $P_0 = 2 \times 22314 = 44628$, e la figura mostra essere $p_0 = {}^1/_2 1{,}5 = 0{,}75$. Si trova poi $\sigma_0 = 0{,}1 \times 44628 = 4462$ ed $s_0 = 5{,}0$. Il peso della pila è

$$P_r = 2200 \ (1{,}5 \times 5{,}0 \times 5{,}5 + 3{,}14 \times 0{,}75^2 \times 5{,}0) = 110176.$$

mentre il braccio è $p = {}^1/_2 1{,}5 = 0{,}75$. Applicando la (349) si trova

$$d = \frac{110176 \times 0{,}75 + 44628 \times 0{,}75 - 4462 \times 5{,}0}{110176 + 44628} = 0{,}6$$

cioè $d > {}^1/_3 1{,}5 > 0{,}5$. La pressione unitaria, essendo $F = 110176 + 44628 = 154840$ chilogrammi ed $\omega = 10$ metri quadrati, applicando la (22a), risulta

$$\frac{2 \times 154840}{10} \left(2 - \frac{3 \times 0{,}6}{1{,}5} \right) = 24768 \text{ Kg. per m}\square$$

cioè molto inferiore allo sforzo pratico di schiacciamento.

Stilate in ferro. — Riferendosi al ponte sul Bacchiglione, Fig. 1, 2, 3, 4 (**Tav. 30**), e ritenuto che il carico permanente sia di 1600 chilogrammi per metro corrente di trave, e l'accidentale di 350 chilogrammi per metro quadrato, si può ritenere con sufficiente approssimazione che la pressione massima sopra una colonna sia

$$P_0 = \frac{1}{2}(15{,}84 + 19{,}36)\,1600 + \frac{1}{2}(15{,}84 + 19{,}36)\,\frac{1}{2}\,6{,}0 \times 350 = 46640\,,$$

mentre quella dipendente dal solo carico permanente è

$$P_p = \frac{1}{2}(15{,}84 + 19{,}36)\,1600 = 28160.$$

L'area della sezione è $\omega = 3{,}14\,(150^2 - 120^2) = 25434$ millimetri quadrati, il momento di inerzia espresso in millimetri è $I = {}^1/_4\,3{,}14\,(150^4 - 120^4) = 234628650$, la distanza $d = {}^1/_2\,300 = 150$ millimetri; la lunghezza teorica L si deve prendere doppia della reale l, cioè $L = 2\,(4300 + 400) = 9400$ millimetri, mentre il coefficiente di scorrimento si prende $f = 0{,}10$ e quindi risulta $\sigma_0 = 0{,}1 \times 28160 = 2816$ chilogrammi; per la ghisa poi è $\alpha = 0{,}00025$. Applicando la (350) si trova che lo sforzo unitario cimentante la colonna in ghisa è

$$R = \frac{\left(1 + 0{,}00025\,\frac{25434 \times 9400^2}{234628650}\right)}{25434}\,46640 = 6{,}23 \text{ Kg. per mm}\square$$

ed applicando la (351) si trova che detto sforzo è

$$R = \frac{\left(1 + 0{,}00025\,\frac{25434 \times 9400^2}{234628650}\right)}{25434}\,28160 + \frac{2816 \times 4700 \times 150}{234628650} =$$

$$= 3{,}76 + 8{,}46 = 12{,}22 \text{ Kg. per mm}\square$$

il quale sarebbe piuttosto forte poichè nelle costruzioni che devono avere molta durata lo sforzo ragguagliato di compressione non dovrebbe superare per la ghisa i 10 chilogrammi per millimetro quadrato.

XI.

PONTI CON TRAVI POLIGONALI

1. Costruzione.

261. Generalità. — Allorchè le travi principali a traliccio hanno una od entrambe le loro nervature comunque incurvate, esse si chiamano *travi poligonali*, ed i ponti con esse costruiti si chiamano ponti a travata poligonale. Si fanno le nervature incurvate, piuttosto che rettilinee, allo scopo di assegnare alla trave una forma tale che abbia a soddisfare a certe condizioni sia nell'intento di semplificare la costruzione, sia per porre il metallo nelle migliori condizioni di resistenza, cioè a dire che abbia ad essere sottoposto a tensioni della stessa natura, qualunque sia la posizione del carico mobile.

Riguardo alla **costruzione dell'impalcato**, ed al modo di collegarlo alle travi principali, valgono le norme già indicate ai §§ **131**, **132**, **207**, mentre per i relativi calcoli di stabilità si seguono i procedimenti sviluppati nei §§ **149** a **164**. Non resta dunque che di occuparsi delle **travi principali.**

262. Forma delle nervature. — Le forme di nervature più opportune per le travi poligonali sono quelle a ⊣⊢ I H ⊔ per le nervature compresse, e quelle a ⊥ ed a ferro piatto per le nervature stirate; però tutte le forme indicate al § **202** possono venire impiegate, e basta attenersi alle norme indicate in quel paragrafo. Si aggiungono soltanto alcuni particolari relativamente ai tipi di nervature Schwedler e Pauli.

1) **Nervature Schwedler.** — Queste nervature vengono conformate con lamiere e ferri a ⌝⌜, e si distinguono in *semplici* allorchè sono conformate con soli ferri sagomati, Fig. 427*a*, e *doppie* allorchè mediante l'impiego di lamiere ricevono la forma di H od ⊔, Fig. 427*b c*.

2) **Nervature Pauli.** — Nelle Fig. 7, 15, 16, 17 della Tav. 40 si vede l'ordinaria conformazione di queste nervature, le quali con-

stano di 4 cantonali con ali eguali o diseguali, od anche di ferri a ⌶, le cui ali verticali sono collegate mediante lamiere.

263. Tipi di traliccio e forma delle sbarre. — Anche in queste travi si ha il traliccio simmetrico e dissimetrico, ugnolo e multiplo, semplice e combinato, come si è veduto al § **201**. Le sbarre hanno le forme indicate al § **203** per le travi con nervature rettilinee. Più di sovente però le diagonali sono formate da ferri piatti, inquantochè non devono venir cimentate che da soli sforzi di trazione.

264. Controventi. — Per i controventi valgono le stesse norme date al § **208** e si aggiunge che nei ponti a travi poligonali ordinariamente l'impalcato è posto alla parte inferiore delle travi principali, (**Tav. 36 a 39**), esclusione fatta dal tipo Pauli, nell'uso del quale l'impalcato può essere posto sopra, sotto od a mezza altezza di esse travi, (**Tav. 38 e 40**). Allorchè le travi principali sono molto alte nella parte mediana, si controventano superiormente, ma i controventi devono essere limitati alla sola parte centrale delle travate e cioè fintantochè rimanga un'altezza libera fra il piano delle rotaie e quello dei controventi che permetta il libero passaggio delle locomotive o dei carri carichi, Fig. 1, 6 (**Tav. 38**).

265. Estremi delle travi. — Nelle travi poligonali le due nervature si incontrano agli estremi, e si possono collegare direttamente fra loro, od anche col mezzo di una membratura sussidiaria, la quale può essere di ghisa, o di ferro, sempre però in modo che sia soddisfatta la condizione che gli assi baricentrici delle due nervature si incontrino in un punto posto verticalmente sopra il mezzo dell'appoggio od apparecchio di dilatazione. Si deve sopratutto aver di mira che il collegamento riesca solido e di tale conformazione che permetta un facile e robusto attacco delle piastre d'appoggio; e si deve altresì disporre in modo conveniente l'attacco delle travi trasversali estreme, il quale riesce piuttosto difficile in causa della poca altezza. I particolari di costruzione si vedono nell'atlante, Fig. 14, 15, 17 (**Tav. 36**), Fig. 8, 9 (**Tav. 37**), Fig. 12, 14 (**Tav. 38**), Fig. 7, 8 (**Tav. 39**), Fig. 5 (**Tav. 40**).

266. Apparecchi di dilatazione. — È sopratutto nelle travi poligonali che si adottano gli appoggi oscillanti onde ottenere che il punto d'applicazione della reazione del piedritto, passi sempre per il punto di incontro degli assi baricentrici delle nervature, ciò che è necessario per ottenere che le travi sieno proprio cimentate nei modi che vengono considerati nei calcoli di stabilità. La forma e le dimensioni degli apparecchi, qualunque sia il loro tipo, sono quelle stesse indicate ai §§ **211** a **214**.

2. Calcoli di stabilità.

267. Generalità. — La valutazione del *carico accidentale* si eseguisce coi procedimenti indicati al § **217** per le travi rettilinee. In quanto al *carico permanente* lo si determina mediante le formule pratiche che verranno date caso per caso.

Nelle travi poligonali il traliccio è sempre *grandi maglie* e di solito dissimetrico e perciò conviene calcolare una per una le tensioni delle varie sbarre costituenti la trave reticolare. Queste tensioni si calcolano con procedimenti numerici od anche con procedimenti grafici.

Si consideri una porzione di una trave poligonale con verticali equidistanti, **Fig. 430**, si indica con λ questa comune distanza, con le lettere S, I, D, V rispettivamente le sbarre della nervatura superiore, quelle della inferiore, le diagonali e le verticali, nonchè la loro tensione, con $\sigma\,\sigma_0\,\delta\,h$ le rispettive lunghezze e con s, i, d, v i relativi bracci di leva. Si chiami N il numero totale degli scomparti in cui è suddivisa la trave, ed è λ la larghezza di uno scomparto, cioè la distanza da nodo a nodo.

α) **Calcolo numerico delle tensioni.** — Il calcolo numerico delle tensioni si opera applicando il metodo dei momenti statici, i cui principî furono esposti al § **74**. Per le nervature il cimento più sfavorevole ha luogo per carico completo e quindi la reazione d'appoggio è costante ed eguale a metà del carico totale; per le sbarre del traliccio il massimo cimento ha luogo per carico parziale e quindi la reazione è variabile e bisogna determinare in precedenza il valore sbarra per sbarra, per le due differenti posizioni del carico mobile che origina le tensioni (*mas*) e (*min*). Note le reazioni degli appoggi si scrivono per le varie sbarre le

relative equazioni dei momenti statici, risolvendo le quali si determina la tensione di cadauna sbarra. È necessario perciò determinarne le lunghezze delle sbarre, nonchè il braccio di leva delle loro tensioni facendo distinzione fra le travi che hanno una nervatura rettilinea e quelle che hanno tutte due le nervature poligonali.

β) **Calcolo grafico delle tensioni.** — Siccome nelle travi poligonali le nervature ricevono il massimo cimento per carico completo, cosicchè la reazione d'appoggio è costante per ogni sbarra, giova calcolarne le tensioni col metodo delle figure reciproche, i cui principî furono esposti al § **79**.

Per le sbarre del traliccio il massimo cimento avendo luogo invece per carico mobile parziale, la rispettiva reazione d'appoggio cambia per ogni sbarra. Conviene quindi tenere separata l'azione del carico accidentale da quella del permanente. Per valutare le tensioni prodotte dal carico accidentale si procede col metodo dei momenti statici seguendo le norme esposte al § **81**. Per le tensioni prodotte dal carico permanente non occorre costruire uno speciale diagramma, inquantochè per essere esse dipendenti da un carico completo si possono dedurre dallo stesso diagramma costruito per le nervature, portando una conveniente riduzione nella scala delle forze. Sommando poi algebricamente le tensioni parziali si deduce speditamente la tensione totale.

Per le travi poligonali si può tralasciare di tener conto del carico sui nodi estremi, quelli cioè che corrispondono agli appoggi, inquantochè l'azione di quello è distrutta dalla rispettiva reazione degli appoggi stessi.

268. Travi colla nervatura inferiore rettilinea. — Si considerano travi col contorno superiore poligonale di forma qualunque, ma con verticali equidistanti.

α) **Lunghezza delle sbarre.** — Considerato lo scomparto m^{mo}, Fig. 431, esso è compreso dalle verticali h_{m-1} ed h_m e si riferiscono allo stesso le sbarre S_m, I_m, D_m, V_m, di cui le rispettive lunghezze sono σ_m, λ, δ_m, h_m. In quanto alla lunghezza od altezza delle verticali, questa dipende dalla forma della trave, cioè del poligono costituente la nervatura superiore. Si suppongano intanto note le altezze h_m delle verticali, e si vedrà come si procede a valutarle, allorchè si studieranno le varie forme di trave.

Per il punto **a** si conduca l'orizzontale **a r** e ne risulta un triangolo rettangolo dal quale si deduce

$$\sigma_m = \sqrt{(h_m - h_{m-1})^2 + \lambda^2} \tag{352}$$

dall'altro triangolo **a c e** risulta

$$\delta_m = \sqrt{h^2_{m-1} + \lambda^2} \tag{353}$$

Per essere le verticali equidistanti le sbarre I hanno una comune lunghezza λ.

β) **Bracci di leva delle tensioni.** — Si comincia dal determinare la distanza a_m del punto di incontro delle sbarre S_m ed I_m dal rispettivo estremo di sinistra della trave : dalla somiglianza dei triangoli **o a e**, **o b c** si ha

$$h_m : a_m + m\,\lambda = h_{m-1} : a_m + (m-1)\,\lambda$$

da cui

$$a_m = \frac{h_m - m\,(h_m - h_{m-1})}{h_m - h_{m-1}}\,\lambda \tag{354}$$

Per determinare le tensioni S_m, I_m, D_m delle sbarre **a b**, **e c**, **a c** si conduce il piano di sezione **m n**.

Rispetto alla tensione S_m della sbarra **a b** si prende come polo il punto **c** di incontro delle altre due sbarre cointersecate **a c** ed **e c** e quindi condotta da **c** la normale sulla **a b** questa rappresenta il braccio s_m e si ha $\lambda : \sigma_m = s_m : h_m$ laonde

$$s_m = \frac{h_m}{\sigma_m}\,\lambda \tag{355}$$

Per la tensione della sbarra orizzontale I_m si deve prendere per polo il punto **a**, e quindi il relativo braccio di leva i_m è la retta **a e**, cioè la verticale V_{m-1} per cui l'espressione generale di questo braccio è

$$i_m = h_{m-1} \tag{356}$$

eccezione fatta per la tensione I_1 il cui braccio è $i_1 = h_1$.

Riguardo alla tensione D_m della diagonale **ac** si prende per polo il punto d'incontro **o** delle altre due cointersecate **ab** ed **ec** e quindi il relativo braccio di leva d_m è la normale abbassata da **o** sul prolungamento di **ac**, cioè $d_m = \mathbf{oc}\ sen\,\phi_m$. Dal triangolo rettangolo **ace** si ricava $sen\,\phi_m = \frac{\mathbf{ae}}{\mathbf{ac}} = \frac{h_{m-1}}{\delta_m}$, sostituito il quale valore, risulta l'espressione generale del braccio di leva delle diagonali

$$d_m = (a_m + m\,\lambda)\,\frac{h_{m-1}}{\delta_m} = v_m\,\frac{h_{m-1}}{\delta_m} = \frac{h_m\,h_{m-1}}{(h_m - h_{m-1})\,\delta_m}\,\lambda \qquad (357)$$

Per determinare la tensione V_m della verticale **bc**, condotto il piano di sezione **m'n'** si deve prendere per polo il punto **o** di incontro delle altre due sbarre **ab** e **cd** cointersecate e quindi l'espressione del braccio di leva v_m è per la mezza trave di sinistra

$$v_m = a_m + m\,\lambda = \frac{h_m}{h_m - h_{m-1}}\,\lambda \qquad (358)$$

e per la mezza trave di destra

$$v_m = a_m + (\mathrm{N} - m)\,\lambda = \frac{h_m}{h_{m-1} - h_m}\,\lambda \qquad (358a)$$

269. Travi colle due nervature poligonali. — Si considerano travi coi contorni poligonali di forma qualunque, ma simmetrici e con verticali equidistanti, come rappresenta la Fig. 430.

α) **Lunghezza delle sbarre.** — Considerato lo scomparto m^{mo} le rispettive sbarre sono S_m, I_m, D_m, V_m.

L'altezza delle verticali V_m dipende dalla forma dei poligoni, che si determinerà in appresso, intanto si considerano queste altezze h_m come note.

La lunghezza σ_m delle sbarre S_m è comune anche alle sbarre I_m per la simmetria dei due poligoni ed è data dall'espressione

$$\sigma_m = \sqrt{\left(\frac{h_m - h_{m-1}}{2}\right)^2 + \lambda^2} \qquad (359)$$

mentre per la lunghezza δ_m delle diagonali D_m, dal triangolo **a'rb** si deduce l'altra espressione

$$\delta_m = \sqrt{\left(\frac{h_m + h_{m-1}}{2}\right)^2 + \lambda^2} \qquad (360)$$

β) **Bracci di leva delle tensioni.** — È facile scorgere che stante la simmetria dei due poligoni la distanza a_m del punto **o** d'intersezione delle due sbarre S_m ed I_m dall'estremo corrispondente di sinistra della trave, conserva l'espressione (354), cioè

$$a_m = \frac{h_m - m\,(h_m - h_{m-1})}{h_m - h_{m-1}}\,\lambda \qquad (361)$$

Condotta dal punto **b** una normale alla **aa'** (S_m) essa rappresenta il braccio s_m, per cui condotta per **a'** una orizzontale, dal confronto dei risultanti triangoli rettangoli simili si ha

$$s_m = \frac{h_m}{\sigma_m}\,\lambda \qquad (362)$$

con analogo procedimento si trova

$$i_m = \frac{h_{m-1}}{\sigma_m}\,\lambda \qquad (363)$$

Condotta dal polo **o** una normale alla diagonale D_m essa rappresenta il braccio d_m. La diagonale D_m taglia l'asse della trave nello scomparto m^{mo} in due segmenti λ'_m ed λ''_m fra i quali si hanno le relazioni

$$\lambda = \lambda'_m + \lambda''_m \quad , \quad \lambda'_m : \frac{h_{m-1}}{2} = \lambda''_m : \frac{h_m}{2}$$

dalle quali si deduce

$$\lambda'_m = \frac{h_{m-1}}{h_m + h_{m-1}}\,\lambda$$

Si ha inoltre la relazione

$$d_m : a_m + (m-1)\,\lambda + \lambda'_m = \frac{h_m + h_{m-1}}{2} : \delta_m$$

da cui

$$d_m = \left\{ a_m + (m-1)\,\lambda + \lambda'_m \right\} \frac{h_m + h_{m-1}}{2\,\delta_m}$$

e ponendo per a_m e λ'_m i loro valori e riducendo ritorna per d_m il valore dato dalla (357), cioè

$$d_m = \frac{h_m\,h_{m-1}}{(h_m - h_{m-1})\,\delta_m}\,\lambda \qquad (364)$$

Per la verticale V_m il piano di sezione è **m'n'** ed il polo si trova col punto **o'** intersezione delle rette **aa' bb'**. Chiamando a'_m la distanza del polo **o'** dall'estremo di sinistra della trave ed $h_o = h'_o + h''_o$ l'altezza della verticale passante per detto estremo, dall'ispezione della figura si scorge essere

$$h_m : a'_m + m\,\lambda = h_o : a'_m \quad \text{da cui} \quad \frac{a'_m\,h_m}{h_o} = (a'_m + m\,\lambda)$$

$$h'_o : a'_m = \frac{h_m - h_{m-1}}{2} : \lambda \quad \text{»} \quad h'_o = \frac{h_m - h_{m-1}}{2\,\lambda}\,a'_m$$

$$h''_o : a'_m = \frac{h_{m+1} - h_m}{2} : \lambda \quad \text{»} \quad h''_o = \frac{h_{m+1} - h_m}{2\,\lambda}\,a'_m$$

dal confronto delle quali si deduce

$$h_o = h'_o + h''_o = \frac{h_{m+1} - h_{m-1}}{2\,\lambda}\,a'_m$$

e quindi

$$a'_m + m\,\lambda = \frac{2\,\lambda\,h_m}{h_{m+1} - h_{m-1}}$$

e per essere $v_m = a'_m + m\,\lambda$ si deduce

$$v_m = 2\,\lambda\,\frac{h_m}{h_{m+1} - h_{m-1}} \qquad (365)$$

270. Rapporto delle altezze di due verticali successive. — Essendo N il numero degli scomparti, sia $N = 2\,n$ per un numero pari, ed $N = 2\,n - 1$ per un numero dispari.

L'altezza di una verticale qualunque si chiami h_m. Per un numero pari di scomparti, nella mezzaria della trave vi ha l'altezza h_n, Fig. 432; per un numero dispari di scomparti nella mezzaria della trave cade l'asse dello scomparto mediano, Fig. 433, e le verticali che lo conterminano, di indice $n-1$ ed n, hanno le altezze h_{n-1} ed h_n. Si consideri lo scomparto m^{mo}, in ognuna delle Fig. 432 e 433, conterminato dalle verticali h_{m-1} ed h_m e le cui sbarre delle nervature si incontrano ad una distanza a_m dall'estremo della trave. Essendo λ la lunghezza degli scomparti, dai triangoli ors, or's' si ha la relazione

$$\frac{h_m}{h_{m-1}} = \frac{a_m + m\lambda}{a_m + (m-1)\lambda} \qquad (366)$$

Travi paraboliche.

1. Procedimento numerico.

271. Forma della trave. — Posta la condizione che per carico totale della trave le diagonali abbiano ad essere senza tensione, si ha il vantaggio che il carico permanente, il quale carica costantemente tutta la trave, non influisce minimamente sulla tensione delle diagonali, le quali dunque vengono cimentate soltanto dal carico mobile parziale. Questa condizione è soddisfatta qualora per carico completo la tensione di una diagonale qualunque, per esempio la m^{ma}, è $D_m = 0$. Si determini il valore della tensione di questa diagonale per carico completo, col metodo dei momenti statici, e chiamando Q il carico totale per ogni nodo ed A la reazione totale dell'appoggio di sinistra (eguale a quella dell'appoggio di destra), Fig. 434, si ha

$$-A\,a_m + Q\{[a_m + \lambda] + [a_m + 2\lambda] + \cdots\cdots + [a_m + (m-1)\lambda]\} + D_m\,d_m = 0$$

e siccome deve essere $D_m = 0$, così questa condizione è soddisfatta ponendo

$$-A\,a_m + Q\{[a_m + \lambda] + [a_m + 2\lambda] + \cdots\cdots + [a_m + (m-1)\lambda]\} = 0$$

da cui

$$a_m \left\{ (m-1)\,Q - A \right\} + Q\,\frac{m\,(m-1)}{2}\,\lambda = 0 \qquad (I)$$

Conservando p e k il solito significato è $Q = (p+k)\,\lambda$, ed $A = {}^1/_2\,(N-1)\,(p+k)\,\lambda = {}^1/_2\,(N-1)\,Q$, trascurando di tener conto del carico che opera sui due nodi estremi, di valore ${}^1/_2\,Q$, inquantochè il suo momento è annullato da quello della reazione del piedritto che da esso è prodotta. Sostituendo questi valori nella (I) risulta

$$a_m = \frac{m\,(m-1)}{N+1-2\,m}\,\lambda \qquad (II)$$

che dà non più il valore generico di a_m, ma quello particolare che soddisfa alla posta condizione, sostituendo il quale nella (366) risulta

$$\frac{h_m}{h_{m-1}} = \frac{m\,(N-m)}{(m-1)\,(N+1-m)} \qquad (III)$$

Per un numero **pari** $N = 2\,n$ *di scomparti* la verticale di indice n è la mediana e volendo il rapporto $\frac{h_m}{h_n}$ basta porre nella (III) n in luogo di $(m-1)$ e risulta

$$\frac{h_m}{h_n} = \frac{m\,(N-m)}{n\,(N-n)}$$

la quale, posto $n = \frac{N}{2}$, diventa

$$h_m = \frac{4\,m\,(N-m)}{N^2}\,h_n \qquad (367)$$

Per un numero **dispari** $N = 2\,n-1$ *di scomparti* la verticale di indice $(n-1)$ precede la mezzaria e volendo il rapporto

$\frac{h_m}{h_{n-1}}$ basta porre nella (III) $(n-1)$ in luogo di $(m-1)$ e risulta

$$\frac{h_m}{h_{n-1}} = \frac{m\,(\mathrm{N}-m)}{(n-1)\left\{\mathrm{N}-(n-1)\right\}}$$

la quale, posto $n-1 = \frac{\mathrm{N}-1}{2}$, diventa

$$h_m = \frac{4\,m\,(\mathrm{N}-m)}{\mathrm{N}^2-1}\,h_{n-1} \qquad (368)$$

Mediante le (367) (368) si calcolano le altezze che devono avere le verticali, ossia servono a determinare la forma della trave in modo che sia soddisfatta la indicata condizione.

E siccome la lunghezza l della trave è $l = \mathrm{N}\,\lambda$, e la distanza x della verticale m^{ma} dall'estremo di sinistra della trave, preso come origine, è $x = m\,\lambda$, da cui $\mathrm{N} = \frac{l}{\lambda}$ ed $m = \frac{x}{\lambda}$, sostituendo questi valori nelle (367) (368) si ha

Per un numero pari *di scomparti*

$$h_m = \frac{4\,x\,(l-x)}{l^2}\,h_n \qquad (367a)$$

Per un numero dispari *di scomparti*

$$h_m = \frac{4\,x\,(l-x)}{l^2-\lambda^2}\,h_{n-1} \qquad (368a)$$

dalle quali si scorge che l'altezza delle verticali va variando come le ordinate di una parabola.

Derivando le (367*a*) e (368*a*) e ponendo $\frac{d\,h_m}{d\,x} = 0$ risulta:

$$l - 2\,x = 0$$

da cui

$$x = \frac{l}{2}$$

cioè l'ordinata massima della parabola corrisponde alla mezzaria quindi la trave ha la massima altezza nella mezzaria rispetto alla quale dunque è simmetrica. Detta h_{mas} l'altezza massima della trave, si prende a priori questa altezza compresa fra $^1/_6$ ed $^1/_8$ della luce con che è pienamente determinata, ossia h_{mas} diventa un dato del problema ed è facile stabilire le relazioni seguenti:

Per un numero pari *di scomparti* $h_n = h_{mas}$

» » dispari » $h_{n-1} = h_{mas}$

Assunte dunque le verticali di massima altezza, si ha mezzo di valutare le altezze delle altre verticali mediante le espressioni (367) (368) che si possono anche scrivere:

Per un numero pari $N = 2n$ *di scomparti*

$$h_m = \frac{4m(N-m)}{N^2} h_{mas} \qquad (367b)$$

Per un numero dispari $N = 2n - 1$ *di scomparti*

$$h_m = \frac{4m(N-m)}{N^2-1} h_{mas} \qquad (368b)$$

Si può fare la nervatura inferiore rettilinea, ed allora la superiore diventa una parabola e la trave si chiama **parabolica**, (Franc. *Poutre en bow-string;* Ted. *Bogensehnenträger*); oppure ambe le nervature sono due parabole simmetriche e la trave si dice **doppiamente parabolica** (Ted. *Fisch-oder Linsenträger*) e volendo si potrebbe fare la nervatura superiore rettilinea e la inferiore parabolica (Ted. *Fischbauchträger*), però *in pratica si usa soltanto la prima forma.*

Determinata allora l'altezza delle varie verticali colle (367), (368) la nervatura superiore è costituita da un poligono inscritto nella parabola rappresentata dall'equazione (367*a*) o (368*a*).

232. Calcolo delle tensioni. — Questo calcolo si eseguisce seguendo le norme già indicate ai §§ **74** a **76**, dopo d'aver valutati i carichi sui nodi.

Peso permanente. — Il peso proprio della costruzione per metro corrente di ponte si può calcolare colla

$$p = 25\, l + 600 \qquad (369)$$

Con un esempio si mette in chiaro tutto il procedimento da seguire.

Esempio.

Si assuma la portata della trave $l = 16$ metri con $N = 8$ scomparti di lunghezza $\lambda = 2$ metri. Essendo pari il numero degli scomparti, nel mezzo cade una verticale la cui altezza si prende $h_{mas} = {}^1/_8\, l = 2$. Mediante la (367*b*) si calcola l'altezza delle altre verticali ponendo successivamente $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$ e si ottiene $h_1 = h_7 = 0{,}875$; $h_2 = h_6 = 1{,}5$; $h_3 = h_5 = 1{,}875$, mentre è $h_4 = h_{mas} = 2$. La lunghezza δ_m di una diagonale qualunque è data dall'espressione (353) cioè

$$\delta_m = \sqrt{h^2_{m-1} + \lambda^2}$$

col mezzo della quale si trova

$$\delta_2 = \sqrt{h_1^2 + \lambda^2} = \sqrt{0{,}875^2 + 2^2} = 2{,}18$$

$$\delta_3 = 2{,}5 \quad , \quad \delta_4 = 2{,}74 \quad , \quad \delta_5 = 2{,}83 \quad , \quad \delta_6 = 2{,}74 \quad , \quad \delta_7 = 2{,}5$$

mentre la lunghezza delle sbarre della nervatura parabolica è data dalla (352), cioè

$$\sigma_m = \sqrt{(h_m - h_{m-1})^2 + \lambda^2}$$

applicando la quale si trova

$$\sigma_1 = \sigma_8 = \sqrt{(h_1 - 0)^2 + \lambda^2} = \sqrt{0{,}875^2 + 2^2} = 2{,}18$$

$$\sigma_2 = \sigma_7 = \sqrt{(h_2 - h_1)^2 + \lambda^2} = \sqrt{(1{,}5 - 0{,}875)^2 + 2^2} = 2{,}10$$

$$\sigma_3 = \sigma_6 = 2{,}03 \quad , \quad \sigma_4 = \sigma_5 = 2{,}005.$$

Nella **Fig. 435** si sono annotate le lunghezze di tutte le sbarre.

Il *carico accidentale* per metro corrente di trave, valendosi della tabella **L**,

è in cifra rotonda per il calcolo delle nervature $k = 2700$ chilogrammi, e per il calcolo del traliccio $k' = 3200$ chilogrammi. Il *carico permanente* per metro corrente di trave si desume dalla (369), cioè

$$p = \frac{1}{2}(25 \times 16 + 600) = 500 \text{ Kg.}$$

Sui nodi adunque opera un carico permanente

$$P = p\,\lambda = 500 \times 2 = 1000 \text{ Kg.}$$

ed un carico accidentale

$$K = k\,\lambda = 2700 \times 2 = 5400 \qquad \text{oppure} \qquad K' = k'\,\lambda = 3200 \times 2 = 6400$$

Si comincia dal determinare le distanze a_m del punto di incontro delle sbarre S_m col prolungamento della nervatura orizzontale dal relativo estremo della trave, e poscia i bracci di leva $v_m\ s_m\ d_m$ delle tensioni V_m, S_m, D_m.

NB. — *Nella numerazione progressiva degli indici si deve sempre contare cominciando dall'estremo di sinistra.*

Il valore delle distanze a_m è dato dalla (354) per la mezza trave di sinistra

$$a_1 = \frac{h_1 - (h_1 - 0)}{h_1 - 0}\lambda = 0$$

$$a_2 = \frac{h_2 - 2(h_2 - h_1)}{h_2 - h_1}\lambda = \frac{1{,}5 - 2(1{,}5 - 0{,}875)}{1{,}5 - 0{,}875}2 = 0{,}8$$

$$a_3 = \frac{h_3 - 3(h_3 - h_2)}{h_3 - h_2}\lambda = \frac{1{,}875 - 3(1{,}875 - 1{,}5)}{1{,}875 - 1{,}5}2 = 4$$

$$a_4 = \frac{h_4 - 4(h_4 - h_3)}{h_4 - h_3}\lambda = \frac{2 - 4(2 - 1{,}875)}{2 - 1{,}875}2 = 24$$

per la mezza trave di destra, si deduce speditamente in causa della simmetria

$$a_5 = a_4 = 24 \quad , \quad a_6 = a_3 = 4$$
$$a_7 = a_2 = 0{,}8 \quad , \quad a_8 = a_1 = 0$$

Col mezzo della (355), cioè $s_m = \frac{h_m}{\sigma_m}\lambda$, si trovano i bracci s_m

$$s_1 = \frac{0{,}875}{2{,}18}2 = 0{,}8 \quad , \quad s_2 = \frac{1{,}5}{2{,}1}2 = 1{,}4317$$

$$s_3 = \frac{1{,}875}{2{,}03}2 = 1{,}8429 \quad , \quad s_4 = \frac{2{,}00}{2{,}005}2 = 1{,}996 \quad , \quad s_5 = \frac{1{,}875}{2{,}005}2 = 1{,}87$$

$$s_6 = \frac{1{,}5}{2{,}03}2 = 1{,}4744 \quad , \quad S_7 = \frac{0{,}875}{2{,}10}2 = 0{,}8353$$

Per il braccio di leva della tensione S_8 non serve più la (355) perchè $h_8 = 0$, però è facile scorgere che è $s_8 = s_1 = 0{,}8$.

La (356) serve per il calcolo dei bracci i_m avvertendo che $i_1 = h_1$ e quindi

$$i_1 = h_1 = 0{,}875 \quad , \quad i_2 = h_1 = 0{,}875 \quad , \quad i_3 = h_2 = 1{,}5 \quad , \quad i_4 = h_3 = 1{,}875$$
$$i_5 = h_4 = 2 \quad , \quad i_6 = h_5 = 1{,}875 \quad , \quad i_7 = h_6 = 1{,}5 \quad , \quad i_8 = h_7 = 0{,}875$$

I bracci v_m si calcolano colla (358) per la mezza trave di sinistra

$$v_1 = a_1 + \lambda = 0 + 2 = 2 \quad , \quad v_2 = a_2 + 2\lambda = 0{,}8 + 2 \times 2 = 4{,}8$$
$$v_3 = a_3 + 3\lambda = 4 + 3 \times 2 = 10 \quad , \quad v_4 = a_4 + 4\lambda = 24 + 4 \times 2 = 32$$

e colla (358a) per la mezza trave di destra

$$v_5 = a_5 + (8 - 5)\lambda = 24 + 3 \times 2 = 30$$
$$v_6 = a_6 + (8 - 6)\lambda = 4 + 2 \times 2 = 8$$
$$v_7 = a_7 + (8 - 7)\lambda = 0{,}8 + 2 = 2{,}8$$

I bracci d_m sono dati dalla (357) cioè $d_m = v_m \dfrac{h_{m-1}}{\delta_m}$

$$d_2 = 4{,}8 \frac{0{,}875}{2{,}18} = 1{,}927 \quad , \quad d_3 = 10 \frac{1{,}5}{2{,}5} = 6 \quad , \quad d_4 = 32 \frac{1{,}875}{2{,}74} = 21{,}89$$

$$d_5 = 30 \frac{2}{2{,}83} = 21{,}2 \quad , \quad d_6 = 8 \frac{1{,}875}{2{,}74} = 5{,}475 \quad , \quad d_7 = 2{,}8 \frac{1{,}5}{2{,}5} = 1{,}68$$

Nella **Fig. 436** si sono annotati tutti i bracci di leva.

NERVATURE. — Al § **75** si è veduto che le nervature sono cimentate nel massimo modo per carico completo, nel qual caso ogni nodo porta un carico totale $Q = P + K = 1000 + 5400 = 6400$. (*È inutile considerare il carico sui nodi estremi, che avrebbe per valore* $^1/_2$ *Q, inquantochè il suo momento è annullato da quello della reazione da esso prodotta*). Le reazioni totali degli appoggi hanno per valore

$$A = B = \frac{1}{2}(N - 1)\,Q = \frac{1}{2}(8 - 1)\,6400 = 22400 \text{ Kg.}$$

Per avere le tensioni delle sbarre S ed I, condotto il piano di sezione, si considera la parte di trave che sta a sinistra dello stesso. È opportuno di riassumere i valori dei bracci di leva, onde averli pronti sott'occhio, i quali sono

$$s_1 = 0{,}8 \quad , \quad s_2 = 1{,}4317 \quad , \quad s_3 = 1{,}8429 \quad , \quad s_4 = 1{,}996$$
$$s_5 = 1{,}87 \quad , \quad s_6 = 1{,}4744 \quad , \quad s_7 = 0{,}8353 \quad , \quad s_8 = 0{,}8$$

$$i_1 = 0{,}875 \quad , \quad i_2 = 0{,}875 \quad , \quad i_3 = 1{,}50 \quad , \quad i_4 = 1{,}875$$
$$i_5 = 2 \quad , \quad i_6 = 1{,}875 \quad , \quad i_7 = 1{,}50 \quad , \quad i_8 = 0{,}875.$$

Per le tensioni S_1 ed I_1, presi rispettivamente per poli i punti **a** e **b**, Fig. 438, si ha

$$S_1 \times 0{,}8 + 22400 \times 2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad S_1 = -56000$$
$$-I_1 \times 0{,}875 + 22400 \times 2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad I_1 = +51200$$

Per le tensioni S_2 ed I_2, presi rispettivamente per poli i punti **c** e **b**, si ha

$$S_2 \times 1{,}4317 + 22400 \times 4 - 6400 \times 2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad S_2 = -53630$$
$$-I_2 \times 0{,}875 + 22400 \times 2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad I_2 = +51200$$

Operando analogamente per le altre sbarre si trova

$$S_3 \times 1{,}8429 + 22400 \times 6 - 6400\,(2+4) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad S_3 = -52090$$
$$-I_3 \times 1{,}50 + 22400 \times 4 - 6400 \times 2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad I_3 = +51200$$

$$S_4 \times 1{,}996 + 22400 \times 8 - 6400\,(2+4+6) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad S_4 = -51300$$
$$-I_4 \times 1{,}875 + 22400 \times 6 - 6400\,(2+4) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad I_4 = +51200$$

$$S_5 \times 1{,}87 + 22400 \times 10 - 6400\,(2+4+6+8) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad S_5 = -51300$$
$$-I_5 \times 2 + 22400 \times 8 - 6400\,(2+4+6) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad I_5 = +51200$$

$$S_6 \times 1{,}4744 + 22400 \times 12 - 6400\,(2+4+6+8+10) = 0 \quad . \quad . \quad S_6 = -52090$$
$$-I_6 \times 1{,}875 + 22400 \times 10 - 6400\,(2+4+6+8) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad I_6 = +51200$$

$$S_7 \times 0{,}8353 + 22400 \times 14 - 6400\,(2+4+6+8+10+12) = 0 \quad S_7 = -53630$$
$$-I_7 \times 1{,}5 + 22400 \times 12 - 6400\,(2+4+6+8+10) = 0 \quad . \quad . \quad I_7 = +51200$$

Per le tensioni S_8 ed I_8 bisogna prendere rispettivamente come poli il piede ed il capo della verticale V_7, e si ha

$$S_8 \times 0{,}80 + 22400 \times 14 - 6400\,(2+4+6+8+10+12) = 0 \quad . \quad S_8 = -56000$$
$$-I_8 \times 0{,}875 + 22400 \times 14 - 6400\,(2+4+6+8+10+12) = 0 \quad . \quad I_8 = +51200$$

Vedesi che le sbarre della nervatura inferiore hanno tutte la medesima tensione, per cui questa nervatura opera come un tirante, locchè risulta anche dalla considerazione che nelle travi paraboliche la componente orizzontale della tensione delle nervature è costante.

Traliccio. — Le sbarre diagonali e verticali che formano il traliccio sono cimentate nel massimo modo per carico parziale, ed a seconda della posizione del carico mobile si ha la tensione (*mas*) o (*min*), per avere le quali bisogna considerare carichi soltanto quei nodi che si trovano da una sola parte del rispettivo piano di sezione, come mostrano le **Fig. 439**, per la diagonale D_3 e per la verticale V_3.

Diagonali. — Queste sbarre non sono influenzate dal carico permanente perchè esso carica costantemente tutti i nodi, e quindi basta tener conto del solo carico mobile. Per le diagonali si prende per polo il punto di incontro

delle sbarre S ed I cointersecate, che sta ad una distanza a_m dall'appoggio di sinistra per la mezza trave di sinistra, e dall'appoggio di destra per la mezza trave di destra. Per le diagonali appartenenti alla mezza trave di sinistra si considera la porzione di trave che sta a sinistra del piano di sezione, e per quelle che appartengono alla mezza trave di destra si considera la porzione di trave che sta a destra del piano di sezione. Per le prime occorre conoscere la rispettiva reazione dell'appoggio di sinistra $A_{k'}$ e per le altre quella dell'appoggio di destra $B_{k'}$. Queste reazioni, colla scorta della **Fig. 440**, sono valutate nella seguente tabella per le varie diagonali tanto per la posizione del carico mobile che dà la tensione (*mas*) quanto per quella che dà la tensione (*min*). I numeri della tabella dai quali si deduce il fattore variabile, indicano quante ottave parti dei carichi K′ applicati ai varî nodi si scaricano sul considerato appoggio, (essendo otto il numero degli scomparti).

Reazioni $A_{k'}$ e $B_{k'}$ per le tensioni (*mas*) delle **diagonali**.				Reazioni $A_{k'}$ e $B_{k'}$ per le tensioni (*min*) delle **diagonali**.			
Diagonali	Fatt. cost.	Fattore variabile	Prodotto	Diagonali	Fatt. cost.	Fattore variabile	Prodotto
2	$\frac{1}{8}K' = \frac{1}{8}6400 = 800$	6+5+4+3+2+1=21	$A_{k'}=16800$	2	$\frac{1}{8}K' = \frac{1}{8}6400 = 800$	7	$A_{k'} = 5600$
3		5+4+3+2+1=15	» 12000	3		7+6=13	» 10400
4		4+3+2+1=10	» 8000	4		7+6+5=18	» 14400
5		5+6+7=18	$B_{k'}=14400$	5		1+2+3+4=10	$B_k = 8000$
6		6+7=13	» 10400	6		1+2+3+4+5=15	» 12000
7		7=7	» 5600	7		1+2+3+4+5+6=21	» 16800

Le distanze a_m dei punti di incontro delle S_m ed I_m cointersecate colla diagonale D_m, sono:

$$a_2 = 0{,}8 \ , \ a_3 = 4 \ , \ a_4 = 24 \ , \ a_5 = 24 \ , \ a_6 = 4 \ , \ a_7 = 0{,}8$$

ed i bracci di leva delle diagonali, sono:

$$d_2 = 4{,}8 \ , \ d_3 = 6 \ , \ d_4 = 21{,}89 \ , \ d_5 = 21{,}2 \ , \ d_6 = 5{,}475 \ , \ d_7 = 1{,}68.$$

Per determinare le tensioni della diagonale D_2 si deve prendere per polo il punto **o** di incontro delle sbarre cointersecate S_2 ed l_2, la cui distanza dall'appoggio di sinistra è $a_2 = 0{,}8$. Dalla ispezione delle **Fig. 441** è facile dedurre le equazioni dei momenti statici per il calcolo delle tensioni $D_{2(mas)}$ e $D_{2(min)}$ e si ha:

$$D_{2(mas)} \times 1{,}927 - 16800 \times 0{,}8 = 0 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad D_{2(mas)} = +7000$$
$$D_{2(min)} \times 1{,}927 - 5600 \times 0{,}8 + 6400\,(2 + 0{,}8) = 0 \ . \ . \ . \ . \quad D_{2(min)} = -7000$$

Analogamente operando per le altre diagonali si trova

$$D_{3(mas)} \times 6 - 12000 \times 4 = 0 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad D_{3(mas)} = +8000$$
$$D_{3(min)} \times 6 - 10400 \times 4 + 6400 \left\{ 2 + 4 + (2 \times 4) \right\} = 0 \ . \ . \ . \quad D_{3(min)} = -8000$$

$D_{4(mas)} \times 21{,}89 - 8000 \times 24 = 0 \ldots D_{4(mas)} = +8771$
$D_{4(min)} \times 21{,}89 - 14400 \times 24 + 6400 \{2+4+6+(3\times 24)\} = 0 \quad D_{4(min)} = -8771$

$D_{5(mas)} \times 21{,}2 + 14400 \times 24 - 6400 \{2+4+6+(3\times 24)\} = 0 \quad D_{5(mas)} = +9057$
$D_{5(min)} \times 21{,}2 + 8000 \times 24 = 0 \ldots D_{5(min)} = -9057$

$D_{6(mas)} \times 5{,}475 + 10400 \times 4 - 6400 \{2+4+(2\times 4)\} = 0 \ldots D_{6(mas)} = +8771$
$D_{6(min)} \times 5{,}475 + 12000 \times 4 = 0 \ldots D_{6(min)} = -8771$

$D_{7(mas)} \times 1{,}68 + 5600 \times 0{,}8 - 6400\,(2+0{,}8) = 0 \ldots D_{7(mas)} = +8000$
$D_{7(min)} \times 1{,}68 + 16800 \times 0{,}8 = 0 \ldots D_{7(min)} = -8000$

Verticali. — Le verticali sono influenzate tanto dal carico permanente che dall'accidentale. Il primo produce sugli appoggi le reazioni costanti

$$A_p = B_p = \frac{1}{2}(N-1)\,P = \frac{1}{2}(8-1)\,1000 = 3500 \text{ Kg.}$$

Nella **Fig. 442** sono messe in evidenza le posizioni del carico mobile che dànno le tensioni (*mas*) e (*min*) per ogni verticale, colla scorta della quale figura si sono calcolate nella seguente tabella le reazioni $A_{k'}$ dell'appoggio di sinistra per le verticali appartenenti alla mezza trave di sinistra, e le reazioni $B_{k'}$ dell'appoggio di destra per le verticali appartenenti alla mezza trave di destra.

Reazioni $A_{k'}$ e $B_{k'}$ per le tensioni (*mas*) delle **verticali**				Reazioni $A_{k'}$ e $B_{k'}$ per le tensioni (*min*) delle **verticali**			
Verticali	Fatt. cost.	Fattore variabile	Prodotto	Verticali	Fatt. cost.	Fattore variabile	Prodotto
1	$\frac{1}{8}K' = \frac{1}{8}6400 = 800$	7	$A_{k'} = 5600$	1	$\frac{1}{8}K' = \frac{1}{8}6400 = 800$	6+5+4+3+2+1=21	$A_{k'} = 16800$
2		7+6=13	» 10400	2		5+4+3+2+1=15	» 12000
3		7+6+5=18	» 14400	3		4+3+2+1=10	» 8000
4		7+6+5+4=22	» 17600	4		3+2+1= 6	» 4800
5		1+2+3+4+5=15	$B_{k'} = 12000$	5		6+7=13	$B_{k'} = 10400$
6		1+2+3+4+5+6=21	» 16800	6		7= 7	» 5600
7		1+2+3+4+5+6+7=28	» 22400	7		0	» 0

Si riassumono per comodo di calcolo i valori delle distanze a_m e dei bracci v_m, cioè

$a_1 = 0$, $a_2 = 0{,}8$, $a_3 = 4$, $a_4 = 24$, $a_5 = 24$, $a_6 = 4$, $a_7 = 0{,}8$
$v_1 = 2$, $v_2 = 4{,}8$, $v_3 = 10$, $v_4 = 32$, $v_5 = 30$, $v_6 = 8$, $v_7 = 2{,}8$

Dall'ispezione delle **Fig. 443, 444**, si vede che per la verticale V_1 il polo è il nodo estremo di sinistra, cioè il polo dista da esso nodo di $a_1 = 0$,

mentre per la verticale V_2 il polo è il punto o che dista da detto estremo di $a_2 = 0{,}8$, è facile quindi dedurre le equazioni dei momenti statici per il calcolo delle tensioni delle verticali V_1 e V_2, cioè

$$-V_{1(mas)} \times 2 - (3500)\,0 + (1000+6400)\,2 = 0 \quad V_{1(mas)} = +7400$$
$$-V_{1(min)} \times 2 - (3500+16800)\,0 + 1000 \times 2 = 0 \quad V_{1(min)} = +1000$$

$$-V_{2(mas)} \times 4{,}8 - (3500+10400)\,0{,}8 + (1000+6400)\{2+4+(2\times 0{,}8)\} = 0 \quad V_{2(mas)} = +9400$$
$$-V_{2(min)} \times 4{,}8 - (3500+12000)\,0{,}8 + 1000\{2+4+(2\times 0{,}8)\} = 0 \quad V_{2(min)} = -1000$$

Operando analogamente per le altre verticali si trova

$$-V_{3(mas)} \times 10 - (3500+14400)\,4 + (1000+6400)\{2+4+6+(3\times 4)\} = 0 \quad V_{3(mas)} = +10600$$
$$-V_{3(min)} \times 10 - (3500+8000)\,4 + 1000\{2+4+6+(3\times 4)\} = 0 \quad V_{3(min)} = -2200$$

$$-V_{4(mas)} \times 32 - (3500+17600)\,24 + (1000+6400)\{2+4+6+8+(4\times 24)\} = 0 \quad V_{4(mas)} = +11000$$
$$-V_{4(min)} \times 32 - (3550+4800)\,24 + 1000\{2+4+6+8+(4\times 24)\} = 0 \quad V_{4(min)} = -2600$$

Per le verticali susseguenti il polo si trova alla destra.

$$-V_{5(mas)} \times 30 + (3500+12000)\,24 - 1000\{4+2+(2\times 24)\} = 0 \quad V_{5(mas)} = +10600$$
$$-V_{5(min)} \times 30 + (3500+10400)\,24 - (1000+6400)\{4+2+(2\times 24)\} = 0 \quad V_{5(min)} = -2200$$

$$-V_{6(mas)} \times 8 + (3500+16800)\,4 - 1000\,(2+4) = 0 \quad V_{6(mas)} = +9400$$
$$-V_{6(min)} \times 8 + (3500+5600)\,4 - (1000+6400)\,(2+4) = 0 \quad V_{6(min)} = -1000$$

$$-V_{7(mas)} \times 2{,}8 + (3500+22400)\,0{,}8 = 0 \quad V_{7(mas)} = +7400$$
$$-V_{7(min)} \times 2{,}8 + (3500+0)\,0{,}8 = 0 \quad V_{7(min)} = +1000$$

Nella **Fig. 445***a* sono segnate le calcolate tensioni. Se si immagina ora una trave con le diagonali disposte in senso contrario, è facile vedere che le tensioni di queste diagonali sono quelle stesse del caso precedente, ma invertite, inquantochè è lo stesso di supporre la trave precedente disposta in senso contrario, **Fig. 445***b*. Costruendo la trave nell'uno o nell'altro dei modi indicati dalle **Fig. 445***a b*, le diagonali, mentre sarebbero cimentate alla trazione per il movimento del carico mobile in un senso, sarebbero invece cimentate alla compressione per il movimento in senso contrario. Ma sia per la forma dissimetrica, sia per la continua alternativa di questi sforzi di natura opposta a cui sarebbero soggette le diagonali, in pratica non si accettano tali forme, e di solito si fanno le travi con ambe le diagonali per ogni scomparto, **Fig. 445***c*, e si costruiscono in modo che esse sieno incapaci di resistere a sforzi di compressione, ciò che si consegue formandole con ferri piatti. Vedesi allora che per il movimento del carico mobile da sinistra a destra sono cimentate alla trazione le diagonali che si innalzano da sinistra a destra, mentre le diagonali dirette in senso contrario sono cimentate alla compressione, ma non essendo esse capaci di resistervi per avere la forma

di ferro piatto, si trovano nelle condizioni di un filo allentato senza tensione, e quindi rimangono inattive. Viceversa per il movimento del carico mobile da destra a sinistra, sono soggette a sforzi di trazione le diagonali che si innalzano da destra a sinistra, mentre quelle dirette in senso contrario sono compresse, ma per essere ferri piatti rimangono inerti. Con questa forma di trave adunque ambe le diagonali di ogni scomparto non entrano in azione concomitantemente, ma soltanto quella che per una data posizione del carico mobile viene cimentata alla trazione. Basta adunque tener conto delle sole tensioni (*mas*) delle diagonali. Dal momento che le diagonali non possono ricevere sforzi di compressione a carico parziale, ne risulta che le verticali non possono ricevere sforzi di trazione a carico parziale. Sono invece stirate a carico completo, quando cioè le diagonali rimangono tutte inerti, mentre le verticali devono trasmettere superiormente il carico che agisce al loro piede. E siccome sono allora tutte egualmente caricate patiscono tutte un egual sforzo di trazione di valore $Q' = 7400$ chilogrammi che rappresenta la tensione (*mas*). In quanto alla tensione (*min*) essa ha luogo per carico parziale quando sono stirate le diagonali, ed ha il valore sopra trovato. Sebbene lo sforzo di maggior valore assoluto sia quello di trazione, pure si fanno con ferri rigidi, onde metterle in condizione di resistere tanto allo sforzo di trazione quanto a quello minore di compressione che tenderebbe ad infletterle. Colla scorta dei due diagrammi, **Fig. 445***a b*, è dunque facile stabilire le tensioni di tale trave, come si vede nella **Fig. 445***c*.

2. Formule generali.

273. Numero pari di scomparti. — Si consideri lo scomparto m^{mo} della trave rappresentata nella **Fig. 431** al quale appartengono le sbarre S_m, I_m, D_m, V_m.

α) **Nervature.** — Le tensioni delle nervature risultano massime per carico mobile completo, nel qual caso ogni nodo intermedio porta un carico totale $Q = P + K$ e gli estremi un carico totale $^1/_2\,Q$, e quindi la reazione dell'appoggio A è costante.

Considerata la sbarra S_m della nervatura superiore (poligonale), la relativa tensione è data dalla (103), cioè

$$S_m = -\frac{Q\lambda}{2}\,\frac{m\,(N-m)}{s_m} \qquad (I)$$

Ponendo nel valore (355) del braccio di leva s_m il valore (367*b*) dell'altezza h_m, si ha

$$s_m = \frac{4\,m\,(N-m)\,\lambda}{N^2\,\sigma_m}\,h_{mas}$$

sostituito il quale valore nell'equazione (I) si trova

$$S_m = -\frac{Q\,N^2}{8\,h_{mas}}\,\sigma_m \qquad (370)$$

ed essendo il coefficiente di σ_m costante e negativo ne risulta che *le tensioni nelle sbarre della nervatura poligonale sono proporzionali alla loro lunghezza e sono sempre sforzi di compressione.*

Considerata la sbarra I_m della nervatura inferiore (rettilinea), la relativa tensione è data dalla (104), cioè

$$I_m = \frac{Q\,\lambda}{2}\,\frac{(m-1)\,(N-m+1)}{i_m} \qquad (II)$$

Se nel valore (356) del braccio di leva i_m si pone quello dell'altezza h_{m-1} deducendola dalla (367*b*) col porre $(m-1)$ in luogo di m, ottiensi

$$i_m = \frac{4\,(m-1)\,(N+1-m)}{N^2}\,h_{mas}$$

introdotto il qual valore nella (II) si trova

$$I_m = \frac{Q\,N^2}{8\,h_{mas}}\,\lambda \qquad (371)$$

la quale dà per I_m un valore costante e positivo; ciò equivale a dire che *le tensioni delle sbarre della nervatura inferiore sono sforzi di trazione tutti eguali* e quindi questa nervatura funziona come tirante e serve ad impedire la spinta laterale dell'arco sui piedritti, i quali non ricevono che pressioni verticali. Siccome poi λ rappresenta la lunghezza comune a tutte le dette sbarre, ed il fattore di λ è quello stesso di σ_m nella (370) ne viene che anche *le sbarre della nervatura inferiore hanno le loro tensioni proporzionali alla rispettiva lunghezza.*

β) **Traliccio.** — Siccome il carico accidentale produce gli sforzi massimi nelle varie sbarre in differenti posizioni, è facile scorgere che la reazione totale $A_m = A_p + A_k$ dell'appoggio è variabile.

1) **Sbarre diagonali.** — Il peso permanente, caricando uniformemente tutti i nodi, non ha alcuna influenza sul valore della tensione delle diagonali, inquantochè *le travi paraboliche soddisfano appunto alla condizione che per carico completo le diagonali rimangono senza tensione*, e quindi si omette di tener conto del carico permanente per cui diventa $A_p = 0$, ed i nodi caricati portano un carico K'. Per ogni diagonale si avranno due valori della tensione dipendenti dal carico mobile, e cioè la tensione (*mas*) positiva, ossia uno sforzo di trazione, e la tensione (*min*) negativa, ossia uno sforzo di compressione. E poichè per carico completo le diagonali non ricevono tensione, considerando le due posizioni del carico mobile che dànno la tensione (*mas*) e la tensione (*min*), **Fig. 446**, si stabilisce facilmente che dev'essere soddisfatta la condizione

$$\text{Tensione } (mas) + \text{Tensione } (min) = 0$$

da cui:

$$\text{Tensione } (mas) = -\text{ Tensione } (min) \ldots\ldots \quad (372)$$

cioè le due tensioni (*mas*) e (*min*) sono eguali e di segno contrario. Basta dunque calcolarne una sola, e precisamente quella che si ricava in modo più spedito.

Diagonali principali D (*che s'innalzano a sinistra*). — Per queste diagonali si calcola la tensione (*mas*). Prendendo in considerazione la diagonale qualunque D_m, appartenente all' m^{mo} scomparto, **Fig. 447***a*, la relativa tensione è fornita dalla (105) cioè

$$D_{m(mas)} = \left[\frac{P}{2} \left\{ (N + 1 - 2m)\, a_m - \lambda\, m\, (m-1) \right\} + \right.$$
$$\left. + \frac{K'}{2} \frac{(N-m)(N-m+1)}{N} a_m \right] \frac{1}{d_m} \qquad (III)$$

Se ora nella (357) che dà il valore del braccio di leva d_m, si pone per a_m ed h_{m-1} i rispettivi valori dati dalle (354) e (367*b*) si ottiene

$$d_m = \frac{4\, m\, \lambda\, (N-m)\, (m-1)\, (N-m+1)}{(N+1-2m)\, N^2\, \delta_m}\, h_{mas}$$

sostituendo il qual valore nonchè quello di a_m nella (III) diventa

$$D_{m(mas)} = \frac{K'(N-m)(N-m+1)\,m(m-1)\lambda(N+1-2m)N^2}{8N(N+1-2m)m\lambda(N-m)(m-1)(N-m+1)h_{mas}}\delta_m \quad (IV)$$

e riducendo

$$D_{m(mas)} = \frac{K'N}{8h_{mas}}\delta_m \quad (373)$$

e per la (372)

$$D_{m(min)} = -D_{m(mas)} = -\frac{K'N}{8h_{mas}}\delta_m$$

e siccome il coefficiente di δ_m è costante, ne viene che *le tensioni delle diagonali* D *sono proporzionali alla loro lunghezza.*

Siccome poi in pratica si costruiscono le travi in modo che le diagonali non abbiano ad essere cimentate altro che da sforzi di trazione, ne viene che basta tener conto soltanto della tensione (*mas*) data dalla (373).

Osservazione. — Il valore della tensione $D_{m(mas)}$ dato dalla (373) corrisponde a quello dato dallo SCHWEDLER nella *Zeitschrift für Bauwesen* di Berlino nel 1861. Difatti, conservando le antecedenti denominazioni, la formula di SCHWEDLER si scrive nel modo seguente;

$$D_{m(mas)} = \frac{K'l}{8f\lambda}\delta_m \quad (V)$$

nella quale l ed f indicano rispettivamente la corda e la freccia della nervatura parabolica. Per un numero pari di scomparti è $l = N\lambda$, $f = h_{mas}$ sostituendo i quali valori nella (V) ritorna

$$D_{m(mas)} = \frac{K'N}{8h_{mas}}\delta_m$$

Chiamando r il rapporto fra la freccia e la corda si ha $\frac{l}{f} = \frac{1}{r}$ e ricordando che $K' = k'\lambda$, fatte le sostituzioni nella (V) si trova

$$D_{m(mas)} = \frac{k'}{8r}\delta_m \quad (374)$$

e se si prende il rapporto $r = 1/8$ come si usa molte volte nella pratica, allora si ha la semplicissima espressione

$$D_{m(mas)} = k'\delta_m \quad (374a)$$

Controdiagonali C (*che si innalzano a destra*). — Se si considera il sistema di traliccio con diagonali innalzantesi verso destra (inverso cioè del precedente) queste diagonali in relazione alle precedenti rappresentano anche le controdiagonali del sistema composto e si indicano con C. E siccome il sistema colle diagonali innalzantesi a destra non è altro che il precedente colle diagonali innalzantesi a sinistra, ma girato di posizione, ne viene che anche la tensione delle controdiagonali è proporzionale alla loro lunghezza, che si chiama γ, la quale dunque moltiplicata per il già determinato coefficiente $\frac{K' N}{8 h_{mas}}$ dà la loro tensione.

Considerando la controdiagonale C_m, appartenente allo scomparto m^{mo}, si vede che la relativa tensione dà un momento negativo, mentre la tensione della corrispondente diagonale D_m dà un momento positivo, e siccome il piano di sezione ed il polo sono gli stessi per ambo le diagonali incrociate, Fig. 447*a b*, ne viene che la stessa posizione del carico mobile che produce la tensione (*mas*) nella diagonale D_m, origina invece la tensione (*min*) nella controdiagonale C_m.

Siccome poi la lunghezza d'una controdiagonale è uguale a quella della diagonale del campo successivo, cioè $\gamma_m = \delta_{m+1}$, è facile stabilire la seguente relazione:

$$C_m = D_{m+1} \qquad (375)$$

cioè calcolate le tensioni delle diagonali se ne deducono speditamente quelle delle controdiagonali mediante la (375).

2) **Verticali.** — Siccome le diagonali non possono ricevere sforzi di compressione, è facile scorgere dall'ispezione di uno dei nodi inferiori, Fig. 448*a b*, (che sono quelli che portano direttamente il carico) che una verticale non può essere stirata se non dal carico che agisce sul corrispondente nodo inferiore. E poichè per carico completo le diagonali rimangono inerti, mentre le verticali devono trasmettere il carico alla nervatura superiore, questo modo di cimento è il più sfavorevole riguardo alla tensione (*mas*) delle verticali, le quali vengono tutte stirate con uno sforzo massimo eguale al peso che insiste sui rispettivi nodi, e cioè

$$V_{m(mas)} = P + K' = Q' \qquad (376)$$

La tensione (*min*) per queste sbarre la si calcola nel modo seguente. Considerata la verticale qualunque V_m, che contermina lo scomparto m^{mo}, **Fig. 449**, la (108) porge per questa sbarra

$$V_{m(min)} = \left[\frac{P}{2} \left\{ \lambda\, m\,(m+1) - (N-1-2\,m)\, a'_m \right\} - \frac{K'}{2} \frac{(N-m)\,(N-m-1)}{N}\, a'_m \right] \frac{1}{v_m} \qquad (VI)$$

Ponendo nell'espressione (358) del braccio di leva v_m il valore di a_m dato dalla (354) risulta

$$v_m = \frac{m\,\lambda\,(N-m)}{N+1-2\,m}$$

e finalmente sostituendo questo valore nella (VI) e riducendo si trova

$$V_{m(min)} = P - K' \frac{(m-1)\,(N-1-m)}{2\,N} \qquad (377)$$

274. Numero dispari di scomparti. — Per un numero dispari di scomparti le altezze delle verticali h_m ed h_{m-1} sono date dalla (368*b*) e quindi bisogna sostituire questi valori nelle espressioni (355) (356) (357) dei bracci di leva s_m, i_m, d_m, e si ottiene

$$s_m = \frac{4\,m\,(N-m)\,\lambda}{(N^2-1)\,\sigma_m}\, h_{mas} \qquad (I)$$

$$i_m = \frac{4\,(m-1)\,(N-m+1)}{N^2-1}\, h_{mas} \qquad (II)$$

$$d_m = \frac{4\,m\,\lambda\,(N-m)\,(m-1)\,(N-m+1)}{(N+1-2\,m)\,(N^2-1)\,\delta_m}\, h_{mas} \qquad (III)$$

e siccome nessun'altra differenza passa fra queste travi e quelle con un numero pari di scomparti, basta sostituire i valori dei

bracci di leva dati dalle (I) (II) (III) rispettivamente nelle (I) (II) (III) del § **273** e si trova

$$S_m = -\frac{Q\,(N^2-1)}{8\,h_{mas}}\,\sigma_m \qquad (370a)$$

$$I_m = \frac{Q\,(N^2-1)}{8\,h_{mas}}\,\lambda \qquad (371a)$$

$$D_{m(mas)} = \frac{K'\,(N^2-1)}{8\,N\,h_{mas}}\,\delta_m \qquad (373a)$$

$$C_{m(mas)} = -\,D_{(m+1)\,(min)} \qquad (375a)$$

esaminando le quali espressioni si vede che anche in questo caso *le tensioni delle sbarre di contorno superiori ed inferiori e delle diagonali sono proporzionali alla loro lunghezza.*

Per la tensione (*mas*) delle verticali vale ancora l'osservazione fatta in 2), § **273**, e quindi si calcola colla (376).

Siccome poi l'espressione che dà il braccio di leva v_m non contiene l'altezza h_m od h_{m-1}, è facile stabilire che essa vale per un qualunque numero di scomparti e quindi la tensione (*min*) delle verticali si calcola ancora colla (377).

Osservazione. — Per un numero dispari di scomparti l'altezza massima h_{mas} della trave è minore della freccia della corrispondente parabola, e precisamente si ha

$$f = \frac{l^2\,h_{mas}}{l^2 - \lambda^2}$$

introducendo il qual valore nella formula di SCHWEDLER (V) del § **273**, e riducendo risulta

$$D_{m(mas)} = \frac{K'\,(l^2-\lambda^2)}{8\,l\,\lambda\,h_{mas}}\,\delta_m$$

ed essendo $l = N\,\lambda$, fatta la sostituzione ritorna

$$D_{m(mas)} = \frac{K'\,(N^2-1)}{8\,N\,h_{mas}}\,\delta_m$$

dal che si scorge che la (V) del § **273**, la (374) e la (374*a*) servono per un qualunque numero di scomparti.

Esempio.

Si supponga un ponte per ferrovia ad un binario colla portata fra i centri d'appoggio delle travi di metri 32,00. Ogni trave principale sia divisa in un numero pari di scomparti $N = 10$, e quindi l'ampiezza di ogni scomparto è

$$\lambda = \frac{32}{10} = 3{,}20 \text{ m.}$$

Si prenda il rapporto $r = {}^1/_8$, cioè $f = {}^1/_8\, l$, e quindi l'altezza massima della trave, essendo in questo caso $h_{mas} = f$, risulta $h_{mas} = {}^1/_8\, 32 =$ metri 4,00.

Se nella (367b) posta sotto la forma

$$h_m = \frac{4\, m\, (10 - m)}{10^2}\, 4{,}00 = 0{,}16\, m\, (10 - m)$$

si mette $m = 1, 2, 3, 4, 5$ si ottengono le altezze delle verticali, cioè:

$$h_1 = 0{,}16 \times 1\, (10 - 1) = 1{,}44 \quad , \quad h_2 = 0{,}16 \times 2\, (10 - 2) = 2{,}56$$
$$h_3 = 0{,}16 \times 3\, (10 - 3) = 3{,}36 \quad , \quad h_4 = 0{,}16 \times 4\, (10 - 4) = 3{,}84$$
$$h_5 = 0{,}16 \times 5\, (10 - 5) = 4{,}00$$

Mediante le (352) e (353) si determinano le lunghezze delle sbarre S della nervatura poligonale, e quelle delle diagonali D, cioè:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \sqrt{(1{,}44 - 0)^2 + 3{,}2^2} = 3{,}509 \\ \sigma_2 &= \sqrt{(2{,}56 - 1{,}44)^2 + 3{,}2^2} = 3{,}390 \\ \sigma_3 &= \sqrt{(3{,}36 - 2{,}56)^2 + 3{,}2^2} = 3{,}299 \\ \sigma_4 &= \sqrt{(3{,}84 - 3{,}36)^2 + 3{,}2^2} = 3{,}236 \\ \sigma_5 &= \sqrt{(4{,}00 - 3{,}84)^2 + 3{,}2^2} = 3{,}204 \end{aligned}\right\} (\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} \delta_2 &= \sqrt{1{,}44^2 + 3{,}2^2} = 3{,}509 \quad , \quad \delta_3 = \sqrt{2{,}56^2 + 3{,}2^2} = 4{,}098 \\ \delta_4 &= \sqrt{3{,}36^2 + 3{,}2^2} = 4{,}640 \quad , \quad \delta_5 = \sqrt{3{,}84^2 + 3{,}2^2} = 4{,}998 \\ \delta_6 &= \sqrt{4{,}00^2 + 3{,}2^2} = 5{,}123 \end{aligned}\right\} (\beta)$$

I carichi per metro corrente di trave si assumono seguendo le solite norme pratiche, cioè:

Il carico *permanente* uniformemente distribuito $p = 700$ chilogrammi.

Il carico *mobile* uniformemente distribuito ragguagliato al treno di prova:

Per il calcolo delle *nervature* . . . . $k = 2350$ Kg.
» » del *traliccio* . . . . . $k' = 2800$ »

e quindi i carichi sollecitanti un nodo (ricordando essere $\lambda = 3{,}2$), sono:

Carico permanente . . . . . $P = 700 \times 3{,}2 = 2240$
Carico mobile pel calcolo delle *nervature* . . $K = 2350 \times 3{,}2 = 7520$
» » » del *traliccio* . . . $K' = 2800 \times 3{,}2 = 8960$

NERVATURE. — Il carico totale di un nodo per le nervature è

$$Q = P + K = 2240 + 7520 = 9760$$

Sbarre della nervatura poligonale. — Per il calcolo delle tensioni serve la (370) posta sotto la forma

$$S_m = -\frac{9760 \times 10^2}{8 \times 4}\sigma_m = -30500\,\sigma_m$$

nella quale, ponendo successivamente i valori α), si ottiene

$$S_1 = -30500 \times 3{,}509 = -107024$$
$$S_2 = -30500 \times 3{,}390 = -103395$$
$$S_3 = -30500 \times 3{,}299 = -100619$$
$$S_4 = -30500 \times 3{,}236 = -98698$$
$$S_5 = -30500 \times 3{,}204 = -97722$$

Sbarre della nervatura diritta o tirante. — La tensione è eguale per tutte le sbarre e si calcola colla (371), cioè

$$I = \frac{9760 \times 10^2}{8 \times 4}\lambda = 30500 \times 3{,}2 = +97600$$

TRALICCIO. —

Il carico permanente di un nodo è . . . . $P = 2240$
» mobile » » . . . . $K' = 8960$
» mobile per metro corrente di trave $k' = 2800$

Diagonali (*che si innalzano a sinistra*). — Il calcolo delle tensioni (*mas*) essendo il rapporto $r = 1/8$, si fa mediante la (374*a*) posta sotto la forma

$$D_{m\,(mas)} = 2800\,\delta_m$$

nella quale ponendo successivamente i valori β) si ottiene:

$$D_{2(mas)} = 2800 \times 3{,}509 = +9825$$
$$D_{3(mas)} = 2800 \times 4{,}098 = +11474$$
$$D_{4(mas)} = 2800 \times 4{,}640 = +12992$$
$$D_{5(mas)} = 2800 \times 4{,}998 = +13994$$

Controdiagonali (*che s'innalzano a destra*). — La tensione (*mas*) di queste sbarre si deduce speditamente dalla relazione (375), cioè:

$$C_{2(mas)} = D_{3(mas)} = +11474\ ,\quad C_{3(mas)} = D_{4(mas)} = +12992$$
$$C_{4(mas)} = D_{5(mas)} = +13994$$

essendo poi $\gamma_5 = \delta_6 = 5{,}123$ risulta

$$C_{5(mas)} = 2800 \times 5{,}123 = + 14344$$

Verticali. — La tensione (*mas*) eguale in tutte si determina colla (376), si ha cioè

$$V_{(mas)} = 2240 + 8960 = 11200$$

e la tensione (*min*) si calcola colla (377) ridotta alla forma

$$V_{m\,(min)} = 2240 - 8960 \frac{(m-1)(10-1-m)}{2 \times 10} = 2240 - 448\,(m-1)(9-m)$$

nella quale ponendo successivamente $m = 1, 2, 3, 4, 5$, si trova:

$$V_{1(min)} = 2240 - 448\,(0)\,(9-1) = + 2240$$
$$V_{2(min)} = 2240 - 448\,(2-1)\,(9-2) = - 896$$
$$V_{3(min)} = 2240 - 448\,(3-1)\,(9-3) = - 3136$$
$$V_{4(min)} = 2240 - 448\,(4-1)\,(9-4) = - 4480$$
$$V_{5(min)} = 2240 - 448\,(5-1)\,(9-5) = - 4928$$

Nella **Fig. 450** accanto alle varie sbarre sono segnate le rispettive tensioni nella parte sinistra, e le rispettive lunghezze nella parte destra.

3. Procedimento grafico.

275. Forma della trave. — Stabilito il numero N degli scomparti e la loro ampiezza λ, per determinare la forma delle nervature bisogna aver riguardo al numero degli scomparti, e cioè se esso è pari o dispari.

α) **Numero pari di scomparti.** — Si esprima con $N = 2n$ questo numero. Per ogni nodo inferiore si innalza una verticale e si assume l'altezza massima della trave, che corrisponde alla verticale mediana e la si denota con h_{mas}. Sulle verticali che corrispondono agli estremi si porta un'altezza $A0 = B0 = h_{mas}$ e la si divide in un numero n di parti eguali. Nella **Fig. 451** è $2n = 8$, da cui $n = 4$. Si numerano le varie verticali nonchè le accennate divisioni nel modo indicato dalla figura e poscia dall'estremo superiore **M** della verticale mediana si conducono le rette **M** 1, **M** 2, **M** 3,..... e dove queste intersecano le verticali che portano lo stesso numero, si hanno altrettanti vertici del poligono costituente la nervatura superiore della trave parabolica.

β) **Numero dispari di scomparti.** — Si esprima con $N = 2n + 1$ questo numero. Per ogni nodo inferiore si innalza una verticale e si stabilisce l'altezza massima della trave, che corrisponde alle due verticali mediane, e la si denota con h_{mas}. Sulle verticali che corrispondono agli estremi si porta un'altezza $A0 = B0 = h_{mas}$ e la si divide in un numero $N_0 = \frac{n(n+1)}{2}$ di parti eguali. — Nella **Fig. 452** è $N = 2n + 1 = 9$, da cui $n = 4$, e quindi

$$N_0 = \frac{4(4+1)}{2} = 10$$

Si prendono queste parti aggruppate ad una, a due, a tre, a quattro,..... e dai punti 1, 2, 3,..... così ottenuti si guidano delle orizzontali fintantochè incontrano le verticali che portano lo stesso numero, e nei punti di intersezione si hanno altrettanti vertici del poligono costituente la nervatura superiore della trave parabolica.

276. Calcolo delle tensioni (**Tav. 58**). — Determinata la forma del poligono parabolico, si considera la trave colle diagonali che si innalzano da una sola parte. Nella Fig. 1 della **Tav. 58**, che si prende ad esempio, le diagonali si innalzano a sinistra. Si valutano poscia i carichi permanente ed accidentale sui nodi, seguendo i procedimenti già indicati ai §§ **216**, **217** e quindi supponendo i dati dell'esempio a pagina 555 si deve assumere

$$P = 1000 \text{ Kg.} \quad , \quad K = 5400 \text{ Kg.} \quad , \quad K' = 6400 \text{ Kg.}$$

α) **Nervature.** — Si assume una conveniente scala per le forze, e si costruisce la retta poligono dei carichi totali sui nodi di valore $Q = P + K$, individuando anche le reazioni degli appoggi A_q e B_q fra loro eguali. Seguendo il metodo delle figure reciproche è facilissimo costruire il relativo diagramma, qual è rappresentato nella Fig. 2 (**Tav. 58**), e misurando i segmenti che corrispondono alle sbarre S ed I, se ne deducono le rispettive tensioni.

β) **Traliccio.** — Il carico accidentale produce due tensioni in ogni sbarra del traliccio, cioè la (*mas*) e la (*min*) a seconda della direzione del movimento.

Considerando il *movimento del carico mobile da destra a sinistra*, Fig .3 (**Tav. 58**), che origina la tensione (*mas*) nelle diagonali e la tensione (*min*) nelle verticali, vedesi che resta scarica la parte di trave che sta alla sinistra dei piani di sezione relativi alle varie sbarre, e perciò bisogna determinare la reazione variabile A_k dell'appoggio di sinistra. Perciò condotta l'orizzontale **A B**, segnati i vari scomparti della trave, innalzate le corrispondenti verticali si costruisce la retta dei carichi K′ in corrispondenza all'estremo di sinistra **A** e preso per polo l'estremo di destra **B**, cosicchè la distanza polare **A B** risulta eguale alla lunghezza della trave, si proietta il fascio di raggi che serve a costruire il poligono funicolare, le ordinate dei cui vertici rappresentano i valori della reazione variabile A_k, corrispondenti alle successive diagonali di destra. Il primo lato di questo poligono non deve staccarsi dall'estremo **B**, ma dalla penultima verticale inquantochè nell'ultimo scomparto non si trova diagonale.

1) **Tensioni delle diagonali.** — Queste tensioni si deducono seguendo il procedimento indicato nel § **81**. Si individua la direzione delle risultanti R delle tensioni delle due sbarre S_m ed I_m cointersecate colla diagonale D_m. Bisogna perciò prolungare le diagonali, Fig. 1 (**Tav. 58**), fintantochè incontrano la linea di azione verticale della reazione A_k nei punti r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, indi determinare i punti o_2, o_3, o_4, o_5, o_6, o_7, d'incontro delle successive sbarre S_m colla linea orizzontale delle I e nelle congiungenti dei primi punti coi secondi, presi ordinatamente, si hanno le linee d'azione delle risultanti R.

Osservazione. — Per gli scomparti mediani generalmente i punti **o** cadono fuori del foglio di disegno. — In questo caso le linee d'azione delle risultanti R si determinano nel modo seguente. Abbiansi due rette formanti angolo **d o, d r**, che si chiameranno *esterne*, **Fig. 453**, e da due punti qualunque **A** ed **S** giacenti rispettivamente sulle stesse si stacchino altre due rette **s o, A r**, che si chiameranno *interne*, le quali prolungate si incontrino rispettivamente nei punti **o** ed **r**. Trattasi di individuare la direzione della linea **r o** qualora l'uno o l'altro dei punti **r** ed **o** cada fuori del disegno. Per i punti d'origine **A** ed **s** si guidano due parallele alle rette interne fintantochè incontrano le esterne e si determinano così su quest'ultime due punti **o′** ed **r′** la cui congiungente **o′ r′** sarà parallela all'altra **o r**, per cui ne individua pienamente la direzione.

Per il capo delle ordinate dei vertici del poligono funicolare

si conducano delle parallele alle rispettive diagonali, e per il piede delle stesse ordinate si tirano delle parallele alle corrispondenti risultanti R, conchè si completano i *triangoli d'equilibrio*, i cui lati paralleli alle diagonali ne misurano la tensione (*mas*) accidentale.

Circa alla tensione prodotta nelle diagonali dal carico permanente basta osservare che nel diagramma, Fig. 2 (**Tav. 58**), ottenuto per carico completo su tutti i nodi, le diagonali sono senza tensione; e siccome il carico permanente agisce pure quale carico completo ne viene che esso non ha alcuna influenza sulla tensione delle diagonali, che rimangono dunque inerti sotto la sua azione.

2) **Tensioni delle verticali.** — Per determinare le tensioni prodotte su queste sbarre dal carico accidentale si segue il procedimento indicato al § **81**. Le ordinate dei vertici del poligono funicolare, Fig. 3 (**Tav. 58**), rappresentano i successivi valori della reazione d'appoggio A_k. Congiungendo il capo di queste ordinate coi corrispondenti punti **o** si limitano sulla verticale che si innalza dall'estremo **A** di sinistra (e che rappresenta la linea d'azione della reazione d'appoggio) dei segmenti che rappresentano le tensioni (*min*) accidentali delle sbarre verticali. Projettando questi segmenti sulle corrispondenti verticali si mettono in evidenze le tensioni nel posto stesso delle sbarre.

Osservazione. — Se il polo **o** cade fuori del foglio di disegno si opera nel modo seguente: La **dh** rappresenti una verticale qualunque della trave, **Fig. 454**, S la precedente sbarra del contorno poligonale, **o** il polo, l'ordinata **dv** misuri nella scala del disegno il valore della corrispondente reazione A_k. Pel capo **h** della verticale si conduce una retta qualunque **ho'** e pel capo **v** dell'ordinata A_k una parallella **vm** alla precedente; dal punto **m** si tira la **mv'** parallelamente alla sbarra S e la retta **o'v'** risulta parallela alla **ov** e ne determina quindi la direzione.

Per determinare le tensioni prodotte dal carico permanente giova ricorrere al diagramma Fig. 2 (**Tav. 58**), ottenuto per carico completo, dal quale si scorge che tutte le verticali sono stirate colla stessa tensione eguale al carico di un nodo, laonde si deduce che essendo il permanente un carico completo le tensioni da esso cimentate nelle verticali sono sforzi di trazione eguali per tutte, ed il cui valore è dato dal carico P di un nodo. Basta perciò portare nella scala delle forze il carico P dall'asse **AB** verticalmente all'insù, Fig. 3 (**Tav. 58**), per la quale si è assunta la scala

di 2 millimetri per tonnellata e condurre l'orizzontale **0 0**, con che si individuano le tensioni totali (*min*) per le sbarre verticali.

Per il *movimento del carico mobile da sinistra a destra* si originano le tensioni (*min*) nelle diagonali e le (*mas*) nelle verticali. La determinazione di queste tensioni si opera in modo analogo a quello indicato per il movimento in senso inverso, come mostra la parte inferiore della Fig. 3 (**Tav. 58**).

È però da avvertire che, le tensioni (*min*) delle diagonali risultando eguali alle tensioni (*mas*), basta limitarsi a determinare le une o le altre, ed inoltre siccome si conforma la trave in modo che le diagonali abbiano a ricevere soltanto sforzi di trazione, basta costruire il solo diagramma che sta alla parte superiore della Fig. 3 (**Tav. 58**), il quale porge le volute tensioni (*mas*) delle diagonali. Per le verticali si ripetono le considerazioni fatte al § **273**-β)-2) dalle quali risulta che esse ricevono il massimo sforzo di trazione per carico completo per cui risultano tutte egualmente cimentate con una tensione (*mas*) eguale al carico $Q' = P + K'$ di un nodo, ciò che esonera da particolari costruzioni grafiche.

3) **Controdiagonali.** — Per queste sbarre, che nella Fig. 1 (**Tav. 58**), sono indicate con linee a tratti, non occorrono fare particolari costruzioni, ma basta ricordare la relazione (375)

$$C_m = D_{m+1}$$

mediante la quale si deduce speditamente il valore della loro tensione.

Osservazione. — Scorgesi pertanto che basta limitarsi a costruire il diagramma rappresentato nella parte superiore della Fig. 3 (**Tav. 58**).

277. Altro procedimento per il calcolo delle tensioni. — Questo procedimento si fonda sulla proprietà che le tensioni delle sbarre S ed I di contorno, nonchè delle diagonali e controdiagonali D e C, sono proporzionali alla loro lunghezza, cosicchè dette tensioni si possono dedurre dalla lunghezza che hanno le sbarre nel disegno. Disegnata la trave in una determinata scala di $\frac{1}{r}$ tutto si riduce a trovare quale scala delle forze è relativa all'assunta scala delle lunghezze.

Il problema si può risolvere in due modi, cioè dedurre le tensioni delle sbarre di contorno S ed I dalla misura diretta delle loro lunghezze nel disegno, ed allora per le tensioni delle diagonali bisogna fare una costruzione speciale, oppure dedurre le tensioni delle diagonali mediante la diretta misurazione delle loro lunghezze nel disegno, ed allora è per le sbarre di contorno, che bisogna fare una particolare costruzione. Il secondo modo è preferibile in quanto conduce a segmenti di maggior lunghezza, e quindi a risultati numerici più esatti, ed inoltre permette di valutare in modo spedito anche le tensioni delle verticali.

La *tensione delle diagonali* è data dalle seguenti espressioni: (373) (373*a*)

$$\left.\begin{array}{lll} \textit{Numero} \text{ pari } \textit{di scomparti} & D_m = \dfrac{K' N}{8 h} \delta_m \\ \text{» dispari »} & D_m = \dfrac{K' (N^2 - 1)}{8 h N} \delta_m \end{array}\right\} \quad (I)$$

nelle quali è h l'altezza massima della trave e δ_m la lunghezza effettiva della diagonale considerata.

Se la scala del disegno è di $\frac{1}{r}$ ne viene che in questo le diagonali sono r volte più piccole, per cui volendo tener conto della lunghezza che esse hanno nel disegno, il valore della tensione diventa:

$$\begin{array}{lll} \textit{Numero} \text{ pari } \textit{di scomparti} & D_m = \dfrac{K' N}{8 h} r \delta_m \\ \text{» dispari »} & D_m = \dfrac{K' (N^2 - 1)}{8 h N} r \delta_m \end{array}$$

e quindi gli *sforzi per ogni unità di misura delle lunghezze*, ossia *sforzi unitari*, sono

$$\left.\begin{array}{lll} \textit{Numero} \text{ pari } \textit{di scomparti.} & \text{Sforzo unitario} = \dfrac{K' N}{8 h} r \\ \text{» dispari »} & \text{Sforzo unitario} = \dfrac{K' (N^2 - 1)}{8 h N} r \end{array}\right\} \quad (378)$$

Osservazione. — Sta bene prendere come unità di misura delle lunghezze il millimetro e quindi h va espresso in millimetri e le lunghezze δ_m del disegno si misurano pure in millimetri.

Le *tensioni delle sbarre di contorno* hanno le seguenti espressioni:

$$\textit{Numero}\ \textbf{pari}\ \textit{di scomparti}\ \ldots \begin{cases} S_m = -\dfrac{Q\,N^2}{8\,h}\,\sigma_m \\ I_m = \dfrac{Q\,N^2}{8\,h}\,\lambda \end{cases}$$

$$\text{» } \textbf{dispari} \text{ » } \ldots \begin{cases} S_m = -\dfrac{Q\,(N^2-1)}{8\,h}\,\sigma_m \\ I_m = \dfrac{Q\,(N^2-1)}{8\,h}\,\lambda \end{cases}$$

Se si volessero dedurre le tensioni direttamente dalla lunghezza che le sbarre hanno nel disegno in iscala di $\frac{1}{r}$, gli *sforzi corrispondenti all'unità di misura delle lunghezze* sarebbero indistintamente per le S ed I:

$$\textit{Numero}\ \textbf{pari}\ \textit{di scomparti.}\quad \text{Sforzo unitario} = \frac{Q\,N^2}{8\,h}\,r$$

$$\text{» } \textbf{dispari} \text{ »}\quad \text{Sforzo unitario} = \frac{2\,(N^2-1)}{8\,h}\,r$$

e si avrebbe una scala delle forze differente da quella somministrata dalle (378). Se si vuole invece conservare la stessa scala, allora bisogna cambiare la lunghezza delle sbarre. Indicando in generale con $\overset{o}{\sigma_m}$ la lunghezza variata sussiste la relazione:

$$\textit{Numero}\ \textbf{pari}\ \textit{di scomparti}\ \frac{Q\,N^2}{8\,h}\,r\,\sigma_m = \frac{K'\,N}{8\,h}\,r\,\overset{o}{\sigma_m}$$

$$\text{» } \textbf{dispari} \text{ »}\quad \frac{Q\,(N^2-1)}{8\,h}\,r\,\sigma_m = \frac{K'\,(N^2-1)}{8\,h\,N}\,r\,\overset{o}{\sigma_m}$$

da ognuna delle quali si ricava

$$\overset{o}{\sigma_m} = \frac{Q\,N}{K'}\,\sigma_m$$

Tutte le sbarre hanno eguale la proiezione orizzontale: per quelle lunghe σ_m essa è λ, per quelle di lunghezza σ^0_m la si chiami x. Si può dunque sostituire le proiezioni alle lunghezze, e ponendo $N\lambda = l$ si ottiene

$$x = \frac{Q}{K'} l \qquad (379)$$

A seconda poi che diventi la frazione $\frac{Q}{K'} \gtrless 1$ risulta x maggiore o minore della lunghezza l di una certa quantità che, detta x_0, si ricava dalla relazione

$$l \pm x_0 = \frac{Q}{K'} l$$

da cui

$$x_0 = \left(\frac{Q}{K'} - 1\right) l \qquad (380)$$

Col mezzo della (380) si può dunque determinare di quanto devesi aumentare o diminuire la lunghezza l della trave onde ottenere la nuova proiezione orizzontale comune a tutte le sbarre di contorno. Il valore di x_0, o meglio quello di x a cui è subordinato si costruisce anche graficamente in base alla (379) nel modo indicato dalla Fig. 5 (**Tav. 58**) nella quale i segmenti **A K'** ed **A Q** rappresentano rispettivamente i carichi K' e Q portati in una qualunque scala, mentre la nuova proiezione x ha un suo estremo corrispondente ad un estremo della trave. Innalzate due verticali dagli estremi della x e prolungate le sbarre di contorno fino ad incontrare dette verticali i segmenti che ne rimangono intercetti misurati nella scala delle (378) porgono le tensioni delle corrispondenti sbarre.

Nella Fig. 6 (**Tav. 58**), i segmenti rappresentanti i carichi K' e Q furono portati nella scala di 2 centimetri per tonnellata, mentre nella Fig. 4 (**Tav. 58**), essendo $Q = K'$ è anche $x = l$ e quindi nulla occorre per determinare la nuova proiezione x comune a tutte le sbarre S.

Le *tensioni* (*min*) *delle verticali* hanno per valore

$$V_{m(min)} = P - \frac{K'}{2N} (m-1) (N - m - 1) \qquad (II)$$

Nelle travi paraboliche le espressioni che dànno le altezze h_m delle verticali, (indicando con H l'altezza massima della trave) sono:

$$\textit{Numero}\ \textbf{pari}\ \textit{di scomparti} \quad h_m = \frac{4\,m\,(N-m)}{N^2}\,H$$

$$\text{» } \textbf{dispari} \text{ » } \quad h_m = \frac{4\,m\,(N-m)}{N^2-1}\,H$$

Si sottragga da queste l'altezza della prima verticale, che si ottiene ponendo in esse $m = 1$, e riducendo, risulta:

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Numero}\ \textbf{pari}\ \textit{di scomparti} \quad h_m - h_1 = \dfrac{4H}{N^2}\,(m-1)\,(N-m-1) \\ \text{» } \textbf{dispari} \text{ » } \quad h_m - h_1 = \dfrac{4\,H}{N^2-1}\,(m-1)\,(N-m-1) \end{array}\right\} \text{(III)}$$

Le (I) mostrano che all'unità di misura delle lunghezze effettive corrispondono gli sforzi seguenti:

$$\textit{Numero}\ \textbf{pari}\ \textit{di scomparti.} \quad \text{Sforzo unitario} = \frac{K'\,N}{8\,H}$$

$$\text{» } \textbf{dispari} \text{ » } \quad \text{Sforzo unitario} = \frac{K'\,(N^2-1)}{8\,H\,N}$$

Moltiplicando il secondo membro delle (III) rispettivamente per questi valori, si ha da ognuna:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{4H}{N^2}\,(m-1)\,(N-m-1) \times \dfrac{K'\,N}{8\,H} \\ \dfrac{4\,H}{N^2-1}\,(m-1)\,(N-m-1) \times \dfrac{K'\,(N^2-1)}{8\,H\,N} \end{array}\right\} = \frac{K'}{2\,N}\,(m-1)\,(N-m-1)$$

le quali coincidono col termine in K′ della (II). Se dunque pel capo della prima verticale si guida una orizzontale le ordinate del contorno parabolico riferite a questa orizzontale rappresentano le tensioni (*min*) delle corrispondenti sbarre verticali dipendenti dal carico accidentale K′. Siccome poi il carico permanente, quale

carico completo, stira cadauna verticale con uno sforzo eguale al carico P di un nodo, come mostra anche la (II), vedesi che basta portare questo carico nella scala delle forze dal capo della prima verticale all'insù, guidare una nuova orizzontale (**00** nelle Fig. 4 e 6 (**Tav. 58**), e le ordinate del contorno parabolico riferite a quest'ultima orizzontale, rappresentano nella scala delle forze la tensione totale (*min*) delle corrispondenti sbarre verticali.

Riguardo alla tensione (*mas*), per quanto si è detto in β)-2), essa è eguale per tutte le verticali, ed ha per valore il carico totale di un nodo $Q' = P + K'$. Nella **Fig. 454** si annotarono al di sopra di ogni sbarra le lunghezze in millimetri dei segmenti proporzionali alle tensioni ed al di sotto le tensioni stesse.

Travi Schwedler (iperboliche).

1. Procedimento numerico.

278. Forma della trave. — Confrontando la trave simmetrica a nervature parallele, ossia la trave diritta, **Fig. 365**, colla trave simmetrica parabolica, **Fig. 445**, risulta la seguente differenza relativamente alla natura delle tensioni delle diagonali. Nella trave diritta con le diagonali che dal mezzo vanno innalzandosi verso ambi gli estremi la tensione totale (*min*) diventa **positiva** in tutti gli scomparti, ad eccezione dei centrali; nella trave parabolica invece le tensioni (*mas*) e (*min*) di ogni diagonale hanno valori eguali e di segno contrario, cioè la (*min*) è sempre **negativa**. Deve dunque esservi una tal forma di trave, intermedia fra la diritta e la parabolica, per la quale la tensione totale (*min*) delle diagonali deve avere un valore **nullo**. Questa forma di trave riunisce i vantaggi delle travi diritte e delle paraboliche e cioè, qualunque sia la posizione del carico mobile le diagonali ricevono soltanto tensioni positive cioè sforzi di trazione, mentre le sbarre delle nervature ricevono tensioni quasi eguali, e quelle del traliccio, stante la diminuzione della loro lunghezza verso gli estremi, si trovano in migliori condizioni di resistenza.

La forma di queste travi si ottiene ponendo la condizione che la tensione totale (*min*) delle diagonali sia eguale a zero, ossia che lo sforzo cimentante ogni diagonale, e dipendente dalla posi-

zione del carico mobile che produrrebbe parzialmente tensione *negativa* (compressione), sia nullo. Le travi di questa forma essendo state ideate dal rinomato Ingegnere SCHWEDLER di Berlino si chiamano *travi Schwedler*. Si supponga una trave con le diagonali che si innalzano da destra verso sinistra, **Fig. 455**, e si consideri la diagonale m^{ma}. La posizione del carico mobile che dà la tensione (*min*) per questa diagonale, cioè $D_{m(min)}$, è quella rappresentata nella **Fig. 455**, e si indichi con A_m la reazione dell'appoggio di sinistra per questa posizione, tenendo conto tanto del carico permanente che di quello mobile, e con Q' il carico totale per ognuno dei nodi influenzati dal carico mobile. Ricorrendo al metodo dei momenti statici, supponendo il piano di sezione **mn**, prendendo per polo il punto **o** di intersezione delle due sbarre cointersecate, distante a_m dall'estremo di sinistra della trave, e considerando la porzione di trave a sinistra del piano **mn**, si ha la seguente equazione dei momenti:

$$-A_m a_m + Q' \left\{ \begin{matrix} (a_m+\lambda)+(a_m+2\lambda)+\cdots\cdots \\ +[a_m+(m-1)\lambda] \end{matrix} \right\} + D_{m(min)}\, d_m = 0.$$

Dovendo essere $D_{m(min)} = 0$, questa condizione è soddisfatta allorchè diventa:

$$-A_m a_m + Q'\{(a_m+\lambda)+(a_m+2\lambda)+\cdots\cdots+[a_m+(m-1)\lambda]\} = 0$$

da cui

$$a_m \left\{ (m-1)\, Q' - A_m \right\} + Q' \frac{m\,(m-1)}{2}\lambda = 0 \qquad (I)$$

Conservando N p k' i soliti significati è

$$Q' = (p+k')\lambda \quad , \quad A_m = A_p + A_{k'}$$

La reazione dell'appoggio dipendente dal carico permanente è

$$A_p = \frac{N-1}{2} p\lambda$$

quella dipendente dal carico mobile è

$$A_{k'} = \frac{(N-1)+(N-2)+\cdots\cdots+[N-(m-1)]}{N} k'\lambda = \\ = \frac{(m-1)(2N-m)}{2N} k'\lambda$$

e quindi la reazione totale diventa

$$A_m = \frac{\lambda}{2}\left\{(N-1)p + \frac{(m-1)(2N-m)}{N} k'\right\}$$

Sostituendo i valori di Q' ed A_m nella (I) e riducendo risulta

$$a_m \frac{\lambda}{2}\left\{\frac{pN(2m-1-N)+k'm(m-1)}{N}\right\} + \frac{p+k'}{2}\lambda^2 m(m-1) = 0$$

da cui

$$a_m = \frac{(p+k')Nm(m-1)}{pN(N+1-2m)-k'm(m-1)}\lambda \qquad (II)$$

Sostituendo questo valore nella (366) e riducendo si trova

$$\frac{h_m}{h_{m-1}} = \frac{m(N-m)\left(\frac{p}{k'}N+m-1\right)}{(m-1)\left\{N-(m-1)\right\}\left(\frac{p}{k'}N+m\right)} \qquad (381)$$

Per un numero **pari** $N = 2n$ *di scomparti* la verticale di indice n è la mediana e si può per analogia passare al rapporto $\frac{h_m}{h_n}$ ponendo $n = \frac{N}{2}$ in luogo di $(m-1)$ nella (381) laonde

$$h_m = \frac{2m(N-m)\left(\frac{2p}{k'}+1\right)}{N\left(\frac{p}{k'}N+m\right)} h_n \qquad (382)$$

Per un numero **dispari** $N = 2n - 1$ *di scomparti* la verticale di indice $n - 1$ è quella che precede la mezzaria e si può per analogia passare al rapporto $\frac{h_m}{h_{n-1}}$ ponendo $(n-1) = \frac{N-1}{2}$ in luogo di $(m-1)$ nella (381) da cui

$$h_m = \frac{2m(N-m)\left(\frac{2p}{k'}N + N - 1\right)}{(N^2-1)\left(\frac{p}{k'}N + m\right)} h_{n-1} \qquad (383)$$

Chiamando l la lunghezza della trave ed x la distanza di una verticale qualunque h_x dall'estremo di sinistra è $N = \frac{l}{\lambda}$ ed $m = \frac{x}{\lambda}$, sostituendo i quali valori nelle (382) (383) si ha:

Per un numero **pari** *di scomparti*

$$h_x = \frac{4x(l-x)\left(\frac{p}{k'} + \frac{1}{2}\right)}{l^2\left(\frac{p}{k'} + \frac{x}{l}\right)} h_n \qquad (382a)$$

Per un numero **dispari** *di scomparti*

$$h_x = \frac{4x(l-x)\left(\frac{p}{k'} + \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{l}\right)}{(l^2-\lambda^2)\left(\frac{p}{k'} + \frac{x}{l}\right)} h_{n-1} \qquad (383a)$$

Se una delle nervature si fa rettilinea allora le (382*a*) e (383*a*) di 2° grado fra le ascisse x e le ordinate h_x rappresentano l'equazione di una conica. Per determinare di qual conica si tratta si procede nel modo indicato al § 71, completando l'equazione generale (88), cioè:

$$a x^2 + b x y + c y^2 + d x + e y + f = 0$$

e ponendo eguali a zero i coefficienti dei termini mancanti. Così operando, le (382*a*) (383*a*) diventano rispettivamente

$$\left.\begin{aligned} &4\,h_n\left(\frac{p}{k'}+\frac{1}{2}\right)x^2+l\,h_x\,x+0\cdot h_x{}^2- \\ &-4\,l\,h_n\left(\frac{p}{k'}+\frac{1}{2}\right)x+\frac{p}{k'}\,l^2\,h_x+0 \end{aligned}\right\}=0 \qquad \text{(I)}$$

$$\left.\begin{aligned} &4\,h_{n-1}\left(\frac{p}{k'}+\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{l}\right)x^2+l\,h_x\,x+0\cdot h_x{}^2- \\ &-4\,l\,h_{n-1}\left(\frac{p}{k'}+\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{l}\right)x+\frac{p}{k'}\left(l^2-\lambda^2\right)h_x+0 \end{aligned}\right\}=0 \qquad \text{(II)}$$

e la quantità $b^2-4\,a\,c$ acquista i valori

$$l^2-16\,h_n\left(\frac{p}{k'}+\frac{1}{2}\right)\cdot 0=l^2$$

$$l^2-16\,h_{n-1}\left(\frac{p}{k'}+\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{l}\right)\cdot 0=l^2$$

diventa cioè *positiva* e quindi le (382*a*) (383*a*) rappresentano la equazione di una *iperbola*.

Queste travi perciò si chiamano anche *travi iperboliche*, ed in pratica usasi fare rettilinea la nervatura inferiore. Per stabilire la posizione dell'iperbola rispetto all'asse delle x si assuma come origine l'estremo di sinistra e si faccia la derivata delle (382*a*) e (383*a*) onde determinare la posizione dell'ordinata di massima grandezza. Perciò nelle (382*a*) (383*a*) si separa la parte variabile dalla costante, e chiamando rispettivamente C e C′ questa parte costante, esse diventano:

$$\left.\begin{aligned} h_x&=\frac{2\,h_n(2\,p+k')}{l}\cdot\frac{x\,(l-x)}{p\,l+k'\,x}=\mathrm{C}\cdot\frac{x\,(l-x)}{p\,l+k'\,x} \\ h_x&=\frac{2\,h_{n-1}\left\{2\,p+k'\left(\dfrac{l-2\,\lambda}{l}\right)\right\}}{\left(l-\dfrac{\lambda^2}{l}\right)}\cdot\frac{x\,(l-x)}{p\,l+k'\,x}=\mathrm{C}'\cdot\frac{x\,(l-x)}{p\,l+k'\,x} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III)}$$

e ponendo la derivata della parte variabile eguale a zero per condizione di massimo, si ha da ognuna delle (III)

$$\frac{d\,h_x}{d\,x} = \frac{p\,l\,(l-2\,x) - k'\,x^2}{(p\,l + k'\,x)^2} = 0 \qquad \text{(IV)}$$

laonde

$$p\,l\,(l-2\,x) - k'\,x^2 = 0$$

da cui si ricava il particolare valore di x che rende massimo h_x, per il quale cioè $\frac{d\,h_x}{d\,x} = 0$, ossia la tangente alla curva è orizzontale, e chiamato x_0 questo valore si trova

$$x_0 = \frac{p}{k'}\left\{\sqrt{\left(1+\frac{k'}{p}\right)} - 1\right\} l \qquad (384)$$

La (384) mostra che l'ordinata massima dell'iperbola non coincide colla mezzaria, rispetto alla quale dunque la curva non è simmetrica, cioè l'asse dell'iperbola è inclinato rispetto a quello orizzontale della trave.

Ponendo eguale allo ∞ il valore di $\frac{d\,h_x}{d\,x}$ e risolvendo l'equazione risultante rispetto ad x, si trova l'ascissa in corrispondenza alla quale la tangente alla curva è verticale. Ricorrendo alla (IV), si ha:

$$\frac{p\,l\,(l-2\,x) - k'\,x^2}{(p\,l + k'\,x)^2} = \infty$$

da cui

$$p\,l + k'\,x = 0$$

d'onde

$$x = -\frac{p}{k'}\,l \qquad (385)$$

Ponendo questo valore di x nelle (382a) (383a), si trova per ognuna

$$h_x = \infty$$

cioè la tangente verticale della curva ha luogo per un punto posto a distanza infinita al disotto dell'asse delle x, per cui detta tangente è un assintoto e quindi l'iperbola ha un assintoto verticale, la cui ascissa è $-\frac{p}{k'} l$, come mostra la **Fig. 456.**

Per determinare il valore dell'ordinata massima dell'iperbola, che si indica con h_0, basta porre il valore di x_0 dato dalla (384) nelle (III).

Per semplicità di calcolo si può sostituire il valore di x_0, in luogo che nelle (III), nel rapporto fra la derivata del numeratore e quella del denominatore della parte variabile, il quale rapporto è $\frac{l-2x}{k'}$, e si ottiene:

$$\left.\begin{aligned} h_0 &= C \frac{l}{k'^2}\left[k' - 2p\left\{\sqrt{\left(1+\frac{k'}{p}\right)} - 1\right\}\right] \\ h_0 &= C' \frac{l}{k'^2}\left[k' - 2p\left\{\sqrt{\left(1+\frac{k'}{p}\right)} - 1\right\}\right] \end{aligned}\right\} \quad (386)$$

i quali valori sono subordinati rispettivamente alle altezze delle verticali h_n ed h_{n-1}, contenute nelle quantità C e C', e le quali bisognerebbe assumere o determinare a priori.

Ma in generale è l'altezza massima H della trave che si assume a priori, prendendola fra $^1/_6$ ed $^1/_8$ della portata, e quindi non rimane che di calcolare mediante la (384) il valore della ascissa x_0 (indipendente da h_n od h_{n-1}), che determina di posizione l'ordinata massima dell'iperbola, con che è facile di individuare la posizione della verticale di massima altezza della trave, inquantochè è quella che cade più prossima all'anzidetta ordinata, **Fig. 457.**

In pratica però si procede molto speditamente alla ricerca della verticale di massima altezza nel seguente modo: Si supponga che la verticale di massima altezza sia di indice m. È facile stabilire che devono sussistere contemporaneamente le relazioni

$$\frac{h_m}{h_{m-1}} > 1 \quad , \quad \frac{h_{m+1}}{h_m} < 1$$

inquantochè le verticali h_{m-1} ed h_{m+1} sono minori di h_m.

Il rapporto $\frac{h_m}{h_{m-1}}$ è dato dalla (381) mentre l'altro $\frac{h_{m+1}}{h_m}$ si può dedurre dal precedente invertendolo e ponendo $m+1$ in luogo di $m-1$. Deve essere dunque

$$\frac{m\,(N-m)\left(\frac{p}{k'}N+m-1\right)}{(m-1)\,(N-m+1)\left(\frac{p}{k'}N+m\right)}>1$$

$$\frac{(m+1)\,(N-m-1)\left(\frac{p}{k'}N+m\right)}{m\,(N-m)\left(\frac{p}{k'}N+m+1\right)}<1$$

dalle quali si deduce rispettivamente

$$\frac{p}{k'}>\frac{m\,(m-1)}{N\,(N-2\,m+1)} \quad , \quad \frac{p}{k'}<\frac{m\,(m+1)}{N\,(N-2\,m-1)}$$

e ponendo in queste successivamente $m=1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots$ risulta che la verticale di massima altezza $h_{mas}=H$ è la

$$\left.\begin{array}{lll}
1^a \text{ quando} & \frac{p}{k'} > & 0 \\
 & \frac{p}{k'} < & \frac{2}{N\,(N-3)} \\
2^a \quad » & \frac{p}{k'} > & \frac{2}{N\,(N-3)} \\
 & \frac{p}{k'} < & \frac{6}{N\,(N-5)} \\
3^a \quad » & \frac{p}{k'} > & \frac{6}{N\,(N-5)} \\
 & \frac{p}{k'} < & \frac{12}{N\,(N-7)} \\
4^a \quad » & \frac{p}{k'} > & \frac{12}{N\,(N-7)} \\
 & \frac{p}{k'} < & \frac{20}{N\,(N-9)} \\
5^a \quad » & \frac{p}{k'} > & \frac{20}{N\,(N-9)} \\
 & \frac{p}{k'} < & \frac{30}{N\,(N-1)} \\
\ldots\ldots & \frac{p}{k'} > & \frac{30}{N\,(N-1)} \\
 & \frac{p}{k'} < & \ldots\ldots
\end{array}\right\} \quad (387)$$

Stabilito in tal modo qual'è la verticale che deve avere la massima altezza, il cui indice in generale si denota con m, si sceglie questa altezza h_m compresa fra $^1/_6$ ed $^1/_8$ della lunghezza l della trave, e poscia valendosi della (381), che dà l'altezza della verticale di indice $m - 1$ in funzione di quella di indice m, o viceversa, si ha il mezzo di calcolare successivamente tutte le altezze delle altre verticali. Si osservi però che la nervatura poligonale assumerebbe una forma dissimetrica, e per rendere la trave simmetrica è necessario costruirla nel modo indicato dalla parte superiore della **Fig. 458.** In questo modo la nervatura poligonale, riesce bensì simmetrica, ma forma un angolo rientrante nella mezzaria della trave, la quale conformazione in pratica non viene accettata, ed invece si adotta, nel tratto mediano compreso fra le verticali di massima altezza, una porzione di nervatura orizzontale, ossia nella parte centrale la trave assume la forma di trave diritta e nelle parti estreme di trave *iperbolica*, come mostra la parte inferiore della **Fig. 458.** È per questa ragione che negli scomparti laterali basta una sola diagonale che viene cimentata soltanto alla trazione, perchè per la posizione del carico mobile che darebbe la tensione totale (*min*) questa tensione diventa nulla a motivo della forma assegnata alla trave, che soddisfa appunto a questa condizione, mentre negli scomparti centrali, non conservando più la trave la forma prescritta, ma mutandosi in trave diritta, bisogna porre ambe le diagonali, che si rendono ivi necessarie perchè sono alternativamente stirate e compresse, cioè ricevono tensioni (*mas*) e (*min*) a seconda della posizione del carico mobile. Queste due diagonali però non lavorano concomitantemente, perchè si formano con ferri piatti, acciò non sieno capaci di resistere alla compressione, ed entra in azione soltanto quella che per una data posizione del carico mobile viene cimentata alla trazione. Concludendo adunque le travi SCHWEDLER, formate come indica la parte inferiore della **Fig. 458,** hanno le diagonali cimentate soltanto alla trazione.

Osservazione. — Non è però a credersi che le travi SCHWEDLER soddisfino rigorosamente alla condizione che le tensioni (*min*) delle diagonali diventino nulle. La forma della trave dipende dal rapporto $\frac{p}{k'}$, come si vede dalla (381), il quale rapporto non si può determinare esattamente. Difatti il peso permanente non si può valutare a priori se non con approssimazione, valendosi

delle relative formule empiriche che servono all'uopo. L'errore si può diminuire eseguendo i calcoli delle tensioni, assegnando le riquadrature a tutte le sbarre e valutando il corrispondente valore di p (tenendo conto anche delle chiodature e dei coprigiunti) il quale valore si introduce nelle formule per determinare nuovamente la forma della trave e per rinnovare il calcolo delle tensioni. — Anche il carico mobile non resta pienamente determinato, inquantochè non si può valutare l'influenza degli urti da esso prodotti, i quali aumentano l'intensità della sua azione. Ne viene che invece dell'annullamento della tensione (*min*) nelle diagonali, non si consegue che la diminuzione dello sforzo di compressione. E quindi per maggior sicurezza sotto questo riguardo, bisogna valutare il rapporto $\frac{p}{k'}$ il più piccolo possibile, ossia prendere il maggior valore possibile del carico k'. Alcuni costruttori consigliano perciò di prendere per il carico mobile 1 $^1/_2$ volte il giusto valore, nelle operazioni che servono a determinare la forma della trave.

Abbenchè fra le travi SCHWEDLER e le paraboliche vi sia molta analogia, è però da notarsi che una essenziale differenza sta in ciò, che sono precisamente le diagonali ommesse nelle travi SCHWEDLER, quelle che sono maggiormente cimentate nelle travi paraboliche.

279. Calcolo delle tensioni mediante le equazioni dei momenti statici. — Per eseguire il calcolo delle tensioni bisogna prima valutare i carichi sui nodi e poi si opera seguendo le norme indicate al § **75.**

Il *peso permanente* per metro corrente di ponte con travi SCHWEDLER e per ferrovia si può valutare colla formola

$$p = 28\, l + 666 \qquad (388)$$

Esempio.

FORMA DELLA TRAVE. — La portata della trave sia $l =$ metri 22,5 suddivisa in $N = 9$ scomparti eguali di metri 2,5 ognuno, e si prenda l'altezza massima della trave $h_{mas} = 3$ metri. — Il peso permanente è dato dalla (388) $p = 28 \times 22{,}5 + 666 = 1296$, e per metro corrente di trave

$$p = \frac{1}{2}\, 1296 = 648 \text{ Kg.}$$

Il carico mobile si deduce dalla tabella L e cioè in cifra rotonda per il calcolo delle nervature è $k = {}^1/_2\, 5200 = 2600$, e per il calcolo del traliccio è $k' = {}^1/_2\, 6200 = 3100$, e quindi il rapporto $\frac{p}{k'} = \frac{648}{3100} = 0{,}209$. Per vedere a quale verticale si deve assegnare la massima altezza che si è assunta, si

ricorre alle (387) e cioè si formano i rapporti

$$\frac{2}{N(N-3)} = \frac{2}{9(9-3)} = 0{,}036 \quad , \quad \frac{6}{N(N-5)} = \frac{6}{9(9-5)} = 0{,}166$$

$$\frac{12}{N(N-7)} = \frac{12}{9(9-7)} = 0{,}666$$

e quindi è alla terza verticale che si deve assegnare la massima altezza inquantochè il rapporto $\frac{p}{k'} = 0{,}209$ è compreso fra gli ultimi due valori, ossia si deve fare $h_3 = h_{mas} = 3$. Ricorrendo alla (381) si trova

$$h_2 = 3\,\frac{(3-1)(9-3+1)(0{,}209 \times 9 + 3)}{3(9-3)(0{,}209 \times 9 + 3 - 1)} = 2{,}934$$

$$h_1 = 2{,}934\,\frac{(2-1)(9-2+1)(0{,}209 \times 9 + 2)}{2(9-2)(0{,}209 \times 9 + 2 - 1)} = 2{,}258$$

e la trave deve avere quindi la forma rappresentata nella **Fig. 459.**

Calcolo delle tensioni. — In quanto al calcolo delle tensioni delle varie sbarre, per quelle corrispondenti agli scomparti estremi, nei quali la trave si mantiene poligonale, servono gli stessi procedimenti indicati per la trave parabolica, e per le sbarre appartenenti agli scomparti centrali, nei quali la trave è a nervature parallele, si procede nello stesso modo indicato nell'esempio a pagina 435.

2. Formule generali pel calcolo delle tensioni.

280. Calcolo delle tensioni mediante le formule. — Si ricorre alle formule generali sviluppate al § **78.**

α) **Nervature.** — Il massimo cimento delle nervature avendo luogo per carico completo la reazione **A** d'appoggio è costante. Il carico per ogni nodo è $Q = P + K$.

Per le sbarre della *nervatura superiore* (*poligonale*) la tensione è data dalla (103), cioè:

$$S_m = -\frac{Q\lambda}{2}\,\frac{m(N-m)}{s_m} \qquad (389)$$

Per le sbarre della *nervatura inferiore* (*rettilinea*) la tensione si calcola colla (104), cioè:

$$I_m = \frac{Q\lambda}{2}\,\frac{(m-1)(N+1-m)}{i_m} \qquad (390)$$

nelle quali non sono a portarsi particolari modificazioni.

β) **Traliccio.** — Per essere gli sforzi massimi originati da carico mobile parziale, la reazione A_m d'appoggio è variabile. — Il carico permanente per ogni nodo è P e quello accidentale è K'.

1) **Diagonali.** — Nelle travi SCHWEDLER la tensione (*min*) delle diagonali è nulla, basta dunque tener conto della sola tensione (*mas*) che è fornita dalla (105) per il tratto di trave a contorno iperbolico, la quale si può porre sotto la forma

$$D_{m(mas)} = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{P}{2}\,(N+1-2\,m) - \dfrac{\lambda\, m\,(m-1)}{a_m} + \\ + \dfrac{K'}{2\,N}\,(N-m)\,(N+1-m) \end{array} \right\} \frac{a_m}{d_m}$$

Sostituendo nel termine fra la graffa in luogo di a_m il valore dato dalla (II), § **278**, ricordando che $p\,\lambda = P$, $k'\,\lambda = K'$, ponendo $\dfrac{P}{K'} = \Theta$ e riducendo risulta

$$D_{m(mas)} = \left\{ \frac{P}{2}\,\frac{(N-m)\,(N+1-m)}{(\Theta+1)\,N} + \frac{K'}{2\,N}\,(N-m)\,(N+1-m) \right\} \frac{a_m}{d_m}$$

da cui

$$D_{m(mas)} = \frac{2\,P+K'}{2\,N\,(\Theta+1)}\,(N-m)\,(N+1-m)\,\frac{a_m}{d_m} \qquad (391)$$

Per il tratto di trave a nervature parallele, si ricade nella (304) ottenuta per le travi rettilinee, ed osservando che

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\phi} = \frac{\sqrt{H^2+\lambda^2}}{H}$$

essa diventa

$$D_{m(mas)} = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{P}{2}\,(N+1-2\,m) + \\ + \dfrac{K'}{2\,N}\,(N-m)\,(N+1-m) \end{array} \right\} \frac{\sqrt{H^2+\lambda^2}}{H} \qquad (392)$$

Per le controdiagonali che devono porsi nel tratto rettilineo vale la (306*a*), che si riporta:

$$C_{m(mas)} = D_{(N+1-m)(mas)} \qquad (393)$$

2) **Verticali.** — Per il tratto di trave a contorno iperbolico le tensioni (*mas*) e (*min*) sono date rispettivamente dalle (107) (108) nelle quali si deve porre a_m in luogo di a'_m, perchè nelle travi con una nervatura rettilinea è $a'_m = a_m$, laonde risulta:

$$V_{m(mas)} = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{P}{2} \left\{ \lambda\, m\,(m+1) - (N-1-2\,m)\, a_m \right\} + \\ + \dfrac{K'}{2\,N}\, m\,(m+1)\,(a_m + N\,\lambda) \end{array} \right\} \frac{1}{v_m} \qquad (394)$$

$$V_{m(min)} = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{P}{2} \left\{ \lambda\, m\,(m+1) - (N-1-2\,m)\, a_m \right\} - \\ - \dfrac{K'}{2\,N}\,(N-m)\,(N-1-m)\, a_m \end{array} \right\} \frac{1}{v_m} \qquad (395)$$

mentre per il tratto di trave rettilinea, essendo $a_m = \infty$ e $v_m = \infty$, esse diventano:

$$V_{m(mas)} = -\frac{P}{2}\,(N-1-2\,m) + \frac{K'}{2\,N}\, m\,(m+1) \qquad (394a)$$

$$V_{m(min)} = -\frac{P}{2}\,(N-1-2\,m) - \frac{K'}{2\,N}\,(N-m)(N-1-m) \qquad (395a)$$

Esempio.

Si conservino i dati dell'esempio precedente per cui è

$$N = 9 \quad , \quad \lambda = 2{,}5 \text{ m.} \quad , \quad P = 648 \times 2{,}5 = 1620 \text{ Kg.}$$

$$K = 2600 \times 2{,}5 = 6500 \text{ Kg.} \quad , \quad K' = 3100 \times 2{,}5 = 7750 \text{ Kg.} \quad , \quad \frac{p}{k'} = \Theta = 0{,}209$$

$$h_1 = 2{,}258 \quad , \quad h_2 = 2{,}934 \quad , \quad h_3 = h_4 = h_5 = H = 3{,}00$$

Le distanze a_m si determinano mediante la (354), cioè

$$a_1 = \frac{2{,}258 - 1\,(2{,}258 - 0)}{2{,}258 - 0}\, 2{,}5 = 0$$

$$a_2 = \frac{2{,}934 - 2\,(2{,}934 - 2{,}258)}{2{,}934 - 2{,}258}\, 2{,}5 = 5{,}85$$

$$a_3 = \frac{3{,}00 - 3\,(3{,}00 - 2{,}934)}{3{,}00 - 2{,}934}\, 2{,}50 = 106{,}12 \quad , \quad a_4 = a_5 = \infty$$

Le lunghezze σ_m e δ_m delle sbarre S_m e D_m si deducono rispettivamente dalle (352) (353), cioè

$$\sigma_1 = \sqrt{(2{,}258 - 0)^2 + 2{,}5^2} = 3{,}368 \qquad \delta_2 = \sqrt{2{,}258^2 + 2{,}5^2} = 3{,}368$$

$$\sigma_2 = \sqrt{(2{,}934 - 2{,}258)^2 + 2{,}5^2} = 2{,}588 \qquad \delta_3 = \sqrt{2{,}934^2 + 2{,}5^2} = 3{,}855$$

$$\sigma_3 = \sqrt{(3{,}00 - 2{,}934)^2 + 2{,}5^2} = 2{,}501 \qquad \delta_4 = \sqrt{3{,}00^2 + 2{,}5^2} = 3{,}9$$

$$\sigma_4 = \sigma_5 = \lambda = 2{,}5 \qquad \delta_5 = \sqrt{3{,}00^2 + 2{,}5^2} = 3{,}9$$

α) NERVATURE. — Il peso totale per ogni nodo è

$$Q = 1620 + 6500 = 8120 \text{ Kg.}$$

I bracci di leva s_m ed i_m sono dati dalle (355) (356), cioè

$$s_1 = \frac{2{,}258}{3{,}368}\,2{,}5 = 1{,}68 \qquad i_1 = 0$$

$$s_2 = \frac{2{,}934}{2{,}588}\,2{,}5 = 2{,}83 \qquad i_2 = 2{,}258$$

$$s_3 = \frac{3{,}00}{2{,}501}\,2{,}5 = 3{,}00 \qquad i_3 = 2{,}934$$

$$s_4 = 3{,}00 \qquad i_4 = 3{,}00$$

$$s_5 = 3{,}00 \qquad i_5 = 3{,}00$$

Per il calcolo delle tensioni si ricorre alle (389) (390) che si pongono sotto la forma:

$$S_m = -\frac{8120 \times 2{,}5}{2}\,\frac{m\,(9 - m)}{s_m} = -10150\,\frac{m\,(9 - m)}{s_m}$$

$$I_m = \frac{8120 \times 2{,}5}{2}\,\frac{(m - 1)\,(9 + 1 - m)}{i_m} = 10150\,\frac{(m - 1)\,(10 - m)}{i_m}$$

da cui

$$S_1 = -10150\,\frac{1\,(9 - 1)}{1{,}68} = -48333 \qquad I_1 = 10150\,\frac{(1 - 1)(10 - 1)}{0} \qquad I_1 = I_2 = +35961$$

$$S_2 = -10150\,\frac{2\,(9 - 2)}{2{,}83} = -50212 \qquad I_2 = 10150\,\frac{(2 - 1)(10 - 2)}{2{,}258} = +35961$$

$$S_3 = -10150\,\frac{3\,(9 - 3)}{3{,}00} = -60900 \qquad I_3 = 10150\,\frac{(3 - 1)(10 - 3)}{2{,}934} = +48432$$

$$S_4 = -10150\,\frac{4\,(9 - 4)}{3{,}00} = -67666 \qquad I_4 = 10150\,\frac{(4 - 1)(10 - 4)}{3{,}00} = +60900$$

$$S_5 = -10150\,\frac{5\,(9 - 5)}{3{,}00} = -67666 \qquad I_5 = 10150\,\frac{(5 - 1)(10 - 5)}{3{,}00} = +67666$$

β) Traliccio. — I bracci di leva d_m e v_m si calcolano rispettivamente colle (357) (358), da cui

$$v_1 = 0 + 2{,}5 = 2{,}5 \quad , \quad v_2 = 5{,}85 + 2 \times 2{,}5 = 10{,}85$$

$$v_3 = 106{,}12 + 3 \times 2{,}5 = 113{,}62 \quad , \quad v_4 = v_5 = \infty$$

$$d_1 = 2{,}5 \frac{0}{2{,}5} = 0 \quad , \quad d_2 = 10{,}85 \frac{2{,}258}{3{,}368} = 7{,}27$$

$$d_3 = 113{,}62 \frac{2{,}934}{3{,}855} = 86{,}47 \quad , \quad d_4 = d_5 = \infty$$

Le tensioni (*mas*) delle diagonali si calcolano colle (391) (392) che si pongono sotto la forma:

$$D_{m(mas)} = \left\{ \frac{2 \times 1620 + 7750}{2 \times 9 \,(0{,}209 + 1)} (9 - m)(9 + 1 - m) \right\} \frac{a_m}{d_m}$$

$$D_{m(mas)} = 505 \,(9 - m)(10 - m) \frac{a_m}{d_m} \qquad (*)$$

$$D_{m(mas)} = \left\{ \frac{1620}{2} (9 + 1 - 2m) + \frac{7750}{2 \times 9} (9 - m)(9 + 1 - m) \right\} \frac{\sqrt{3{,}0^2 + 2{,}5^2}}{3{,}0}$$

$$D_{m(mas)} = \left\{ 810 \,(10 - 2m) + 430{,}6 \,(9 - m)(10 - m) \right\} 1{,}3 \qquad (*)$$

da cui

$$D_2 = 505 \,(9 - 2)(10 - 2) \frac{5{,}85}{7{,}27} = + 22756$$

$$D_3 = 505 \,(9 - 3)(10 - 3) \frac{106{,}12}{86{,}47} = 26030$$

$$D_4 = \left[810 \,(10 - 8) + 430{,}6 \,(9 - 4)(10 - 4)\right] 1{,}3 = + 18900$$

$$D_5 = \left[810 \,(10 - 10) + 430{,}6 \,(9 - 5)(10 - 5)\right] 1{,}3 = + 11196$$

$$D_6 = \left[810 \,(10 - 12) + 430{,}6 \,(9 - 6)(10 - 6)\right] 1{,}3 = + 4612$$

e per la tensione (*mas*) delle controdiagonali si ricorre alle (393), cioè

$$C_4 = D_{(10-4)} = D_6 = + 4612 \quad , \quad C_5 = D_{(10-5)} = D_5 = + 11196$$

Le tensioni (*mas*) delle verticali si deducono dalle (394) (394*a*) che si pongono sotto la forma:

$$V_{m(mas)} = \left[\begin{array}{l} 810 \left\{ 2{,}5 \,(m + 1)\, m - (8 - 2m)\, a_m \right\} + \\ + 430{,}6 \,(m + 1)\, m \,(a_m + 22{,}5) \end{array} \right] \frac{1}{v_m}$$

$$V_{m(mas)} = 810 \,(8 - 2m) + 430{,}6 \, m \,(m + 1)$$

da cui

$$V_1 = \left[\begin{matrix} 810 \left\{ 2{,}5\ (1+1)\ 1 - (8-2)\ 0 \right\} + \\ + 430{,}6\ (1+1)\ 1\ (0+22{,}5) \end{matrix} \right] \frac{1}{2{,}5} = +\ 9370$$

$$V_2 = \left[\begin{matrix} 810 \left\{ 2{,}5\ (2+1)\ 2 - (8-4)\ 5{,}85 \right\} + \\ + 430{,}6\ (2+1)\ 2\ (5{,}85+22{,}5) \end{matrix} \right] \frac{1}{10{,}85} = +\ 6123$$

$$V_3 = \left[\begin{matrix} 810 \left\{ 2{,}5\ (3+1)\ 3 - (8-6)\ 106{,}12 \right\} + \\ + 430{,}6\ (3+1)\ 3\ (106{,}12+22{,}5) \end{matrix} \right] \frac{1}{113{,}62} = +\ 4550$$

$$V_4 = 810\ (8-8) + 430{,}6 \times 4\ (4+1) = +\ 8612.$$

Le tensioni (*min*) delle verticali sono date dalle (395) (395*a*) che si pongono sotto la forma:

$$V_{m\,(min)} = \left[\begin{matrix} 810 \left\{ 2{,}5\ (m+1)\ m - (8-2\,m)\ a_m \right\} - \\ - 430{,}6\ (9-m)\ (8-m)\ a_m \end{matrix} \right] \frac{1}{v_m}$$

$$V_{m\,(min)} = -\ 810\ (8-2\,m) - 430{,}6\ (9-m)\ (8-m)$$

da cui

$$V_1 = \left[\begin{matrix} 810 \left\{ 2{,}5\ (1+1)\ 1 - (8-2)\ 0 \right\} - \\ 430{,}6\ (9-1)\ (8-1)\ 0 \end{matrix} \right] \frac{1}{2{,}5} = +\ 1620$$

$$V_2 = \left[\begin{matrix} 810 \left\{ 2{,}5\ (2+1)\ 2 - (8-4)\ 5{,}85 \right\} - \\ 430{,}6\ (9-2)\ (8-2)\ 5{,}85 \end{matrix} \right] \frac{1}{10{,}85} = -\ 10378$$

$$V_3 = \left[\begin{matrix} 810 \left\{ 2{,}5\ (3+1)\ 3 - (8-6)\ 106{,}12 \right\} - \\ - 430{,}6\ (9-3)\ (8-3)\ 106{,}12 \end{matrix} \right] \frac{1}{113{,}62} = -\ 13364$$

$$V_4 = -\ 810\ (8-8) - 430{,}6\ (9-4)\ (8-4) = -\ 8612$$

La **Fig. 459** rappresenta il diagramma delle tensioni delle sbarre alla parte sinistra.

3. Procedimento grafico.

281. Forma della trave (Tav. 59). — In queste travi parte del contorno poligonale è inscritto in una iperbola di cui le sbarre verticali sono altrettante ordinate. Per determinare la forma della trave bisogna procurarsi le altezze di tali ordinate e perciò è necessario di fissare la porzione dell'assintoto verticale, ossia la sua distanza x dall'estremo corrispondente della trave, che è dato dalla (385), cioè:

$$x = -\frac{p}{k'}\,l$$

per risolvere la quale, data la lunghezza l della trave bisogna determinare il valore dei carichi unitari permanente p ed accidentale k' colle solite norme.

Il valore di x si costruisce graficamente nel modo indicato dalla Fig. 7 (**Tav. 59**), portando i segmenti **op** ed **ok'** rappresentanti i carichi p e k' in una *qualsivoglia scala*. Nella Fig. 8 (**Tav. 59**), che si prende per esempio, si è assunta per le forze la scala di 2 centimetri per tonnellata e per le lunghezze la scala di 5 millimetri per metro. Stabiliti poscia il numero N e l'ampiezza λ degli scomparti si innalzano le verticali v_1h_1, v_2h_2, v_3h_3,..... dai nodi inferiori. Valendosi del procedimento indicato a pagina 587 si determina qual'è la verticale di massima altezza ed a questa si attribuisce l'altezza h_{mas} che si vuol assegnare alla trave. Per la trave considerata, la verticale di massima altezza è la terza, per la quale si è preso h_{mas} = metri 3,00. Si congiunge l'estremo **A** della trave col capo h_3 della verticale di massima altezza tagliando così le verticali v_1h_1, v_2h_2,..... nei punti 1, 2,..... per i quali si fanno passare delle rette con l'origine nel punto **o** e prolungandole fino all'incontro della verticale di massima altezza v_3h_3 si determinano i punti m_1, m_2,..... per i quali si fanno passare delle rette aventi l'origine nell'estremo **B** della trave, le quali prolungate fino all'incontro delle verticali v_1h_1, v_2h_2 ne limitano la cercata altezza.

Determinate le altezze delle verticali per uno degli estremi poligonali della trave, si trasportano nell'altro estremo onde costruire l'intero contorno poligonale, Fig. 8 (**Tav. 59**). Si completa poscia il sistema di traliccio come rappresenta la Fig. 1 (**Tav. 59**).

282. Calcolo delle tensioni. — Essendo simmetrica la trave basta valutare le tensioni per la parte centrale rettilinea e per uno solo degli estremi poligonali considerando in queste porzioni le diagonali tutte inclinate in un senso. Nella Fig. 1 (**Tav. 59**), le diagonali si innalzano a sinistra, avendosi anche considerato la porzione di sinistra della trave. I carichi sui nodi si valutano colle solite norme, ed assumendo gli stessi dati dell'esempio a pagina 592 si deve prendere:

$$P = 1620 \text{ Kg.} \quad , \quad K = 6500 \text{ Kg.} \quad , \quad K' = 7750 \text{ Kg.}$$

α) **Nervature.** — Costruita la retta poligono dei carichi totali $Q = P + K$, ed individuate le reazioni d'appoggio A_q e B_q fra di loro eguali, si costruisce il diagramma delle tensioni seguendo il procedimento delle figure reciproche, come appunto si è fatto nella Fig. 2 (**Tav. 59**), per la quale si è presa la scala delle forze di 2 millimetri per tonnellata.

Misurando i segmenti corrispondenti alle sbarre S ed I di contorno, per la mezza trave, se ne deducono speditamente le tensioni.

β) **Traliccio.** — Per ogni sbarra del traliccio si deve valutare due tensioni, cioè la (*mas*) e la (*min*) dipendenti dalla direzione nella quale si muove il carico accidentale.

Nel *movimento da destra a sinistra* il carico accidentale origina le tensioni (*mas*) nelle diagonali e le tensioni (*min*) nelle verticali, mentre la parte di trave scarica è sempre quella di sinistra per cui devesi valutare la reazione variabile A_k dell'appoggio di sinistra. Perciò sopra un asse orizzontale **A B** si segnano gli scomparti della trave e si innalzano le relative verticali **v v v**....., Fig 3 (**Tav. 59**) parte superiore. Sulla verticale che si innalza dall'estremo **A** si costruisce la retta dei carichi K′ e preso l'estremo **B** per polo, e quindi la lunghezza **A B** della trave per distanza polare, mediante il relativo fascio di raggi si costruisce il poligono funicolare, di cui le ordinate dei vertici rappresentano i successivi valori della reazione A_k per le corrispondenti diagonali di destra.

1) **Diagonali.** — Si individuano nel modo noto le risultanti R, come si è fatto nella Fig. 1 (**Tav. 59**), ricordando che per gli scomparti centrali esse sono orizzontali. Per il capo delle ordinate **v** si guidano delle parallele alle corrispondenti diagonali e per il piede di esse ordinate si tirano delle parallele alle relative risultanti R, completando così i *triangoli d'equilibrio*, i cui lati paralleli alle diagonali ne dànno la tensione (*mas*) prodotta dal carico accidentale.

Per il carico permanente, essendo carico completo su tutti i nodi, basta ricorrere al diagramma Fig. 2 (**Tav. 59**), dal quale si deducono le tensioni permanenti delle diagonali con opportuna riduzione di scala. Basta cioè ridurre i segmenti D_2, D_3, D_4 nel rapporto di P : Q, come si è fatto nella Fig. 4 (**Tav. 59**), nella quale i segmenti **O P** ed **O Q**, proporzionali ai carichi P e Q, pos-

sono portarsi in una scala qualunque, e si è preso 1 centimetro per tonnellata. I segmenti $Q D_2$, $Q D_3$, $Q D_4$,..... sono riportati dal diagramma Fig. 2 (**Tav. 59**), e dal punto **P** guidando tante parallele si deducono i segmenti $P d_2$, $P d_3$, $P d_4$,..... che nella scala dello stesso diagramma Fig. 2 (**Tav. 59**) (2 millimetri per tonnellata) porgono le tensioni permanenti delle diagonali, le quali si sommano algebricamente colle tensioni accidentali, come si è fatto nella Fig. 3 (**Tav. 59**).

2) **Verticali.** — Dal capo delle ordinate **v** guidando delle rette ai rispettivi punti **o** (intersezioni delle sbarre S colle I), intercettano nella verticale che si innalza da **A** dei segmenti che porgono la tensione accidentale (*min*) delle corrispondenti verticali, i quali projettati sulle verticali **v**, individuano la tensione nel posto stesso della sbarra.

Per le tensioni prodotte dal carico permanente basta ricorrere al diagramma Fig. 2 (**Tav. 59**), operando nel modo già indicato per le diagonali, come rappresenta la Fig. 5 (**Tav. 59**). I segmenti $P v_2$, $P v_3$, $P v_4$,..... porgono le tensioni permanenti che si sommano algebricamente colle tensioni accidentali nella Fig. 3 (**Tav. 59**), partendo dall'asse **A B**.

Per il *movimento del carico accidentale da sinistra a destra*, che origina le tensioni (*min*) nelle diagonali e le tensioni (*mas*) nelle verticali, si opera in modo analogo, come si è fatto nella parte inferiore della Fig. 3 (**Tav. 59**), dalla quale si scorge che le tensioni permanenti ed accidentali delle diagonali D_2 e D_3 sono eguali e di segno contrario, per cui dànno una tensione totale (*min*) nulla, come deve essere appunto nelle travi SCHWEDLER.

3) **Controdiagonali.** — Per le controdiagonali della parte centrale rettilinea, che nella Fig. 1 (**Tav. 59**) sono indicate con linee a tratti, non occorrono particolari costruzioni, e basta ricordare la relazione (393).

$$C_m = D_{(N+1-m)}$$

che porge speditamente il valore delle loro tensioni.

Misurati i segmenti proporzionali alle tensioni, nella scala delle forze, se ne deducono i valori numerici. Nella Fig. 6 (**Tav. 59**), sono annotate nella parte destra le lunghezze di questi segmenti, e nella parte sinistra le tensioni.

Travi Pauli.

1. Procedimento numerico.

283. Forma della trave. — Nella effettiva costruzione è certo di molto vantaggio che le nervature mantengano una sezione costante. Perchè tale conformazione possa venir adottata senza spreco di materiale, è necessario che ogni sbarra delle nervature sia cimentata colla stessa tensione massima. Questa condizione può venire soddisfatta soltanto allora che le due nervature sieno egualmente ripiegate, ossia simmetricamente disposte rispetto all'orizzontale che passa per gli estremi della trave. Per avere una tal forma di trave bisogna porre la condizione che le tensioni massime di ciascheduna sbarra di ambe le nervature (che si verificano per carico completo) abbiano un valore costante, il quale si indica con C.

Queste travi si chiamano *travi Pauli* essendo state ideate dall'Ingegnere Pauli. L'impalcato può esser posto sopra le travi o sotto le stesse, ma per risparmiare il materiale accessorio che si dovrebbe impiegare per sostenerlo, è opportuno di collocare l'impalcato in corrispondenza all'asse orizzontale delle travi, come usasi generalmente.

Si consideri nella **Fig. 460** lo scomparto m^{mo}. Le tensioni delle corrispondenti sbarre S_m ed I_m delle nervature superiore ed inferiore, devono avere un valore costante, e cioè $S_m = I_m = C$. Si determini la tensione massima della sbarra S_m, che si verifica per carico completo, al quale scopo preso per polo il punto d di incontro delle due sbarre D_m ed I_m, e condotto il piano di sezione, si considera la parte di trave che sta a sinistra del medesimo. Sia A la reazione totale dell'appoggio di sinistra e Q il carico totale per ogni nodo; si ha l'equazione dei momenti

$$S_m s_m + A\, m\lambda - Q\left\{(m-1)\lambda + (m-2)\lambda + \cdots\cdots + \lambda\right\} = 0$$

da cui

$$S_m s_m = \frac{m\,(m-1)}{2} Q\lambda - A\, m\lambda$$

e siccome è

$$A = \frac{N-1}{2} Q$$

nelle quali N, Q, λ conservano i soliti significati, sostituendo si ottiene

$$S_m = -\frac{Q\lambda}{2 s_m} m (N - m) \qquad (396)$$

α) **Numero dispari di scomparti.** — Supponendo un numero N dispari di scomparti, come si usa di solito in pratica, e ponendo $N = 2n - 1$, nella mezzaria si ha lo scomparto n^{mo} che resta compreso fra le verticali di massima altezza $h_{n-1} = h_n = h_{mas}$. Considerata la sbarra S_n di questo scomparto, che è orizzontale e parallela alla I_n, si vede che il braccio di leva della relativa tensione è $s_n = h_n = h_{mas}$ e quindi ponendo nella (396)

$$m = n = \frac{N+1}{2}$$

si ha

$$S_n = -\frac{Q\lambda}{8 h_{mas}} (N^2 - 1)$$

Un'eguale espressione, ma di segno contrario, si ha per la tensione I_n; ed è facile scorgere che per essere $(N^2 - 1)$ una quantità positiva la S_n ha valore negativo, cioè indica uno sforzo di *compressione*, mentre I_n ha valore positivo, cioè denota uno sforzo di *trazione*.

Ora l'altezza comune alle due verticali h_{n-1} ed h_n, che è la massima, si prende a priori, e di solito eguale ad $^1/_7$ della portata l della trave, con che S_n è pienamente determinata; e poichè la tensione delle sbarre delle nervature deve essere costante, così il valore di S_n rappresenta quello della tensione costante C di una qualunque di dette sbarre, cioè

$$C = \frac{Q\lambda}{8 h_{mas}} (N^2 - 1) \qquad (397)$$

Dalla (396) si ricava $s_m = \frac{Q\lambda}{S_m} \frac{m(N-m)}{2}$ e sostituendo per S_m il

valore costante C risulta:

$$s_m = \frac{4\,m\,(N - m)}{N^2 - 1}\,h_{mas} \qquad (398)$$

mediante la quale si deducono i bracci s_1, s_2, s_3,..... delle altre sbarre così che esse ricevono una tensione costante.

Noti i bracci di leva è facile determinare l'altezza di tutte le verticali della trave, difatti chiamando σ_m la lunghezza della m^{ma} sbarra delle nervature, si ha $\lambda : \sigma_m = s_m : h_m$ da cui $h_m = \frac{\sigma_m\, s_m}{\lambda}$ e siccome è

$$\sigma_m = \sqrt{\lambda^2 + \frac{1}{4}\,(h_m - h_{m-1})^2}$$

sostituendo risulta

$$h_m = \frac{s_m}{\lambda}\sqrt{\lambda^2 + \frac{1}{4}\,(h_m - h_{m-1})^2} \qquad (399)$$

e quindi una volta nota l'altezza della verticale h_{m-1} se ne deduce quella della verticale h_m. Innalzando al quadrato la (399), sviluppando ed ordinando secondo le potenze della variabile h_m, risulta

$$h_m^2 + h_m\left(\frac{2\,h_{m-1}\,s_m^2}{4\,\lambda^2 - s_m^2}\right) = s_m^2\,\frac{h_{m-1}^2 + 4\,\lambda^2}{4\,\lambda^2 - s_m^2}$$

e ponendo per brevità

$$\frac{h_{m-1}\,s_m^2}{4\,\lambda^2 - s_m^2} = \alpha \quad , \quad s_m^2\,\frac{h_{m-1}^2 + 4\,\lambda^2}{4\,\lambda^2 - s_m^2} = \beta \qquad (400)$$

si ottiene $h_m^2 + 2\,\alpha\,h_m = \beta$ risolvendo la quale si trova

$$h_m = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta} \qquad (401)$$

Considerando che nel primo scomparto non esiste la verticale di indice $m - 1$, cioè la relativa altezza è $h_0 = 0$, è facile dedurre l'altezza della prima verticale h_1. Difatti ponendo nelle (398) (399) $s_m = s_1$ ed $h_{m-1} = h_0 = 0$ si trova:

$$\alpha = 0 \quad , \quad \beta = \frac{s_1^2\,4\,\lambda_1^2}{4\,\lambda^2 - s_1^2}$$

e sostituendo nella (401) risulta:

$$h_1 = \sqrt{\frac{s_1^2 4\lambda^2}{4\lambda^2 - s_1^2}} = \frac{2 s_1 \lambda}{\sqrt{4\lambda^2 - s_1^2}}$$

Nota l'altezza della verticale h_1 si passa a calcolare quella della h_2 e così di seguito fino alle $h_{n-1} = h_n = h_{mas}$, che sono le verticali mediane ed in tal modo si determina la forma della trave.

β) **Numero pari di scomparti.** — Ponendo il numero pari di scomparti $N = 2n$ lo scomparto che precede la mezzaria è quello di indice n, ed allora si ha una sola verticale di massima altezza, **Fig. 461**, che coincide appunto colla mezzaria, cioè $h_n = h_{mas}$. In questo caso non sussiste più la relazione $s_n = h_{mas}$ e quindi le (397) (398) non sono più applicabili. Considerato però che s_n è assai poco minore di h_n si può prendere s_n a priori eguale a circa $^1/_7$ della lunghezza l della trave, ponendo in generale $s_n = \alpha\, l$, con che anche l'altezza massima della trave avrà assai prossimamente il rapporto α con la lunghezza della medesima. Il braccio s_n inoltre è anche il braccio di massima grandezza e quindi

$$s_n = s_{mas} = \alpha\, l \qquad (402)$$

Posto questo valore nella (396), nonchè $m = n = \frac{N}{2}$ ed S_n in luogo di S_m essa diventa

$$S_n = -\frac{Q\lambda}{8\, s_{mas}} N^2 \qquad (I)$$

la quale, una volta assunto il valore di s_{mas}, è pienamente determinata e rappresenta il valore costante C della tensione delle sbarre delle nervature, per cui è

$$C = \frac{Q\lambda}{8\, s_{mas}} N^2 \qquad (403)$$

Dalla (396) si ricava

$$s_m = -\frac{Q\lambda}{2\, S_m} m\,(N - m)$$

nella quale posto per S_m il valore costante dato dalla (403), si ottiene

$$s_m = \frac{4\,m\,(N-m)}{N^2}\,s_{mas} \qquad (404)$$

mediante la quale si determinano i bracci di leva s_1, s_2, s_3,..... delle altre sbarre, le quali in questo modo ricevono una tensione costante.

Noti i bracci di leva s_m si determinano le altezze h_m di tutte le verticali mediante le (400) (401) determinate in α) e seguendo lo stesso procedimento.

284. Calcolo delle tensioni mediante le equazioni dei momenti statici. — Si determina prima i carichi sui nodi P, K, K′.

Per le *nervature* basta calcolare la costante tensione mediante le (397) (403).

Per il *traliccio* bisogna considerare separatamente i sistemi semplici dissimetrici che lo compongono, assumendo sui nodi i carichi $P_o = {}^1/_2\,P$, $K_o' = {}^1/_2\,K'$. Determinate le tensioni delle sbarre, mediante le relative equazioni dei momenti statici, nei sistemi semplici, vedesi manifestamente che esse si conservano anche nel sistema composto per le diagonali, mentre le verticali, similmente a quanto succede nelle travi diritte con diagonali incrociate stirate e compresse, sono soggette ad una tensione eguale per tutte.

Il carico permanente per metro corrente di ponte si valuta colla

$$p = 28\,l + 450 \qquad (405)$$

Esempio.

α) Forma della trave. — Si fa applicazione al ponte sul Danubio presso Passau, **Tav. 40.** — La portata delle travi è $l =$ metri 26,52, e sono divise in $N = 7$ eguali scomparti di lunghezza $\lambda = {}^1/_7\,26{,}52 = 3{,}79$. L'altezza della trave in mezzaria è $h_{mas} = 3{,}9$ e quindi risulta $h_{n-1} = h_{mas} = h_3 = 3{,}9$, **Fig. 462.** Si cominci dal formare i valori dei bracci s_m col mezzo della (398) dalla quale, ponendovi rispettivamente $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$, si ha:

$$s_1 = \frac{4\,(7-1)}{7^2-1}\,3{,}9 = 1{,}95 \quad , \quad s_2 = \frac{4\times 2\,(7-2)}{7^2-1}\,3{,}9 = 3{,}25$$

$$s_3 = \frac{4\times 3\,(7-3)}{7^2-1}\,3{,}9 = 3{,}9$$

Per calcolare l'altezza h_1 della prima verticale si formano i coefficenti α e β mediante le (400), nelle quali si deve porre $h_{m-1} = h_0 = 0$, $s_m = s_1 = 1{,}95$, $\lambda = 3{,}79$, e si ottiene

$$\alpha = 0 \quad , \quad \beta = \frac{1{,}95^2 \times 4 \times 3{,}79^2}{4 \times 3{,}79^2 - 1{,}95^2} = 4{,}07$$

e quindi valendosi della (401) risulta

$$h_1 = -0 + \sqrt{0 + 4{,}07} = 2{,}017.$$

Per la seconda verticale è

$$\alpha = \frac{h_1 s_2^2}{4\lambda^2 - s_2^2} = \frac{2{,}017 \times 3{,}25^2}{4 \times 3{,}79^2 - 3{,}25^2} = 0{,}4545$$

$$\beta = s_2^2 \frac{h_1^2 + 4\lambda^2}{4\lambda^2 - s_2^2} = 3{,}25^2 \frac{2{,}017^2 + 4 \times 3{,}79^2}{4 \times 3{,}79^2 - 3{,}25^2} = 13{,}857$$

da cui

$$h^2 = -0{,}4545 + \sqrt{0{,}4545^2 + 13{,}857} = 3{,}295$$

Per la terza verticale (che è quella di indice $n - 1$ poichè, per essere $N = 2n - 1$, diventa $n - 1 = \frac{N-1}{2}$, cioè $n - 1 = \frac{7-1}{2} = 3$) è

$$\alpha = \frac{h_2 s_3^2}{4\lambda^2 - s_3^2} = \frac{3{,}295 \times 3{,}9^2}{4 \times 3{,}79^2 - 3{,}9^2} = 1{,}19$$

$$\beta = s_3^2 \frac{h_2^2 + 4\lambda^2}{4\lambda^2 - s_3^2} = 3{,}9^2 \frac{3{,}295^2 + 4 \times 3{,}79^2}{4 \times 3{,}79^2 - 3{,}9^2} = 24{,}59$$

da cui

$$h_3 = -1{,}19 + \sqrt{1{,}19^2 + 24{,}59} = 3{,}90$$

β) Calcolo delle tensioni. — Si premette la ricerca dei carichi permanente e mobile per metro corrente di trave. Quello *permanente* è dato dalla (405) $p = {}^1/_2 (28 \times 26{,}52 + 450) = 596{,}28$ chilogrammi ed in cifra rotonda $p = 600$; e l'accidentale si può prendere (ricorrendo alla tabella L $k = {}^1/_2\, 4900 = 2450$ chilogrammi e $k' = {}^1/_2\, 5800 = 2900$ chilogrammi.

Nervature. — Il calcolo delle tensioni delle sbarre di entrambe le nervature è speditissimo, inquantochè ognuna di esse ha la stessa tensione data dalla (397) e quindi ricordando essere $Q = \lambda (p + k)$, $\lambda = 3{,}79$, $h_{mas} = 3{,}9$, $N = 7$, risulta:

$$C = \frac{(600 + 2450)\, 3{,}79^2}{8 \times 3{,}9} (7^2 - 1) = 67400 \text{ Kg.}$$

Traliccio. — Si considera dapprima il sistema semplice a traliccio dissimetrico con le diagonali che si innalzano da destra verso sinistra, **Fig. 463***a*,

e calcolate le tensioni del medesimo si deducono quelle del sistema semplice con le diagonali inclinate in senso inverso, **Fig. 463***b* dopodichè è facile assegnare le tensioni massime delle singole sbarre della trave completa, **Fig. 463***c*. Valgono poi le stesse osservazioni fatte per le travi diritte a pagina 443.

2. Formule generali.

285. Calcolo delle tensioni col mezzo di formule. — Si consideri lo scomparto m^{mo} di una trave, **Fig. 460, 461**, avendo premessa la valutazione dei carichi P, K, K′.

α) **Nervature.** — Per la forma stessa della trave la tensione è costante in tutte le sbarre e per calcolarla, detta C, servono le espressioni già determinate nel § **283**, cioè

Numero **pari** *di scomparti* $$C = \mp \frac{(P + K)\,\lambda}{8\,s_{mas}}\,N^2 \qquad (406)$$

» **dispari** » $$\begin{cases} C = \mp \dfrac{(P + K)\,\lambda}{8\,h_{mas}}\,(N^2 - 1) & (407) \\ C = \mp \dfrac{(P + K)\,\lambda}{8\,s_{mas}}\,(N^2 - 1) & (408) \end{cases}$$

Servendo il segno — per le sbarre della nervatura superiore ed il segno + per quelle della nervatura inferiore.

Osservazione. — Adottando la (407) bisogna vincolare l'altezza massima della trave, ed allora la tensione delle sbarre di indice n riesce alquanto differente dalla tensione costante C.

Adottando la (406) col scegliere a priori la grandezza del braccio s_{mas} resta indeterminata l'altezza massima della trave h_{mas}, la quale però differisce assai poco da s_{mas}.

β) **Traliccio.** — Si devono considerare separatamente i due sistemi semplici dissimetrici che costituiscono il composto, per i quali i carichi sui nodi si devono prendere

$$P_0 = \frac{1}{2}\,P \quad , \quad K'_0 = \frac{1}{2}\,K'$$

Le *diagonali che s'innalzano a sinistra*, indicate con D^s, siano quelle che appartengono al primo sistema semplice.

Le relative tensioni sono date dalle (105) (106) purchè si pongano dimezzati i carichi sui nodi del sistema composto

$$D^s_{m(mas)} = \left[\frac{P}{4} \left\{ (N+1-2m) - a_m \lambda m (m-1) \right\} + \right. \\ \left. + \frac{K'}{4} \frac{(N-m)(N+1-m) a_m}{N} \right] \frac{1}{d_m} \quad (409)$$

$$D^s_{m(min)} = \left[\frac{P}{4} \left\{ (N+1-2m) a_m - \lambda m (m-1) \right\} - \right. \\ \left. - \frac{K'}{4} \frac{m (m-1) (a_m + N\lambda)}{N} \right] \frac{1}{d_m} \quad (410)$$

Le *diagonali che si innalzano a destra*, indicate con D^d, sono necessariamente quelle che appartengono al secondo sistema. Considerato che il secondo sistema non è altro che il primo girato di posizione così che l'estremo di destra passi a sinistra e viceversa, vedesi che queste diagonali ricevono tensioni eguali a quelle del sistema precedente. Siccome però le tensioni delle diagonali D^d hanno direzione inversa di quelle delle D^s, per cui mentre la componente verticale di quest'ultime è diretta all'ingiù, quella delle prime è diretta all'insù, ne viene che le tensioni delle une sono di natura contraria a quella delle altre per la stessa posizione del carico mobile.

È facile dunque stabilire le relazioni

$$D^d_{m(mas)} = - D^s_{m(min)} \quad , \quad D^d_{m(min)} = - D^s_{m(mas)} \quad (411)$$

mediante le quali si deducono speditamente le tensioni delle diagonali D^d che si innalzano a destra, una volta che sieno note quelle delle diagonali D^s che si innalzano a sinistra.

Ritenuto l'impalcato posto lungo l'asse della trave e quindi i carichi applicati a metà altezza delle *verticali* necessariamente anche le tensioni di queste sbarre nei due sistemi assumerebbero corrispondentemente valori eguali e di segno contrario, poichè le distanze a'_m si conservano le stesse nei due sistemi. In conseguenza le verticali nel sistema composto avrebbero la tensione nulla. Ma poichè le verticali devono riportare i carichi loro direttamente applicati per metà alla nervatura superiore e per metà

all'inferiore, ne viene che la loro parte superiore riesce stirata e l'inferiore compressa con uno sforzo che è eguale per tutte, cioè quando il nodo è scarico sono soggette alla tensione

$$V_{\binom{min}{mas}} = \pm P_0 = \pm \frac{1}{2} P \qquad (412)$$

e quando il nodo è carico ricevono la tensione

$$V_{\binom{mas}{min}} = \pm (P_0 + K_0') = \pm \frac{1}{2} (P + K') \qquad (413)$$

prendendo i segni superiori per la parte superiore e gli inferiori per la parte inferiore.

Esempio.

Si assumono i dati dell'esempio precedente, per cui è

$$N = 7 \ , \ \lambda = 3{,}79 \ , \ h_1 = 2{,}017 \ , \ h_2 = 3{,}295 \ , \ h_3 = h_{mas} = 3{,}90$$

$$P = 600 \times 3{,}79 = 2274 \ , \ K = 2450 \times 3{,}79 = 9285 \ , \ K' = 2900 \times 3{,}79 = 10991$$

i quali carichi si arrotondano nei seguenti valori:

$$P = 2270 \text{ Kg.} \ , \ K = 9290 \text{ Kg.} \ , \ K' = 10990 \text{ Kg.}$$

α) Nervature. — La tensione costante per tutte le sbarre si calcola colla (407) cioè

$$C = \mp \frac{(2270 + 9290)\, 3{,}79}{8 \times 3{,}9} (7^2 - 1) = \mp 67400 \text{ Kg.}$$

β) Traliccio. — Le lunghezze δ_m ed i bracci di leva d_m delle diagonali si calcolano mediante le (360) (364), cioè:

$$\delta_2 = \sqrt{\left(\frac{2{,}017 + 3{,}295}{2}\right)^2 + 3{,}79^2} = 4{,}63 \qquad d_2 = \frac{3{,}295 \times 2{,}017 \times 3{,}79}{(3{,}295 - 2{,}017)\, 4{,}63} = 4{,}26$$

$$\delta_3 = \sqrt{\left(\frac{3{,}295 + 3{,}9}{2}\right)^2 + 3{,}79^2} = 5{,}22 \qquad d_3 = \frac{3{,}9 \times 3{,}295 \times 3{,}79}{(3{,}9 - 3{,}295)\, 5{,}22} = 15{,}38$$

$$\delta_4 = \sqrt{3{,}9^2 + 3{,}79^2} = 5{,}44 \qquad d_4 = \infty$$

le distanze a_m sono date dalla (361), cioè

$$a_2 = \frac{3{,}295 - 2\,(3{,}295 - 2{,}017)}{3{,}295 - 2{,}017}\,3{,}79 = 2{,}19$$

$$a_3 = \frac{3{,}9 - 3\,(3{,}9 - 3{,}295)}{3{,}9 - 3{,}295}\,3{,}79 = 13{,}06$$

$$a_4 = \infty$$

La tensione (*mas*) delle *diagonali che s'innalzano a sinistra* D^s si calcola colla (409), che si pone sotto la forma:

$$D^s_{m(mas)} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{2270}{4}\left\{(7+1-2m)\,a_m - 3{,}79\,(m-1)\,m\right\} + \\ + \dfrac{10990}{4\times 7}\,(7-m)\,(7+1-m)\,a_m \end{array}\right]\frac{1}{d_m}$$

$$D^s_{m(mas)} = \left[\begin{array}{l} 567{,}5\left\{(8-2m)\,a_m - 3{,}79\,(m-1)\,m\right\} + \\ + 392{,}5\,(7-m)\,(8-m)\,a_m \end{array}\right]\frac{1}{d_m}$$

da cui

Tensioni (*mas*)

$$D^s_2 = \left[\begin{array}{l} 567{,}5\left\{(8-4)\,2{,}19 - 3{,}79\,(2-1)\,2\right\} + \\ + 392{,}5\,(7-2)\,(8-2)\,2{,}19 \end{array}\right]\frac{1}{4{,}26} = +6210$$

$$D^s_3 = \left[\begin{array}{l} 567{,}5\left\{(8-6)\,13{,}06 - 3{,}79\,(3-1)\,3\right\} + \\ + 392{,}5\,(7-3)\,(8-3)\,13{,}06 \end{array}\right]\frac{1}{15{,}39} = +6791$$

$$D^s_4 = \left[567{,}5\,(8-8) + 392{,}5\,(7-4)\,(8-4)\right]\frac{5{,}44}{3{,}90} = +6594$$

La tensione (*min*) delle *diagonali che s'innalzano a sinistra* D^s, si calcola colla (610) che si mette sotto la forma:

$$D^s_{m(min)} = \left[\begin{array}{l} 567{,}5\left\{(8-2m)\,a_m - 3{,}79\,(m-1)\,m\right\} - \\ - 392{,}5\,(m-1)\,m\,(a_m + 26{,}53) \end{array}\right]\frac{1}{d_m}$$

da cui

Tensioni (*min*)

$$D^s_2 = \left[\begin{array}{l} 567{,}5\left\{(8-4)\,2{,}19 - 3{,}79\,(2-1)\,2\right\} - \\ - 392{,}5\,(2-1)\,2\,(2{,}19 + 26{,}53) \end{array}\right]\frac{1}{4{,}26} = -5135$$

$$D^s_3 = \left[\begin{array}{l} 567{,}5\left\{(8-6)\,13{,}06 - 3{,}79\,(3-1)\,3\right\} - \\ - 392{,}5\,(3-1)\,3\,(13{,}06 + 26{,}53) \end{array}\right]\frac{1}{15{,}39} = -5933$$

$$D^s_4 = \left[567{,}5\,(8-8) - 392{,}5\,(4-1)\,4\right]\frac{5{,}44}{3{,}9} = -6594$$

Per le *diagonali che s'innalzano a destra* D^d basta ricorrere alle relazioni (411) cioè:

Tensione (*mas*)	Tensione (*min*)
$D_2^d = -(-5135) = +5135$	$D_2^d = -(+6210) = -6210$
$D_3^d = -(-5933) = +5933$	$D_3^d = -(+6791) = -6791$
$D_4^d = -(-6594) = +6594$	$D_4^d = -(+6594) = -6594$

Lo sforzo massimo di tensione delle verticali, eguale per tutte, è dato dalla (413), cioè

$$V_{\binom{mas}{min}} = \pm \frac{1}{2}(2270 + 10990) = \pm 6630$$

ritenendosi il segno + per la metà superiore delle verticali, ed il segno — per la metà inferiore.

3. Procedimento grafico.

286. Forma della trave (Tav. 60). — I bracci di leva delle tensioni S si valutano mediante l'espressione generale dedotta dalla (396).

$$s_m = \frac{Q\lambda}{2C} m(m - N)$$

la quale, posto il fattore costante $\frac{Q}{2C} = C_0$, ed assumendo l'ascissa x di una verticale qualunque $x = m\lambda$ e la lunghezza l della trave $l = N\lambda$, si trasforma nell'altra

$$s_m = C_0 x(x - l) \qquad (414)$$

ed essendo questa l'equazione di una parabola con coordinate (x, s_m) si conclude che i bracci di leva delle tensioni S variano come le ordinate di una parabola.

Siccome il braccio di leva di maggior lunghezza s_{mas} differisce di assai poco dall'altezza massima della trave h_{mas}, così che si può assumere a priori quello in luogo di questa, colla grandezza compresa fra $^1/_6$ ed $^1/_7$ della lunghezza l della trave, riesce perciò

facile e spedita la costruzione grafica della forma della trave; bisogna però aver riguardo al numero N degli scomparti. Stante poi la simmetrica conformazione della trave rispetto alla mezzaria, basta studiare la costruzione per mezza trave soltanto, poichè essa si ripete per l'altra mezza.

α) **Numero pari di scomparti.** — Si prende ad esempio la Fig. 6 (**Tav. 60**), nella quale è $N = 2n = 8$, $n = 4$ e si considera la mezza trave di sinistra. Portati sopra un asse orizzontale gli $n = 4$ scomparti di eguale ampiezza λ, si innalzano le verticali v_1s_1, v_2s_2, v_3s_3, v_4s_4,..... Si assume la grandezza del braccio s_{mas}, che in questo caso è quello di indice $n = 4$, e si porta $^1/_2\, s_4$ sulla verticale mediana v_4s_4 dal punto c_4 all'insù, poi col procedimento indicato al § **275**-α) si determina la grandezza degli altri bracci $s_1 = 2\, c_1s_1$, $s_2 = 2\, c_2s_2$, $s_3 = 2\, c_3s_3$. Con centri c_1, c_2, c_3, c_4, e raggi $^1/_2\, s_1$, $^1/_2\, s_2$, $^1/_2\, s_3$, $^1/_2\, s_4$, si descrivono dei semicerchi. Partendo dall'estremo **A** della trave si guidano due rette tangenti al primo semicerchio finchè intersecano la verticale v_1s_1, dai punti di intersezione si guidano altre due rette tangenti al secondo semicerchio finchè incontrano la verticale v_2s_2, dai nuovi punti di incontro si guidano altre due rette tangenti al terzo semicerchio finchè tagliano la verticale v_3s_3 e così di seguito fino alla mezzaria, con che si costruisce il contorno di mezza trave. Nell'identico modo si costruisce l'altro mezzo contorno.

β) **Numero dispari di scomparti.** — Si prende ad esempio la Fig. 7 (**Tav. 60**), nella quale è $N = 2n + 1 = 7$ e quindi $n = 3$, e si considera la mezza trave di destra. Distribuiti gli $\frac{N}{2} = 3\frac{1}{2}$ scomparti sull'asse orizzontale, innalzate le verticali v_6s_6, v_5s_5, v_4s_4,..... portato s_{mas}, che in questo caso è quello di indice $n + 1 = 4$, sulla verticale corrispondente v_4s_4, dal punto c_4 all'insù, si determinano gli altri bracci $s_5 = 2\, c_5s_5$, $s_6 = 2\, c_6s_6$, seguendo il procedimento indicato al § **275**-β), dopo di che costruiti i semicerchi di centro c_6, c_5, c_4, e condotte successivamente le rispettive tangenti partendo dal punto **B** si costruisce il mezzo contorno di sinistra della trave. Per quello di destra si opera in modo analogo.

Nella Fig. 6 e 7 (**Tav. 60**), non si sono segnati i contorni superiori per lasciare in evidenza la costruzione determinante i bracci s_m.

287. Calcolo delle tensioni. — Costruita la trave nel modo indicato si valutano i carichi sui nodi colle regole ben note, e supponendo i dati dell'esempio a pagina 603 si deve assumere

$$P = 2270 \text{ Kg.} \quad , \quad K = 9290 \text{ Kg.} \quad , \quad K' = 10990 \text{ Kg.}$$

Questi carichi sono applicati circa a mezza altezza delle verticali.

α) **Nervature.** — Si considerino i due sistemi rappresentati nelle Fig. 1*a b* (**Tav. 60**), il cui contorno poligonale è costruito nel modo indicato al § **286**, e caricati ambidue sui nodi corrispondenti alle verticali. I due sistemi sono egualmente conformati e caricati, però il sistema *a* ha il contorno poligonale al disopra ed il sistema *b* invece al disotto, ed inoltre il primo ha caricati i nodi inferiori, il secondo i nodi superiori, essendo Q_0 il carico per ogni nodo.

Per essere il carico completo su tutti i nodi, e quindi costanti le reazioni sugli appoggi, conviene costruire il diagramma delle tensioni col metodo delle figure reciproche. È facile vedere che tanto per l'uno quanto per l'altro si ottiene il diagramma rappresentato dalla Fig. 2 (**Tav. 60**); le tensioni dell'uno però riescono di natura contraria alle corrispondenti tensioni dell'altro pur conservando il medesimo valore in entrambi. Se si immagina ora che i due sistemi si uniscano in uno, così che le sole sbarre orizzontali si sovrapponghino, le tensioni di queste nel sistema composto sarebbero nulle, come risultanti dalla somma algebrica di tensioni eguali, ma di natura contraria. Queste sbarre dunque resterebbero inerti nel sistema composto, per cui togliendole, non rimangono minimamente alterate le condizioni di equilibrio del sistema stesso, e tutte le altre sbarre conserverebbero le proprie tensioni in natura e valore. In questo modo si origina la trave rappresentata nella Fig. 3 (**Tav. 60**), colle nervature simmetriche rispetto all'asse orizzontale e cimentate in ogni nodo con un carico $2\,Q_0 = Q$. Dal diagramma, Fig. 2 (**Tav. 60**), si scorge che le sbarre di contorno S ed I ricevono a due a due tensioni di egual valore, ma di segno opposto, le quali poi sono molto prossimamente eguali fra di loro; cioè la trave conformata nel modo sopraindicato, ha le sbarre di contorno cimentate con una tensione costante per carico completo. Vedesi che ogni scomparto ha le due diagonali che entrano simultaneamente in azione con

tensioni di segno opposto, ma di egual valore, il quale però è piccolo assai.

β) **Traliccio.** — La trave rappresentata nella Fig. 3 (**Tav. 60**), si può anche considerare come originata dalla sovrapposizione di due sistemi poligonali a traliccio dissimetrico semplice, eguali nel contorno, ma con le diagonali inversamente inclinate. Manifestamente si dovranno considerare sui nodi di cadaun sistema dei carichi K_0' di valore eguale a metà del carico effettivo K'. Supposti poi collegati in un tutto i due sistemi semplici, così da originare il composto, le diagonali di quest'ultimo conservano le tensioni che a loro spettano nei sistemi semplici cui appartengono. Basta dunque determinare separatamente le tensioni delle diagonali inclinate in un senso e di quelle inclinate in senso opposto.

1) **Diagonali che si innalzano a sinistra** D^s. — Queste diagonali appartengono al sistema rappresentato nella Fig. 3 (**Tav. 60**).

Nel *movimento del carico mobile da destra a sinistra* si originano le tensioni (*mas*) di queste diagonali; la parte scarica di trave è sempre quella di sinistra, si devono dunque determinare i successivi valori della reazione variabile A_k dell'appoggio di sinistra. Perciò costruita la retta dei carichi K_0', Fig. 4 (**Tav. 60**), nella quale si è adottata la scala di 4 millimetri per tonnellata, condotte le verticali **v, v, v,**..... in corrispondenza ai nodi, presa la lunghezza **A B** della trave come distanza polare e l'estremo **B** come polo del fascio di raggi, si costruisce il poligono funicolare, di cui le ordinate dei vertici rappresentano i cercati valori della reazione A_k. E siccome nell'ultimo scomparto non vi sono diagonali, acciò le dette ordinate si trovino a sinistra delle diagonali corrispondenti bisogna che il primo lato del poligono funicolare non si stacchi dall'estremo **B** bensì dal penultimo nodo.

Prolungate le diagonali D^s, Fig. 3 (**Tav. 60**), fino all'incontro delle verticali passanti per gli estremi della trave si individuano le note risultanti R col procedimento indicato nel § **81**. Dal capo delle ordinate **v** si guidano delle parallele alle corrispondenti diagonali, e dal piede di esse ordinate delle parallele alle rispettive risultanti R, completando così i *triangoli d'equilibrio*. I lati di questi triangoli paralleli alle successive diagonali porgono le loro tensioni accidentali. Le tensioni prodotte dal carico permanente si desumono da quelle ottenute nel diagramma, Fig. 2 (**Tav. 60**),

riducendole convenientemente di scala e sommandole poi algebricamente con quelle dipendenti dal carico accidentale, come si è fatto nella Fig. 4 (**Tav. 60**). Ordinariamente però queste tensioni sono così piccole che si può trascurarle.

Se *il carico mobile si muove da sinistra a destra* allora si originano le tensioni (*min*) nelle diagonali, per determinare le quali si procede in modo analogo a quello tenuto per il movimento in senso contrario, come appunto si è fatto nella parte inferiore della Fig. 4 (**Tav. 60**). Si può per altro omettere questa seconda parte del diagramma poichè le tensioni (*min*) si deducono speditamente dalla seguente relazione:

$$D^{s}_{m(mas)} = - D^{s}_{(N+1-m)(min)}$$

2) **Diagonali che si innalzano a destra** D^{d}. — Queste diagonali sono segnate con linee a tratti nella Fig. 3 (**Tav. 60**). Non occorre fare speciali costruzioni per determinare le loro tensioni. Basta considerare che il sistema a cui appartengono non è altro che il precedente (con le diagonali innalzantesi a sinistra) girato in modo che l'estremo di destra passi a sinistra e quello di sinistra a destra. Vedesi manifestamente allora che sussistono le relazioni

$$D^{s}_{m(mas)} = - D^{d}_{m(min)} \quad , \quad D^{s}_{m(min)} = - D^{d}_{m(mas)}$$

dalle quali si deduce speditamente le cercate tensioni.

3) **Verticali.** — Le verticali sono cimentate tutte egualmente: alla trazione nella parte superiore, alla compressione nella parte inferiore, con una tensione che ha per valore il carico permanente P_o di un nodo, quando questo è scarico, ed il carico totale $Q'_o = P_o + K'_o$ di un nodo, quando questo è carico, ciò che si deduce dall'esame contemporaneo delle Fig. 1*a b* (**Tav. 60**), e del diagramma Fig. 2 (**Tav. 60**). Non occorre dunque fare speciali ricerche.

Nella Fig. 5 (**Tav. 60**) si sono annotate alla parte destra le lunghezze dei segmenti proporzionali alle tensioni, ed alla sinistra le tensioni stesse, relativamente alle quali bisogna porre attenzione alle differenti scale delle forze assunte per il diagramma delle nervature, e per quello del traliccio.

Travi parabolico-smussate.

288. Forma della trave. — Allorchè la luce della travata risulta molto ampia e si avvicina ai 100 metri, od anzi li supera, l'altezza delle travi principali, che deve essere proporzionata alla loro lunghezza, diventa necessariamente molto grande, e le sbarre del traliccio quindi risultano molto lunghe.

Inoltre gli sforzi sollecitanti queste sbarre vanno crescendo rapidamente dal mezzo verso gli estremi, ove raggiungono il massimo valore, laonde le sbarre compresse poste agli estremi della trave si trovano in condizioni assai sfavorevoli di cimento, poichè essendo sollecitate di punta con sforzi molto grandi piegherebbero facilmente in quanto la loro resistenza è nell'inversa del quadrato della loro lunghezza.

Da ciò nasce la convenienza di diminuire l'altezza della trave, e quindi la lunghezza delle sbarre del traliccio dal mezzo verso gli estremi, di maniera però da poter controventare superiormente la travata su tutta la sua lunghezza, senza togliere l'altezza libera necessaria per il passaggio dei treni ferroviari o dei carri da trasporto carichi.

Ad ottenere tale intento si prestano le travi dette dai tedeschi travi mezzoparaboliche (*Halbparabelträger*), ma che è più proprio di chiamare parabolico-smussate, Fig. 464. Sono costituite da una nervatura inferiore rettilinea, da una nervatura superiore parabolica e da un traliccio dissimetrico. Il palco del ponte si pone sempre inferiormente.

Tale tipo di trave si tiene anche per luci minori delle sopraindicate, sempre però superiori ai 40 metri. In questo caso se si facessero le travi paraboliche non si potrebbero controventare superiormente che nel mezzo, dove hanno cioè la massima altezza (circa $^1/_7$ della luce), mentre diminuendo rapidamente l'altezza verso gli estremi si dovrebbe lasciarle per la maggior parte della loro lunghezza senza controventi superiori. È buona norma invece di controventare superiormente le travate poligonali almeno per il terzo mediano della loro lunghezza, locchè si può conseguire appunto col rendere la trave parabolico-smussata.

Per luci fino ai 50 metri sarebbe però preferibile la trave Schwedler con traliccio doppio alla parabolico-smussata.

Esempio.

Si supponga che la lunghezza della trave sia di metri 42. Adottando una trave parabolica colla freccia eguale ad $^1/_7$ della corda, ed un numero di scomparti $N = 2n = 10$, l'altezza massima $h_{mas} = H$ della trave sarebbe

$$H = h_n = \frac{1}{7} 42 = 6$$

mentre l'altezza delle varie verticali si deduce dalla (367), cioè

$$h_m = \frac{4m(N - m)}{N^2} h_n$$

posta la quale sotto la forma

$$h_m = \frac{4m(10 - m)6}{10^2} = 0{,}24\, m(10 - m)$$

e facendovi successivamente $m = 1, 2, 3, 4, 5$, si trova

$$h_1 = 2{,}16 \quad , \quad h_2 = 3{,}84 \quad , \quad h_3 = 5{,}04 \quad , \quad h_4 = 5{,}76 \quad , \quad h_5 = 6{,}00$$

Nell'ipotesi che il piano del ferro sia sopraelevato di metri 0,80 sopra il livello della nervatura inferiore rettilinea, ne risulta che la trave sporgerebbe nel mezzo sopra il piano dell'impalcato di metri 6,00 — 0,80 = 5,2. In causa di questa notevole altezza libera è necessario di controventare la travata in corrispondenza alle nervature superiori poligonali per impedire le forti oscillazioni laterali delle travi principali al passaggio del treno. Però le controventature non si potrebbero porre che in corrispondenza ai tre soli montanti mediani, perchè se si estendessero anche ad altri montanti l'altezza libera fra il piano del ferro ed i traversi delle controventature risulterebbe minore di 5 metri, cioè del limite minimo consentito dalla pratica per il libero passaggio del treno.

Perciò si aumentano tutte le lunghezze dei montanti di una quantità costante $c = 0{,}86$ con che si possono estendere le controventature fino ai montanti 3° e 7°, cioè lungo un tratto centrale di trave maggiore di $^1/_3$ della totale lunghezza.

In questo modo si dà origine alla forma di trave rappresentata nella **Fig. 465**, cioè ad una trave *parabolico-smussata*.

Le altezze dei vari montanti verticali si trovano speditamente aggiungendo alle altezze prima trovate la quantità costante = 0,86, cioè

$$h_0 = 0 + 0{,}86 = 0{,}86 \quad , \quad h_1 = 2{,}16 + 0{,}86 = 3{,}02 \quad , \quad h_2 = 3{,}84 + 0{,}86 = 4{,}70$$
$$h_3 = 5{,}04 + 0{,}86 = 5{,}90 \quad , \quad h_4 = 5{,}76 + 0{,}86 = 6{,}62 \quad , \quad h_5 = 6{,}00 + 0{,}86 = 6{,}86$$

Stabilita che si abbia l'altezza massima H delle travi parabolico-smussate, nonchè l'altezza minima h_0 agli appoggi, l'altezza delle varie verticali si determina colle relazioni seguenti:

Per un numero **pari** *di scomparti*

$$h_m = \frac{4\,m\,(N - m)}{N^2}(H - h_0) + h_0 \qquad (415)$$

Per un numero **dispari** *di scomparti*

$$h_m = \frac{4\,m\,(N - m)}{N^2 - 1}(H - h_0) + h_0 \qquad (416)$$

Osservazione. — Per poco che la lunghezza delle travi superi i 40 metri si fanno a traliccio dissimetrico doppio, e per luci superiori a 100 metri si fanno a traliccio dissimetrico triplo.

289. Calcolo delle tensioni. — La trave parabolico-smussata, abbenchè conservi la nervatura superiore a contorno parabolico, non è però dotata della caratteristica delle travi paraboliche, cioè che per carico completo le diagonali non hanno tensione, e questo a motivo che le due nervature non sono direttamente congiunte fra loro agli estremi, per cui la nervatura inferiore non funziona più come un unico tirante e quindi le varie sbarre che la costituiscono non hanno più tensione eguale come nelle paraboliche complete.

Queste travi si calcolano allo stesso modo delle travi a nervature parallele con traliccio dissimetrico e coll'impalcato posto in corrispondenza alla nervatura inferiore.

Per la determinazione della quantità a_m e dei bracci s_m, i_m, d_m, v_m, servono ancora rispettivamente le formule (355) (356), (357), (358), mentre le lunghezze delle sbarre S e D si determinano colle (352), (353).

α) **Tensioni calcolate mediante le equazioni dei momenti statici.** — Si comincia dal determinare i pesi sui nodi, cioè il permanente P e l'accidentale K per le nervature e K′ per il traliccio. Poi sbarra per sbarra si scrivono le relative equazioni dei momenti statici, che servono a determinare le tensioni, ricordando che basta limitarsi a mezza trave soltanto stante la simmetria della stessa rispetto al mezzo.

Esempio.

Si prende a calcolo la trave considerata nell'esempio precedente, per cui è $N = 10$, $\lambda = 4{,}2$, bastando calcolare le tensioni per sola mezza trave. Si consideri la mezza trave di sinistra, colle diagonali che si innalzano a sinistra per la quale si è già trovato

$$h_0 = 0{,}86 \ , \ h_1 = 3{,}02 \ , \ h_2 = 4{,}70 \ , \ h_3 = 5{,}90 \ , \ h_4 = 6{,}62 \ , \ h_5 = H = 6{,}86.$$

La lunghezza σ e δ delle sbarre S e D si deducano dalle (352), (353), cioè

$$\sigma_m = \sqrt{(h_m - h_{m-1})^2 + \lambda^2} \quad , \quad \delta_m = \sqrt{h_{m-1}^2 + \lambda^2}$$

dalle quali si ottiene

$$\sigma_1 = 4{,}715 \ , \ \sigma_2 = 4{,}527 \ , \ \sigma_3 = 4{,}37 \ , \ \sigma_4 = 4{,}263 \ , \ \sigma_5 = 4{,}205$$
$$\delta_1 = 4{,}287 \ , \ \delta_2 = 5{,}173 \ , \ \delta_3 = 6{,}303 \ , \ \delta_4 = 7{,}242 \ , \ \delta_5 = 7{,}840$$

Il carico permanente unitario si può valutare prendendo la media fra i valori somministrati dalla (280) per i ponti a travi diritte, cioè

$$p = 650 + 24{,}5\, l + 0{,}11\, l^2$$

e dalla (369) per i ponti a travi paraboliche, cioè $p = 25\, l + 600$, ossia

$$650 + 24{,}5 \times 42 + 0{,}11 \times 42^2 = 1873$$
$$25 \times 42 + 600 = 1650$$

da cui il valor medio

$$\frac{1873 + 1650}{2} = 1762$$

e quindi per metro corrente di trave $p = {}^1/_2\, 1762 = 881$, ed arrotondando la cifra si prende $p = 900$ chilogrammi.

Il carico accidentale lo si desume dalla tabella L e quindi riferendolo al metro corrente di ponte si ha:

Per il calcolo delle nervature $k = \frac{1}{2}\, 4700 = 2350$

» » del traliccio $k' = \frac{1}{2}\, 5400 = 2700$

Ogni nodo quindi porta i seguenti carichi:

Permanente	$P = 900 \times 4{,}2 =$	3780 Kg.
Accidentale (per le nervature)	$K = 2350 \times 4{,}2 =$	9870 »
» (per il traliccio)	$K' = 2700 \times 4{,}2 =$	11340 »

Si determina ora le distanze a_m nonchè i bracci di leva. Dalla (354) si ricava

$$a_1 = \frac{3{,}02 - (3{,}02 - 0{,}86)}{3{,}02 - 0{,}86} 4{,}20 = 1{,}67$$

$$a_2 = \frac{4{,}70 - 2\,(4{,}70 - 3{,}02)}{4{,}70 - 3{,}02} 4{,}20 = 3{,}35$$

$$a_3 = \frac{5{,}90 - 3\,(5{,}9 - 4{,}70)}{5{,}9 - 4{,}70} 4{,}20 = 8{,}05$$

$$a_4 = \frac{6{,}62 - 4\,(6{,}62 - 5{,}90)}{6{,}62 - 5{,}90} 4{,}20 = 21{,}82$$

$$a_5 = \frac{6{,}86 - 5\,(6{,}86 - 6{,}62)}{6{,}86 - 6{,}62} 4{,}20 = 99{,}05$$

La (355) porge

$$s_1 = \frac{3{,}02 \times 4{,}2}{4{,}715} = 2{,}69 \quad , \quad s_2 = \frac{4{,}70 \times 4{,}20}{4{,}527} = 4{,}36$$

$$s_3 = \frac{5{,}90 \times 4{,}2}{4{,}37} = 5{,}67 \quad , \quad s_4 = \frac{6{,}62 \times 4{,}2}{4{,}263} = 6{,}52$$

$$s_5 = \frac{6{,}86 \times 4{,}2}{4{,}205} = 6{,}85$$

Applicando la (356) risulta

$$i_1 = 0{,}86 \quad , \quad i_2 = 3{,}02 \quad , \quad i_3 = 4{,}70 \quad , \quad i_4 = 5{,}90 \quad , \quad i_5 = 6{,}62$$

Mediante la (358) si trova

$$v_1 = 1{,}67 + 4{,}2 = 5{,}87 \quad , \quad v_2 = 3{,}35 + 2 \times 4{,}2 = 11{,}75$$

$$v_3 = 8{,}05 + 3 \times 4{,}2 = 20{,}65 \quad , \quad v_4 = 21{,}82 + 4 \times 4{,}2 = 38{,}62$$

$$v_5 = 99{,}05 + 5 \times 4{,}2 = 120{,}05$$

mentre colla (357) si ottiene

$$d_1 = 5{,}87 \frac{0{,}86}{4{,}287} = 1{,}18 \quad , \quad d_2 = 11{,}75 \frac{3{,}02}{5{,}173} = 6{,}86$$

$$d_3 = 20{,}65 \frac{4{,}70}{6{,}303} = 15{,}4 \quad , \quad d_4 = 38{,}62 \frac{5{,}9}{7{,}242} = 31{,}46$$

$$d_5 = 120{,}05 \frac{6{,}62}{7{,}84} = 101{,}37$$

Per le controdiagonali (cioè le diagonali che si innalzano a destra) il polo si conserva quello stesso delle diagonali (quelle che si innalzano a sinistra) ed il braccio di leva c della relativa tensione è dato dalla

$$c_m = \left(a_m + (m - 1)\,\lambda \right) \frac{h_m}{\gamma_m}$$

in cui γ_m si determina colla

$$\gamma_m = \sqrt{h_m^2 + \lambda^2}$$

applicando le quali si deduce

$\gamma_1 = 5{,}173$, $\gamma_2 = 6{,}303$, $\gamma_3 = 7{,}242$, $\gamma_4 = 7{,}840$, $\gamma_5 = 8{,}044$

e quindi

$$c_1 = \left(1{,}67 + 0 \times 4{,}2\right) \frac{3{,}02}{5{,}173} = 0{,}975$$

$$c_2 = \left(3{,}35 + 4{,}2\right) \frac{4{,}70}{6{,}303} = 5{,}63$$

$$c_3 = \left(8{,}05 + 2 \times 4{,}2\right) \frac{5.90}{7{,}242} = 13{,}40$$

$$c_4 = \left(21{,}82 + 3 \times 4{,}2\right) \frac{6{,}62}{7{,}84} = 29{,}06$$

$$c_5 = \left(99{,}05 + 4 \times 4{,}2\right) \frac{6{,}86}{8{,}044} = 98{,}79$$

Nervature. — La tensione di massimo valore per queste sbarre si verifica per carico completo, ed allora le reazioni d'appoggio sono costanti. Trascurando il carico del nodo sull'appoggio, poichè la sua azione è distrutta da quella della reazione dell'appoggio stesso, si ha

$$A = \frac{N - 1}{2} (P + K) = \frac{10 - 1}{2} (3780 + 9870) = 61425$$

essendo

$$P + K = 3780 + 9870 = 13650$$

Le equazioni dei momenti statici sono:

$$S_1 \times 2{,}69 + 61425\,(4{,}2) - 13650\,(0) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad S_1 = - \ 95905$$
$$S_2 \times 4{,}36 + 61425\,(2 \times 4{,}2) - 13650 \times 4{,}20\,(1) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad S_2 = - 105193$$
$$S_3 \times 5{,}67 + 61425\,(3 \times 4{,}2) - 13650 \times 4{,}20\,(1+2) = 0 \quad . \quad . \quad S_3 = - 106166$$
$$S_4 \times 6{,}52 + 61425\,(4 \times 4{,}2) - 13650 \times 4{,}2\,(1+2+3) = 0 \quad . \quad S_4 = - 105515$$
$$S_5 \times 6{,}85 + 61425\,(5 \times 4{,}2) - 13650 \times 4{,}2\,(1+2+3+4) = 0 \quad S_5 = - 104617$$

$$- I_1 \times 0{,}86 + 61425\,(0) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad I_1 = 0$$
$$- I_2 \times 3{,}02 + 61425\,(4{,}2) - 13650\,(0) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad I_2 = + \ 85425$$
$$- I_3 \times 4{,}70 + 61425\,(2 \times 4{,}2) - 13650 \times 4{,}2\,(1) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad I_3 = + \ 97583$$
$$- I_4 \times 5{,}90 + 61425\,(3 \times 4{,}2) - 13650 \times 4{,}2\,(1+2) = 0 \quad . \quad . \quad I_4 = + 102028$$
$$- I_5 \times 6{,}62 + 61425\,(4 \times 4{,}2) - 13650 \times 4{,}2\,(1+2+3) = 0 \quad . \quad I_5 = + 103921$$

Traliccio. — La posizione più sfavorevole del carico mobile varia per ogni sbarra; si ha una reazione costante dovuta al carico permanente di valore

$$A_p = \frac{N-1}{2} P = \frac{10-1}{2} 3780 = 17010$$

ed una reazione variabile A_k dovuta al carico mobile.

Diagonali. — I valori della reazione variabile A_k, per le varie diagonali sono calcolati nella seguente tabella:

Reazioni A_k, per le tensioni (*mas*) delle **diagonali**				Reazioni A_k, per le tensioni (*min*) delle **diagonali**			
Diagonali	Fatt. cost.	Fattore variabile	Prodotto A_k,	Diagonali	Fatt. cost.	Fattore variabile	Prodotto A_k,
1	$\frac{11340}{10} = 1134$	9+8+7+6+5+4+3+2+1=45	51030	1	$\frac{11340}{10} = 1134$	0	0
2		8+7+6+5+4+3+2+1=36	40824	2		9	10206
3		7+6+5+4+3+2+1=28	31752	3		9+8=17	19278
4		6+5+4+3+2+1=21	23814	4		9+8+7=24	27216
5		5+4+3+2+1=15	17010	5		9+8+7+6=30	34020

Le equazioni dei momenti statici sono:

Tensione (*mas*)

$D_1 \times 1{,}18 - (17010+51030)\,1{,}672 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots D_1 = +96409$
$D_2 \times 6{,}86 - (17010+40824)\,3{,}35+3780\,(3{,}35+4{,}2) = 0 \ldots\ldots D_2 = +24082$
$D_3 \times 15{,}40 - (17010+31752)\,8{,}05+3780\,(2\times 8{,}05+3\times 4{,}2) = 0 \ldots D_3 = +18445$
$D_4 \times 31{,}46 - (17010+23814)\,21{,}82+3780\,(3\times 21{,}82+6\times 4{,}2) = 0 \ldots D_4 = +17422$
$D_5 \times 101{,}37 - (17010+17010)\,99{,}05+3780\,(4\times 99{,}05+10\times 4{,}2) = 0 \quad D_5 = +16901$

Tensione (*min*)

$D_1 \times 1{,}18 - (17010+0)\,1{,}672 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots D_1 = +24100$
$D_2 \times 6{,}86 - (17010+10206)\,3{,}35+15120\,(3{,}35+4{,}2) = 0 \ldots\ldots D_2 = -3350$
$D_3 \times 15{,}40 - (17010+19278)\,8{,}05+15120\,(2\times 8{,}05+3\times 4{,}2) = 0 \ldots D_3 = -9209$
$D_4 \times 31{,}46 - (17010+27216)\,21{,}82+15120\,(3\times 21{,}82+6\times 4{,}2) = 0 \ldots D_4 = -12898$
$D_5 \times 101{,}37 - (17010+34020)\,99{,}05+15120\,(4\times 99{,}05+10\times 4{,}2) = 0 \quad D_5 = -15496$

Volendo la trave con sole diagonali stirate bisogna porre la controdiagonale in tutti quegli scomparti nei quali la tensione (*min*) delle diagonali è negativa, essendo inoltre necessario di conformare tanto le diagonali che le controdiagonali con ferri piatti, onde metterle in condizione di non poter resistere a sforzi di compressione. Per le controdiagonali basta dunque calcolare la sola tensione (*mas*).

Considerando la diagonale e la controdiagonale di uno stesso scomparto è facile vedere che hanno comune il polo dei momenti, **Fig. 466**, e che le posizioni del carico mobile che producono le tensioni (*mas*) e (*min*) nella diagonale, producono anche rispettivamente le tensioni (*min*) e (*mas*) nella controdiagonale. Perciò le equazioni dei momenti statici per le tensioni (di natura opposta) delle due diagonali inversamente inclinate sono della stessa forma e solo varia in esse il valore del braccio di leva della diagonale rispettiva ed il senso della rotazione prodotta delle corrispondenti tensioni, ossia il segno dei loro momenti. Chiamando con ΣM la somma algebrica dei momenti di tutte le forze esterne che sollecitano la porzione di trave compresa fra il piano di sezione **mn** e l'estremo posto dalla parte del polo **o**, si ha per la diagonale (che s'innalza a sinistra).

$$D_m(min)\, d_m + \Sigma M = 0 \quad , \quad \Sigma M = - D_m(min)\, d_m$$

e per la controdiagonale (che s'innalza a destra)

$$- C_m(mas)\, c_m + \Sigma M = 0 \quad , \quad \Sigma M = C_m(mas)\, d_m$$

da cui

$$- D_m(min)\, d_m = C_m(mas)\, c_m$$

e quindi

$$C_m(mas) = - D_m(min) \frac{d_m}{c_m} \qquad (417)$$

applicando la quale pei soli scomparti 2°, 3°, 4°, 5° nei quali deve porsi la controdiagonale, si ottiene:

Tensione (*mas*)

$$C_2 = - (- 3350) \frac{6{,}86}{5{,}63} = + 4087$$

$$C_3 = - (- 9209) \frac{15{,}4}{13{,}40} = + 10590$$

$$C_4 = - (- 12898) \frac{31{,}46}{29{,}06} = + 13930$$

$$C_5 = - (- 15496) \frac{101{,}37}{98{,}79} = + 15960$$

Verticali. — Siccome le diagonali non possono reagire che a soli sforzi di trazione, ne viene che *le verticali sono sempre soggette a sforzi di compressione*, e perciò basta calcolare soltanto la loro tensione (*min*). I valori della reazione variabile A_k per le varie verticali sono calcolati nella seguente tabella:

Reazioni A_k per le tensioni (*min*) delle **verticali.**			
Verticali	Fattore costante	Fattore variabile	Prodotto
0	$\frac{11340}{10} = 1134$	$9+8+7+6+5+4+3+2+1=45$	51030
1		$8+7+6+5+4+3+2+1=36$	40824
2		$7+6+5+4+3+2+1=28$	31752
3		$6+5+4+3+2+1=21$	23814
4		$5+4+3+2+1=15$	17010
5		$4+3+2+1=10$	11340

Le equazioni dei momenti statici sono:

Tensione (*min*)

$$-V_1\times 5{,}87-(17010+40824)\ 1{,}67+3780\,(1{,}67+4{,}2)=0\ .\ .\ .\ V_1=-12673$$
$$-V_2\times 11{,}75-(17010+31752)\ 3{,}35+3780\,(2\times 3{,}35+3\times 4{,}2)=0\quad V_2=-7693$$
$$-V_3\times 20{,}65-(17010+23814)\ 8{,}05+3780\,(3\times 8{,}05+6\times 4{,}2)=0\quad V_3=-6881$$
$$-V_4\times 38{,}62-(17010+17010)\ 21{,}82+3780\,(4\times 21{,}82+10\times 4{,}2)=0\quad V_4=-6567$$
$$-V_5\times 120{,}05-(17010+11340)\ 99{,}05+3780\,(5\times 99{,}05+15\times 4{,}2)=0\quad V_5=-5813$$

Per determinare la tensione della verticale V_0 basta osservare che *la somma algebrica delle forze verticali applicate alla sinistra del piano di sezione deve essere uguale a zero,* e si ottiene:

$$-V_{0(min)}-(17010+51030)=0\quad,\quad V_{0(min)}=-68040$$

β) **Tensioni calcolate mediante le formule generali.** — Si deve premettere la determinazione delle distanze a_m, dei bracci delle tensioni s_m, i_m, d_m, v_m, nonchè dei carichi sui nodi P, K, K′. Non resta allora che applicare le formule determinate al § 78 e cioè le (103) e (104) per le nervature

$$S_m=-\frac{Q\lambda}{2}\,\frac{m\,(N-m)}{s_m}$$

$$I_m=+\frac{Q\lambda}{2}\,\frac{(m-1)\,(N-m+1)}{i_m}$$

e per le sbarre del traliccio le (105), (106), (108), ricordando che in questo caso le diagonali e verticali dello stesso indice hanno

rispettivamente lo stesso polo, essendo rettilinea la nervatura inferiore, per cui deve porsi $a'_m = a_m$ nella (108), ossia

$$D_{m\,(mas)} = \left\{ \frac{P}{2} \left\{ (N + 1 - 2m)\, a_m - \lambda\, m\, (m-1) \right\} + \right. \\ \left. + \frac{K'}{2} \frac{(N-m)\,(N-m+1)}{N}\, a_m \right\} \frac{1}{d_m}$$

$$D_{m\,(min)} = \left\{ \frac{P}{2} \left\{ (N + 1 - 2m)\, a_m - \lambda\, m\, (m-1) \right\} - \right. \\ \left. - \frac{K'}{2} \frac{m\,(m-1)\,(a_m + N\lambda)}{N} \right\} \frac{1}{d_m}$$

$$V_{m\,(min)} = \left\{ \frac{P}{2} \left\{ \lambda\, m\, (m+1) - (N - 1 - 2m)\, a_m \right\} - \right. \\ \left. - \frac{K'}{2} \frac{(N-m)\,(N-m-1)}{N}\, a_m \right\} \frac{1}{v_m}$$

673
693
881
567
813

Esempio.

Supponendo i dati dell'esempio precedente, si ha:

$$N = 10 \quad , \quad \lambda = 4{,}2$$

$$P = 3780 \quad , \quad K = 9870 \quad , \quad K' = 11340 \quad , \quad Q = 3780 + 9870 = 13650$$

$$\begin{array}{llllllllll} s_1 = 2{,}69 & , & s_2 = 4{,}36 & , & s_3 = 5{,}67 & , & s_4 = 6{,}52 & , & s_5 = 6{,}85 \\ i_1 = 0{,}86 & , & i_2 = 3{,}02 & , & i_3 = 4{,}70 & , & i_4 = 5{,}90 & , & i_5 = 6{,}62 \\ d_1 = 1{,}18 & , & d_2 = 6{,}86 & , & d_3 = 15{,}40 & , & d_4 = 31{,}46 & , & d_5 = 101{,}37 \\ v_1 = 5{,}87 & , & v_2 = 11{,}75 & , & v_3 = 20{,}65 & , & v_4 = 38{,}62 & , & v_5 = 120{,}05 \end{array}$$

Nervature. — Si mettono le (103) e (104) sotto la forma

$$S_m = -\frac{13650 \times 4{,}2}{2} \frac{m\,(10-m)}{s_m} = -28665 \frac{m\,(10-m)}{s_m}$$

$$_m = +\frac{13650 \times 4{,}2}{2} \frac{(m-1)\,(10-m+1)}{i_m} = +28665 \frac{(m-1)\,(11-m)}{i_m}$$

nelle quali, ponendo successivamente per s_m ed i_m i rispettivi valori, nonchè 1, 2, 3, 4, 5 in luogo di m, si ha:

$$\begin{array}{ll} S_1 = -\ 95905 & I_1 = 0 \\ S_2 = -\ 105193 & I_2 = +\ 85425 \\ S_3 = -\ 106166 & I_3 = +\ 97583 \\ S_4 = -\ 105515 & I_4 = +\ 102028 \\ S_5 = -\ 104617 & I_5 = +\ 103921 \end{array}$$

Traliccio. — Si determina prima la tensione delle diagonali mediante le (105) (106) poste sotto la forma:

$$D_{m\,(mas)} = \left\{ \begin{array}{l} 1890 \left\{ (11 - 2\,m)\, a_m - 4{,}2\, m\, (m - 1) \right\} + \\ + 567\, (10 - m)\, (11 - m)\, a_m \end{array} \right\} \frac{1}{d_m}$$

$$D_{m\,(min)} = \left\{ \begin{array}{l} 1890 \left\{ (11 - 2\,m)\, a_m - 4{,}2\, m\, (m - 1) \right\} - \\ - 567\, m\, (m - 1)\, (a_m + 42) \end{array} \right\} \frac{1}{d_m}$$

Osservisi che il termine in P è costante, per cui basta calcolarlo una sola volta, cioè per il primo scomparto e quindi le superiori espressioni (ponendo nel termine in P la distanza $a_m = a_1 = 1{,}672$ ed $m = 1$), diventano:

$$D_{m\,(mas)} = \left\{ 28440 + 567\, (10 - m)\, (11 - m)\, a_m \right\} \frac{1}{d_m}$$

$$D_{m\,(min)} = \left\{ 28440 - 567\, m\, (m - 1)\, (a_m + 42) \right\} \frac{1}{d_m}$$

e sostituendo in queste i successivi valori di a_m e d_m e ponendo 1, 2, 3, 4, 5, in luogo di m, risulta

Tensione (*mas*)	Tensione (*min*)
$D_1 = + 96409$	$D_1 = + 24100$
$D_2 = + 24082$	$D_2 = - 3350$
$D_3 = + 18445$	$D_3 = - 9290$
$D_4 = + 17422$	$D_4 = - 12898$
$D_5 = + 16901$	$D_5 = - 15496$

Per tutti gli scomparti nei quali la tensione (*min*) è negativa bisogna porre la controdiagonale, onde le sbarre diagonali non abbiano mai a sopportare sforzi di compressione, perlochè è anche necessario di conformare tutte queste sbarre a ferro piatto. Basta dunque calcolare le sole tensioni (*mas*) delle controdiagonali, e perciò serve ancora la relazione (417)

$$C_{m\,(mas)} = - D_{m\,(min)} \frac{d_m}{c_m}$$

applicando la quale si riproducono i valori di già trovati nell'esempio precedente

Tensione (*mas*)
$C_2 = + 4087$
$C_3 = + 10590$
$C_4 = + 13930$
$C_5 = + 15960$

Per avere la tensione (*min*) delle verticali, ricordando che in questo è $a'_m = a_m$, si ricorre alla (108) posta sotto la forma

$$V_{m\,(min)} = \left\{ \begin{matrix} 1890 \left\{ 4{,}2\, m\,(m+1) - (9 - 2\,m)\, a_m \right\} \\ -\,567\,(10 - m)\,(9 - m)\, a_m \end{matrix} \right\} \frac{1}{v_m}$$

nella quale sostituendo successivamente per a_m e v_m i rispettivi valori e ponendo 1, 2, 3, 4, 5 in luogo di m, si ottiene:

Tensione (*min*)

$V_1 = -\,12673$
$V_2 = -\,7693$
$V_3 = -\,6881$
$V_4 = -\,6567$
$V_5 = -\,5813$

Per la verticale estrema, o montante sull'appoggio V_0 si procede come nell'esempio precedente dal quale si riporta il valore della tensione:

$$V_{o(min)} = -\,68040$$

Osservazione. — Generalmente questo tipo di trave si adotta per le grandi luci, e quindi grande diventa l'altezza della trave, laonde per non tenere gli scomparti dell'impalcato troppo ampî si fa doppio o triplo il traliccio dissimetrico, piuttostochè ugnolo. In questo caso bisogna scomporre la trave nei sistemi semplici che la compongono, calcolare parzialmente le tensioni di ognuno d'essi e nelle somme algebriche delle tensioni parziali si hanno le tensioni del sistema composto. Il calcolo si conduce in modo analogo a quello tenuto per le travi rettilinee a traliccio dissimetrico doppio, al § **231.**

Travi ellittiche.

290. Forma della trave. — Queste travi hanno la nervatura inferiore rettilinea, la superiore a contorno ellittico ed il traliccio ordinariamente dissimetrico. La nervatura superiore può essere contornata da una semiellisse completa, e si ha allora la *trave ellittica* propriamente detta; oppure da una porzione di semiellisse e si origina allora la *trave ellittica-smussata.*

α) **Trave ellittica.** — Con questa forma di trave si ottiene che le due nervature si incontrino sotto un angolo poco acuto, ancor più ampio cioè, che non nelle travi Schwedler la qual disposizione facilita di molto gli attacchi. Mentre però il tipo Schwedler viene comunemente usato in Austria e Germania non

si hanno che rarissimi esempi di ponti con travi ellittiche, fra cui si ricorda il ponte sul Kolomak, linea Charkow-Krementschug, colla luce di metri 33,8. Nella **Fig. 467**, si dà il disegno schematico delle travi.

Per determinare l'altezza delle varie verticali si ricorre all'equazione dell'ellisse riferita al suo centro, che è

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \qquad \text{(I)}$$

essendo a e b i due semiassi maggiore e minore.

Per un numero **pari** *di scomparti*, nella mezzaria della trave corrisponde una verticale, che è quella di massima altezza. Detta l la lunghezza della trave, H la sua altezza massima, h_m l'altezza di una verticale qualunque ne viene che $\frac{l}{2}$, H ed h_m rappresentano rispettivamente il semiasse maggiore, il semiasse minore ed un'ordinata qualunque dell'ellisse. Poste queste quantità in luogo di a, di b, di y nella (I) e risolta rispetto ad h_m si ottiene

$$h_m = \frac{\mathrm{H}}{l}\sqrt{l^2 - 4x^2} \qquad (418)$$

Per un numero **dispari** *di scomparti* nella mezzaria della trave non vi hanno verticali, e le due che comprendono lo scomparto mediano sono eguali fra di loro, nonchè quelle di massima altezza H. In questo caso però la massima altezza della trave non corrisponde colla massima ordinata dell'ellisse, ossia col semiasse minore, **Fig. 468**. Data l'altezza massima H della trave bisogna prima trovare il semiasse minore b dell'ellisse.

L'ascissa delle verticali di massima altezza H è eguale a mezza ampiezza dello scomparto mediano, e la si chiami c. Per questi valori la (I) porge

$$b = \frac{\mathrm{H}\,l}{\sqrt{l^2 - 4c^2}} \qquad (419)$$

Sostituendo questo valore nella (I) e ponendovi inoltre $a = \frac{l}{2}$, $y = h_m$ e risolvendola rispetto ad h_m, si trova

$$h_m = \mathrm{H}\sqrt{\frac{l^2 - 4x^2}{l^2 - 4c^2}} \qquad (420)$$

che serve a determinare le ordinate di un punto qualunque del contorno ellittico, date che sieno le ascisse.

Per una trave avente N scomparti eguali di ampiezza λ, è $l = N\lambda$, e numerando ordinatamente le verticali dal mezzo verso gli estremi e ponendo $x = m\lambda$ nella (418), $x = (m - {}^1/_2)\lambda$ nella (420), si ha:

Per un numero pari *di scomparti*

$$h_m = \frac{H}{N}\sqrt{N^2 - 4m^2} \qquad (421)$$

Per un numero dispari *di scomparti*

$$h_m = \frac{H}{N}\sqrt{N^2 - (2m-1)^2} \qquad (422)$$

Esempio.

Per il citato ponte sul Kolomak, i cui scomparti non sono tutti fra di loro eguali, **Fig. 467**, è $l = 33{,}8$, $H = 4{,}27$, $N = 10$, sostituiti i quali valori nella (418), essa assume la forma

$$h_m = \frac{4{,}27}{33{,}8}\sqrt{33{,}8^2 - 4x^2} = 0{,}12633\sqrt{1142{,}44 - 4x^2}$$

e ponendo in questa successivamente

$$x_1 = 3{,}05 \quad , \quad x_2 = 7{,}00 \quad , \quad x_3 = 10{,}5 \quad , \quad x_4 = 14{,}00 \quad , \quad x_5 = 16{,}00$$

si ottiene

$$h_1 = 4{,}18 \quad , \quad h_2 = 3{,}98 \quad , \quad h_3 = 3{,}34 \quad , \quad h_4 = 2{,}39 \quad , \quad h_5 = 1{,}37$$

β) **Trave ellittica-smussata.** — Allorchè si vuol assegnare alla trave questa forma, data che sia la lunghezza l, bisogna assumere l'altezza minima della trave all'appoggio h_0 e l'altezza massima nel mezzo H. — L'altezza h_m di una verticale qualunque si determina ancora ricorrendo alla (I).

Per un numero pari *di scomparti*, **Fig. 469**, l'altezza H rappresenta il semiasse minore dell'ellisse circoscrivente la nervatura superiore, ma il semiasse maggiore a bisogna determinarlo. Perciò basta riferirsi al punto estremo della nervatura superiore,

pel quale è $x = \frac{l}{2}$, $y = h_o$ e $b = H$, posti i quali valori nella (I), e risolta rispetto ad a, si ottiene

$$a = \frac{H\,l}{2\sqrt{H^2 - h_o^2}} \qquad (II)$$

e ponendo questo valore nella (I) nonchè h_m in luogo di y, e risolvendola rispetto ad h_m, si ottiene

$$h_m = \frac{1}{l}\sqrt{H^2\,l^2 - 4\,(H^2 - h_o^2)\,x^2} \qquad (423)$$

che serve a determinare l'ordinata di un punto qualunque del contorno ellittico data che sia l'ascissa.

Per un numero dispari *di scomparti* tanto l'asse maggiore a quanto l'asse minore b dell'ellisse non sono conosciuti, **Fig. 470.** In quanto all'asse maggiore, con un procedimento analogo a quello tenuto per ricavare la (II) si trova

$$a = \frac{b\,l}{2\sqrt{b^2 - h_o^2}} \qquad (III)$$

sostituito il qual valore nella (I), postovi $y = h_m$ e risolta rispetto ad h_m risulta

$$h_m = \frac{1}{l}\sqrt{b^2\,l^2 - 4\,(b^2 - h_o^2)\,x^2} \qquad (IV)$$

nella quale resta da determinare b.

Si chiami c l'ascissa delle verticali di massima altezza H della trave, si ponga nella (I) per a il suo valore dato dalla (III), nonchè $x = c$ ed $y = H$ e risolvendola rispetto a b, si ottiene

$$b = \sqrt{\frac{l^2\,H^2 - 4\,h_o\,c^2}{l^2 - 4\,c^2}} \qquad (V)$$

Sostituendo questo valore nella (IV) e riducendo si ha finalmente

$$h_m = \sqrt{\frac{l^2\,H^2 - 4\,h_o^2\,c^2 - 4\,(H^2 - h_o^2)\,x^2}{l^2 - 4\,c^2}} \qquad (424)$$

mediante la quale basta che sieno note le ascisse per determinare le altezze delle verticali per un punto qualunque del contorno ellittico.

Se si pone nelle (423) e (424) $h_0 = 0$, cioè se il contorno superiore della trave è una mezza ellisse completa, ritornano le (418) e (420).

Esempio.

Si prenda in considerazione il ponte a due binari costruito sul torrente Zeglin, presso Stettino, sulla linea Stettino-Finkenwalde. La **Fig. 471** rappresenta schematicamente la trave che è a traliccio dissimetrico doppio. Il numero degli scomparti è N = 17, cioè dispari, la lunghezza della trave è $l = 92$ metri, l'altezza minima all'appoggio $h_0 = 6$ metri, l'altezza massima alle due verticali centrali H = 14 metri, la loro ascissa $c = 3$ metri, sostituiti i quali valori nella (424), essa prende la forma

$$h_m = \sqrt{\frac{92^2 \times 14^2 - 4 \times 6^2 \times 3^2 - 4\,(14^2 - 6^2)\,x^2}{92^2 - 4 \times 3^2}} = \sqrt{\frac{1657648 - 640\,x^2}{8428}}$$

dalla quale, ponendo successivamente

$$x_1 = 3 \quad , \quad x_2 = 9 \quad , \quad x_3 = 15 \quad , \quad x_4 = 21 \quad , \quad x_5 = 27$$
$$x_6 = 33 \quad , \quad x_7 = 38 \quad , \quad x_8 = 42 \quad , \quad x_9 = 46$$

si trae

$$H = h_1 = 14 \quad , \quad h_2 = 13{,}8 \quad , \quad h_3 = 13{,}40 \quad , \quad h_4 = 12{,}8 \quad , \quad h_5 = 11{,}9 ,$$
$$h_6 = 10{,}7 \quad , \quad h_7 = 9{,}3 \quad , \quad h_8 = 7{,}9 \quad , \quad h_9 = 6$$

γ) **Costruzione grafica.** —

1) **Trave ellittica.** — Sulla lunghezza della trave (asse maggiore dell'ellisse) si costruisce un semicerchio, **Fig. 472**. Stabiliti gli scomparti, si innalzano le verticali che li individuano, prolungandole fino al semicerchio e si conducono altrettanti raggi pei punti intersecati dalle verticali. Si descrive un altro semicerchio centrando nel centro dell'ellisse, e con raggio eguale all'altezza H della trave (semiasse minore dell'ellisse). Pei punti ove questo ultimo semicerchio interseca i raggi prima tirati, si conducono delle orizzontali, che vadino ad intersecare le corrispondenti verticali. I nuovi punti di intersezione sono altrettanti punti della

ellisse e limitano l'altezza delle verticali della trave, gli estremi delle quali si congiungono con tratti rettilinei.

Per un numero dispari di scomparti il semicerchio minore si deve descrivere con raggio b, il cui valore si determina colla (419).

2) **Trave ellittica-smussata.** — Data la lunghezza l della trave, le altezze minima h_0 e massima H, nonchè l'ascissa c di questa ultima, si determina la grandezza dei semiassi minore b e maggiore a mediante le (V) e (III) e poscia si opera in modo analogo a quello prima descritto, **Fig. 473.**

δ) **Travi ellittiche a traliccio simmetrico.** — Le travi ellittiche si possono anche conformare col traliccio simmetrico, però semplicemente ugnolo, come mostra la **Fig. 475**, ed il loro uso è limitato a luci non molto grandi.

291. Calcolo delle tensioni.

α) **Procedimento numerico.** — Il calcolo delle tensioni sia col mezzo delle equazioni dei momenti statici, che con quello delle formule generali si conduce in modo identico a quello indicato per le travi *paraboliche-smussate* al § **289.**

Per le travi a traliccio multiplo si ripete l'osservazione fatta a pagina 625, relativamente alle travi paraboliche-smussate.

β) **Procedimento grafico.** — Essendo le sbarre di contorno cimentate nel massimo modo per carico mobile completo, ed essendo quindi costante la reazione d'appoggio, giova determinare le tensioni col metodo delle figure reciproche, come si vede nella **Fig. 475***a*. Per le sbarre del traliccio invece avendo luogo il massimo cimento per carico mobile parziale, ed essendo variabile quindi la reazione d'appoggio per ogni sbarra, conviene applicare il metodo dei momenti statici pel calcolo delle tensioni accidentali, seguendo il procedimento indicato per le travi SCHWEDLER al § **282.**

Trattandosi però di una trave ellittica con traliccio simmetrico ugnolo, costituito cioè di un solo ordine di diagonali, si può procedere alla determinazione delle tensioni accidentali (dipendenti cioè dal solo carico mobile) nel modo seguente.

Si consideri una diagonale qualunque D_m che dal mezzo si innalza verso l'estremo, **Fig. 474.** Per avere la tensione (*mas*), condotto il piano di sezione **m n**, bisogna supporre applicato il carico K′ a tutti i nodi che si trovano alla destra. Alla porzione

di sinistra della trave non sono applicate altre forze esterne che la reazione A_k d'appoggio. Scrivendo l'equazione dei momenti statici per la diagonale D_m, il cui polo è in **o**, si ha:

$$D_{m(mas)}\, d_m - A_k\, a_m = 0$$

da cui

$$D_{m(mas)} = \frac{A_k\, a_m}{d_m} \qquad (I)$$

Dall'esame della **Fig. 474** si vede essere

$$d_m \operatorname{secc}\alpha = \frac{h_m}{\operatorname{tang}\gamma} \qquad \text{ossia} \qquad d_m = \frac{h_m}{\operatorname{secc}\alpha \operatorname{tang}\gamma}$$

$$a_m = d_m \operatorname{secc}\alpha - x$$

e sostituendo il valore di d_m

$$a_m = \frac{h_m}{\operatorname{tang}\gamma} - x$$

E ponendo nella (I) i trovati valori di d_m ed a_m, risulta

$$D_{m(mas)} = A_k \frac{(h_m - x \operatorname{tang}\gamma)}{h_m} \operatorname{secc}\alpha \qquad (425)$$

mediante la quale si deduce la seguente semplicissima costruzione grafica.

Sul prolungamento della **ac** si porta $\mathbf{ce} = A_k$ e si congiunge **e** con **b**. Si prolunga la **ab** fino ad incontrare la linea d'azione verticale della reazione d'appoggio in **f** e si proietta orizzontalmente il punto **f** sulla **bd** mediante la **fg** e risulta

$$\overline{bg} = x \operatorname{tang}\gamma \qquad \text{e quindi} \qquad \overline{gd} = h_m - x \operatorname{tang}\gamma$$

Conducendo una retta per **g** ed **r** fino in **s**, risulta

$$\overline{cs} = \frac{D_{m(mas)}}{\operatorname{secc}\alpha}$$

Difatti

$$\overline{cs} : \overline{gd} = \overline{ce} : \overline{bd} \qquad \text{da cui} \qquad \overline{cs} = \frac{\overline{ce} \cdot \overline{gd}}{\overline{bd}}$$

ossia

$$\overline{cs} = \frac{A_k (h_m - x \operatorname{tang} \gamma)}{h_m}$$

cioè $\overline{cs}$ è la componente verticale della tensione $D_{m(mas)}$ per avere la quale basta proiettare $\overline{cs}$ sulla direzione della diagonale $\overline{ad}$ cosicchè diventa:

$$\overline{di} = \overline{cs} \operatorname{secc} \alpha = D_{m(mas)}$$

Sommando algebricamente questa tensione dipendente dal carico accidentale con quella dovuta al carico permanente e che si desume dal diagramma relativo, costruito col metodo delle figure reciproche, si ottiene la tensione (*mas*) totale a cui è soggetta la diagonale.

Esempio.

Si supponga una trave lunga $l = 24$ metri, coll'altezza massima:

$$H = \frac{1}{6} 24 = 4 \text{ m.}$$

Il numero degli scomparti in corrispondenza alla nervatura inferiore sia $N = 6$ coll'ampiezza ognuno $\lambda = \frac{24}{6} = 4$ metri.

Il peso permanente si può valutare colla formula delle travi Schwedler (388) di cui per le travi principali $p_t = 28\, l$ e per l'impalcato $p_i = 666$, e quindi per metro corrente di trave il peso permanente della stessa è

$$p_t = \frac{1}{2} (28 \times 24) = 336$$

ed il peso dell'impalcato

$$p_i = \frac{1}{2} 666 = 333$$

ed arrotondando $p_t = 340$ e $p_i = 330$.

Il carico accidentale si desume per interpolazione dalla tabella L e quindi per metro corrente di trave si ha $k = 2500$ e $k' = 2980$.

Il peso p_t delle travi è portato in parte dai nodi superiori ed in parte dagli inferiori, e siccome essi nodi non si trovano sullo stesso appiombo, bisogna farne distinzione e si suppone cioè che il peso p_t sia applicato per metà ai nodi superiori e per metà agli inferiori. Il peso dell'impalcato p_i invece è applicato tutto ai nodi inferiori. Il peso permanente sopra un nodo

superiore lo si indica con P_s e quello sopra un nodo inferiore con P_i cosicchè è:

$$P_s = \frac{1}{2} p_t \lambda \quad , \quad P_i = \left(\frac{1}{2} p_t + p_i \right) \lambda$$

Il carico accidentale è tutto applicato ai nodi inferiori.
I carichi sui nodi sono dunque:

$$P_s = \frac{1}{2} 340 \times 4 = 680 \text{ Kg.}$$

$$P_i = \left(\frac{1}{2} 340 + 330 \right) 4 = 2000 \text{ Kg.}$$

$$K = 2500 \times 4 = 10000 \text{ Kg.}$$

$$K' = 2980 \times 4 = 11920 \text{ »}$$

Forma della trave. — Bisogna determinare le altezze della trave in corrispondenza ai vertici della nervatura superiore, i quali si trovano sullo appiombo della mezzaria degli scomparti inferiori. Le ordinate di questi vertici dividono la trave in un numero dispari di scomparti, cioè 7, e quindi bisogna prima di tutto determinare la grandezza del semiasse minore b dell'ellisse mediante la (419) cioè

$$b = \frac{H l}{\sqrt{l^2 - 4 c^2}}$$

e sostituendo in questa $H = 6$, $l = 24$, $c = \frac{1}{2} \lambda = \frac{1}{2} 4 = 2$

si trova:

$$b = \frac{4 \times 24}{\sqrt{24^2 - 4 \times 2^2}} = 4{,}058$$

Col procedimento indicato a pagina 629 si costruisce la forma schematica della trave quale è rappresentata nella **Fig. 475.**

Calcolo delle tensioni. — Per le nervature si procede col metodo delle figure reciproche. Si valutano prima le *tensioni permanenti* formando la retta poligono dei carichi P_s e P_i e costruendo il relativo diagramma **Fig. 475***a*, per il quale si è presa la scala di 4 millimetri per tonnellata. Si determinano poscia le *tensioni accidentali* formando la retta poligono dei carichi K e costruendo il corrispondente diagramma **Fig. 475***b*, per il quale si è presa la scala di 1 millimetro per tonnellata. Le *tensioni totali* risultano dalla somma algebrica delle tensioni parziali, i cui valori numerici desunti dalla misurazione dei rispettivi segmenti nei diagrammi, si espongono nel seguente specchio:

Tensioni permanenti	Tensioni accidentali
$S_1 = -\ 9475$ (37,9)	$S_1 = -\ 33200$ (33,2)
$S_2 = -\ 9775$ (39,1)	$S_2 = -\ 36200$ (36,2)
$S_3 = -\ 11500$ (46,0)	$S_3 = -\ 42800$ (42,8)
$S_4 = -\ 12125$ (48,5)	$S_4 = -\ 44500$ (44,5)
$I_1 = +\ 6250$ (25,0)	$I_1 = +\ 22100$ (22,1)
$I_2 = +\ 10100$ (40,4)	$I_2 = +\ 37000$ (37,0)
$I_3 = +\ 11525$ (46,1)	$I_3 = +\ 42300$ (42,3)

Tensioni totali

$$S_1 = -\ (\ 9475 + 33200) = -\ 42675$$
$$S_2 = -\ (\ 9775 + 36200) = -\ 45975$$
$$S_3 = -\ (11500 + 42800) = -\ 54300$$
$$S_4 = -\ (12125 + 44500) = -\ 56625$$

$$I_1 = +\ (\ 6250 + 22100) = +\ 28350$$
$$I_2 = +\ (10100 + 37000) = +\ 47100$$
$$I_3 = +\ (11525 + 42300) = +\ 53825$$

Per le diagonali del traliccio si applica il procedimento indicato a pagina 630. Bisogna perciò determinare la reazione variabile A_k per le varie diagonali col noto procedimento, e nell'ipotesi che il carico mobile si muova da destra verso sinistra si costruisce la retta poligono dei carichi K′ sulla verticale passante per l'estremo di sinistra della trave, si prende lo estremo di destra come polo e si costruisce il relativo poligono funicolare. Le ordinate dei vertici di questo poligono in corrispondenza alle verticali dei nodi inferiori dànno i valori della reazione A_k, che servono alla costruzione delle *tensioni accidentali* per ottenere le quali, si opera nel modo di già indicato, e che è posto in evidenza nella **Fig. 475***c*.

Le *tensioni permanenti* si deducono dal relativo diagramma, **Fig. 475***a*.

Nella somma algebrica delle tensioni parziali si hanno le *tensioni totali*.

Misurando i segmenti proporzionali alle tensioni nella scala delle forze, che si è assunta di 4 millimetri per tonnellata per la **Fig. 475***a* e di 1 millimetro per tonnellata per le **Fig. 475***b c*, si hanno i valori numerici delle tensioni, cioè:

Tensioni permanenti:

$$D_1 = D_{10} = +\ 4500\ (18{,}0$$
$$D_2 = D_9 = -\ 1525\ (6{,}1)$$
$$D_3 = D_8 = +\ 2625\ (10{,}5)$$
$$D_4 = D_7 = -\ 375\ (1{,}5)$$
$$D_5 = D_6 = +\ 1100\ (4{,}4)$$

Tensioni accidentali per il movimento da destra a sinistra:

$$D_1 = + 22600 \ (22,6)$$
$$D_2 = - 12800 \ (12,8)$$
$$D_3 = + 17500 \ (17,5)$$
$$D_4 = - 9800 \ (9,8)$$
$$D_5 = + 13100 \ (13,10)$$
$$D_6 = - 6500 \ (6,5)$$
$$D_7 = + 10000 \ (10,0)$$
$$D_8 = - 3900 \ (3,9)$$
$$D_9 = + 7500 \ (7,5)$$
$$D_{10} = 0$$

Tensioni totali per il movimento da destra a sinistra:

$$D_1 = + 4500 + 22600 = + 27100$$
$$D_2 = - 1525 - 12800 = - 14325$$
$$D_3 = + 2625 + 17500 = + 20125$$
$$D_4 = - 375 - 9800 = - 10175$$
$$D_5 = + 1100 + 13100 = + 14200$$
$$D_6 = + 1100 - 6500 = - 5400$$
$$D_7 = - 375 + 10000 = + 9625$$
$$D_8 = + 2625 - 3900 = - 1275$$
$$D_9 = - 1525 + 7500 = + 5975$$
$$D_{10} = + 4500 + 0 = + 4500$$

Le diagonali poste simmetricamente hanno tensioni eguali, ossia sussiste la relazione

$$D_m = D_{(N+1-m)}$$

essendo N il numero totale delle diagonali, dalla quale si deducono speditamente le tensioni (*mas*) e (*min*) per le varie diagonali, cioè:

Tensioni (*mas*)	Tensioni (*min*)
$D_1 = + 27000$	$D_1 = D_{10} = + 4500$
$D_2 = D_9 = + 5975$	$D_2 = - 14325$
$D_3 = + 20125$	$D_3 = D_8 = - 1275$
$D_4 = D_7 = + 9625$	$D_4 = - 10175$
$D_5 = + 14200$	$D_5 = D_6 = - 5400$

Nella **Fig. 476** sono segnate le tensioni accanto alle rispettive sbarre.

Determinazione della riquadratura delle sbarre nelle travi a grandi maglie.

292. Generalità. — Nelle ricerche precedenti che hanno per iscopo il calcolo delle tensioni massime a cui sono soggette le

varie sbarre delle travi sia *rettilinee*, che *poligonali*, a traliccio simmetrico o dissimetrico con grandi maglie, si è veduto che alcune sbarre sono soggette a sforzi di eguale natura in qualunque tipo di trave (quelle di contorno o nervature), mentre altre sono soggetti a sforzi di natura contraria per alcuni tipi di trave (quelle del traliccio), ma tutte per altro sono soggette a sforzi di intensità variabile per l'azione del carico mobile. Laonde applicando le formule di LAUNHARDT e di WEYRAUCH basate sulle leggi di WÖHLER, e sviluppate ai §§ **82, 83, 84** per la determinazione del carico di sicurezza o coefficiente di lavoro, o sforzo specifico, o coefficiente di resistenza, ne viene che bisogna farne la ricerca singolarmente per ogni sbarra, note che sieno le rispettive tensioni di minimo e massimo valore numerico, poichè questi due valori limiti dello sforzo, da cui dipende il coefficiente di lavoro R, variano per ogni sbarra.

Servono alla determinazione del coefficiente di lavoro R, le formule seguenti:

α) **Ferro.** —

1) **Sbarre cimentate in un solo senso** (122). —

$$R = 6\left(1 + \frac{1}{2}\frac{{}_{min}F}{{}_{mas}F}\right) \text{ Kg. per mm}\square$$

nella quale ${}_{min}F$ e ${}_{mas}F$ rappresentano rispettivamente gli sforzi di minimo e massimo valor numerico, cimentanti la sbarra, ma della stessa natura.

2) **Sbarre cimentate in sensi contrari** (123). —

$$R = 6\left(1 - \frac{1}{2}\frac{{}_{mas}F_o}{{}_{mas}F}\right) \text{ Kg. per mm}\square$$

nella quale ${}_{mas}F_o$ e ${}_{mas}F$ rappresentano gli sforzi massimi operanti in senso contrario, cioè di natura opposta, intendendosi sempre che è ${}_{mas}F_o$ quello di minor valore numerico e ${}_{mas}F$ quello di maggior valore. Nella formula poi devono introdursi i soli valori numerici degli sforzi, senza badare al segno, ossia alla natura delle tensioni.

β) **Acciaio.** —

1) **Sbarre cimentate in un solo senso.** —

Per acciaio di ordinaria durezza (124)

$$R = 11\left(1 + \frac{9}{11}\frac{{}_{min}F}{{}_{mas}F}\right) \text{ Kg. per mm}\square;$$

Per acciaio molto tenero (124*a*)

$$R = 10\left(1 + \frac{3}{4}\frac{{}_{min}F}{{}_{mas}F}\right) \text{ Kg. per mm}\square.$$

2) **Sbarre cimentate in sensi contrari.** —

Per acciaio di ordinaria durezza (125)

$$R = 10\left(1 - \frac{5}{11}\frac{{}_{mas}F_o}{{}_{mas}F}\right) \text{ Kg. per mm}\square;$$

Per acciaio molto tenero (125*a*)

$$R = 9\left(1 - \frac{1}{2}\frac{{}_{mas}F_o}{{}_{mas}F}\right) \text{ Kg. per mm}\square$$

nelle quali formule ${}_{min}F$, ${}_{mas}F$, ${}_{mas}F_o$ conservano i precedenti significati.

293. Riquadratura delle sbarre. — Determinato che si abbia il coefficiente di lavoro o sforzo specifico R per ogni sbarra valendosi delle formule superiori, si procede speditamente al calcolo della riquadratura o sezione ω delle varie sbarre, poichè basta dividere lo sforzo del più grande valore numerico ${}_{mas}F$, che le cimenta, per R e nel quoziente si ha l'*area teorica* della sezione ω, cioè:

Per le sbarre stirate

$$\omega_t = \frac{{}_{mas}F}{R} \quad , \quad \frac{{}_{mas}F}{\omega_t} = R \qquad (422)$$

Per le sbarre compresse

$$\omega_c = \frac{{}_{mas}F}{R_o} \quad , \quad \frac{{}_{mas}F}{\omega_c} = R_o \qquad (423)$$

essendo R_0 il coefficiente ridotto, cioè

$$R_0 = \frac{R}{m}$$

nella quale R indica il coefficiente di lavoro determinato colle formule del § **292** ed m il coefficiente di riduzione da determinarsi col procedimento indicato al § **19**.

Generalmente invece che per ricerca diretta, si procede per via di verifica, cioè si scelgono ferri di cui le aree delle sezioni soddisfino alle (422) o (423).

Osservazione. — Nel valutare le aree utili effettive ω_t da introdursi nelle (422) e (423) per le sbarre soggette a trazione bisogna far detrazione dai fori pei chiodi, che interrompono la continuità della fibra. Non occorre fare tale detrazione per le sbarre soggette a compressione.

Esempio 1°

Si fa applicazione alla trave parabolica smussata, **Fig. 465**, di cui si sono calcolate le tensioni nell'esempio a pagina 617.

Nervature. — Le sbarre di contorno e nervature sono cimentate con tensioni della stessa natura sia sotto l'azione del solo carico permanente, che sotto quella del carico mobile, ed inoltre patiscono il massimo cimento per sopraccarico completo. Tutte le sbarre di contorno dunque sono cimentate in un solo senso per cui alla determinazione del coefficiente di lavoro R serve la (122). È facile stabilire che lo sforzo minF ha luogo per ponte scarico e lo sforzo masF per ponte tutto carico; e poichè gli sforzi sono proporzionali ai carichi unitari ne viene che è il rapporto

$$\frac{min\mathrm{F}}{mas\mathrm{F}} = \frac{p}{p+k}$$

e quindi la (122) diventa

$$R = 6\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{p}{p+k}\right)$$

ed essendo $p = 900$ chilogrammi, $k = 2350$ chilogrammi, risulta

$$R = 6\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{900}{900+2350}\right) = 6{,}84 \text{ Kg. per mm}\square$$

Questo valore di R vale per le sbarre della nervatura inferiore che sono stirate, ma non per quelle della nervatura superiore che sono compresse

poichè quest'ultime, stante la loro notevole lunghezza, si piegano. Bisogna trovare dunque il relativo coefficiente ridotto $R_o = \frac{R}{m}$. Il valore del coefficiente di riduzione m dipende dal rapporto $r = \frac{L}{g}$ fra la lunghezza teorica L e la grossezza teorica g della sbarra. Per stabilire il valore di R si prende in considerazione la sbarra estrema, che è quella di maggior lunghezza, cioè $\sigma_1 = 4{,}715$ ed ammettendo che in essa possa avvenire tutto al più un doppio piegamento, si prende

$$L = \frac{1}{2}\sigma_1 = \frac{4{,}715}{2} = 2{,}36$$

Per stabilire il valore di g bisogna considerare la forma della nervatura e sia quella rappresentata nella **Fig. 477.** Il lato minore del rettangolo circoscrivente la sezione, non tenuto conto della sporgenza del gambo, deve prendersi come valore di g, cioè $g = 146$ millimetri; perciò

$$r = \frac{2360}{146} = 16$$

Questo valore di $r = 16$ non si trova nella tabella **XII** e si procede per interpolazione fra i due valori fra cui trovasi compreso, cioè 12 e 24, onde determinare il corrispondente valore di m che risulta

$$m = 1{,}20 + 0{,}27 = 1{,}47$$

e quindi

$$R_o = \frac{6{,}84}{1{,}47} = 4{,}65$$

che è il coefficiente di lavoro da adottarsi per le sbarre compresse.

Le *aree teoriche* delle sezioni risultano dunque:

$$^{\omega}S_1 = \frac{95905}{4{,}65} = 20625 \text{ mm}\square \qquad ^{\omega}I_1 = 0$$

$$^{\omega}S_2 = \frac{105193}{4{,}65} = 22622 \text{ »} \qquad ^{\omega}I_2 = \frac{85425}{6{,}84} = 12489 \text{ mm}\square$$

$$^{\omega}S_3 = \frac{106166}{4{,}65} = 22831 \text{ »} \qquad ^{\omega}I_3 = \frac{97583}{6{,}84} = 14267 \text{ »}$$

$$^{\omega}S_4 = \frac{105515}{4{,}65} = 22691 \text{ »} \qquad ^{\omega}I_4 = \frac{102028}{6{,}84} = 14916 \text{ »}$$

$$^{\omega}S_5 = \frac{104617}{4{,}65} = 22498 \text{ »} \qquad ^{\omega}I_5 = \frac{103921}{6{,}84} = 15193 \text{ »}$$

Assumendo per le sbarre compresse la forma rappresentata dalla **Fig. 477** nonchè le dimensioni ivi annotate, l'*area effettiva* della sezione, senza detrazione dei fori pei chiodi, risulta:

$$^{\omega}S = 22908 \text{ mm}\square$$

e sarebbe consigliabile di fare la nervatura superiore con questa sezione costante, poichè lo spreco che si avrebbe per la prima sbarra, non sarebbe molto rilevante, e la costruzione riescirebbe semplicissima.

Assumendo per le sbarre stirate le forme rappresentate nelle **Fig. 478***a b c*, nonchè le relative dimensioni, le aree delle sezioni, fatta la detrazione dei fori pei chiodi, risultano rispettivamente

$$11500 \text{ mm}\square \quad , \quad 12460 \text{ mm}\square \quad , \quad 15340 \text{ mm}\square$$

le quali assegnate ordinatamente alla prima sbarra, alla seconda sbarra ed a tutte le altre si avrebbero le aree utili effettive

$$^{\omega}I_1 = 11500 \text{ mm}\square \ , \ ^{\omega}I_2 = 12460 \text{ mm}\square \ , \ ^{\omega}I_3 = {}^{\omega}I_4 = {}^{\omega}I_5 = 15340 \text{ mm}\square$$

Abbenchè la prima sbarra abbia uno sforzo teorico *nullo*, conviene prolungare la nervatura inferiore fino all'appoggio, mentre facendo la terza sbarra eguale alla quinta e sesta si semplifica la costruzione senza spreco considerevole.

Traliccio. — Le diagonali non sopportano altro che sforzi di trazione, sono perciò cimentate in un solo senso e quindi per la determinazione del coefficiente di lavoro R serve la (122), cioè:

$$R = 6\left(1 + \frac{1}{2}\frac{min F}{mas F}\right)$$

È da osservarsi però che negli scomparti dove vi ha una sola diagonale (gli estremi), le rispettive tensioni (*mas*) e (*min*) sono entrambi positive e quindi

$$min F = \text{tensione } (min) \quad , \quad mas F = \text{tensione } (mas)$$

mentre negli scomparti dove vi sono due diagonali incrociate (gli intermedi) quelle che si innalzano verso gli appoggi (*diagonali principali*) sono stirate dal carico permanente nonchè dal carico mobile e quindi per esse diventa

$$\frac{min F}{mas F} = \frac{p}{p + k'}$$

e quelle che si innalzano verso la mezzaria (*controdiagonali*) restano inerti sotto la sola azione del carico permanente e sono stirate quando entra in azione il carico mobile per cui è

$$min F = 0 \quad , \quad mas F = \text{tensione } (mas)$$

Laonde si ha per la diagonale D_1

$$R = 6\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{\text{tensione }(min)}{\text{tensione }(mas)}\right) = 6\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{24100}{96409}\right) = 6{,}75\,\text{Kg. per mm}\square.$$

Per le diagonali D_2, D_3, D_4, D_5

$$R = 6\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{p}{p + h_r}\right) = 6\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{900}{900 + 2700}\right) = 6{,}75\,\text{Kg. per mm}\square.$$

Per le controdiagonali C_2, C_3, C_4, C_5

$$R = 6\,(1 + 0) = 6\,\text{Kg. per mm}\square.$$

Le *aree teoriche* delle sezioni delle sbarre risultano dunque:

$$^{\omega}D_1 = \frac{96409}{6{,}75} = 14282\ \text{mm}\square$$

$$^{\omega}D_2 = \frac{24082}{6{,}75} = 3567\ \text{»} \qquad ^{\omega}C_2 = \frac{4087}{6} = 681\ \text{mm}\square$$

$$^{\omega}D_3 = \frac{18445}{6{,}75} = 2733\ \text{»} \qquad ^{\omega}C_3 = \frac{10590}{6} = 1765\ \text{»}$$

$$^{\omega}D_4 = \frac{17422}{6{,}75} = 2595\ \text{»} \qquad ^{\omega}C_4 = \frac{13930}{6} = 2321\ \text{»}$$

$$^{\omega}D_5 = \frac{16901}{6{,}75} = 2519\ \text{»} \qquad ^{\omega}C_5 = \frac{15960}{6} = 2660\ \text{»}$$

Per le diagonali si devono necessariamente usare ferri piatti, onde non possano essere in condizione di resistere a sforzi di compressione.

Assumendo le dimensioni annotate nelle **Fig. 479** e **480** e fatta la detrazione di un solo foro per chiodi, ammettendo di disporli convenientemente, così da poter applicare le regole di Schwedler, § **252**, le *aree utili effettive* delle sezioni risultano:

$$^{\omega}D_1 = 14520\ \text{mm}\square$$

$$^{\omega}D_2 = 3640\ \text{»} \qquad ^{\omega}C_2 = 712\ \text{mm}\square$$

$$^{\omega}D_3 = 2800\ \text{»} \qquad ^{\omega}C_3 = 1800\ \text{»}$$

$$^{\omega}D_4 = 2760\ \text{»} \qquad ^{\omega}C_4 = 2300\ \text{»}$$

$$^{\omega}D_5 = 2530\ \text{»} \qquad ^{\omega}C_5 = 2760\ \text{»}$$

Le verticali essendo sempre soggette a sforzi di compressione sono cimentate in un solo senso e quindi per la determinazione del coefficiente di lavoro R serve la (122)

$$R = 6\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{min\text{F}}{mas\text{F}}\right)$$

E siccome sono compresse sotto la sola azione del carico permanente, e pure compresse per la simultanea azione del carico mobile, il rapporto $\frac{minF}{masF}$ diventa

$$\frac{minF}{masF} = \frac{p}{p + k'}$$

da cui

$$R = 6 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{900}{900 + 2700} \right) = 6{,}75 \text{ Kg. per mm}\square$$

Queste sbarre però, in causa della loro notevole lunghezza, si piegano sotto l'azione di forze comprimenti e quindi devesi determinare lo sforzo pratico o coefficiente ridotto $R_0 = \frac{R}{m}$.

Onde determinare m bisogna valutare il rapporto $r = \frac{L}{g}$ fra la lunghezza teorica e la grossezza teorica della sbarra. Per la lunghezza teorica, ammettendo che possa avvenire tutto al più un doppio piegamento nella sbarra, si prende $L = \frac{1}{2} h_m$ essendo h_m la lunghezza effettiva della sbarra che si considera. La grossezza teorica g è rappresentata dal lato minore del rettangolo circoscrivente la sezione delle sbarre, alla quale si assegna la forma indicata nella **Fig. 481** per le verticali intermedie. Prendendo $g = 100$ millimetri, si ha:

$$r_1 = \frac{h_1}{2g} = \frac{3020}{2 \times 100} = 15 \quad , \quad r_2 = \frac{h_2}{2g} = \frac{4700}{2 \times 100} = 24$$

$$r_3 = \frac{h_3}{2g} = \frac{5900}{2 \times 100} = 30 \quad , \quad r_4 = \frac{h_4}{2g} = \frac{6620}{2 \times 100} = 33$$

$$r_5 = \frac{h_5}{2g} = \frac{6860}{2 \times 100} = 35$$

Servendosi della Tabella **XII** e procedendo per interpolazione si trovano i valori del coefficiente di riduzione m corrispondenti a quelli del rapporto r, che risultano

$$m_1 = 1{,}40 \quad , \quad m_2 = 2{,}00 \quad , \quad m_3 = 2{,}50 \quad , \quad m_4 = 2{,}75 \quad , \quad m_5 = 2{,}92$$

laonde i coefficienti di lavoro ridotti per le varie verticali, sono:

$$\text{Per la verticale } V_1 \ . \ . \ . \quad R_o = \frac{6{,}75}{1{,}40} = 4{,}82$$

$$\text{» » } V_2 \ . \ . \ . \quad R_o = \frac{6{,}75}{2{,}00} = 3{,}37$$

$$\text{» » } V_3 \ . \ . \ . \quad R_o = \frac{6{,}75}{2{,}50} = 2{,}70$$

$$\text{» » } V_4 \ . \ . \ . \quad R_o = \frac{6{,}75}{2{,}75} = 2{,}45$$

$$\text{» » } V_5 \ . \ . \ . \quad R_o = \frac{6{,}75}{2{,}92} = 2{,}31$$

Per la verticale V_0 (montante d'appoggio) si assume la sezione rappresentata nella **Fig. 482.** Si ammette possibile un semplice piegamento e quindi la lunghezza teorica L si prende eguale alla effettiva h_o, mentre la grossezza teorica è $g = 195$ millimetri, per cui $r_o = \frac{h_o}{g} = \frac{860}{195} = 4{,}4$ e ricorrendo alla Tabella **XII** per interpolazione si trova $m = 1{,}03$, d'onde il coefficiente di lavoro risulta:

$$\text{Per la verticale } V_0 \ . \ . \ . \quad R_o = \frac{6{,}75}{1{,}03} = 6{,}55$$

Le *aree teoriche* delle sezioni per le sbarre verticali sono quindi:

$$^{\omega}V_0 = \frac{64080}{6{,}55} = 9783 \text{ mm}\square$$

$$^{\omega}V_1 = \frac{12673}{4{,}82} = 2630 \text{ »}$$

$$^{\omega}V_2 = \frac{7693}{3{,}37} = 2283 \text{ »}$$

$$^{\omega}V_3 = \frac{6881}{2{,}70} = 2548 \text{ »}$$

$$^{\omega}V_4 = \frac{6567}{2{,}45} = 2680 \text{ »}$$

$$^{\omega}V_5 = \frac{5813}{2{,}31} = 2516 \text{ »}$$

Assumendo per il montante d'appoggio le dimensioni indicate nella **Fig. 482** e per tutte le altre verticali la forma e dimensioni indicate nella **Fig. 481** si hanno le seguenti aree effettive:

$$^{\omega}V_0 = 11300 \text{ mm}\square \ , \quad ^{\omega}V_1 = {}^{\omega}V_2 = {}^{\omega}V_3 = {}^{\omega}V_4 = {}^{\omega}V_5 = 2752 \text{ mm}\square$$

È opportuno di assegnare a tutte le verticali intermedie la assunta sezione per semplicità di costruzione, osservando che lo spreco per la verticale V_2 non è molto grande.

Esempio 2°.

Nel primo esempio tutte le sbarre sono cimentate in un solo senso.

Si consideri ora il caso che alcune sbarre sieno cimentate in sensi contrari. Si ponga a calcolo perciò la trave a traliccio dissimetrico con diagonali tese e compresse, di cui si sono valutate le tensioni nell'esempio a pagina 443.

Nervature. — Queste sono cimentate in un solo senso e quindi per valutare il coefficiente di lavoro serve la (122), cioè:

$$R = 6\left(1 + \frac{1}{2}\frac{minF}{masF}\right)$$

nella quale è da porsi

$$\frac{minF}{masF} = \frac{p}{p+k} = \frac{600}{600+2700} = 0{,}18$$

d'onde

$$R = 6\left(1 + \frac{1}{2}\,0{,}18\right) = 6{,}54 \text{ Kg. per mm}\square$$

il quale è da adottarsi soltanto per le sbarre stirate, mentre per le sbarre compresse è da prendersi il coefficiente ridotto $R_0 = \frac{R}{m}$. Supponendo che la grossezza teorica delle sbarre sia 90 millimetri, **Fig. 483**, e prendendo la lunghezza teorica metà della effettiva, cioè $L = \frac{1}{2}\,2{,}00 = 1{,}00$ risulta $r = \frac{1000}{90} = 12$ e quindi il coefficiente di riduzione è $m = 1{,}20$, d'onde:

$$R_0 = \frac{6{,}54}{1{,}20} = 5{,}45 \text{ Kg. per mm}\square$$

Le *aree teoriche* delle sezioni diventano dunque:

$$\omega S_1 = \frac{11550}{5{,}45} = 2120 \text{ mm}\square \qquad \omega I_1 = \frac{11550}{6{,}54} = 1766 \text{ mm}\square$$

$$\omega S_2 = \frac{31350}{5{,}45} = 5752 \text{ »} \qquad \omega I_2 = \frac{31350}{6{,}54} = 4794 \text{ »}$$

$$\omega S_3 = \frac{44550}{5{,}45} = 8174 \text{ »} \qquad \omega I_3 = \frac{44550}{6{,}54} = 6812 \text{ »}$$

$$\omega S_4 = \frac{51150}{5{,}45} = 9385 \text{ »} \qquad \omega I_4 = \frac{51150}{6{,}54} = 8599 \text{ »}$$

Traliccio. — Le diagonali degli scomparti estremi hanno tanto la tensione (*mas*) che la tensione (*min*) della stessa natura e quindi sono cimentate in un solo senso e per esse il coefficiente di lavoro si determina colla (122)

$$R = 6\left(1 + \frac{1}{2}\frac{minF}{masF}\right)$$

mentre le diagonali degli scomparti intermedi hanno la tensione (*mas*) di natura contraria della tensione (*min*) e quindi sono cimentate in sensi contrari per cui il coefficiente di lavoro deve valutarsi colla (123)

$$R = 6\left(1 - \frac{1}{2}\frac{masF_0}{masF}\right)$$

Laonde si deduce:

Diagonali 1° scomparto $R = 6\left(1 + \frac{1}{2}\frac{2970}{19004}\right) = 6{,}48$ Kg. per mm□

» 2° » $R = 6\left(1 + \frac{1}{2}\frac{1548}{14147}\right) = 6{,}30$ » »

» 3° » $R = 6\left(1 - \frac{1}{2}\frac{445}{9862}\right) = 5{,}82$ » »

» 4° » $R = 6\left(1 - \frac{1}{2}\frac{3012}{6151}\right) = 4{,}50$ » »

Le verticali sono sempre compresse o sempre stirate, sia a ponte scarico, che al passaggio del carico mobile, a seconda che l'impalcato è posto al disopra od al disotto, e quindi sono sempre cimentate in un senso con sforzi eguali per tutte e quindi il coefficiente di lavoro comune per tutte le verticali, risulta

$$R = 6\left(1 + \frac{1}{2}\frac{600}{600 + 3240}\right) = 6{,}48 \text{ Kg. per mm}\square$$

il quale è da adottarsi nel caso che le verticali sieno stirate (impalcato posto sotto) mentre se le verticali sono compresse (impalcato posto sopra) allora bisogna trovare il corrispondente sforzo ridotto $R_0 = \frac{R}{m}$ colle solite norme.

Prendendo la lunghezza teorica $L = \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}2{,}00 = 1{,}00$, e la grossezza teorica $g = 70$ millimetri, **Fig. 484**, risulta $r = \frac{1000}{70} = 15$ e quindi $m = 1{,}40$ da cui:

$$R_0 = \frac{6{,}48}{1{,}40} = 4{,}60 \text{ Kg. per mm}\square$$

Le *aree teoriche* delle sezioni di queste sbarre sono dunque:

Diagonali.

1° scomparto $\omega_1 = \frac{19004}{6,48} = 2933$ mm□

2° » $\omega_2 = \frac{14147}{6,30} = 2246$ »

3° » $\omega_3 = \frac{9862}{5,82} = 1695$ »

4° » $\omega_4 = \frac{6151}{4,50} = 1367$ »

Verticali.

Impalcato posto sotto

Verticali intermedie (stirate) . . . $\omega = \frac{3840}{6,48} = 593$ mm□

» agli appoggi (compresse) . $\omega_0 = \frac{13440}{4,60} = 2922$ »

Impalcato posto sopra

Verticali intermedie (compresse) . . $\omega = \frac{3840}{4,60} = 835$ mm□

» agli appoggi (compresse) . $\omega_0 = \frac{17280}{4,60} = 3756$ »

Le aree effettive delle sezioni si desumono in modo analogo a quello indicato nell'esempio precedente.

Osservazione. — Allorchè l'impalcato è posto sotto, le verticali intermedie sono sempre stirate, e si potrebbe quindi conformarle anche a ferro piatto, però si fanno sempre con ferri rigidi, cioè ┐T┌, sia per un comodo attacco delle travi trasversali, come per irrigidire la trave nel miglior modo, onde sieno diminuiti quanto è meglio possibile i brandimenti laterali.

Per i calcoli delle controventature, degli apparecchi di dilatazione, delle chiodature e delle testate si procede per i ponti con travi poligonali nello stesso modo indicato per i ponti con travi diritte ai §§ **235** a **239** e **251** a **259**.

III.

PONTI AD ARCHI

1. Costruzione.

294. Generalità. — I primi ponti metallici che si costruirono furono precisamente i ponti ad arco, per i quali si è impiegata la ghisa. Se i ponti avessero a sopportare costantemente carichi uniformemente distribuiti su tutta la loro estesa, allora assegnando all'asse dell'arco la forma della curva delle pressioni, che sarebbe una parabola, l'arco non sarebbe soggetto che a sforzi di compressione equabilmente ripartiti in qualsiasi sezione traversa, e quindi l'impiego della ghisa sarebbe da preferirsi stante la grande resistenza di questo metallo alla compressione. Il carico mobile però produce nelle armature ad arco degli sforzi di flessione ed a motivo della poca resistenza che oppone la ghisa a questi sforzi, e della facilità con cui si spezza sotto l'azione di urti bruschi e violenti, quali possono essere prodotti dal passaggio di pesanti veicoli, così essa oggidì non viene più adoperata e si costruiscono invece anche i ponti ad arco con ferro laminato. Si tralascia quindi di occuparsi delle primitive conformazioni dei ponti in ghisa, ora in disuso, e si studiano invece le costruzioni in ferro laminato.

Circa alla disposizione e conformazione dell'impalcato propriamente detto (travi secondarie e suolo) valgono le stesse norme ed i dettagli medesimi indicati per i ponti a travata e non resta altro che studiare la forma delle armature principali ad arco, ed il modo di renderle fra loro solidali.

Si distinguono diversi tipi di armature ad arco e cioè *armature con archi elastici* con o senza cerniere ed *armature reticolari ad arco con cerniere.*

295. Armature con archi elastici. — In generale sono costituite da una nervatura inferiore foggiata ad arco, una nervatura superiore di solito rettilinea, alcune volte leggermente

arcuata, le quali sono collegate da timpani od a parete piena, od a traliccio multiplo simmetrico, o finalmente a traliccio semplice dissimetrico, cioè costituito da montanti od aste verticali collegate da un semplice ordine di diagonali, la quale ultima conformazione è la più conveniente, ed è quella che ordinariamente viene adoperata in pratica. Si sono fatti dei timpani anche con soli montanti verticali. In queste armature la nervatura inferiore, od arcone propriamente detto, è la membratura principale di resistenza, inquantochè essa sopporta, mediante i timpani, l'impalcato che viene fissato alla nervatura superiore o corrente, nonchè i carichi accidentali sovrappassanti; cosicchè i timpani ed il corrente sono membrature secondarie destinate a trasmettere i carichi all'arcone. L'arcone di solito ha la sezione di I composto (simmetrico o dissimetrico) con gambo, cantonali e tavolette, od anche la forma di][o -|-. Il corrente ha la sezione di T o I semplice o composto con gambo, cantonali e tavolette. I montanti essendo caricati di punta devono essere ferri rigidi e quindi si fanno con ferri speciali semplici o combinati cioè:



Alle diagonali, che si considerano semplicemente come membrature di collegamento, si assegna di solito la stessa forma dei montanti.

Per collegare i montanti e le diagonali all'arcone, allorchè questo ha il profilo di I, occorre un'anima che sporga all'insù della tavoletta di estradosso. Se l'arcone non ha tavolette basta prolungare all'insù il gambo, Fig. 485*a*; se vi sono tavolette si può egualmente prolungare all'insù il gambo interrompendo longitudinalmente la tavoletta superiore che si fa in due parti, Fig. 485*b*, oppure se non si vuol interrompere la tavoletta si aggiunge un'anima mediante due cantonali, Fig. 485*c*. La stessa cosa si deve ripetere per il corrente se esso è formato a I. Quando l'arcone ed il corrente hanno le altre forme indicate di profili, vi si collegano i montanti e diagonali negli stessi modi che si collegano le sbarre del traliccio alle nervature delle armature a travata. Gli arconi possono venire fissati ai loro estremi mediante bolloni da muro sopra i piedritti o semplicemente impo-

stati sopra i medesimi, ed allora sono *archi senza cerniere*, oppure possono venire impostati sopra i piedritti mediante cerniere e diventano *archi con due cerniere*, o finalmente, oltre delle due cerniere alle imposte, vi è una terza cerniera nel mezzo dell'arco in chiave, ossia al vertice, e si hanno gli *archi con tre cerniere*.

296. Armature reticolari ad arco con cerniere. — Sono formate da due mezze armature simmetriche che si fanno contrasto in chiave mediante una cerniera intorno alla quale possono liberamente girare. Ogni mezza armatura è costituita da una nervatura inferiore poligonale, coi lati inscritti in un arco di cerchio od in una parabola, da una nervatura superiore rettilinea, e da montanti e saette costituenti un timpano a traliccio semplice dissimetrico che serve a collegarle. La cerniera in chiave è posta esclusivamente fra le nervature inferiori, mentre le nervature superiori ed i timpani delle due mezze armature rimangono affatto indipendenti l'uno dall'altro, anzi fra i medesimi deve rimanere un certo giuoco che permetta i movimenti di rotazione delle due mezze armature intorno alla cerniera di chiave, Fig. 4, 8 (**Tav. 45**), Fig. 1, 4 (**Tav. 46**). Le nervature inferiori si impostano al loro piede su altre due cerniere fissate nei piedritti. Con questa conformazione si è nel caso di due travature reticolari che si fanno mutuo contrasto e per le quali si può determinare le reazioni dei punti d'appoggio (le cerniere) in intensità e direzione, per cui è il complesso dell'armatura che deve resistere tanto all'azione del carico permanente che dell'accidentale, i quali cimentano con tensioni longitudinali le varie sbarre costituenti le armature. Tanto la nervatura inferiore, che la superiore, come le sbarre dei timpani possono avere le stesse forme di sezione indicate per il tipo precedente. È poi da avvertire che la nervatura inferiore può anche essere profilata a ⊥ semplice o composto, e che l'armatura può avere doppia parete verticale, come nelle travi diritte, nel qual caso ambe le nervature hanno il profilo ad ⊔, e le sbarre dei timpani sono ordinariamente travi composte col gambo a traliccio, Fig. 17 (**Tav. 44**).

297. Numero delle armature ad arco. — L'uso a cui è destinato il ponte e la larghezza del medesimo hanno la maggior influenza sul numero degli arconi. Per i ponti *pedonali* e per i

ponti *carrozzabili* la cui larghezza non supera i 4 metri bastano due soli arconi posti in corrispondenza alle fronti del ponte, od ai cigli della carreggiata, ma se ne possono intercalare anche degli altri. Per larghezze maggiori il numero delle armature deve essere maggiore di due, acciò esse non risultino troppo distanti e non si sia quindi obbligati all'impiego di travi traversali di grandi dimensioni, ma non conviene, nei riguardi della economia, di adottare distanze minori di metri 1,20 fra gli arconi. Per *ponti ferroviari* si usano di solito due arconi per un solo binario, posti o direttamente sotto le rotaie, od alla distanza di circa 3 metri l'uno dall'altro (nei quali casi i marciapiedi sono sorretti da mensole), oppure posti alle fronti del ponte alla distanza di metri 4,50 circa. Per ponti a due binari, cioè con quattro rotaie, le armature possono essere in numero minore o maggiore di quattro, a seconda che si voglia o meno l'indipendenza dei binari, ed in generale valgono le norme indicate ai §§ **193** a **195**.

298. Controventi. — Onde diminuire nel miglior modo possibile i brandimenti causati nel ponte dal passaggio del carico mobile e dall'azione violenta dei venti impetuosi, è necessario collegare fra di loro le varie armature controventandole in tutti i sensi. Due categorie di controventi si impiegano, cioè *orizzontali* e *verticali*.

α) **Controventi orizzontali.** — Le nervature inferiori, od arconi propriamente detti, si controventano mediante traversi posti fra arcone ed arcone in corrispondenza ai piedi dei montanti, collocando un traverso ogni uno, due o tre montanti a seconda che essi sono più o meno distanti; ed i quali traversi hanno di solito la sezione di un ⊥ o I semplice o composto, e quelli a I sono col gambo pieno o reticolato a seconda della loro minore o maggior altezza, che d'ordinario si tiene di poco inferiore a quella dell'arcone. Questi traversi si pongono in opera col gambo inclinato nella direzione radiale corrispondente al punto dell'arcone in cui avviene il loro attacco, e sempre disposti normalmente all'andamento degli arconi. Fra due traversi successivi si dispongono delle croci di Sant'Andrea formate con ferri piatti, o meglio con sbarre profilate a ⅂ ⅃ od ⊔.

Anche le nervature superiori, o correnti, si controventano con traversi posti in corrispondenza a quelli inferiori, ma se vi sono

travi trasversali sorreggenti il tavolato queste possono funzionare da traversi. Fra due o più traversi successivi, oppure due o più travi trasversali, si pongono delle altre croci di Sant'Andrea formate di ferri piatti o di ferri rigidi, disposte in piani orizzontali.

β) **Controventi verticali.** — Sono costituiti da croci di Sant'Andrea disposte in piani verticali, trasversalmente all'andamento delle armature, e che si intercalano fra le medesime, essendo compresa ogni croce fra due montanti che si corrispondono, uno appartenente ad una armatura, e l'altro all'armatura successiva. Queste croci o controventi verticali, possono essere ugnole o multiple in uno stesso scomparto trasversale, e si estendono per tutta l'altezza dei montanti. Basta poi limitarle a quei soli montanti, la cui altezza è maggiore di metri 1,5, cioè a quelli che stanno verso gli estremi dell'armatura.

299. Appoggi. — Entrambe le due nervature di un'armatura ad arco si appoggiano sui piedritti, ma in modi affatto differenti.

α) **Appoggio della nervatura inferiore.** — La nervatura inferiore, od arco, si imposta sui piedritti in modo da poter girare o meno, e può esser tutta continua, oppure divisa in due parti simmetriche che si fanno contrasto in chiave così da poter girare ivi liberamente, per cui si hanno gli *appoggi fissi* e gli *appoggi girevoli* o *cerniere*, i quali ultimi si distinguono in *cerniere di imposta* e *cerniere di chiave*.

1) **Appoggi fissi.** — Essi consistono ordinariamente di due piastre di ghisa una fissata nella muratura, l'altra imbollonata all'estremo dell'arco, fra le quali si innestano alcune biette d'acciaio o di ferro che servono a regolare la posizione dell'arco fra i piedritti, nonchè a porlo nella necessaria tensione. Si può ommettere la piastra imbollonata all'estremo dell'arco, a motivo dei rinforzi che si devono ivi applicare, Fig. 24, (**Tav. 41**), Fig. 6, 10 (**Tav. 42**). Un altro tipo di appoggio fisso è rappresentato nella **Fig. 486**, che è quello del ponte di Monreale sulla Cellina (**Tav. 41**), il quale è congegnato in modo che la superficie di posa sia molto ristretta, e quindi che per le deformazioni elastiche dell'arco sieno piccolissimi gli spostamenti del centro di pressione.

2) **Cerniere d'imposta.** — Sono costituite da un perno cilindrico

di ferro o di acciaio interposto fra due cuscinetti di ghisa, l'uno fissato nelle murature, l'altro all'estremo dell'arco, Fig. 6, 14, 15 (**Tav. 45**); oppure da un perno semicilindrico incassato fra i ribordi di una piastra o cassa di ghisa fissata nelle murature che può essere regolato di posizione mediante biette, e sul quale si appoggia l'estremo dell'arco che a tal uopo riceve un corrispondente incavo, Fig. 18, 24 (**Tav. 43**); o finalmente il perno semicilindrico può essere imbollonato all'estremo dell'arco ed allora esso si adagia in un corrispondente incavo praticato nella piastra d'appoggio, Fig. 2, 10 a 14 (**Tav. 44**). L'estremo dell'arco, che deve resistere alla reazione dell'appoggio, è rinforzato, sia con un riempimento di acciaio fuso, se esso è conformato a doppia parete, Fig. 4, 6, 9 (**Tav. 46**); sia con staffe di ghisa od acciaio fra le quali viene imbollonato l'estremo dell'arco, **Fig. 487**; sia con lamiere sovrapposte a scaglioni ed imbollonate (*preferibilmente con bolloni conici*) al piede dell'arco, Fig. 14, 15 (**Tav. 45**), e finalmente colle accennate lamiere rinforzate da ferri longitudinali con profilo a ⊤ ⊤ ⌴, Fig. 6, 12 (**Tav. 43**). In causa della rotazione intorno alla cerniera, l'estremo dell'arco si logora nella parte incavata, occasionando un conseguente abbassamento dell'armatura: per diminuire questo inconveniente è opportuno di rivestire detta parte incavata con una fodera di acciaio o di bronzo, con profilo poligonale, onde impedire che questa possa girare sull'estremo dell'arco, Fig. 24, 25 (**Tav. 43**), Fig. 14, 15 (**Tav. 45**).

3) **Cerniere di chiave.** — Sono formate di solito con un perno di acciaio che viene inserito fra le due mezze nervature inferiori ai loro estremi di chiave, i quali sono espressamente incavati a profilo di semicerchio e rinforzati negli stessi modi indicati per gli estremi di imposta, Fig. 8, 9 (**Tav. 45**). Fig. 4, 7 (**Tav. 46**),

β) **Appoggi della nervatura superiore.** — Questa nervatura viene prolungata in modo che abbia ad appoggiarsi sulla muratura e di solito viene sovrapposta a piastre di ghisa onde facilitare gli spostamenti causati da deformazioni elastiche dell'arcone sia per cambiamenti di temperatura, che per l'azione del carico mobile. Si deve poi impedire gli spostamenti laterali, o mediante ribordi delle piastre, le quali si fissano nelle murature, od in altro modo, (**Tav. 45**) e **Fig. 488**, che rappresenta l'estremo del corrente del ponte di Monreale, (**Tav. 41**).

2. Calcoli di stabilità.

300. Carico permanente. — Nei *ponti per strada ordinaria* il peso permanente p_0 dell'intera costruzione riferito al metro quadrato si può valutare colle seguenti formule:

$$\text{Con soli tavoloni} \ldots p_0 = (150 + 2{,}5\, l) \text{ kg.} \quad (424)$$

$$\text{Con massicciata} \ldots p_0 = (2700\, a + 4\, l) \text{ kg.} \quad (425)$$

nelle quali l è la portata del ponte in metri, ed a la grossezza della massicciata pure in metri.

Nei *ponti per ferrovia* il carico permanente p per metro corrente di armatura secondo l'HEINZERLING si può prendere:

$$\text{Da 10 fino a 50 metri di portata} \ldots p = 795 + 4{,}07\, l \quad (426)$$

$$\text{Da 50 a 100 metri di portata} \ldots p = 575 + 8{,}65\, l \quad (427)$$

Il peso permanente per ponti con due soli arconi si può anche valutare colle seguenti formule:

Ponti con tre cerniere

$$p = \frac{6\, f\, p_i\, R + 1{,}85\, C\, k\, \pi\, (3\, c^2 + 4\, f^2)}{6\, f R - C\, \pi\, (3\, c^2 + 4\, f^2)} \quad (428)$$

Ponti con due cerniere

$$p = \frac{6\, f\, p_i\, R + 1{,}55\, C\, k\, \pi \left(3\, c^2 + 4\, f^2 + 1{,}43\, \tau\, \dfrac{a\, c^2}{f R - \tau\, a}\right)}{6\, f R - C\, \pi \left(3\, c^2 + 4\, f^2 + 2\, \tau\, \dfrac{a\, c^2}{f R - \tau\, a}\right)} \quad (429)$$

Ponti senza cerniere

$$p = \frac{6\, f\, p_i\, R + 1{,}3\, C\, k\, \pi \left(3\, c^2 + 4\, f^2 + 3{,}66\, \tau\, \dfrac{a\, c^2}{f R - 2\, \tau\, a}\right)}{6\, f R - C\, \pi \left(3\, c^2 + 4\, f^2 + 4{,}33\, \tau\, \dfrac{a\, c^2}{f R - 2\, \tau\, a}\right)} \quad (430)$$

nelle quali si indica con

p il peso totale permanente
k il carico accidentale
p_i il peso dell'impalcato
} per metro corrente di ponte.

c la semicorda
f la freccia
} dell'asse dell'arco.

a l'altezza della sezione dell'arco al vertice.

R il coefficiente di lavoro o sforzo di sicurezza
π il peso dell'unità cubica
} del materiale.

C un coefficiente di costruzione.

τ un coefficiente che dipende dal modulo di elasticità e dalla dilatazione termica del materiale.

Prendendo il metro per unità di misura delle lunghezze e la tonnellata per unità di misura dei pesi è:

Per il ferro	$\tau = 7000$,	$\pi = 7,8$ tonn.
» l'acciaio	$\tau = 8000$,	$\pi = 7,9$ »
» la ghisa	$\tau = 3400$,	$\pi = 7,5$ »

Il coefficiente di costruzione si deve prendere generalmente

$$C = 1,75$$

però nei piccoli ponti carrettieri e ferroviarî di luce inferiore ai 10 metri e nei ponti pedonali di leggera costruzione, conviene prendere $C = 2$.

Il peso p_i dell'impalcato si può prendere mediamente:

Per binario portato direttamente dagli arconi

$$p_i = 0,35 \text{ tonn. per binario}$$

Per binario portato da travi trasversali e lungarine metalliche

$$p_i = 0,80 \text{ tonn. per binario}$$
$$p_i = 2,00 \text{ » » due binari}$$

Per ponti pedonali o ponti carrettieri lo si valuta seguendo le norme date al § **216**.

Nel caso di ponti in ferro laminato prendendo

$$C = 1,75 \quad , \quad \pi = 7,80 \quad , \quad \tau = 7000$$

per sistemi staticamente indeterminati R = 5000 tonnellate per metro quadrato, e per sistemi staticamente determinati pei quali si possono eseguire dei calcoli più sicuri R = 6000 tonnellate per metro quadrato le (428), (429), (430), diventano:

Ponti con tre cerniere

$$p = \frac{6000\, f\, p_i + 4{,}21\, k\, (3\, c^2 + 4\, f^2)}{6000\, f - 2{,}27\, (3\, c^2 + 4\, f^2)} \qquad (428a)$$

Ponti con due cerniere

$$p = \frac{5000\, f\, p_i + 3{,}53\, k \left(3\, c^2 + 4\, f^2 + 10\, \frac{a\, c^2}{6\, f - 7\, a} \right)}{5000\, f\, p_i - 2{,}27 \left(3\, c^2 + 4 f^2 + 14\, \frac{a\, c^2}{6\, f - 7\, a} \right)} \qquad (429a)$$

Ponti senza cerniere

$$p = \frac{5000\, f\, p_i + 2{,}96\, k \left(3\, c^2 + 4\, f^2 + 25{,}6\, \frac{a\, c^2}{6\, f - 14\, a} \right)}{5000\, f\, p_i - 2{,}27 \left(3\, c^2 + 4\, f^2 + 30{,}3\, \frac{a\, c^2}{6\, f - 14\, a} \right)} \qquad (430a)$$

In quanto al carico accidentale k lo si deve valutare seguendo le norme esposte al seguente § **301**, ricordando che per ponti ferroviari, il carico k per metro corrente di ponte equivalente al treno di prova varia a seconda della lunghezza su cui esso si estende e quindi mediamente si può prendere nella Tabella LII quel valore che è relativo a mezza luce dell'arcone che si considera.

301. Carico mobile. *Ponti pedonali.* — Per questi ponti soggetti soltanto al passaggio di una folla di persone più o meno fitta e frequente, a seconda della loro ubicazione, si deve prendere $k = 300$ a $k = 450$ chilogrammi per metro quadrato di conformità alla loro importanza.

Ponti per strada ordinaria. — Per portate minori di 16 metri è più sfavorevole il passaggio dei carri, la cui azione si può mediamente ragguagliare a quella di un carico uniformemente distribuito di 800 a 1000 chilogrammi per metro quadrato per portate inferiori ad 8 metri, ed a quella di un carico di 600 a

800 chilogrammi per metro quadrato per portate comprese fra 8 e 16 metri, a seconda che si tratti di carri pesanti o pesantissimi. Per portate maggiori di 16 metri è più sfavorevole il passaggio di una folla di persone, il cui carico si valuta in ragione di 350 a 450 chilogrammi per metro quadrato.

Ponti per ferrovia. — L'azione di un treno può approssimativamente valutarsi mediante un carico uniformemente distribuito, però l'approssimazione nei ponti ad arco non è così grande come nei ponti a travata. Il valore di questo carico uniformemente distribuito è indipendente dalla luce dell'arco. Conviene invece determinarlo in relazione alla lunghezza del tratto caricato. Prendendo a base dei calcoli un treno teorico di prova composto di tre locomotive coi relativi tender e di carri merci quali sono rappresentati nelle (**Fig. 187**), si hanno i risultati raccolti nella seguente tabella, nella quale v indica la lunghezza del tratto caricato.

Tabella LII

v in metri	k in tonn.	v in metri	k in tonn.	v in metri	k in tonn.
0,5	52,0	7	9,2	35	5,5
1,0	26,0	8	8,5	40	5,4
1,5	19,6	9	8,1	45	5,3
2,0	17,6	10	7,8	50	5,2
2,5	15,4	12	7,2	60	4,9
3,0	14,7	14	6,7	70	4,7
3,5	14,0	16	6,4	80	4,5
4,0	13,2	18	6,3	90	4,3
4,5	12,3	20	6,2	100	4,2
5,0	11,5	25	5,9	120	4,0
6,0	10,2	30	5,6	150	3,8

Si può prendere mediamente per progetti di massima e per grandi luci a seconda che si tratti di macchine ordinarie, pesanti o pesantissime.

$k = 3500, 4000, 4500$ Kg. per metro corrente di binario (431)

Archi elastici.

302. Generalità. — Si consideri un arco comunque impostato sopra due appoggi a livello, Fig. 489, e sollecitato da un peso P, pel quale agli appoggi stessi si originano due reazioni comunque inclinate, che si indicano rispettivamente con $\mathcal{R}_A$ ed $\mathcal{R}_B$. Necessariamente queste due reazioni devono incontrarsi in un punto giacente sulla linea d'azione verticale del peso P, onde possano equilibrarsi collo stesso. Sieno **A** e **B** i baricentri delle sezioni all'imposta e sieno **a** e **b** i punti nei quali possono ritenersi applicate le anzidette reazioni. Si suppongano applicate due forze eguali e direttamente contrarie di valore $\mathcal{R}_A$ al baricentro **A**. L'una forma coppia colla reazione d'imposta, l'altra si scomponga in una componente verticale A ed in una componente orizzontale S_A. In luogo dunque della reazione $\mathcal{R}_A$ applicata in **a** si può considerare una coppia, o *momento d'appoggio*, che si denota con M_A, e le due forze A ed S_A applicate in **A**.

Analogamente si può sostituire alla reazione $\mathcal{R}_B$ applicata in **b** il *momento d'appoggio* M_B e le due forze B ed S_B.

E siccome per l'equilibrio statico del sistema la somma algebrica delle forze orizzontali deve essere nulla, così $S_A - S_B = 0$, da cui $S_A = S_B = S$.

La forza S dicesi *spinta orizzontale*.

Quando si abbia modo di determinare i valori delle quantità A, B, M_A, M_B, S, relativamente ad un solo peso concentrato, si può dedurli anche per un sistema di pesi, mediante la somma algebrica dei valori parziali, nonchè per un peso uniformemente distribuito, integrando i valori relativi ad un carico esteso su un tratto di lunghezza infinitesima, che si considera come concentrato.

Tre tipi distinti di archi elastici si devono considerare, cioè:

Archi con tre cerniere di cui due alle imposte ed una al vertice.

Archi con due cerniere alle imposte.

Archi senza cerniere.

303. Natura delle tensioni che cimentano l'arco. — Un arco **A C B**, Fig. 490, sia sollecitato da forze verticali contenute

nel piano passante per l'asse dell'arco; esso produce delle pressioni obbliche sugli appoggi, che si possono immaginare rimossi, sostituendovi le loro reazioni $\mathcal{R}_A$ ed $\mathcal{R}_B$ eguali e contrarie alle pressioni. Si consideri una sezione passante pel punto g, la quale formi l'angolo φ colla verticale. Sia ΣP_s la risultante dei carichi sollecitanti che operano a sinistra del punto g, composta la quale colla reazione $\mathcal{R}_A$ si ottiene la risultante $\mathcal{R}$ di tutte le forze esterne che cimentano l'arco dall'estremo A di sinistra fino alla sezione considerata. Questa risultante incontra il piano della detta sezione nel punto c che dicesi *centro di pressione*, e che in generale non corrispondè col baricentro g, ma dista dallo stesso di una quantità $g\,c = n$, e sia r la normale abbassata dal baricentro g sulla direzione della $\mathcal{R}$, per cui questa produce un momento inflettente di intensità $M = \mathcal{R}\,r$. Sieno N e T le componenti della risultante $\mathcal{R}$ rispettivamente normale e parallela al piano della sezione g, e sia γ l'angolo che forma N con $\mathcal{R}$. Per essere $\mathcal{R} = \frac{N}{\cos\gamma}$ ed $r = n\cos\gamma$ risulta $M = N\,n$ da cui $n = \frac{M}{N}$. — Se si immaginano applicate nel baricentro g e normalmente alla sezione, due forze eguali e direttamente contrarie di intensità N, non si alterano le condizioni di equilibrio e vedesi allora che la sezione considerata di area Ω è sollecitata:

1°) Da una forza N applicata normalmente al suo baricentro, che dicesi *forza tangenziale* la quale produce una tensione uniformente distribuita sull'area Ω;

2°) Da una coppia $N\,n$ che produce una rotazione della sezione (rispetto alla sezione infinitamente vicina); ossia uno sforzo di flessione che origina delle tensioni di natura contraria nelle fibre poste da una parte e dall'altra dell'asse neutro;

3°) Da una forza T operante nel piano della sezione che dicesi *forza radiale*, e produce uno sforzo di taglio.

La forza tangenziale N produce una tensione longitudinale unitaria $\frac{N}{\Omega}$; la coppia $N\,n$ produce una tensione unitaria longitudinale, massima nelle fibre più lontane dall'asse neutro, data dalla (31), cioè $\frac{M\,d}{I} = \frac{N\,n\,d}{I}$, la quale mentre è positiva o negativa per l'estradosso (cioè trazione o compressione), risulta

rispettivamente di natura contraria per l'intradosso. Questi due sforzi parziali di tensione longitudinale si sommano algebricamente e dànno per le fibre più cimentate uno sforzo complessivo di tensione unitaria il cui valore è $R = \frac{N}{\Omega} \pm N n \frac{d}{I}$. La quantità d rappresenta la distanza delle fibre più lontane dall'asse neutro, la quale, nelle sezioni simmetriche rispetto al detto asse, è la stessa tanto per le fibre estreme poste da una parte come per quelle poste dall'altra di esso. Per le sezioni dissimetriche invece la distanza d è differente, e si indica con d_e la distanza delle estreme fibre di estradosso e con d_i quella delle estreme fibre di intradosso. Siccome la forza tangenziale N è sempre compressione, cioè origina uno sforzo negativo, mentre la coppia $N n = M$ produce compressione all'estradosso e trazione all'intradosso quando il centro di pressione **c** si trova dalla parte dell'estradosso (*rotazione all'insù*), e viceversa trazione all'estradosso e compressione all'intradosso quando il centro di pressione **c** si trova dalla parte dell'intradosso (*rotazione all'ingiù*), così se si prendono i valori di n (distanza del centro di pressione dal baricentro) positivi dall'asse neutro verso l'estradosso, cioè positivi i momenti che dànno rotazione all'insù, e negativi dall'asse neutro verso l'intradosso, cioè negativi i momenti che dànno rotazione all'ingiù, risulta che lo sforzo complessivo detto R_e quello all'estradosso ed R_i quello all'intradosso, è

$$\left.\begin{aligned} &\textit{all'estradosso}\ R_e = -\left(\frac{N}{\Omega} + \frac{M d_e}{I}\right) = -N\left(\frac{1}{\Omega} + \frac{n d_e}{I}\right) \quad a \\ &\textit{all'intradosso}\ R_i = -\left(\frac{N}{\Omega} - \frac{M d_i}{I}\right) = -N\left(\frac{1}{\Omega} - \frac{n d_i}{I}\right) \quad b \end{aligned}\right\} \quad (432)$$

Gli sforzi R_e ed R_i a seconda che n è negativo o positivo e di valore più o meno grande, possono risultare tanto *negativi* che *positivi*, cioè rappresentare compressione o trazione. Se vi sono più pesi che cimentano l'arco, l'azione complessiva è la somma algebrica delle azioni parziali, e quindi calcolando separatamente per ciaschedun peso gli sforzi R_e ed R_i in una data sezione, per alcuni pesi questi sforzi possono risultare negativi, per altri positivi, e lo sforzo complessivo è la somma algebrica dei parziali. E considerato che lo sforzo prodotto dalla forza

tangenziale N è sempre negativo e quindi va in aumento dello sforzo di compressione ed in diminuzione di quello di trazione prodotti dalla coppia N n, così è manifesto che tanto per l'estradosso quanto per l'intradosso si deve ricercare il massimo sforzo complessivo di compressione, come il più sfavorevole.

In pratica si ammette che allo sforzo di taglio prodotto dalla forza radiale T, resista il solo gambo, o parete verticale dell'arco, e chiamando ω l'area del medesimo, lo sforzo unitario di scorrimento trasversale è:

$$R = \frac{T}{\omega} \tag{433}$$

Le (432) si possono mettere anche sotto altra forma, la quale riesce più opportuna per la determinazione delle posizioni più sfavorevoli di sopraccarico.

Ponendo in esse

$$\frac{I}{d_e} = W_e \quad \text{ed} \quad \frac{I}{d_i} = W_i$$

diventano

$$R_e = -\frac{N}{W_e}\left(\frac{W_e}{\Omega} + n\right)$$

$$R_i = -\frac{N}{W_i}\left(\frac{W_i}{\Omega} - n\right)$$

Le quantità

$$\frac{W_e}{\Omega} = \frac{I}{d_e\,\Omega} \qquad \frac{W_i}{\Omega} = \frac{I}{d_i\,\Omega}$$

esprimono lunghezze inversamente proporzionali alle distanze d_e d_i. Si ponga dunque

$$\frac{W_e}{\Omega} = \frac{I}{d_e\,\Omega} = \delta_i \quad , \quad \frac{W_i}{\Omega} = \frac{I}{d_i\,\Omega} = \delta_e \tag{434}$$

per cui

$$R_e = -\frac{N}{W_e}\left(n + \delta_i\right)$$

$$R_i = +\frac{N}{W_i}\left(n - \delta_e\right)$$

Ma è $N = \mathcal{R} \cos\gamma$ d'onde:

$$\left.\begin{aligned} R_e &= -\frac{\mathcal{R}}{W_e}\left(n + \delta_i\right)\cos\gamma \\ R_i &= +\frac{\mathcal{R}}{W_i}\left(n - \delta_e\right)\cos\gamma \end{aligned}\right\} \quad (435)$$

Portate le quantità δ_e δ_i rispettivamente sopra e sotto il baricentro **g**, **Fig. 491**, nel piano della sezione **m n** individuando i punti **e** ed **i**, e chiamate r_e, r_i le distanze di questi punti dalla risultante $\mathcal{R}$, si trae

$$r_e = (n - \delta_e)\cos\gamma$$
$$r_i = (n + \delta_i)\cos\gamma$$

e ponendo $\mathcal{R}\, r_e = M_e$ ed $\mathcal{R}\, r_i = M_i$ le (435) si cambiano nelle

$$R_e = -\frac{M_i}{W_e} \quad , \quad R_i = +\frac{M_e}{W_i} \qquad (436)$$

nelle quali M_i ed M_e rappresentano rispettivamente i momenti delle forze esterne riferite ai punti **i** ed **e**, essendo poi:

$$W_e = \frac{I}{d_e} \quad , \quad W_i = \frac{I}{d_i} \qquad (437)$$

I punti **e** ed **i** si dicono *punti di nocciuolo* della sezione, il luogo geometrico dei punti **e** dicesi *contorno superiore di nocciuolo*, ed il luogo geometrico dei punti **i** *contorno inferiore di nocciuolo*.

Se la sezione è simmetrica rispetto all'asse neutro allora è $d_e = d_i = d$ e quindi $W_e = W_i = W$, ed anche $\delta_e = \delta_i = \delta$, d'onde

$$R_e = -\frac{M_i}{W} \quad , \quad R_i = +\frac{M_e}{W} \qquad (436a)$$

essendo

$$W = \frac{I}{d} \quad \text{e} \quad \delta = \frac{W}{\Omega} = \frac{I}{d\,\Omega} \qquad (437a)$$

1. Archi elastici con tre cerniere.

304. Reazioni d'imposta. — Per esservi le cerniere le reazioni d'appoggio devono passare per i centri delle medesime e quindi $M_A = 0$, $M_B = 0$ e così pure è nullo il momento rispetto alla cerniera di chiave C. Si indichi con $2c$ la corda e con f la freccia dell'asse dell'arco.

α) **Un solo peso concentrato.** — Per un *peso* P *posto alla sinistra* della cerniera di chiave, Fig. 492, le cui distanze dagli appoggi sieno rispettivamente a, b, si ha

$$A + B - P = 0 \quad , \quad A\,2c - P\,b = 0 \quad , \quad A\,c - S\,f - P\,(c - a) = 0$$

dalle quali si deduce:

$$A = \frac{P}{2c}\,b \quad , \quad B = \frac{P}{2c}\,a \quad , \quad S = \frac{P}{2f}\,a$$

Per un *peso posto alla destra* della cerniera di chiave si ottiene analogamente:

$$A = \frac{P}{2c}\,b \quad , \quad B = \frac{P}{2c}\,a \quad , \quad S = \frac{P}{2f}\,b$$

E poichè i due mezzi archi sono fra loro eguali, basta fare il calcolo per uno soltanto, e riferendosi a quello di sinistra non si ha da determinare che i valori di A ed S per lo stesso. Chiamando v la distanza del peso P dal vertice, o cerniera di chiave, si ha per un *peso posto alla destra* della cerniera di chiave

$$A = \frac{P\,(c - v)}{2c} \quad , \quad S = \frac{P\,(c - v)}{2f} \qquad (438)$$

e per un *peso posto alla sinistra*

$$A = \frac{P\,(c + v)}{2c} \quad , \quad S = \frac{P\,(c - v)}{2f} \qquad (438a)$$

prendendo v col suo valore assoluto.

β) **Sistema di pesi concentrati** Σ P. — Per un sistema di pesi P_1, P_2, P_3,..... si determinano i valori parziali A_1, A_2, A_3,.....

S_1, S_2, S_3,..... della reazione verticale e della spinta orizzontale e le loro somme algebriche ΣA e ΣS dànno i valori delle componenti verticale ed orizzontale della totale reazione $\mathcal{R}_A$ d'appoggio.

γ) **Carico accidentale uniformemente distribuito** (k **per metro corrente**). — Si supponga che il carico uniformemente distribuito sia esteso sopra un *tratto posto alla sinistra* del vertice o cerniera di chiave **C**, e limitato dalle due distanze v_r e v_{rr} dal vertice stesso, **Fig. 493**. Il peso $k\,(v_{rr} - v_r)$ si può immaginare concentrato nel mezzo, e chiamando v_0 la distanza della sua linea d'azione dal vertice è:

$$v_0 = v_1 + \frac{v_{rr} - v_r}{2} = \frac{v_{rr} + v_r}{2} \qquad (439)$$

Per l'equilibrio statico deve essere

$$A\,2\,c - k\,(v_{rr} - v_r)\,(c + v_0) = 0$$
$$A\,c - S\,f - k\,(v_{rr} - v_r)\,v_0 = 0$$

da cui, sostituito il valore di v_0, si ha:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{k\,(v_{rr} - v_r)\,(2\,c + v_{rr} + v_r)}{4\,c} \\ S &= \frac{k\,(v_{rr} - v_r)\,(2\,c - v_{rr} - v_r)}{4\,f} \end{aligned}\right\} \qquad (440)$$

Se il carico si estende su *tutto il mezzo arco di sinistra*, si deve porre nelle (440) $v_{rr} = c$, $v_r = 0$, d'onde:

$$A = \frac{3}{4}\,k\,c \quad , \quad S = \frac{k\,c^2}{4\,f} \qquad (440a)$$

Supponendo il carico sopra un *tratto posto alla destra* del vertice o cerniera di chiave **C**, e limitato dalle distanze v_{rr} e v_r dal vertice stesso, la distanza v_0 della sua linea d'azione da questo vertice ha ancora il valore dato dalla (439).

Per l'equilibrio statico deve essere

$$A\,2\,c - k\,(v_{rr} - v_r)\,(c - v_0) = 0 \quad , \quad A\,c - S\,f = 0$$

da cui, sostituito il valore di v_0, si ottiene:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{k\,(v_{''} - v_{'})\,(2\,c - v_{''} - v_{'})}{4\,c} \\ S &= \frac{k\,(v_{''} - v_{'})\,(2\,c - v_{''} - v_{'})}{4\,f} \end{aligned}\right\} \quad (441)$$

Se il carico si estende su *tutto il mezzo arco di destra*, si deve porre nelle (441) $v_{''} = c$, $v_{'} = 0$, d'onde:

$$A = \frac{1}{4}\,k\,c \quad , \quad S = \frac{k\,c^2}{4\,f} \qquad (441a)$$

Per carico esteso su *tutto l'arco* dalla somma delle (440*a*) (441*a*), si ottiene:

$$A = k\,c \quad , \quad S = \frac{k\,c^2}{2\,f} \qquad (442)$$

δ) **Peso permanente uniformemente distribuito** (p **per metro corrente**). — Devesi porre nelle (442) p in luogo di k e si ottiene:

$$A = p\,c \quad , \quad S = \frac{p\,c^2}{2\,f} \qquad (442a)$$

305. Curva delle reazioni d'imposta. — Il luogo geometrico dei punti **r** nei quali si intersecano le reazioni $\mathcal{R}_A$ ed $\mathcal{R}_B$ di imposta sulla linea d'azione del peso P, nelle successive posizioni ch'esso può prendere si chiama *curva delle reazioni di imposta*. Finchè il peso P si trova a destra della cerniera di chiave, Fig. 494, la reazione $\mathcal{R}_A$ deve sempre passare per **C** e sulla sua direzione viene sempre ad intersecarsi la linea d'azione del peso P, e siccome per il punto di intersezione **r** deve sempre passare anche la $\mathcal{R}_B$, poichè le tre forze $\mathcal{R}_A$, $\mathcal{R}_B$, P, onde possano equilibrarsi, bisogna che si incontrino in un medesimo punto, ne viene che la **C B'** rappresenta il luogo dei punti **r**, e quindi è la linea delle reazioni di imposta per tutti i pesi che si trovano a destra di **C**.

Similmente **C A'** è la linea delle reazioni di imposta per tutti i pesi che si trovano a sinistra di **C**.

306. Posizione più sfavorevole del sopraccarico. — I momenti che tendono ad aprire l'arco ed ingrandire il raggio (*momenti positivi*), producono compressione all'estradosso e trazione all'intradosso, quelli che tendono a chiudere l'arco e diminuire il raggio (*momenti negativi*), producono trazione all'estradosso e compressione all'intradosso. Tanto all'intradosso che all'estradosso però bisogna tener conto del massimo sforzo di compressione. (Vedi *Osservazione* a pagina 659 e 660).

Per avere dunque il massimo di compressione in una sezione all'intradosso bisogna tener conto soltanto di quei carichi che producono ivi momenti negativi, e per avere il massimo di compressione in una sezione all'estradosso bisogna tener conto soltanto di quei carichi che producono ivi momenti positivi. Condotte le rette **ACB'** e **BCA'** la spezzata **A'CB'** rappresenta la linea delle reazioni di imposta. Dei due mezzi archi basta considerarne uno soltanto, per esempio quello di sinistra.

Intradosso. — La linea **BCA'** interseca il contorno di nociuolo superiore nel punto **E**, **Fig. 495**. Immaginata una sezione qualunque **mn** alla sinistra del punto **E**, individuato il punto di nociuolo **e**, condotta la **Ae** e prolungata fino in **r**, si supponga che per **r** passi la linea d'azione di un peso P. In allora sul tratto di arco **Amn** non si trovano quali forze esterne che la sola reazione $\mathfrak{R}_A$, la quale rispetto ad **e** produce un momento $M_e = 0$, per cui è anche $R_i = 0$ (vedi formula (436), e quindi il peso P nella posizione considerata non ha alcuna influenza sull'intradosso in **n**. Per qualunque posizione del peso P alla sinistra di **r** si ha un momento M_e positivo e quindi uno sforzo di trazione in **n**, mentre per qualunque posizione del peso P a destra del punto **r** si ha un momento M_e negativo, ossia uno sforzo di compressione in **n**. La linea d'azione del peso P passante pel punto **r** è dunque la linea separatrice del sopraccarico, e cioè caricando l'arco alla destra della stessa si ha il massimo sforzo di compressione in **n**.

Per una sezione alla destra del punto **E**, per esempio in **m' n'** il momento M_e è sempre negativo qualunque sia la posizione del peso P, e quindi il massimo sforzo di compressione in **n'** all'intradosso ha luogo per carico completo su tutto l'arco.

Estradosso. — La linea **ACB'** taglia il contorno di nociuolo inferiore nel punto **I**, **Fig. 496**. Si consideri una qualunque sezione

m n alla destra del punto **l**. Pel punto **i** di nociuolo si conduca la **A i** prolungandola fino ad incontrare in **r** la linea delle reazioni di imposta, e si supponga che per **r** passi la linea d'azione di un peso P. Sulla porzione **A m n** di arco agisce la sola reazione $\mathfrak{R}_A$, la quale passando per **i** dà un momento $M_i = 0$, cioè uno sforzo $R_e = 0$ sull'estradosso (vedi formula (436). Per qualunque posizione del peso P alla destra di **r** si ha un momento M_i negativo, ossia uno sforzo di trazione in **m**, mentre per qualsiasi posizione di P alla sinistra di **r** diventa il momento M_i positivo, ossia uno sforzo di compressione in **m**. La linea d'azione del peso P passante pel punto **r** è dunque la linea separatrice dei carichi, ossia tutti i pesi che si trovano alla destra della stessa producono il massimo sforzo di trazione in **m** e tutti quelli che si trovano alla sinistra della medesima producono in **m** il massimo sforzo di compressione. Se il punto **i** cade alla sinistra del punto **l**, come in **i'** per la sezione **m' n'**, il momento M_i risulta sempre positivo per qualunque posizione del peso P, e quindi si ha il massimo sforzo di compressione al corrispondente punto di estradosso per arco completamente caricato.

307. Determinazione di N, T, M, M_e, M_i. — Per determinare gli sforzi R_e ed R_i in una data sezione si può valersi tanto delle (432) che delle (436). Nel primo caso è necessario conoscere il momento M delle forze esterne rispetto al baricentro della sezione, nonchè la forza tangenziale N; nel secondo caso invece bisogna determinare i momenti M_e, M_i per i punti di nociuolo **e** ed **i**, **Fig. 491.**

Si prenda il punto **O** (mezzaria della corda) per origine degli assi, **O A** per asse delle x ed **O C** per quello delle y e si consideri una sezione qualunque **m n** del *mezzo arco di sinistra*, formante l'angolo ϕ colla verticale, **Fig. 497.**

α) **Un solo peso concentrato.** — Per un peso P distante v dal vertice, ed applicato alla *sinistra* della sezione considerata è:

$$\left.\begin{aligned}
N_P &= S\cos\phi + (A - P)\operatorname{sen}\phi && a\\
T_P &= (A - P)\cos\phi - S\operatorname{sen}\phi && b\\
M_P &= A(c - x) - S\,y - P(v - x) && c\\
(M_e)_P &= A(c - x_e) - S\,y_e - P(v - x_e) && d\\
(M_i)_P &= A(c - x_i) - S\,y_i - P(v - x_i) && e
\end{aligned}\right\} \quad (443)$$

Se il peso si trova alla *destra* della sezione considerata si deve ommettere il termine in P nelle trovate espressioni.

β) **Sistema di pesi concentrati.** — Nel caso di più pesi concentrati P_1, P_2, P_3,..... si chiami ΣP_s la risultante dei pesi che si trovano a sinistra della sezione considerata, risulta:

$$\left.\begin{aligned}
N_P &= \Sigma S \cos\phi + (\Sigma A - \Sigma P_s) \operatorname{sen}\phi && a\\
T_P &= (\Sigma A - \Sigma P_s) \cos\phi - \Sigma S \operatorname{sen}\phi && b\\
M_P &= \Sigma A\,(c - x) - \Sigma S\, y - \Sigma P_s\,(v - x) && c\\
(M_e)_P &= \Sigma A\,(c - x_e) - \Sigma S\, y_e - \Sigma P_s\,(v - x_e) && d\\
(M_i)_P &= \Sigma A\,(c - x_i) - \Sigma S\, y_i - \Sigma P_s\,(v - x_i) && e
\end{aligned}\right\} \quad (444)$$

γ) **Carico accidentale uniformemente distribuito** (k **per metro corrente.** — Si supponga caricato un *tratto sul mezzo arco di sinistra*, limitato dalle distanze $v_{''}$ $v_{'}$ dal vertice o cerniera di chiave, essendo λ la porzione che si trova a sinistra della sezione che si considera, **Fig. 498.** Si ha

$$\begin{aligned}
N_k &= S\cos\phi + \left\{ A - k\lambda \right\} \operatorname{sen}\phi\\
T_k &= \left\{ A - k\lambda \right\} \cos\phi - S \operatorname{sen}\phi\\
M_k &= A\,(c - x) - S\,y - \frac{k\lambda^2}{2}
\end{aligned}$$

dalle quali, ponendo per A, S, i valori dati dalle (440), risulta:

$$\left.\begin{aligned}
N_k &= k\left[(v_{''} - v_{'})\left\{\frac{c\,(2c - v_{'} - v_{''})\cos\varphi + f\,(2c + v_{'} + v_{''})\operatorname{sen}\varphi}{4fc}\right\} - \lambda\operatorname{sen}\varphi\right] && a\\
T_k &= k\left[(v_{''} - v_{'})\left\{\frac{f\,(2c + v_{'} + v_{''})\cos\varphi - c\,(c - v_{'} - v_{''})\operatorname{sen}\varphi}{4fc}\right\} - \lambda\cos\varphi\right] && b\\
M_k &= \frac{k}{2}\left[\frac{(v_{''} - v_{'})\left\{f\,(2c + v_{'} + v_{''})\,(c - x) - c\,(2c - v_{'} - v_{''})\,y\right\}}{2fc} - \lambda^2\right] && c
\end{aligned}\right\} \quad (445)$$

ed analogamente

$$\left.\begin{aligned}
(M_e)_k &= \frac{k}{2}\left[\frac{(v_{''} - v_{'})\left\{f\,(2c + v_{'} + v_{''})\,(c - x_e) - c\,(2c - v_{'} - v_{''})\,y_e\right\}}{2fc} - \lambda_e^2\right] && d\\
(M_i)_k &= \frac{k}{2}\left[\frac{(v_{''} - v_{'})\left\{f\,(2c + v_{'} + v_{''})\,(c - x_i) - c\,(2c - v_{'} - v_{''})\,y_i\right\}}{2fc} - \lambda_i^2\right] && e
\end{aligned}\right\}$$

nelle quali espressioni si deve porre:

$$\lambda = v_{''} - x \quad , \quad \lambda_e = v_{''} - x_e \quad , \quad \lambda_i = v_{''} - x_i$$

Qualora il tratto caricato si trovi tutto alla destra della sezione considerata, cioè quando sia

$$v_{''} < x \quad , \quad v_{''} < x_e \quad , \quad v_{''} < x_i$$

si deve porre:

$$\lambda = 0 \quad , \quad \lambda_e = 0 \quad , \quad \lambda_i = 0$$

Se il carico si estende a tutto il *mezzo arco di sinistra* bisogna porre $v_{''} = c$, $v_{'} = 0$ nelle (445), nonchè

$$\lambda = c - x \quad , \quad \lambda_e = c - x_e \quad , \quad \lambda_i = c - x_i$$

e si ottiene:

$$\left.\begin{aligned}
N_k &= \frac{k}{4f}\left\{ f(4x - c)\operatorname{sen}\phi + c^2 \cos\phi \right\} && a \\
T_k &= \frac{k}{4f}\left\{ f(4x - c)\cos\phi - c^2 \operatorname{sen}\phi \right\} && b \\
M_k &= \frac{k}{4f}\left\{ f(c + 2x)(c - x) - c^2 y \right\} && c \\
(M_e)_k &= \frac{k}{4f}\left\{ f(c + 2x_e)(c - x_e) - c^2 y_e \right\} && d \\
(M_i)_k &= \frac{k}{4f}\left\{ f(c + 2x_i)(c - x_i) - c^2 y_i \right\} && e
\end{aligned}\right\} \quad (446)$$

Si supponga caricato un *tratto sul mezzo arco di destra*, limitato ancora dalle distanze $v_{''}$ e $v_{'}$ dal vertice o cerniera di chiave, Fig. 498, si ha per la sezione considerata **m n** del mezzo arco di sinistra

$$N_k = S\cos\phi + A\operatorname{sen}\phi$$
$$T_k = A\cos\phi - S\operatorname{sen}\phi$$
$$M_k = A(c - x) - S\,y$$

e sostituendo in queste i valori di A ed S dati dalle (441), si ottiene:

$$\left.\begin{aligned}
N_k &= k\,(v_{''}-v_{'})\,(2c-v_{'}-v_{''})\left\{\frac{c\cos\phi+f\,\mathrm{sen}\,\phi}{4fc}\right\} && a\\
T_k &= k\,(v_{''}-v_{'})\,(2c-v_{'}-v_{''})\left\{\frac{f\cos\phi-c\,\mathrm{sen}\,\phi}{4fc}\right\} && b\\
M_k &= k\,(v_{''}-v_{'})\,(2c-v_{'}-v_{''})\left\{\frac{f(c-x)-c\,y}{4fc}\right\} && c\\
\text{ed analogamente}&\\
(M_e)_k &= k\,(v_{''}-v_{'})\,(2c-v_{'}-v_{''})\left\{\frac{f(c-x_e)-c\,y_e}{4fc}\right\} && d\\
(M_i)_k &= k\,(v_{''}-v_{'})\,(2c-v_{'}-v_{''})\left\{\frac{f(c-x_i)-c\,y_i}{4fc}\right\} && e
\end{aligned}\right\}\ (447)$$

Se il carico si estende a tutto il *mezzo arco di destra* si deve porre nelle (447) $v_{''}=c$, $v_{'}=0$ e risulta:

$$\left.\begin{aligned}
N_k &= \frac{k\,c}{4f}\left\{c\cos\phi+f\,\mathrm{sen}\,\phi\right\} && a\\
T_k &= \frac{k\,c}{4f}\left\{f\cos\phi-c\,\mathrm{sen}\,\phi\right\} && b\\
M_k &= \frac{k\,c}{4f}\left\{f(c-x)-c\,y\right\} && c\\
(M_e)_k &= \frac{k\,c}{4f}\left\{f(c-x_e)-c\,y_e\right\} && d\\
(M_i)_k &= \frac{k\,c}{4f}\left\{f(c-x_i)-c\,y_i\right\} && e
\end{aligned}\right\}\ (448)$$

Si supponga caricato *tutto l'arco*, Fig. 499. Allora è

$$N_k = S\cos\phi+\left\{A-k\,(c-x)\right\}\mathrm{sen}\,\phi$$

$$T_k = \left\{A-k\,(c-x)\right\}\cos\phi-S\,\mathrm{sen}\,\phi$$

$$M_k = A\,(c-x)-S\,y-p\,\frac{(c-x)^2}{2}$$

e ponendo per A ed S i valori dati dalle (442), risulta

$$\left.\begin{aligned} N_k &= \frac{k}{2f}\left(c^2\cos\phi + 2fx\,\mathrm{sen}\,\phi\right) && a\\ T_k &= \frac{k}{2f}\left(2fx\cos\phi - c^2\,\mathrm{sen}\,\phi\right) && b\\ M_k &= \frac{k}{2f}\left\{f(c^2 - x^2) - c^2 y\right\} && c \end{aligned}\right\} \quad (449)$$

ed analogamente

$$\left.\begin{aligned} (M_e)_k &= \frac{k}{2f}\left\{f(c^2 - x_e^2) - c^2 y_e\right\} && d\\ (M_i)_k &= \frac{k}{2f}\left\{f(c^2 - x_i^2) - c^2 y_i\right\} && e \end{aligned}\right\}$$

E siccome per un arco parabolico, oppure per un arco circolare molto ribassato (al di sotto di $^1/_{10}$), che si può considerare come parabolico, è

$$y = f\frac{(c^2 - x^2)}{c^2} \qquad (450)$$

sostituendo questo valore nella (449*c*), risulta $M_k = 0$, cioè *per arco parabolico il carico uniformemente distribuito su tutta la corda non produce sforzi di flessione in nessuna sezione del medesimo, cioè il centro di pressione corrisponde al baricentro.* Conseguentemente i momenti dei punti di nociuolo devono essere fra loro eguali di valore, cioè $(M_e)_k = (M_i)_k$ quando la sezione dell'arco sia simmetrica rispetto all'asse.

∂) **Peso permanente uniformemente distribuito** (*p* **per metro corrente**). — Basta porre nelle (449) p in luogo di k, cioè:

$$\left.\begin{aligned} N_p &= \frac{p}{2f}\left(c^2\cos\phi + 2fx\,\mathrm{sen}\,\phi\right) && a\\ T_p &= \frac{p}{2f}\left(2fx\cos\phi - c^2\,\mathrm{sen}\,\phi\right) && b\\ M_p &= \frac{p}{2f}\left\{f(c^2 - x^2) - c^2 y\right\} && c\\ (M_e)_p &= \frac{p}{2f}\left\{f(c^2 - x_e^2) - c^2 y_e\right\} && d\\ (M_i)_p &= \frac{p}{2f}\left\{f(c^2 - x_i^2) - c^2 y_i\right\} && e \end{aligned}\right\} \quad (451)$$

ricordando che per arco parabolico risulta $M_p = 0$

2. Archi elastici con due cerniere.

308. Reazioni d'imposta. — Sia **A C B** la fibra media, **Fig. 500**, od asse longitudinale di un arco metallico di cui sieno $l = 2c$ la corda ed f la freccia. Per esservi le cerniere alle imposte le reazioni devono passare pel centro delle medesime e quindi:

$$M_A = 0 \quad , \quad M_B = 0$$

α) **Un solo peso concentrato.** — Chiamando v la distanza del peso P del vertice C e prendendo per polo l'estremo di destra (**B**) per condizione dell'equilibrio statico deve essere

$$A\,2c - P\,(c + v) = 0$$

donde:

$$A = P\,\frac{c + v}{2c} \qquad (452)$$

Siccome gli archi metallici sono ordinariamente molto ribassati (cioè colla freccia circa $^1/_{10}$ od $^1/_{12}$ della corda) cosicchè si può con molta approssimazione ritenere la fibra media quale un *arco parabolico*, dalla meccanica applicata si sa che in questo caso, la componente orizzontale, ossia la spinta S, ha per valore (*).

$$S = \frac{5}{64}\,P\,\frac{(5\,c^2 - v^2)\;(c^2 - v^2)}{c^3\,f} \qquad (453)$$

Con altra espressione semplicissima, di grande approssimazione, si può calcolare il valore della spinta orizzontale. Chiamando a e b la distanza del peso P dalle cerniere di imposta **A** e **B**, è $v = c - a$, ponendo il quale valore nella (453) diventa

$$S = \frac{5}{64}\,\frac{P\,a\,(8\,c^3 - 4\,c\,a^2 + a^3)}{c^3\,f} \qquad (I)$$

osservando che è $b = 2\,c - a$ ed aggiungendo al numeratore

$$-4\,c^2\,a + 4\,c^2\,a$$

(*) Questa formula è stata ricavata da DARCEL, mediante la teoria del NAVIER (*Annales des ponts et chaussés* 1862) e fu pure ottenuta dal WINKLER (*Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit*) e venne riportata dall'HEINZERLING (*Die Brücken der Gegenwart*).

la (I) prende la forma :

$$S = \frac{5}{64} \frac{P\,a\,b}{c^3 f} (4\,c^2 + 2\,a\,c - a^2)$$

Il fattore $4\,c^2 + 2\,a\,c - a^2$ ha per valori limiti $4\,c^2$ (per $a = 0$) e $5\,c^2$ (per $a = c$) e si può sostituire con un valore costante. Questo valore ricavato col metodo dei minimi quadrati è

$$\frac{1}{c} \int_0^c (4\,c^2 + 2\,c\,a - a^2)\,d\,a = \frac{14}{3}\,c^2$$

e quindi

$$S = \frac{5}{64} \frac{P\,a\,b}{c^3 f} \cdot \frac{14}{3}\,c^2 = \frac{35}{12 \cdot 8}\,P\,\frac{a\,b}{c\,f}$$

d'onde assai prossimamente (*)

$$S = \frac{3}{8}\,P\,\frac{a\,b}{c\,f} = \frac{3}{8}\,P\,\frac{(c^2 - v^2)}{c\,f} \qquad (454)$$

Per archi ad asse circolare la spinta orizzontale avrebbe la seguente espressione

$$S = \frac{P}{2} \frac{\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\phi + 2\cos\alpha\,(\cos\phi - \cos\alpha) - 2\cos\alpha\,(\alpha\operatorname{sen}\alpha - \phi\operatorname{sen}\phi)}{\alpha - 3\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + 2\,\alpha\cos^2\alpha} \qquad (455)$$

e nella **Fig. 500** si vede quali sieno gli angoli α e ϕ.

Considerato però che questa formula è di calcolo assai laborioso, mentre le (453) (454) sono di grande approssimazione, si può senz'altro in pratica valersi di queste ultime (che si riferiscono agli archi ad asse parabolico) anche per gli archi ad asse circolare. Si fa vedere con esempi la piccola differenza fra le tre formule.

Esempio 1°

Si prenda

$c = 10$, $f = 2$, $v = 2$, $P = 6$ tonn. $\left(\text{Il rapporto } \frac{f}{2c} = \frac{1}{10}\right)$

(*) Questa formula è stata ricavata da MÜLLER-BRESLAU (*Theorie und Berechnung der eisernen Bogenbrücken*).

La (453) dà

$$S = \frac{5}{64}\,6\,\frac{(5 \times 10^2 - 2^2)(10^2 - 2^2)}{10^3 \times 2} = 11{,}16 \text{ tonn.}$$

La (454) porge:

$$S = \frac{3}{8}\,6\,\frac{(10^2 - 2^2)}{10 \times 2} = 10{,}80 \text{ tonn.}$$

Per applicare la (455) bisogna prima formarsi le varie quantità necessarie per la sua calcolazione. Chiamando r il raggio si ha

$$r = \frac{c^2 + f^2}{2f} = \frac{10^2 + 2^2}{2 \times 2} = 26 \quad , \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{10}{26} = 0{,}38461$$

$$\cos\alpha = \frac{24}{26} = 0{,}92308 \quad , \quad \text{arc.}\,\alpha = 0{,}39477 \quad , \quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{2}{26} = 0{,}076923$$

$$\cos\varphi = 0{,}997 \quad , \quad \text{arc.}\,\varphi = 0{,}077$$

$$S = \frac{6}{2}\,\frac{0{,}38461^2 - 0{,}076923^2 + 2 \times 0{,}92308\,(0{,}997 - 0{,}92308) - 2 \times 0{,}92308\,(0{,}39477 \times 0{,}3846 - 0{,}077 \times 0{,}076923)}{0{,}39477 - 3 \times 0{,}38461 \times 0{,}92308 + 2 \times 0{,}39477 \times 0{,}92308^2}$$

$$S = \frac{6}{2}\,\frac{0{,}00910758}{0{,}00246992} = 11{,}06 \text{ tonn.}$$

Esempio 2°

Si supponga

$$c = 15 \quad , \quad f = 5 \quad , \quad v = 3 \quad , \quad P = 8 \text{ tonn.} \quad , \quad \left(\text{Il rapporto } \frac{f}{2c} = \frac{1}{6}\right)$$

La (453) dà

$$S = \frac{5}{64}\,8\,\frac{(5 \times 15^2 - 3^2)(15^2 - 3^2)}{15^3 \times 5} = 8{,}92 \text{ tonn.}$$

La (454) porge

$$S = \frac{3}{8}\,8\,\frac{(15^2 - 3^2)}{15 \times 5} = 8{,}64 \text{ tonn.}$$

Bisogna poi formare le varie quantità necessarie pel calcolo della (455).

$$r = \frac{15^2 + 5^2}{2 \times 5} = 25 \quad , \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{15}{25} = 0{,}6$$

$$\cos\alpha = \frac{20}{25} = 0{,}8 \quad , \quad \text{arc}\,\alpha = 0{,}6435011 \quad , \quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{3}{25} = 0{,}12$$

$$\cos\varphi = 0{,}9928 \quad , \quad \text{arc}\,\varphi = 0{,}1202$$

$$S = \frac{8}{2}\,\frac{0{,}6^2 - 0{,}12^2 + 2 \times 0{,}8\,(0{,}9928 - 0{,}8) - 2 \times 0{,}8\,(0{,}6435011 \times 0{,}6 - 0{,}1202 \times 0{,}12)}{0{,}6435011 - 3 \times 0{,}6 \times 0{,}8 + 2 \times 0{,}6435011 \times 0{,}8^2}$$

$$S = \frac{8}{2}\,\frac{0{,}0593973}{0{,}0271825} = 8{,}72 \text{ tonn.}$$

Osservazione. — Dai risultati ottenuti in tutti due questi esempi vedesi che il valore di S dato dalla (453) è maggiore e quello dato dalla (454) è minore del valore rigoroso fornito dalla (455). Per maggiore approssimazione si può dunque calcolare i due valori dati dalle (453) e (454) e prender per S il valor medio fra essi.

Cosi operando si avrebbe:

$$\text{nel 1° } \textit{Esempio} \quad . \quad . \quad . \quad S = \frac{11{,}16 + 10{,}8}{2} = 10{,}98 \text{ tonn.}$$

$$\text{nel 2° } \textit{Esempio} \quad . \quad . \quad . \quad S = \frac{8{,}92 + 8{,}64}{2} = 8{,}78 \text{ tonn.}$$

i quali valori quasi coincidono con quelli sopra ottenuti mediante la formula rigorosa (455).

β) **Sistema di pesi concentrati** ΣP. — Nel caso di più carichi $P_1, P_2, P_3, \ldots$ si calcolano mediante le (452) (454) le reazioni parziali $A_1, A_2, A_3, \ldots$ ed $S_1, S_2, S_3, \ldots$ e le reazioni totali sono $\Sigma A = A_1 + A_2 + A_3 \ldots$ e $\Sigma S = S_1 + S_2 + S_3 \ldots$.

γ) **Carico accidentale uniformemente distribuito** (k **per metro corrente**). — Sia $L = v_{''} - v_{'}$ la lunghezza di una certa porzione di corda, **Fig. 501**, lungo la quale si trova uniformemente distribuito il peso $k\,(v_{''} - v_{'})$, essendo k il carico unitario.

Riferendosi all'estremo di destra **B**, come polo dei momenti, deve essere per l'equilibrio statico

$$A\,2\,c - k\,(v_{''} - v_{'})(v_0 + c) = 0$$

da cui, essendo $v_0 = \dfrac{v_{'} + v_{''}}{2}$, si trae

$$A = \frac{k\,(v_{''} - v_{'})}{2\,c}\left(\frac{v_{''} + v_{'}}{2} + c\right) = \frac{k}{4\,c}\left\{2\,c\,(v_{''} - v_{'}) + (v^2_{''} - v^2_{'})\right\} \qquad (456)$$

Onde trovare il valore della reazione o spinta orizzontale si consideri la porzione di sopraccarico distribuita sopra un elemento infinitesimo di corda alla distanza v dal vertice dell'arco, che ha per valore $k\,d\,v$ e che si può considerare come un peso concentrato, per cui ricorrendo alla (453), si ha la spinta infinitesima

$$dS = \frac{k}{64\,c^3\,f}\left(5\,v^4\,d\,v - 30\,c^2\,v^2\,d\,v + 25\,c^4\,d\,v\right)$$

la quale espressione integrata fra i limiti $v_{''}$ e $v_{'}$ dà il valore della spinta orizzontale.

$$S = \frac{k}{64\,c^3\,f}\left\{(v^5_{''} - v^5_{'}) - 10\,c^2\,(v^3_{''} - v^3_{'}) + 25\,c^4\,(v_{''} - v_{'})\right\} \quad (457)$$

Assumendo invece la (454), si ha

$$d\,S = \frac{3\,k}{8\,f\,c}\left(c^2 - v^2\right) d\,v$$

la quale integrata fra i limiti $v_{''}$ e $v_{'}$ dà

$$S = \frac{k}{8\,f\,c}\left\{3\,c^2\,(v_{''} - v_{'}) - (v_{''}^3 - v_{'}^3)\right\} \quad (458)$$

ricordando che le distanze $v_{''}$ e $v_{'}$ che individuano i limiti del sopraccarico vanno contate a partire dal vertice e si devono prendere positive quando si trovano alla sinistra e quindi negative quando si trovano alla destra dello stesso.

Se il carico si estende su tutta la corda, devesi porre $v_{''} = c$, $v_{'} = -c$ e risulta dalla (456) e dalla (457) nonchè dalla (458)

$$A = k\,c \quad , \quad S = \frac{k\,c^2}{2\,f} \quad (459)$$

δ) **Peso permanente uniformemente distribuito** (p **per metro corrente**). — Il peso permanente è uniformemente distribuito su tutta la corda, e se è p il carico unitario, onde avere il valore delle eazioni orizzontali e verticali di imposta, basta porre nelle (459) p in luogo di k, e si ottiene:

$$A = p\,c \quad , \quad S = \frac{p\,c^2}{2\,f} \quad (460)$$

ε) **Variazioni di temperatura.** — Per aumenti o diminuzioni di temperatura l'arcone tende ad allungarsi o ad accorciarsi sulla sua corda, ma essendo ciò impedito dalla resistenza delle imposte ne consegue una deformazione dell'arco che si rialza in chiave o si abbassa e si sviluppano perciò degli sforzi di tensione nell'arco stesso, e due reazioni orizzontali alle imposte eguali e direttamente contrarie. Il valore di queste spinte orizzontali, si,

può calcolare con sufficiente approssimazione mediante la semplice espressione

$$S = \frac{c\,\Theta\,t^{o}\,E}{\int_{o}^{c} \frac{y^2}{I}\,dx}$$

nella quale si denota con c la semicorda dell'arco, con Θ il coefficiente di dilatazione lineare, con t^{o} la massima differenza di temperatura a cui sarà soggetto l'arco in confronto di quella esistente all'atto della montatura, con E il coefficiente di elasticità longitudinale, con I il momento di inerzia della sezione retta dell'arco, mentre x ed y sono le coordinate correnti dell'asse dell'arco riferite al punto di mezzo della corda preso come origine. Se l'arco è di sezione costante, allora I è costante, e siccome per un arco parabolico si ha dalla (450)

$$y = f - \frac{f x^2}{c^2} \qquad (450a)$$

così diventa

$$\int_{o}^{c} y^2\,dx = \int_{o}^{c} \left(f - \frac{f x^2}{c^2}\right)^2 dx = \frac{8}{15}\,c\,f^2$$

Se l'arco è di sezione variabile, e quindi anche I variabile, allora divisa la semicorda in un numero n di parti eguali di ampiezza λ, e chiamate y_1, y_2, y_3,..... y_n le ordinate relative ai punti di divisione ed I_1, I_2, I_3,..... I_n i momenti di inerzia delle sezioni rette dell'arco in corrispondenza alle anzidette ordinate si può prendere con sufficiente approssimazione

$$\int_{o}^{c} \frac{y^2}{I}\,dx = \lambda\left(\frac{y_1^2}{I_1} + \frac{y_2^2}{I_2} + \frac{y_3^2}{I_3} + \cdots\cdots + \frac{y_n^2}{I_n}\right)$$

e quindi l'espressione della spinta diventa

Per archi di sezione costante $$S = \frac{15\,\Theta\,t^{o}\,E\,I}{8\,f^2} \qquad (461)$$

» » *variabile* $$S = \frac{c\,\Theta\,t^{o}\,E}{\lambda\left(\frac{y_1^2}{I_1} + \frac{y_2^2}{I_2} + \cdots\cdots + \frac{y_n^2}{I_n}\right)} \qquad (462)$$

Il WINKLER porge quest'altra espressione per gli *archi parabolici*:

$$S = \frac{15\,\Theta\,t^{o}\,E\,I\,\Omega}{15\,I + 8\,\Omega\,f^{2}} \qquad (463)$$

Per gli archi ad *asse circolare* vale invece la formula

$$S = \frac{2\,\Theta\,t^{o}\,E\,I\,\Omega\,\alpha\cos\alpha}{2\,\alpha\cos^{2}\alpha\,I + r^{2}\,\Omega\,(\alpha + 2\,\alpha\cos^{2}\alpha - 3\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha)} \qquad (464)$$

osservando che per archi ribassati si può usare con molta approssimazione la più semplice espressione (461).

Esempio.

Sia $c = 15^{m}$, $f = 2^{m},5$ per cui risulta

$$r = \frac{15^{2} + 2,5^{2}}{2 \times 2,5} = 46,25 \quad , \quad \mathrm{sen}\,\alpha = \frac{15}{46,25} = 0,324324$$

$$\cos\alpha = \frac{46,25 - 2,5}{46,25} = 0,945945 \quad , \quad \alpha = 0,33028$$

Supponendo che l'arco abbia la sezione rappresentata nella **Fig. 524**, e riferendosi al millimetro è:

$$\Omega = 24300\ \mathrm{mm}\square \quad , \quad I = 1305247500$$

Si assuma $t^{o} = 25^{o}$, mentre è $\theta = 0,00001525$ ed $E = 20000$ Kg.

Applicando la (461) risulta:

$$S = \frac{15 \times 0,00001525 \times 25^{o} \times 20000 \times 1305247500}{8 \times 2500^{2}} = 2986\ \mathrm{Kg.}$$

La (463) porge

$$S = \frac{15 \times 0,00001525 \times 25 \times 20000 \times 1305247500 \times 24300}{15 \times 1305247500 + 8 \times 24300 \times 2500^{2}} =$$

$$= \frac{3627690692343750}{1234578712500} = 2938\ \mathrm{Kg.}$$

mentre dalla (464) si ottiene

$$S = \frac{2\times0,00001525\times25\times20000\times1305247500\times24300\times0,33028\times0,945945}{2\times0,33028\times0,945945^{2}\times1305247500+46250^{2}\times24300(0,33028+2\times0,33028\times0,945945^{2}-3\times0,945945\times0,324324)}$$

$$S = \frac{151117501940733}{51191334827} = 2928\ \mathrm{Kg.}$$

i quali risultati mostrano la grande approssimazione che si raggiunge colla (461) che si userà sempre per archi ribassati circolari.

309. Curva delle reazioni di imposta. — Vedesi che col mutare di posizione del peso P, Fig. 502, cioè col variare di v, cambia anche il valore delle reazioni A ed S. Detto β l'angolo che la $\mathcal{R}_A$ forma coll'orizzontale è $A = S\ tang\ \beta$, da cui $tang\ \beta = \frac{A}{S}$ e sostituendo i valori (452) (453) si ha

$$tang\ \beta = \frac{32\ c^2\ f}{5\ (5\ c^2 - v^2)\ (c - v)}$$

Prolungata la $\mathcal{R}_A$ fino ad incontrare la direzione del peso P nel punto r, e chiamando z l'ordinata rk del punto di intersezione di $\mathcal{R}_A$ con P, è anche $tang\ \beta = \frac{z}{c - v}$ ed eliminando $tang\ \beta$ si ha

$$z = \frac{32}{5}\ \frac{c^2\ f}{5\ c^2 - v^2} \qquad (465)$$

col mezzo della quale, mano a mano che varia v, ossia la posizione del peso P, si può calcolare l'ordinata del punto r di intersezione della reazione $\mathcal{R}_A$ col medesimo peso.

Valendosi della (465) si ha per

$v = 0$	$0{,}25\ c$	$0{,}50\ c$	$0{,}75\ c$	c
$z = 1{,}280\ f$	$1{,}296\ f$	$1{,}348\ f$	$1{,}442\ f$	$1{,}600\ f$

mediante i quali valori si segna per punti la curva A' C' B' che è il luogo geometrico dei punti r, e che si chiama *curva delle reazioni di imposta*. Vedesi dalla (465) che z è indipendente da P, cioè la curva delle reazioni di imposta serve per qualsiasi peso. Dato un peso P e la posizione del medesimo si prolunga la verticale secondo cui esso opera fino ad incontrare la curva delle reazioni nel punto r, e facendo passare una retta per questo punto e per l'estremo A essa rappresenta la direzione della corrispondente reazione $\mathcal{R}_A$. Evidentemente la reazione $\mathcal{R}_B$ dell'appoggio di destra B sarà diretta secondo la B r poichè la risultante delle $\mathcal{R}_A$ ed $\mathcal{R}_B$ deve equilibrare il peso P.

Il valore delle reazioni $\mathcal{R}_A$ ed $\mathcal{R}_B$ si può determinare graficamente. Dalla (452) per $v = c$ risulta $A = P$: si rappresenti il peso P con l'ordinata estrema A A' della curva delle reazioni. La (452) mostra che la reazione verticale A è quarta proporzionale fra $2\ c$, P e

$(c+v)$ e quindi condotta la **A' B**, che incontra in **a** la direzione del peso P, vedesi dall'esame dei triangoli **B A' A** e **B a k** che la verticale **a k** è l'anzidetta quarta proporzionale, e quindi rappresenta il valore di A, nella stessa scala del peso P, per cui condotta per **a** un' orizzontale e completato il rettangolo delle forze si può misurare anche il valore di $\mathcal{R}_A$ e di S nella stessa scala. Prendendo come polo dei momenti l'estremo di sinistra **A**, si ha $B = P\frac{c-v}{2c}$, cioè la reazione verticale B è quarta proporzionale fra $2c$, P e $(c-v)$ e quindi condotta la **A B'**, che interseca in **b** la direzione del peso P, dall'esame dei triangoli **A B' B** ed **A b k** vedesi che la retta **b k** rappresenta il valore di B, per cui condotta per **b** un orizzontale e completato il rettangolo delle forze, si può misurare il valore di $\mathcal{R}_B$, B ed S nella stessa scala del peso P.

Se per valutare la spinta orizzontale S si assume invece la (454) allora diventa

$$tang\,\beta = \frac{A}{S} = \frac{4}{3}\frac{f}{c-v}.$$

ed essendo anche $tang\,\beta = \frac{z}{c-v}$ eliminando $tang\,\beta$ risulta

$$z = \frac{4}{3}f \qquad (466)$$

quantità costante, cioè la curva delle reazioni di imposta è una retta **A' B'** parallela alla corda, **Fig. 503**, e distante da questa $\frac{4}{3}f$.

310. Posizione più sfavorevole del sopraccarico. — Se la spinta orizzontate S si valuta colla (454), allora la linea delle reazioni d'imposta è una retta parallela alla corda e distante da essa $\frac{4}{3}f$. — Costruita questa retta **A' B'**, **Fig. 504**, si consideri una sezione **m n** di cui sieno **i** ed **e** i punti di nociuolo.

α) **Intradosso.** — Condotta la retta **A e** e prolungate fino ad incontrare in r_i la retta delle reazioni d'imposta, si supponga che per r_i passi la linea d'azione di un peso P. Questo peso rispetto al punto di nociuolo **e** produce un momento $M_e = 0$ e quindi è anche $R_i = 0$ (vedi formula 436). Egualmente succede per un peso P la cui linea d'azione passi per un punto r'_i individuato col guidare la **B e** e prolungandola.

Tutti i pesi compresi fra le anzidette linee d'azione producono un momento M_e positivo cioè uno sforzo di trazione all'intradosso in **n**, tutti i pesi che agiscono esternamente alle medesime linee d'azione producono un momento M_e negativo, cioè uno sforzo di compressione all'intradosso in **n**. Perciò esse linee d'azione sono le linee separatrici dei carichi e cioè *risulta il massimo sforzo di compressione all'intradosso* (in **n**) *caricando l'arco sui tratti estremi* $A' r'_i$ *e* $B' r_i$, *mentre caricandolo pel tratto intermedio* $r'_i r_i$ *si avrebbe il massimo sforzo di trazione.*

β) **Estradosso.** — In modo analogo si determinano le linee separatrici del carico per il punto **m** di estradosso, **Fig. 505**, e precisamente condotte le rette **A i** e **B i** e prolungate nei punti r_e ed r'_e, le verticali passanti per questi punti sono le linee separatrici richieste, cosichè *si ha il massimo sforzo di compressione all' estradosso* (in **m**) *caricando l' arco sul tratto intermedio* $r_e r'_e$ *mentre si ottiene il massimo sforzo di trazione caricandolo sui tratti estremi* $A' r'_e$ e $B' r_e$.

Osservazione 1ª. — I punti $r_i r'_i$ ed $r_e r'_e$ possono anche cadere al fuori degli estremi punti **A'** e **B'** della linea delle reazioni d'imposta, ed in questo caso si ha una sola linea separatrice dei carichi e si deve considerare caricato il tratto compreso fra questa linea separatrice ed il corrispondente estremo dell'arco.

Osservazione 2ª. — Se la sezione è simmetrica rispetto all'asse neutro, e si tratti di sezione avente molta altezza h, si può prendere le distanze $\delta_e \delta_i$ dei punti di nociuolo **e** ed **i** dal baricentro **g** eguali a metà altezza della sezione, cioè $\delta_e = \delta_i = d = \frac{1}{2} h$ (vedi pagina 661) con che i punti **e** ed **i** coincidono rispettivamente coi punti **m** ed **n**, ossia i contorni di nociuolo corrispondono coi profili di estradosso e di intradosso. Così operando è lo stesso che prendere il valore del momento di inerzia $I = \Omega d^2 = \frac{1}{4} \Omega h^2$, vedi formula (437 a).

Osservazione 3ª. — Se la spinta orizzontale S si valutasse colla (453) allora la linea delle reazioni d'imposta sarebbe la curva **A' C' B'**, **Fig. 502**, per la quale valgono gli stessi procedimenti.

311. Determinazione di N T M M_e M_i. — Per determinare gli sforzi R_e ed R_i in una data sezione si può valersi tanto delle (432) che delle (436). Nel primo caso è necessario conoscere il momento M delle forze esterne rispetto al baricentro della sezione, nonchè la forza tangenziale N, nel secondo caso invece bisogna determinare i momenti M_e ed M_i per i punti di nociuolo **e** ed **i**.

α) **Un solo peso concentrato.** — Si consideri una sezione **m n** formante l'angolo ϕ colla verticale, **Fig. 506**, ed il cui baricentro abbia le coordinate x ed y, essendo nella metà della corda l'origine **0**. Il peso P agisca alla sinistra della sezione considerata alla distanza v dal vertice ed alla distanza λ dalla sezione stessa. Si ha:

$$\left.\begin{aligned}
N_P &= S\cos\phi + (A - P)\operatorname{sen}\phi && a\\
T_P &= (A - P)\cos\phi - S\operatorname{sen}\phi && b\\
M_P &= A(c - x) - S\,y - P\lambda && c\\
(M_e)_P &= A(c - x_e) - S\,y_e - P\lambda_e && d\\
(M_i)_P &= A(c - x_i) - S\,y_i - P\lambda_i && e
\end{aligned}\right\} \quad (467)$$

In queste espressioni diventa $\lambda = 0$ $\lambda_e = 0$ $\lambda_i = 0$ se il peso agisce alla destra della sezione considerata.

β) **Sistema di pesi concentrati.** — Si chiami ΣP_s la risultante dei pesi che si trovano a sinistra della sezione considerata. Si ha:

$$\left.\begin{aligned}
N_P &= \Sigma S\cos\phi + (\Sigma A - \Sigma P_s)\operatorname{sen}\phi && a\\
T_P &= (\Sigma A - \Sigma P_s)\cos\phi - \Sigma S\operatorname{sen}\phi && b\\
M_P &= \Sigma A(c - x) - \Sigma S\,y - \Sigma P_s\lambda && c\\
(M_e)_P &= \Sigma A(c - x_e) - \Sigma S\,y_e - \Sigma P_s\lambda_e && d\\
(M_i)_P &= \Sigma A(c - x_i) - \Sigma S\,y_i - \Sigma P_s\lambda_i && e
\end{aligned}\right\} \quad (468)$$

γ) **Carico accidentale uniformemente distribuito** (k **per metro corrente**). — Si supponga caricato un tratto di arco limitato dalle distanze v' e v'' dal vertice, **Fig. 507**, le quali vanno prese positive dal vertice verso sinistra e negative dal vertice verso destra, essendo λ la porzione di questo tratto, che si trova a sinistra della sezione considerata. Si ha:

$$\left.\begin{aligned}
N_k &= S\cos\phi + (A - k\lambda)\operatorname{sen}\phi && a\\
T_k &= (A - k\lambda)\cos\phi - S\operatorname{sen}\phi && b\\
M_k &= A(c - x) - S\,y - \frac{k\lambda^2}{2} && c\\
(M_e)_k &= A(c - x_e) - S\,y_e - \frac{k\lambda_e^2}{2} && d\\
(M_i)_k &= A(c - x_i) - S\,y_i - \frac{k\lambda_i^2}{2} && e
\end{aligned}\right\} \quad (469)$$

Se *il carico si estende su tutto l'arco*, **Fig. 508**, si deve porre nelle (469) per A ed S i valori dati dalle (459) e per arco parabolico

si deve prendere $y = f\dfrac{c^2 - x^2}{c^2}$, mentre è $\lambda = c - x$, $\lambda_e = c - x_e$, $\lambda_i = c - x_i$. Sostituiti questi valori risulta:

$$\left.\begin{aligned}
N_k &= \frac{k}{2f}(c^2\cos\phi + 2fx\,\mathrm{sen}\,\phi) && a\\
T_k &= \frac{k}{2f}(2fx\cos\phi - c^2\,\mathrm{sen}\,\phi) && b\\
M_k &= 0 && c\\
(M_e)_k &= \frac{k}{2f}\left\{f(c^2 - x_e^2) - c^2 y_e\right\} && d\\
(M_i)_k &= \frac{k}{2f}\left\{f(c^2 - x_i^2) - c^2 y_i\right\} && e
\end{aligned}\right\} \quad (470)$$

δ) **Peso permanente uniformemente distribuito** (p **per metro corrente**). — Basta porre nelle (470) p in luogo di k, cioè:

$$\left.\begin{aligned}
N_p &= \frac{p}{2f}(c^2\cos\phi + 2fx\,\mathrm{sen}\,\phi) && a\\
T_p &= \frac{p}{2f}(2fx\cos\phi - c^2\,\mathrm{sen}\,\phi) && b\\
M_p &= 0 && c\\
(M_e)_p &= \frac{p}{2f}\left\{f(c^2 - x_e^2) - c^2 y_e\right\} && d\\
(M_i)_p &= \frac{p}{2f}\left\{f(c^2 - x_i^2) - c^2 y_i\right\} && e
\end{aligned}\right\} \quad (471)$$

ε) **Variazioni di temperatura.** — In causa delle variazioni di temperatura non si origina alle cerniere di imposta, che la sola reazione o spinta orizzontale, **Fig. 509.** Questa spinta orizzontale produce nella sezione considerata una coppia o un momento Nn, una forza tangenziale N ed una forza radiale T i cui valori sono:

$$\left.\begin{aligned}
N_\theta &= S\cos\phi && a\\
T_\theta &= S\,\mathrm{sen}\,\phi && b\\
M_\theta &= Nn = Sy && c\\
(M_e)_\theta &= S y_e && d\\
(M_i)_\theta &= S y_i && e
\end{aligned}\right\} \quad (472)$$

Archi elastici senza cerniere.

312. Reazioni di imposta. — Sia **A C B** l'asse dell'arco di corda $2c$ e di freccia f, **Fig. 510.** Si consideri un punto **g** di coordinate x ed y e la relativa sezione **m n** formante un angolo ϕ colla verticale. In questo caso oltre delle reazioni di imposta A verticale ed S orizzontale, bisogna tener conto anche del momento di imposta M_A. Nessuna di queste tre quantità si può determinare colle leggi dell'equilibrio statico, ma bisogna ricorrere alle equazioni generali di elasticità relative ai solidi ad asse inizialmente curvo.

α) **Un solo carico concentrato.** — Per un arco ad *asse parabolico* si ha (*)

$$A = \frac{P}{4c^3}(c+v)^2(2c-v) \qquad (473)$$

$$S = \frac{15}{32}\frac{P}{fc^3}(c^2-v^2)^2 \qquad (474)$$

$$M_A = \frac{P}{16c^3}(c+v)^2\left\{(c-v)^2-4v(c-v)\right\} \qquad (475)$$

mentre per un arco ad *asse circolare* è

$$A = \frac{P}{2}\,\frac{\phi+\alpha+\operatorname{sen}\phi\cos\phi-2\cos\alpha\operatorname{sen}\phi-\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha}{\alpha-\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} \qquad (476)$$

$$S = \frac{P}{2}\,\frac{2\operatorname{sen}\alpha(\cos\phi-\cos\alpha+\phi\operatorname{sen}\phi)-\alpha(\operatorname{sen}\phi+\operatorname{sen}^2\alpha)}{\alpha(\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)-2\operatorname{sen}^2\alpha} \qquad (477)$$

$$M_A = S\left[f-r\left(1-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right)\right]-Ar\operatorname{sen}\alpha+\frac{Pr}{2}\,\frac{\operatorname{sen}\phi(\phi+\alpha)+\cos\phi-\cos\alpha}{\alpha} \qquad (478)$$

però in luogo di queste formule assai complesse e di calcolo molto laborioso si possono usare in pratica le (473) (474) (475) che sono di grande approssimazione per archi circolari molto ribassati, come sono generalmente gli archi metallici.

β) **Sistema di carichi concentrati.** — Per un sistema di pesi $P_1\ P_2\ P_3$..... si determinano i valori parziali $A_1\ A_2\ A_3$..... $S_1\ S_2\ S_3$ .....

(*) Queste formule furono dedotte da quelle del Müller-Breslau (*Theorie und Berechnung der eisernen Bogenbrücken*).

$(M_A)_1\ (M_A)_2\ (M_A)_3$ ..... e le loro somme algebriche $\Sigma A\ \ \Sigma S\ \Sigma M_A$ dànno il valore della totale reazione verticale, della totale spinta orizzontale e del totale momento di imposta.

γ) **Carico accidentale uniformemente distribuito** (k **per metro corrente**). — Sia caricato un tratto limitato dalle distanze v_r e v_{rr} dal vertice, **Fig. 511.** Alla distanza v da questo vertice si consideri un peso $k\,d\,v$; ricorrendo alle (473) (474) (475) sarà

$$d\,A = \frac{k\,d\,v}{4\,c^3}\,(c+v)^2\,(2\,c-v)$$

da cui

$$A = \frac{k}{4\,c^3}\int_{v_r}^{v_{rr}} (c+v)^2\,(2\,c-v)\,d\,v$$

$$d\,S = \frac{15}{32}\,\frac{k\,d\,v}{f\,c^3}\,(c^2-v^2)^2$$

da cui

$$S = \frac{15}{32}\,\frac{k}{f\,c^3}\int_{v_r}^{v_{rr}} (c^2-v^2)^2\,d\,v$$

$$d\,M_A = \frac{k\,d\,v}{16\,c^3}\,(c+v)^2\left\{(c-v)^2 - 4\,v\,(c-v)\right\}$$

da cui

$$M_A = \frac{k}{16\,c^3}\int_{v_r}^{v_{rr}} (c+v)^2\left\{(c-v)^2 - 4\,v\,(c-v)\right\} d\,v$$

ed eseguendo le integrazioni

$$A = \frac{k}{16\,c^3}\left\{8\,c^3\,(v_{rr}-v_r) + 6\,c^2\,(v_{rr}^2 - v_r^2) - (v_{rr}^4 - v_r^4)\right\} \quad (479)$$

$$S = \frac{k}{32\,f\,c^3}\left\{15\,c^4\,(v_{rr}-v_r) - 10\,c^2\,(v_{rr}^3 - v_r^3) + 3\,(v_{rr}^5 - v_r^5)\right\} \quad (480)$$

$$M_A = \frac{k}{16\,c^3}\left\{c^4\,(v_{rr}-v_r) - 2\,c^3\,(v_{rr}^2 - v_r^2) - 2\,c^2\,(v_{rr}^3 - v_r^3) + c\,(v_{rr}^4 - v_r^4) + (v_{rr}^5 - v_r^5)\right\} \quad (481)$$

nelle quali v_r e v_{rr} sono positive dal vertice verso sinistra e negative dal vertice verso destra.

Se il carico si estende su tutto l'arco, devesi porre nelle precedenti espressioni $v_{rr} = c\ \ v_r = -c$ e si ottiene

$$A = k\,c \qquad S = \frac{k\,c^2}{2\,f} \qquad M_A = 0 \qquad (482)$$

cioè gli stessi valori che corrispondono agli archi con due e tre cerniere, (pag. 664 e 675).

δ) **Peso permanente uniformemente distribuito** (p per metro corrente). — Devesi porre nelle (482) p in luogo di k e risulta

$$A = p\,c \qquad S = \frac{p\,c^2}{2\,f} \qquad M_A = 0 \qquad (483)$$

ε) **Variazioni di temperatura.** — Per variazioni di temperatura l'arco tende ad accorciarsi od allungarsi sulla corda ed essendone impedito dalla resistenza delle imposte, si sviluppa ivi una spinta orizzontale ed un momento i cui valori per *archi parabolici* sono

$$S = \frac{45\,\theta\,t^{o}\,E\,I\,\Omega}{4\,\Omega\,f^2 + 45\,I} \qquad M_A = S\,\frac{2}{3}\,f \qquad (484)$$

mentre per gli *archi circolari* sarebbe

$$S = \frac{2\,\theta\,t^{o}\,E\,I\,\Omega\,\alpha\,\operatorname{sen}\alpha}{2\,\alpha\,\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\,I + r^2\,\Omega\,(\alpha^2 + \alpha\,\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - 2\,\operatorname{sen}^2\alpha} \qquad (485)$$

$$M_A = S\left\{ r\,\frac{\operatorname{sen}\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha} - \frac{I}{\Omega\,r}\cos\alpha \right\} + \theta\,t^{o}\,E\,\frac{I}{r} \qquad (486)$$

però per archi molto ribassati, come sono generalmente gli archi metallici, in luogo di queste espressioni laboriosissime si può con grande approssimazione valersi delle (484) che servono per archi parabolici.

313. Curva delle reazioni di imposta. — Un peso P applicato alla distanza v dal vertice, Fig. 512, produce due reazioni di imposta $\mathcal{R}_A$ $\mathcal{R}_B$ che si intersecano lungo la linea d'azione del peso nel punto r, mentre passano pei punti a e b dei piani di imposta, che sono i centri di pressione. Supposte applicate due forze $\mathcal{R}_A$ eguali e direttamente contrarie in corrispondenza al baricentro A della sezione di imposta a sinistra e condotta da A una normale su ar, che si chiama r, il momento di imposta ha per valore $M_A = \mathcal{R}_A\,r$. La $\mathcal{R}_A$ incontra la verticale passante per A nel punto s. Detta s la distanza di questo punto da A e γ l'angolo che forma $\mathcal{R}_A$ coll'orizzontale, è $\mathcal{R}_A = \frac{S}{\cos\gamma}$, $r = s\cos\gamma$ e quindi $M_A = S\,s$, da cui $s = \frac{M_A}{S}$. Chiamando z l'ordinata rk del punto

di intersezione r delle due reazioni d'imposta $\mathcal{R}_A$ ed $\mathcal{R}_B$ col peso P, si trova

$$tang\ \gamma = \frac{A}{S} \qquad tang\ \gamma = \frac{z-s}{c-v}$$

ed eliminando $tang\ \gamma$ risulta

$$z = \frac{A}{S}\ (c-v) + s$$

la quale, sostituito il valore di s, porge

$$z = \frac{A\ (c-v) + M_A}{S}$$

e ponendo per A, S ed M_A i valori (473) (474) (475) si ottiene l'espressione che dà il valore dell'ordinata z cioè:

$$z = \frac{6}{5} f \qquad (476)$$

Essendo costante il valore di z, la curva delle reazioni d'imposta è una retta A′ B′ parallela alla corda e distante dalla medesima della quantità $^6/_5\ f$.

314. Linea inviluppante delle reazioni di imposta. — Dato un peso P di posizione mediante la sua distanza v dal vertice, Fig. 513, e stabilito il punto r in cui la sua linea d'azione si incontra colla retta delle reazioni d'imposta, per determinare la direzione della reazione $\mathcal{R}_A$ si deve individuare il suo punto di incontro s colla verticale passante pel baricentro A della sezione d'imposta; ossia la distanza s di questo punto d'incontro dal punto A. La direzione delle reazioni $\mathcal{R}_A$ si può anche determinare mediante la curva che le inviluppa. Per determinare la forma di questa curva si può considerare un punto o della stessa quale punto di incontro di due successive reazioni $\mathcal{R}_A$ infinitamente vicine. Riferita la curva ad un sistema di assi con l'origine in A, dette x_o ed y_o le coordinate del punto o e γ l'angolo di inclinazione della considerata reazione $\mathcal{R}_A$ coll'asse delle x_o si ha

$$y_o = s + x_o\ tang\ \gamma \qquad (I)$$

e per la successiva reazione, s e γ assumono una variazione infinitesima, mentre x_0 ed y_0 si mantengono costanti, per cui è

$$y_0 = s + d\,s + x_0\,(tang\,\gamma + d\,tang\,\gamma) \qquad (II)$$

Sottraendo la prima dalla seconda risulta

$$0 = d\,s + x_0\,d\,tang\,\gamma \quad \text{da cui} \quad x_0 = \frac{d\,s}{-d\,tang\,\gamma} \qquad (III)$$

E siccome è

$$s = \frac{M_A}{S} = \frac{2\,f}{15}\,\frac{(c - 5\,v)}{(c - v)} \qquad (477)$$

$$tang\,\gamma = \frac{A}{S} = \frac{8\,f}{15}\,\frac{(2\,c - v)}{(c - v)^2} \qquad (478)$$

avendovi sostituito per A, S ed M_A i valori (473) (474) (475) si deduce

$$\frac{d\,s}{d\,v} = -\frac{8\,f\,c}{15\,(c - v)^2} \qquad \frac{d\,tang\,\gamma}{d\,v} = \frac{8\,f}{15}\,\frac{(3\,c - v)}{(c - v)^3}$$

ed introducendo questi valori nella (I) e nella (III) si deduce

$$x_0 = \frac{c\,(c - v)}{(3\,c - v)} \qquad y_0 = \frac{2\,f}{15}\,\frac{(11\,c^2 - 20\,c\,v + 5\,v^2)}{(c - v)\,(3\,c - v)} \qquad (IV)$$

ed eliminando v fra le (IV) si trova

$$y_0 = \frac{2\,f}{15\,c}\,\frac{7\,c\,x_0 - x_0^2 - c^2}{x_0} \qquad (479)$$

la quale è l'equazione di una *iperbola.*

E siccome per $v = -c$, cioè per un peso agente in corrispondenza al baricentro B dell'imposta di destra, è $x_0 = \frac{c}{2}$, ne viene che essa è da costruirsi soltanto fino ad $x_0 = \frac{c}{2}$.

La inviluppante delle reazioni $\mathcal{R}_B$ è simmetrica a quelle delle $\mathcal{R}_A$.

Per la costruzione dell'iperbola serve la (479). Nella seguente tabella si trovano i valori di y_0 in funzione della freccia f per successivi valori di x_0 multipli di $^1/_{10}$ della semicorda c.

Tabella LIII.

per $x_0 = \frac{1}{10} c$	$y_0 = -0{,}4133\, f$	per $x_0 = \frac{6}{10} c$	$y_0 = 0{,}6311\, f$
« $x_0 = \frac{2}{10} c$	$y_0 = 0{,}2400\, f$	« $x_0 = \frac{7}{10} c$	$y_0 = 0{,}6495\, f$
« $x_0 = \frac{3}{10} c$	$y_0 = 0{,}4488\, f$	« $x_0 = \frac{8}{10} c$	$y_0 = 0{,}6600\, f$
« $x_0 = \frac{4}{10} c$	$y_0 = 0{,}5466\, f$	« $x_0 = \frac{9}{10} c$	$y_0 = 0{,}6652\, f$
« $x_0 = \frac{5}{10} c = \frac{1}{2} c$	$y_0 = 0{,}6000\, f$	« $x_0 = c$	$y_0 = 0{,}6667\, f$

N B. — Per la costruzione della inviluppante bastano i soli primi cinque valori, per quanto si è detto sopra.

Costruita la *curva inviluppante delle reazioni di imposta*, determinato il punto r di incontro della linea d'azione di un peso P colla retta A′ B′ delle reazioni di imposta, basta dal punto r condurre due tangenti alla inviluppante suddetta e queste determinano la direzione delle reazioni d'imposta $\mathcal{R}_A$ ed $\mathcal{R}_B$ corrispondenti al peso P considerato.

Esempio.

Suppongasi la corda $2c = 40$ *metri, la freccia* $f = 6$ *metri.* La linea delle reazioni d'imposta è una retta parallela alla corda e distante da essa $z = \frac{6}{5} f = \frac{6}{5} 6 = 7{,}20$ metri, Fig. 514. Basta a rigore costruire l'iperbola fino ad $x_0 = \frac{1}{2} c$. Essendo $c = 20$, è $\frac{1}{10} c = \frac{1}{10} 20 = 2$ metri, cioè le varie ordinate distano 2 metri l'una dall'altra ed i corrispondenti valori desunti dalla tabella LIII sono:

$$(y_0)_1 = -0{,}4133 \times 6 = -2{,}48 \quad , \quad (y_0)_2 = 0{,}24 \times 6 = 1{,}44$$
$$(y_0)_3 = 0{,}4488 \times 6 = 2{,}69 \quad , \quad (y_0)_4 = 0{,}5466 \times 6 = 3{,}28$$
$$(y_0)_5 = 0{,}6 \times 6 = 3{,}6$$

Costruite le iperbole a sinistra ed a destra, fino ad $x_0 = \frac{1}{2} c$ nei punti i, basta prolungarne le tangenti in questi, fino all'asse verticale dell'arco le quali

tangenti sono rispettivamente **i B′** ed **i A′** conchè la curva inviluppante delle reazioni di imposta è pienamente tracciata.

315. Posizione più sfavorevole del sopraccarico — Considerata una sezione **m n** sieno **i** ed **e** i relativi punti di nociuolo, **Fig. 515, 516.**

α) **Intradosso.** — Si faccia passare pel punto **e** due tangenti alla inviluppante delle reazioni di imposta, **Fig. 515**, l'una a sinistra e l'altra a destra e si prolunghino fino ad incontrare nei punti r_i ed r'_i la retta delle reazioni di imposta. Facendo passare due verticali per i punti r_i r'_i queste rappresentano le linee separatrici del sopraccarico. Difatti i pesi che ad esse corrispondono producono un momento $M_e = 0$, ossia uno sforzo $R_i = 0$ (Vedi *formule* 436) mentre quelli che agiscono fra di esse originano un momento M_e positivo e quindi producono il massimo sforzo di trazione all'intradosso (in **n**) e quelli che agiscono esternamente ad esse originano un momento M_e negativo e producono quindi il massimo sforzo di compressione all'intradosso (in **n**).

β) **Estradosso.** — In analogo modo si determinano i punti r_e ed r'_e e le relative linee separatrici del sopraccarico, **Fig. 516**, osservando che il massimo sforzo di compressione all'estradosso (in **m**) è originato dai pesi interposti alle linee passanti per i punti r_e r'_e, mentre i pesi che agiscono esternamente a dette linee producono il massimo sforzo di trazione all'estradosso (in **m**).

316. Determinazione di N, T, M, M_e, M_i. — Sia **A C B** l'asse di un arco elastico, si consideri un punto **g** di ascisse x y e la sezione **m n** corrispondente a questo punto formi l'angolo φ colla verticale.

α) **Un solo peso concentrato.** — Il peso P sollecitante l'arco a sinistra della considerata sezione sia dato di posizione mediante la sua distanza v dal vertice e la sua distanza λ dalla sezione stessa, **Fig. 517**, si ha:

$$\left.\begin{aligned}
N_P &= S\cos\varphi + (A - P)\operatorname{sen}\varphi && a\\
T_P &= (A - P)\cos\varphi - S\operatorname{sen}\varphi && b\\
M_P &= A(c - x) - S\,y + M_A - P\,\lambda && c\\
(M_e)_P &= A(c - x_e) - S\,y_e + M_A - P\,\lambda_e && d\\
(M_i)_P &= A(c - x_i) - S\,y_i + M_A - P\,\lambda_i && e
\end{aligned}\right\} \quad (491)$$

Se il peso opera a destra della considerata sezione si deve porre $\lambda = 0$ nelle (491).

Osservazione. — Se la reazione $\mathcal{R}_A$ passa per il centro dell'imposta allora diventa $s = 0$ e quindi $M_A = 0$. — Ricorrendo alla (488) si ha per $s = 0$:

$$0 = \frac{2f}{15}\frac{(c - {}^5v)}{c - v} \quad \text{da cui} \quad v = \frac{1}{5}c \tag{492}$$

Ossia quando il peso P dista dal vertice di una quantità $v = \frac{1}{5}c$ il momento di imposta M_A è nullo.

Si può anche stabilire che per $v > +\frac{1}{5}c$ il momento M_A è negativo, e per $v < +\frac{1}{5}c$ il momento M_A è positivo.

β) **Sistema di pesi concentrati.** — Per un sistema di pesi $P_1 P_2 P_3 \ldots$ di cui sia ΣA, ΣS, ΣM_A la totale reazione verticale, la totale spinta orizzontale, ed il totale momento di imposta, chiamando ΣP_s la risultante dei pesi che giacciono a sinistra della sezione considerata e λ la distanza di essa risultante da questa sezione si ha:

$$\left.\begin{aligned}
N_P &= \Sigma S \cos\phi + (\Sigma A - \Sigma P_s)\operatorname{sen}\phi && a\\
T_P &= (\Sigma A - \Sigma P_s)\cos\phi - S\operatorname{sen}\phi && b\\
M_P &= \Sigma A\,(c - x) - \Sigma S\,y + \Sigma M_A - \Sigma P_s\,\lambda && c\\
(M_e)_P &= \Sigma A\,(c - x_e) - \Sigma S\,y_e + \Sigma M_A - \Sigma P_s\,\lambda_e && d\\
(M_i)_P &= \Sigma A\,(c - x_i) - \Sigma S\,y_i + \Sigma M_A - \Sigma P_s\,\lambda_i && e
\end{aligned}\right\} \tag{493}$$

γ) **Carico accidentale uniformemente distribuito** (k **per metro corrente**). — Il carico si estenda sopra un tratto determinato dalle distanze v_1 e v_{11} dal vertice, **Fig. 518**, e sia λ la porzione che si trova a sinistra della sezione considerata. Si ha:

$$\left.\begin{aligned}
N_k &= S\cos\phi + (A - k\lambda)\operatorname{sen}\phi && a\\
T_k &= (A - k\lambda)\cos\phi - S\operatorname{sen}\phi && b\\
M_k &= A\,(c - x) - S\,y + M_A - \frac{k\lambda^2}{2} && c\\
(M_e)_k &= A\,(c - x_e) - S\,y_e + M_A - \frac{k\lambda_e^2}{2} && d\\
(M_i)_k &= A\,(c - x_i) - S\,y_i + M_A - \frac{k\lambda_i^2}{2} && e
\end{aligned}\right\} \tag{494}$$

Se il tratto caricato si trova tutto alla destra della sezione considerata si deve porre $\lambda = 0$ nelle (494).

Se tutto l'arco è caricato diventa $M_A = 0$ e quindi si ricade nel caso degli archi con due cerniere (pag. 670), e ritorna:

$$\left.\begin{aligned} N_k &= \frac{k}{2f}(c^2 \cos\phi + 2f x \operatorname{sen}\phi) && a \\ T_k &= \frac{k}{2f}(2f x \cos\phi - c^2 \operatorname{sen}\phi) && b \\ M_k &= \frac{k}{2f}\left\{f(c^2 - x^2) - c^2 y\right\} && c \\ (M_e)_k &= \frac{k}{2f}\left\{f(c^2 - x_e^2) - c^2 y_e\right\} && d \\ (M_i)_k &= \frac{k}{2f}\left\{f(c^2 - x_i^2) - c^2 y_i\right\} && e \end{aligned}\right\} \quad (495)$$

δ) **Peso permanente uniformemente distribuito** (p **per metro corrente**). — Devesi porre nelle (495) p in luogo di k, cioè

$$\left.\begin{aligned} N_p &= \frac{p}{2f}(c^2 \cos\phi + 2f x \operatorname{sen}\phi) && a \\ T_p &= \frac{p}{2f}(2f x \cos\phi - c^2 \operatorname{sen}\phi) && b \\ M_k &= \frac{p}{2f}\left\{f(c^2 - x^2) - c^2 y\right\} && c \\ (M_e)_k &= \frac{p}{2f}\left\{f(c^2 - x_e^2) - c^2 y_e\right\} && d \\ (M_i)_k &= \frac{p}{2f}\left\{f(c^2 - x_i^2) - c^2 y_i\right\} && e \end{aligned}\right\} \quad (496)$$

ε) **Variazioni di temperatura** — Per effetto delle variazioni di temperatura si origina all'imposta dell'arco, **Fig. 519**, un momento M_A ed una spinta orizzontale S per i quali nella considerata sezione si ha:

$$\left.\begin{aligned} N_\theta &= S\cos\phi && a \\ T_\theta &= S\operatorname{sen}\phi && b \\ M_\theta &= S\,y + M_A && c \\ (M_e)_\theta &= S\,y_e + M_A && d \\ (M_i)_\theta &= S\,y_i + M_A && e \end{aligned}\right\} \quad (497)$$

Determinazione delle riquadrature nelle armature con archi elastici.

Si deve considerare separatamente *l'arco propriamente detto* o nervatura inferiore, i *montanti* ed il *corrente longitudinale* o nervatura superiore.

317. Arco o nervatura inferiore. — Prima di tutto bisogna assumere l'altezza del gambo dell'arcone, nonchè la forma della sua sezione retta, poscia si stabiliscono le sezioni da considerare nei calcoli.

α) **Altezza dell'arcone** — Questa altezza la si assume costante negli archi impostati sopra cerniere, e si può anche assumerla variabile negli archi impostati senza cerniere, quando si debba tenere il sotto arco in chiave più elevato possibile sopra il pelo di piena.

Negli *archi con altezza costante*, detta h, si deve prenderla fra $^1/_{40}$ ed $^1/_{50}$ della corda $C = 2c$ ossia:

$$h = 0{,}05\,c \quad , \quad h = 0{,}04\,c \qquad (498)$$

Negli *archi con altezza variabile*, detta h_c quella in chiave, ed h_i quella alle imposte, si deve prendere la prima circa $^1/_{70}$ della corda e la seconda circa $^1/_{40}$, cioè:

$$h_c = 0{,}03\,c \quad , \quad h_i = 0{,}05\,c \qquad (499)$$

β) **Sezioni da considerare nei calcoli** — Basta considerare mezzo arco. Si divide la semicorda in un conveniente numero di parti eguali, si innalzano delle ordinate dai punti di divisione individuando altrettanti punti dell'asse dell'arco, e si considerano le corrispondenti sezioni. Si potrebbe invece considerare le sezioni a cui corrispondono i montanti sorreggenti l'impalcato. Per ciascheduna sezione si deve calcolare tanto per l'estradosso quanto per l'intradosso lo sforzo massimo di compressione R_k dipendente dal carico mobile, quello R_p dipendente dal carico permanente e quello R_θ prodotto dalla dilatazione, e la somma algebrica di questi tre sforzi dà lo sforzo complessivo $R = R_k + R_p + R_\theta$, il quale per la stabilità non deve essere di molto superiore a 6 chilogrammi per millimetro quadrato.

318. Montanti. — I montanti trasmettono i carichi direttamente dall'impalcato all'arco. Se si denota con λ la distanza fra due montanti successivi della stessa armatura, con D la larghezza della zona di carico per ogni armatura, il peso P_m che carica un montante è $P_m = p_0 \lambda D + P_0$ dove p_0 denota il peso permanente per metro quadrato dell'impalcato, e P_0 il peso dovuto alla fila traversale di ruote che possono insistere nella larghezza D. Il montante è caricato di punta, e quindi detta Ω l'area della sezione retta, l'equazione di condizione per la stabilità è:

$$\frac{P_m}{\Omega} = \frac{R_c}{m} \qquad (500)$$

dove m è dato dalla tabella XII e dipende dal rapporto $\frac{L}{g}$ nel quale L rappresenta la lunghezza del montante, e g il lato minore del rettangolo circoscrivente la sua sezione retta.

319. Corrente o nervatura superiore. — Si considera quel tratto di corrente, compreso fra un montante ed il successivo, che ha la massima lunghezza λ_{mas}, e supponendolo semplicemente appoggiato sui montanti, se ne determina le condizioni di stabilità nello stesso modo indicato per i correntini nei ponti carrozzabili al numero **153**, e per le lungarine nei ponti ferroviari, al numero **154**.

Esempio 1°

Archi elastici con tre cerniere.

Si supponga un ponte per ferrovia ad un binario sostenuto da due archi distanti metri 1,80 *da asse ad asse. La corda degli archi sia di metri* 17 *e la freccia di metri* 2,3. *Il binario sia collocato sopra traversine spaziate di metri* 0,85 *da asse ad asse e poste sopra lungarine sostenute da montanti distanti metri* 1,70 *l'uno dall'altro.*

Peso permanente. — Il peso permanente per metro corrente di ponte, valutato colla (426) risulta:

$$p = 795 + 4{,}07 \times 17 = 864{,}19 \text{ Kg.}$$

mentre valutandola colla (428-*a*) si trova

$$p = \frac{6000 \times 2{,}3 \times 0{,}35 + 4{,}21 \times 8{,}10\ (3 \times 8{,}5^2 + 4 \times 2{,}3^2)}{6000 \times 2{,}3 - 2{,}27\ (3 \times 8{,}5^2 + 4 \times 2{,}3^2)} = 0{,}97 \text{ tonn.}$$

cioè $p = 970$ Kg., e prendendo il valor medio si ha:

$$p = \frac{864 + 970}{2} = 914 \text{ Kg.}$$

e per metro corrente di arcone risulta:

$$p = \frac{914}{2} = 457 \text{ Kg.}$$

ed arrotondando si prende $p = 460$ chilogrammi.

Altezza e sezione dell'arco. — Ricorrendo alla (498) si prende l'altezza dell'arco $h = 0{,}05 \frac{17}{2} = 0{,}425$ metri ed arrotondando si fa $h = 0{,}45$ metri.

Si assume per l'arco la sezione rappresentata nella **Fig. 520**, salvo di aggiungere delle altre lamiere nelle tavolette, ove se ne presenti il bisogno. L'area di questa sezione è:

$$\Omega = 250 \times 10 \times 2 + 450 \times 10 + (90 \times 90 - 80 \times 80)\ 4 = 16300 \text{ mm}\square$$

la distanza

$$d = \frac{450}{2} = 225 \text{ mm.}$$

ed il momento d'inerzia:

$$I = \frac{1}{12}\left\{250 \times 470^3 - (60 \times 450^3 + 160 \times 430^3 + 20 \times 270^3)\right\} = 614455833$$

Ritenendo intanto *costante* la sezione, ed essendo questa simmetrica rispetto all'asse neutro, è facile determinare i contorni superiore ed inferiore di nocciuolo, mediante la distanza δ dall'asse dell'arco che risulta comune per tutti due i contorni, nonchè costante su tutto lo sviluppo dell'arco; cioè i detti contorni si mantengono paralleli all'asse dell'arco. Ricorrendo alla (437-*a*) si trova

$$\delta = \frac{614455833}{225 \times 16300} = 168 \text{ mm.}$$

Posizione più sfavorevole del sopraccarico. — Disegnato il profilo dell'intero arco, basta limitare la ricerca a mezzo arco soltanto, inquantochè l'altro mezzo riesce perfettamente identico, e questa ricerca si fa per le sezioni individuate dai punti di incontro dei montanti verticali coll'asse dell'arco stesso, che partendo dall'imposta si numerano progressivamente con 0, 1, 2, 3, 4, 5, **Fig. 521**.

Estradosso. — Disegnato il contorno di nociuolo inferiore, che è un arco concentrico all'asse e distante dallo stesso $\delta = 168$ millimetri si individuano i vari punti di nociuolo e_1 e_2 e_3 e_4 e_5, i quali servono a stabilire le posizioni più sfavorevoli del sopraccarico per le varie sezioni nel modo indicato al § **306**.

Intradosso. — Disegnato il contorno superiore di nociuolo che è un arco concentrico all'asse e distante dallo stesso $\delta = 168$ millimetri si individuano i vari punti di nociuolo i_1 i_2 i_3 i_4 i_5, i quali servono a stabilire la posizione più sfavorevole di sopraccarico per le varie sezioni nel modo indicato al § **306**.

Carico k ragguagliato al treno di prova. — Questo carico varia per ogni sezione inquantochè dipende dalla lunghezza del tratto su cui deve estendersi il sopraccarico onde produrre il massimo sforzo nella sezione che si considera, e si può desumerlo dalla tabella **LII**.

Per *l'estradosso*, riferendosi alla **Fig. 521**, e ricordando che la tabella **LII** porge il valore di k per metro corrente di ponte, per cui bisogna prenderne la metà per metro corrente di arco, si trova:

Tabella *A*.

Sezione	0	1	2	3	4	5
Lunghezza v del tratto caricato	17,00	6,84	6,94	7,45	8,05	17,00
Valore di k in tonn.	3,18	4,70	4,60	4,45	4,25	3,18

Per *l'intradosso* riferendosi ancora alla **Fig. 521** si trova:

Tabella *B*.

Sezione	0	1	2	3	4	5
Lunghezza v del tratto caricato	17,00	11,82	11,00	10,35	9,60	17,00
Valore di k in tonn.	3,18	3,65	3,75	3,85	3,95	3,18

Coordinate dei punti di nociuolo. — Il valore di queste coordinate conviene misurarlo graficamente nel diagramma, **Fig. 521**, avvertendo che bisogna allora disegnare questo diagramma in scala grande con esattezza. Dalle misurazioni si trova:

Tabella *C.*

Sezioni	0	1	2	3	4	5
Valore di x_e	8,58	6,85	5,15	3,43	1,68	0
Valore di y_e	0,15	1,01	1,65	2,10	2,37	2,46
Valore di x_i	8,42	6,72	5,02	3,35	1,65	0
Valore di y_i	—0,15	0,73	1,35	1,77	2,06	2,14

Momenti dei punti di nociuolo. — Questi momenti si calcolano separatamente pel peso permanente e pel carico accidentale.

Peso permanente. — Servono all'uopo le (451-*d*-*e*). Ad esempio per la sezione 3 si avrebbe:

$$(M_e)_p = \frac{460}{2 \times 2{,}3} \left\{ 2{,}3\,(8{,}5^2 - 3{,}43^2) - 8{,}5^2 \times 2{,}10 \right\} = -1260 \text{ Kgm.}$$

$$(M_i)_p = \frac{460}{2 \times 2{,}3} \left\{ 2{,}3\,(8{,}5^2 - 3{,}35^2) - 8{,}5^2 \times 1{,}77 \right\} = +1249 \text{ Kgm.}$$

Così operando per tutte le sezioni si ricavano i valori raccolti nella tabella seguente:

Tabella *D.*

Sezioni	0	1	2	3	4	5
Valore di $(M_e)_p$	—1398	—1471	—1403	—1260	—1154	—1156
Valore di $(M_i)_p$	+1394	+1019	+1068	+1249	+1109	+1156

Osservazione. — Non essendo l'arco ad asse parabolico, ma ad asse circolare non molto ribassato, i valori dei momenti $(M_e)_p$ ed $(M_i)_p$ non riescono fra loro eguali, abbenchè la sezione dell'arco sia simmetrica rispetto all'asse, ed il peso distribuito per tutta la corda.

Carico accidentale. — Si scorge dalla **Fig. 521**, che per i momenti $(M_i)_k$, relativi all'*estradosso*, si deve considerare tutto l'arco carico o soltanto un^a porzione del mezzo arco di sinistra, servono dunque le (445-*e*) (449-*e*) ponendo in luogo di *k* i valori dati dalla tabella *A* ridotti in chilogrammi.

Ad esempio per la sezione 3 si ha:

$$(M_i)_k = \frac{4450}{2}\left[\frac{7{,}45\left\{2{,}3\,(17{,}00+1{,}05+8{,}50)\,(8{,}5-3{,}35)-8{,}5\,(17{,}00-1{,}05-8{,}5)\,1{,}77\right\}}{2\times 2{,}3\times 8{,}5}-(8{,}5-3{,}35)^2\right]$$

$$(M_i)_k = +\,26789 \text{ Kgm.}$$

Osservando la **Fig. 521** si vede che per i momenti $(M_e)_k$, relativi all'*intradosso*, si deve considerare per tutte le sezioni il mezzo arco di destra completamente carico, e quello di sinistra caricato o tutto od in parte; servono dunque le (445-*d*) (448-*d*) (449-*d*) ponendo in luogo di *k* i valori dati dalla tabella *B* ridotti in chilogrammi.

Ad esempio per la sezione 3 si ha:

$$(M_e)_k = \frac{3850}{2}\left[\frac{(1{,}85-0)\left\{2{,}3(17{,}00+0+1{,}85)(8{,}5-3{,}43)-8{,}5(17{,}00-0-1{,}85)2{,}10\right\}}{2\times 2{,}3\times 8{,}5}-0\right]+$$

$$+\frac{3850\times 8{,}5}{4\times 2{,}3}\left\{2{,}3\,(8{,}50-3{,}43)-8{,}5\times 2{,}10\right\} = -\,26618 \text{ Kgm.}$$

Così operando per tutte le sezioni si ricavano i valori raccolti nella tabella seguente:

Tabella *E*.

Sezione	0	1	2	3	4	5
Valori di $(M_e)_k$	— 9660	— 22411	— 28275	— 26618	— 18288	— 7988
Valori di $(M_i)_k$	+ 9633	+ 21126	+ 28037	+ 26789	+ 17489	+ 7988

I momenti totali (M_e) ed (M_i) si deducono dalla somma algebrica dei valori parziali dati dalle tabelle *D* ed *E* e sono elencati nella tabella seguente:

Tabella *F*.

Sezione	0	1	2	3	4	5
Valori di (M_e)	— 11058	— 23882	— 29678	— 27878	— 19442	— 9144
Valori di (M_i)	+ 10027	+ 22145	+ 29105	+ 28038	+ 18598	+ 9144

Osservazione. — I valori di (M_e) ed (M_i) dovrebbero essere eguali fra loro per la sezione 0; la *trascurabile* differenza dipende dall'inevitabile errore di misurazione delle quantità x_e y_e ed x_i y_i.

Diagramma degli sforzi e distribuzione delle lamiere. — Per costruire il diagramma delle variazioni degli sforzi per l'*estradosso* e l'*intradosso*, si prendano le fondamentali $A_e C_e$ ed $A_i C_i$ portando come ordinate rispettivamente i valori (M_i) ed (M_e) dati dalla tabella *F*, come mostra la **Fig. 522**, nella quale si è assunta la scala di 1 millimetro per 2000 chilogrammetri.

La resistenza della sezione assunta (prendendo lo sforzo unitario o coefficiente di lavoro R = 6 chilogrammi per millimetro quadrato) ha per valore

$$\frac{R\,I}{d} = \frac{6 \times 614455833}{225} = 16385488$$

e riferendosi al metro

$$\frac{R\,I}{d} = 16385 \text{ Kgm.}$$

Si segnano dunque due rette **e e** ed **i i** parallele alle fondamentali alla distanza corrispondente alla resistenza 16385, presa nella scala del disegno.

Vedesi allora che bisogna aggiungere delle lamiere in tavoletta nella parte mediana dell'arco. Una coppia di lamiere colle dimensioni indicate nella **Fig. 523**, ha un momento di inerzia

$$I_1 = \frac{1}{12} 250\ (490^3 - 470^3) = 288041666$$

ed una distanza $d_1 = \frac{490}{2} = 245$, e quindi una resistenza

$$\frac{R\,I_1}{d_1} = \frac{6 \times 288041666}{245} = 7054082$$

e riferendosi al metro diventa:

$$\frac{R\,I_1}{d_1} = 7054 \text{ Kgm.}$$

Riportando ripetutamente nella scala del disegno questa resistenza esternamente alle rette **e e** ed **i i** fino a superare il punto culminante degli inviluppi degli sforzi sollecitanti e conducendo delle rette parallele alle fondamentali, si determina la legge di variazione delle resistenze così che aumentino coll' aumentare degli sforzi, ciò che si ottiene distribuendo le lamiere nel modo rappresentato dal diagramma, **Fig. 522.**

Osservazione. — La distribuzione delle lamiere all'estradosso non riesce simmetrica a quella delle lamiere all'intradosso. In pratica conviene, per

regolarità di costruzione, adottare queste due distribuzioni simmetriche subordinando quelle di estradosso a quelle di intradosso, che di solito ha le lamiere più estese. Si guidano cioè dal centro dell'arco dei raggi r r r r agli estremi delle lamiere di intradosso e si estendono le lamiere di estradosso rispettivamente fino a questi raggi, salvo ad introdurre qualche modificazione allo scopo di ben coordinare le coprigiunture.

È da avvertire inoltre che nel fissare i punti di nociuolo si è supposta la sezione dell'arco costante, per cui le posizioni del sopraccarico non sono individuate a rigore. L'aggiunta di alcune lamiere nelle tavolette non porta però notevole differenza nelle distanze δ che determinano a rigore i punti di nociuolo, e quindi il procedimento tenuto è di molta approssimazione. Volendo maggior rigore si potrebbe partire dalla fatta distribuzione di lamiere ed in base a questo determinare i corrispondenti punti di nociuolo, le rispettive posizioni del sovraccarico, i nuovi valori dei momenti (M_e) ed (M_i) per passare ad una nuova distribuzione di lamiere ; la quale operazione si può ommettere con tutta confidenza nei casi ordinari poichè non porterebbe delle rimarchevoli differenze.

Esempio 2°

Archi elastici con due cerniere.

Si supponga un ponte per strada ordinaria. L'arco abbia l'asse colla semicorda $c = 15,^m$ *la freccia* $f = 2,^m50$ *ed i montanti abbiano eguale distanza* $\lambda = 2^m$. *Nella parte centrale il corrente si collega coll'arco e risulta un timpano pieno prolungato* 7^m *a sinistra ed a destra della chiave: la distanza delle armature sia* $D = 1^m,6$ *ed il tavolato posto direttamente sui correnti delle armature sia formato di ferri* Zores *con sovrapposta ghiaia, dello spessore* $a = 15$ *centimetri.*

Peso permanente e carico accidentale. — Il carico permanente per metro quadrato è dato dalla (425) cioè $p_0 = 2700 \times 0,15 + 4 \times 30 = 525$ quindi il carico per metro corrente di armatura è $p = p_0 D = 525 \times 1,6 = 840$ chilogrammi. Il carico accidentale si prenda di 500 chilogrammi per metro quadrato, per cui il carico relativo ad un metro corrente di armatura è $k = 500 \times 1,6 = 800$ chilogrammi e quindi per ogni montante si ha un carico

$$P = k\lambda = 800 \times 2 = 1600 \text{ Kg.}$$

ad eccezione dei montanti che limitano i timpani e di quelli di imposta per i quali è $P = \frac{1}{2}\ 1600 = 800$.

Sezioni da considerare per la verifica della stabilità dell'arco. — L'arco sia a sezione costante colla forma e dimensioni rappresentate nella **Fig. 524**, per cui la sezione è $\Omega = 24300$ millimetri quadrati ed il momento di inerzia $I = 1305247500$, mentre le sezioni dei montanti e del corrente sono pure rappresentate nella **Fig. 524.**

Divisa la semicorda in 5 parti eguali lunghe 3^m e condotte le rispettive ordinate, si considerano le corrispondenti sezioni 0, 1, 2, 3, 4, 5 normali all'asse dell'arco, **Fig. 525.**

Differenziando la (450) si trova:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2fx}{c^2} \text{ ed essendo } \frac{dy}{dx} = tang\varphi$$

$$\text{si ha } tang\varphi = \frac{2fx}{c^2} = \frac{2 \times 2{,}5}{15^2} x = 0{,}0222\, x$$

mediante la quale si determina il seguente specchio:

Tabella *A*.

Sezioni	x	tang φ	φ	sen φ	cos φ
0	0	0	0	0	1
1	3m	0,0666	3° 4′ 50″	0,0665	0,9977
2	6	0,1333	7° 35′ 50″	0,1322	0,9912
3	9	0,2000	11° 18′ 40″	0,1961	0,9805
4	12	0,2666	14° 55′ 50″	0,2576	0,9664
5	15	0,3333	18° 26′ 5″	0,3162	0,9487

Le funzioni trigonometriche dell'angolo φ si possono anche determinare graficamente. Sopra una verticale, **Fig. 526**, si porta una lunghezza **0 V** eguale all'unità di misura. Conviene prendere **0 V** = 1 decimetro per comodo di lettura. Centrando in **0** si descrive un arco di cerchio con raggio **0 V** (parte sinistra) oppure si descrive un semicerchio con diametro **0 V** (parte destra). Dal punto **0** si conducano le rette **01 02 03** ..... parallele ai diversi raggi che individuano le sezioni considerate, prolungandole fino ad incontrare il perimetro circolare. Dai punti 1 2 3 ..... si conducono delle normali sulla **0 V** (parte sinistra) oppure le rette 1V 2V 3V ..... (parte destra). Le rette $1v_1$ $2v_2$ $3v_3$ ..... oppure 1V 2V 3V ..... rappresentano i *seni* e le rette $0v_1$ $0v_2$ $0v_3$ ..... oppure **01 02 03** ..... rappresentano i *coseni* dei successivi angoli φ.

Sforzi dipendenti dal carico mobile. — Valendosi delle formule (452) (453) poste sotto la forma

$$A = P\,\frac{15 + v}{30}$$

$$S = \frac{5}{64}\,P\,\frac{(5 \times 15^2 - v^2)(15^2 - v^2)}{15^3 \times 2{,}5} = 0{,}000009256\ P\,(1125 - v^2)(225 - v^2)$$

si calcolano le singole reazioni verticali A ed orizzontali S dell'appoggio di sinistra dipendenti dai pesi che operano in corrispondenza ai montanti.

Il peso $P_1 = 800$ chilogrammi che sta sul primo montante a sinistra del vertice, e che dista dal medesimo $v = 7^m$, dà:

$$A_1 = 800 \frac{15 + 7}{30} = 587 \text{ Kg.}$$

$$S_1 = 0{,}000009256 \times 800 (1125 - 7^2)(225 - 7^2) = 1402 \text{ Kg.}$$

Per il peso P'_1 che sta simmetricamente alla destra del vertice si deve porre $v = -7^m$ e quindi:

$$A'_1 = 800 \frac{15 - 7}{30} = 213 \text{ Kg.}$$

È facile scorgere che sommando questo valore col precedente si deve ottenere il peso $P = 800$ chilogrammi. Infatti $587 + 213 = 800$, cioè ottenute le reazioni A per i pesi di sinistra, quelle A' dei pesi posti simmetricamente alla destra sono date sottraendo dal peso P' la reazione del peso simmetrico di sinistra. La spinta S è eguale per due pesi posti simmetricamente rispetto al vertice, giacchè $(-v)^2 = (+v)^2$. Con queste norme, considerando i pesi che operano sugli altri montanti si forma la seguente tabella:

Tabella *B*.

Pesi di sinistra			Pesi di destra			SPINTA orizzontale S dei pesi di destra e sinistra
Montanti	Distanze v	Reazioni A	Montanti	Distanze v	Reazioni A	
1	7^m	587 Kg.	1	-7^m	213 Kg.	1402 Kg.
2	9	1280 »	2	— 9	320 »	2226 »
3	11	1387 »	3	—11	213 »	1546 »
4	13	1493 »	4	—13	107 »	803 »
5	15	800 »	5	—15	0 »	0 »
		5547 Kg.			853 Kg.	5977 Kg.

Essendo la sezione dell'arco simmetrica rispetto all'asse neutro e costante, si può ommettere la ricerca dei contorni di nociuolo e prendere invece rispettivamente i profili di estradosso e di intradosso dell'arco (pag. 680).

Estradosso. — Per determinare la posizione più sfavorevole del carico mobile per l'estradosso in ognuna delle considerate sezioni, bisogna costruire la *curva delle reazioni d'imposta.* Mediante la (465) se ne calcolano le relative ordinate ponendo successivamente $v = 0; 3; 6; 9; 12; 15$ e si ottiene rispettivamente $z = 3{,}15; 3{,}226; 3{,}306; 3{,}448; 3{,}67; 4{,}0$ portando i quali valori in scala a destra ed a sinistra, **Fig. 525,** si costruisce la curva suddetta. Partendo dall'estremo **A** dell'asse dell'arco si tirano delle rette che

passino per il punto di intradosso di ciascheduna sezione (che si prende come punto di nociuolo), e si prolungano fino ad incontrare la curva delle reazioni. Lo stesso si fa partendo dall'estremo **B**; siccome però le rette che passano per i punti di intradosso delle sezioni 1, 2, 3, 4, 5, prolungate non incontrano la curva delle reazioni, si ommette di segnarle, tirando invece quella che da **B** passa per il punto di intradosso della sezione 0 al vertice. Con tale operazione si individuano le posizioni del carico mobile che producono il massimo sforzo di compressione nelle varie sezioni. Per mostrare come si valuta il valore dello sforzo R_k dipendente dal carico mobile si prenda in esame la sezione **I**, per la quale il modo più sfavorevole di sopraccarico è rappresentato separatamente nella **Fig. 528.** Nelle **Fig. 527, 529, 530, 531, 532,** sono rappresentate le posizioni più sfavorevoli del carico mobile anche per tutte le altre sezioni.

Si deve calcolare per la sezione **I** le reazioni A ed S di imposta dipendenti dal carico mobile che agisce uniformemente sulla parte centrale dell'arco con timpani pieni. Ricorrendo alle (456) (457) poste sotto la forma

$$A = \frac{800}{2 \times 15}\left\{30\,(v_{,,} - v_{,}) + (v_{,,}^2 - v_{,}^2)\right\} = 13{,}333\left\{30\,(v_{,,} - v_{,}) + (v_{,,}^2 - v_{,}^2)\right\}$$

$$S = \frac{800}{64 \times 15^3 \times 2{,}5}\left\{(v_{,,}^5 - v_{,}^5) - 10 \times 15^2\,(v_{,,}^3 - v_{,}^3) + 25 \times 15^4\,(v_{,,} - v_{,})\right\} =$$

$$= 0{,}001481\left\{(v_{,,}^5 - v_{,}^5) - 2250\,(v_{,,}^3 - v_{,}^3) + 1265625\,(v_{,,} - v_{,})\right\}$$

nelle quali si deve porre

$$v_{,} = -3{,}3 \text{ e } v_{,,} = 7{,}0$$

si ottiene:

$$A = 4628 \text{ Kg} \qquad S = 18069 \text{ Kg.}$$

Oltre al carico considerato operano quelli che sono trasmessi all'arco da tutti i montanti di sinistra, cioè $P_1\,P_2\,P_3\,P_4\,P_5$ le di cui reazioni parziali sono raccolte nella tabella (*B*) e quindi le reazioni totali hanno per valore

$$A = 4628 + 587 + 1280 + 1387 + 1493 + 800 = 10175 \text{ Kg.}$$

ed $$S = 18069 + 1402 + 2226 + 1546 + 803 + 0 = 24046 \text{ Kg.}$$

Ora si deve calcolare il valore della forza tangenziale $N^{(1)}$ mediante la (468-*a*) e ricordando che $sen\varphi^{(1)} = 0{,}0665$ e $cos\varphi^{(1)} = 0{,}9977$ si trova

$$N^{(1)} = 24046 \times 0{,}9977 +$$

$$+\left\{10175 - [800 + 1600 + 1600 + 1600 + 800 + (7 - 3)\,800]\right\} 0{,}0665 = 24029 \text{ Kg.}$$

Il momento inflettente $M^{(1)}$ si calcola colla (468-*c*) cioè:

$$M^{(1)} = 10175 \times 12 - 24046 \times 2{,}4 -$$

$$\left\{1600\left(\frac{1}{2}\,12 + 10 + 8 + 6 + \frac{1}{2}\,4\right) + 800 \times \frac{1}{2}\,4^2\right\} = 6830 \text{ Kgm.}$$

Finalmente la (432-*a*) porge lo sforzo unitario massimo di compressione R_k dipendente dal carico mobile, ed è opportuno porla sotto la forma

$$R_k = -\left(\frac{N}{24300} + M\,\frac{300}{1305247500}\right)$$

e riferendosi al millimetro

$$R_k = -\,(0{,}0000411\ N + 0{,}000229\ M)$$

nella quale si deve porre M in chilogrammetri. Cioè:

$$R_k^{(1)} = -\,(0{,}0000411 \times 24029 + 0{,}000229 \times 6830) = -\,2{,}56\ \text{Kg.}$$

Analogamente si opera per le altre sezioni ed i risultati si raccolgono nella seguente tabella:

Tabella *C*.

Sezioni	Reazioni A	Reazioni S	Forza tang. N.	Momento inflettente M	Sforzo R_k
0	6400 Kg.	26809 Kg.	26809 Kg.	+ 3778 Kgm	— 1,96 Kg.
1	10175 »	24046 »	24029 »	+ 6830 »	— 2,56 »
2	9312 »	19477 »	19585 »	+ 10506 »	— 3,20 »
3	8714 »	16669 »	16955 »	+ 11214 »	— 3,26 »
4	9119 »	17417 »	18562 »	+ 7682 »	— 2,52 »
5	12000 »	35960 »	37783 »	0	— 1,55 »

Intradosso. — Costruita la *curva delle reazioni di imposta*, valendosi delle ordinate prima calcolate, **Fig. 533**, dagli estremi **A** e **B** dell'asse dell'arco si tirano delle rette che passino per il punto d'estradosso (che si prende come punto di nociuolo) di ciascheduna delle sezioni 0, 1, 2, 3, 4, 5 prolungandole fino ad incontrare la curva delle reazioni di imposta, ed omettendo di segnare quelle che non la incontrano. In tal modo si individuano le posizioni del carico mobile che dànno il massimo di compressione all'intradosso per le varie sezioni. Per mostrare come si valuta il valore dello sforzo dipendente dal carico mobile si considera la sezione **I**, per la quale il modo più sfavorevole di carico è rappresentato separatamente nella **Fig. 535**. Valendosi delle (456) (457) poste sotto la forma

$$A = 13{,}333\left\{30\,(v_{,,} - v_{,}) + (v_{,,}^2 - v_{,}^2)\right\}$$

$$\text{ed}\quad S = 0{,}001481\left\{(v_{,,}^5 - v_{,}^5) - 2250\,(v_{,,}^3 - v_{,}^3) + 1265625\,(v_{,,} - v_{,})\right\}$$

e ponendovi $v_{,} = -7$ e $v_{,,} = 1$ si calcolano le reazioni di imposta orizzontale e verticale dipendenti dalla porzione di carico che opera in modo

uniforme nella parte centrale a sinistra, e si ha $A = 2560$ ed $S = 13874$; mentre per la porzione di carico posto alla destra bisogna porre

$$v_{'} = 6{,}84 \qquad \text{e} \qquad v_{''} = 7$$

e si trova $A = 93$ ed $S = 226$. Le reazioni dei carichi trasmessi all'arco col mezzo dei montanti sono date dalla tabella (B) e quindi le reazioni totali sono

$$A = 587 + 1280 + 1387 + 1493 + 800 + 2560 + 93 + 213 + 320 + 213 + 107 = 9053$$

ed $$S = 2\,(1402 + 2226 + 1546 + 803) + 13874 + 226 = 26054$$

e quindi valendosi delle (468-a) (468-c) e della tabella (A) si determina il valore della forza tangenziale N e del momento inflettente, M cioè

$$N^{(1)} = 26054 \times 0{,}9977 +$$

$$+ \left\{9053 - (800 + 1600 + 1600 + 1600 + 800 + 800 \times 0{,}16)\right\} 0{,}0665 = 26162$$

ed $$M^{(1)} = 9053 \times 12 - 26054 \times 2{,}4 -$$

$$- \left\{1600 \left(\frac{1}{2}\,12 + 10 + 8 + 6 + \frac{1}{2}\,4\right) + 800 \times 0{,}16 \times 3{,}92\right\} = -5595\,\text{Kgm.}$$

Finalmente la (432-b) posta sotto la forma

$$R_k = -\,(0{,}0000411\,N - 0{,}000229\,M)$$

nella quale si deve porre M in chilogrammetri, serve a calcolare il valore dello sforzo dipendente dal carico mobile cioè:

$$R_k^{(1)} = -\,(0{,}0000411 \times 26162 - 0{,}000229 \times -5595) = -2{,}35\ \text{Kg.}$$

I risultati per le altre sezioni sono raccolti nella seguente tabella:

Tabella D.

Sezioni	Reazioni A	Reazioni S	Forza tang. N.	Momento inflettente M	Sforzo R_k
0	10680 Kg.	28882 Kg.	28882 Kg.	— 561 Kgm	— 1,32 Kg.
1	9053 »	26054 »	26162 »	— 5595 »	— 2,35 »
2	4392 »	23780 »	24151 »	— 10410 »	— 3,38 »
3	5333 »	26940 »	27460 »	— 11106 »	— 3,67 »
4	6453 »	29982 »	30637 »	— 7625 »	— 3,00 »
5	12000 »	35960 »	37783 »	0	— 1,55 »

Sforzi dipendenti dal carico permanente. — Il carico permanente in realtà non è uniformemente distribuito sulla corda dell'arco, ma si può con

sufficiente approssimazione ritenerlo per tale. Mediante le (460) si determinano le reazioni di imposta, cioè

$$A = 840 \times 15 = 12600 \qquad S = \frac{840 \times 15^2}{2 \times 2{,}5} = 37800$$

mentre è per ogni sezione $M = 0$, e quindi valendosi della (471-a), la quale si può porre sotto la forma

$$N = \frac{840}{2 \times 2{,}5}(15^2 \cos\varphi + 2 \times 2{,}5\, x \operatorname{sen}\varphi) = 168\,(225 \cos\varphi + 5\, x \operatorname{sen}\varphi)$$

si trovano i valori della forza tangenziale N, e mediante le (432) entrambe le quali si pongono sotto la forma

$$R_p = -\frac{N}{24300} = -0{,}0000411\ N$$

si deducono gli sforzi unitari R_p dipendenti dal carico permanente, comuni all'estradosso ed all'intradosso. Per la sezione **1**, per la quale è $x = 3$, si trova

$$N^{(1)} = 168\,(225 \times 0{,}9977 + 5 \times 3 \times 0{,}0665) = 37880$$

e quindi:

$$R_p^{(1)} = -0{,}0000411 \times 37880 = -1{,}56 \text{ Kg.}$$

I valori per le altre sezioni sono raccolti nella seguente tabella:

Tabella *E*.

Sezioni	0	1	2	3	4	5
Forza tang. N =	37800 Kg.	37880	38134	38545	39126	39845
Sforzo R_p =	— 1,55	— 1,56	— 1,57	— 1,59	— 1,61	— 1,64

Sforzi dipendenti da variazione di temperatura. — Supposto che la montatura del ponte sia fatta alla temperatura di + 15° Reaumur, per un aumento massimo di temperatura fino a + 40° e per una diminuzione massima fino a — 10° si ha una differenza massima in più ed in meno di $t^o = 25°$. Il coefficiente di dilatazione lineare del ferro è 0,00122 per una variazione di temperatura da 0° a 100° centigradi e quindi per 1° Reaumur è

$$\Theta = \frac{0{,}00122}{80} = 0{,}00001525$$

ed il massimo valore del cofficiente di elasticità riferendosi al millimetro è $E = 20000$ chilogrammi, mentre la freccia è $f = 2500$ millimetri.

Per aumento di temperatura l'arco si innalza al vertice, ed in questo caso la reazione all'imposta è una spinta che cospira dall'estremo verso il mezzo dell'arco ed origina per ciascheduna sezione una forza tangenziale di compressione (sforzo negativo) ed un momento inflettente che produce rotazione verso l'interno dell'arco e che porta compressione all'intradosso (sforzo negativo), e trazione all'estradosso (sforzo positivo); mentre per diminuzioni di temperatura l'arco si deprime ed in allora la reazione orizzontale S all'imposta è una forza di trazione che cospira dall'estremo dell'arco verso l'esterno, ed origina in ciascheduna sezione una forza tangenziale di trazione (sforzo positivo), ed un momento inflettente che produce una rotazione verso l'esterno dell'arco e che porta trazione all'intradosso (sforzo positivo) e compressione all'estradosso (sforzo negativo). Siccome poi la massima variazione in più è eguale a quella in meno, così si hanno rispettivamente per S, N ed M valori eguali, ma di natura contraria.

Lo sforzo dipendente da variazioni di temperatura si valuta perciò colle seguenti formule. Per l'estradosso

$$R_\theta^e = \mp \frac{N}{\Omega} \pm M \frac{d}{I} = \mp 0{,}0000411\ N \pm 0{,}000229\ M$$

e per l'intradosso

$$R_\theta^i = \mp \frac{N}{\Omega} \mp M \frac{d}{I} = \mp 0{,}0000411\ N \mp 0{,}000229\ M$$

nelle quali i segni superiori valgono per aumenti di temperatura, gli inferiori per diminuzioni, mentre per N ed M si devono porre i loro valori assoluti. Essendo l'arco di sezione costante la spinta S è data dalla (461) cioè:

$$S = \frac{15 \times 0{,}00001525 \times 25^0 \times 20000 \times 1305247500}{8 \times 2500^2} = 2986\ \text{Kg.}$$

Valendosi della tabella (*A*) e delle formule (472-*a*-*c*) si calcolano i valori di N ed M. Per la sezione I si ha

$$N^{(1)} = 2986 \times 0{,}9977 = 2979 \quad \text{ed} \quad M^{(1)} = 2986 \times 2{,}4 = 7166$$

per cui risulta

$$R_\theta^e = \mp 0{,}0000411 \times 2979 \pm 0{,}000229 \times 7166 = \pm 1{,}52\ \text{Kg.}$$

$$R_\theta^i = \mp 0{,}0000411 \times 2979 \mp 0{,}000229 \times 7166 = \mp 1{,}76\ \text{Kg.}$$

In analogo modo si opera per le altre sezioni ed i risultati sono raccolti nella seguente tabella:

Tabella *F*.

Sezioni	0	1	2	3	4	5
Forza tang. N =	2986	2979	2960	2928	2886	2833
Mom. infl. M =	7465	7166	6271	4778	2687	0
Sforzo R_θ^e =	$\pm$ 1,59	$\pm$ 1,52	$\pm$ 1,31	$\pm$ 0,97	$\pm$ 0,49	$\mp$ 0,12
Sforzo R_θ^i =	$\mp$ 1,83	$\mp$ 1,76	$\mp$ 1,55	$\mp$ 1,21	$\mp$ 0,73	$\mp$ 0,12

Sforzo complessivo. — Lo sforzo complessivo si ha nella somma dei parziali. Per la sezione I è all'*estradosso*

$$R^e = -2{,}56 - 1{,}56 \pm 1{,}52 = \left.\begin{matrix} -2{,}60 \\ -5{,}64 \end{matrix}\right\} \text{Kg. per mm}\square$$

ed all'*intradosso*

$$R^i = -2{,}35 - 1{,}56 \mp 1{,}76 = \left.\begin{matrix} -5{,}67 \\ -2{,}15 \end{matrix}\right\} \text{Kg. per mm}\square$$

valendo il risultato superiore per la temperatura di + 40° e l'inferiore per la temperatura di — 10°. Così operando per le altre sezioni si ottengono i risultati raccolti nella seguente tabella :

Sezioni	Sforzo R_k	Sforzo R_p	Totale alla temperatura di + 15°	Sforzo R_θ per aumento o diminuzione di 25°	Sforzo totale alla temperatura di + 40°	Sforzo totale alla temperatura di — 10°
0 estrad.	— 1,96	— 1,55	— 3,51	$\pm$ 1,59	— 1,92	— 5,10
0 intrad.	— 1,32	— 1,55	— 2,87	$\mp$ 1,83	— 4,70	— 1,04
1 estrad.	— 2,56	— 1,56	— 4,12	$\pm$ 1,52	— 2,60	— 5,64
1 intrad.	— 2,35	— 1,56	— 3,91	$\mp$ 1,76	— 5,67	— 2,15
2 estrad.	— 3,20	— 1,57	— 4,77	$\pm$ 1,31	— 3,46	— 6,08
2 intrad.	— 3,38	— 1,57	— 4,95	$\mp$ 1,55	— 6,50	— 3,40
3 estrad.	— 3,26	— 1,59	— 4,85	$\pm$ 0,97	— 3,88	— 5,82
3 intrad.	— 3,67	— 1,59	— 5,26	$\mp$ 1,21	— 6,47	— 4,05
4 estrad.	— 2,52	— 1,61	— 4,13	$\pm$ 0,49	— 3,64	— 4,62
4 intrad.	— 3,00	— 1,61	— 4,61	$\mp$ 0,73	— 5,34	— 3,88
5 estrad.	— 1,55	— 1,64	— 3,19	$\mp$ 0,12	— 3,31	— 3,07
5 intrad.	— 1,55	— 1,64	— 3,19	$\mp$ 0,12	— 3,31	— 3,07

Armature reticolari ad arco con tre cerniere.

320. Generalità. — Nelle armature con tre cerniere la direzione delle reazioni degli appoggi è vincolata, e quindi anche pienamente determinata. Infatti è facile vedere che per un peso P operante sulla mezza armatura di sinistra, **Fig. 540**, la reazione $\mathfrak{R}_B$ da esso originata sull'appoggio di destra deve passare per la cerniera di chiave **C**, mentre la reazione $\mathfrak{R}_A$ dell'appoggio di sinistra deve passare per il punto d'intersezione della $\mathfrak{R}_B$ colla direzione del peso P, inquantochè, dovendo esse equilibrare questo peso, la loro risultante deve essere una forza eguale e direttamente contraria al peso P. Per un peso operante sulla mezza armatura di destra è la reazione $\mathfrak{R}_A$ che deve passare per la cerniera di chiave **C**, mentre la $\mathfrak{R}_B$ deve passare per il punto di intersezione della $\mathfrak{R}_A$ col peso P. Ogni mezza armatura dunque è nelle condizioni di una travatura reticolare collocata su due appoggi, cioè la corrispondente cerniera di imposta e quella di chiave, le di cui reazioni sono pienamente determinate di posizione, e quindi si può applicare il *metodo dei momenti statici* alla valutazione delle tensioni che cimentano le varie sbarre componenti un'armatura.

α) **Altezza delle verticali.** — Siccome per carico uniformemente distribuito su tutta la corda, la curva parabolica rappresenta la linea d'equilibrio, così alla nervatura inferiore si assegna la forma di un poligono inscritto nella parabola che ha per corda e freccia rispettivamente la corda e la freccia stabilita per l'armatura.

L'altezza delle verticali si può esprimere con $h_n = m + z$ nella quale m indica l'altezza dell'armatura in chiave, **Fig. 541**, essendo $z = f - y$.

E per essere nell'arco parabolico $y = f\frac{c^2 - x^2}{c^2}$ sostituendo risulta $z = f\frac{x^2}{c^2}$ e quindi:

$$h_n = m + f\frac{x^2}{c^2} \qquad (501)$$

β) **Bracci di leva delle tensioni.** — I poli di riferimento dei momenti si stabiliscono nel modo seguente: per una sbarra **a b** della nervatura superiore, **Fig. 542**, si prende per polo il punto **d**

di incontro delle altre due sbarre **a d**, **c d** cointersecate dal piano di sezione **m n**: per una sbarra **c d** della nervatura inferiore si prende per polo il punto **a** d'incontro delle due sbarre **a b**, **a d** cointersecate: cioè a dire per le sbarre di contorno superiori i poli sono i rispettivi nodi di destra del contorno inferiore, e per le sbarre di contorno inferiori i poli sono i rispettivi nodi di sinistra del contorno superiore. Per la diagonale **a d** e la verticale **a c** si prende per polo il punto **o** di incontro delle due sbarre rispettivamente cointersecate dai piani di sezione **m n** ed **m' n'**; in questo caso la posizione del polo è individuata dalla distanza o_n di esso dal capo superiore **a** della diagonale, o verticale, che è data dalla seguente relazione

$$o_n = \frac{\lambda\, h_n}{h_n - h_{n+1}} \qquad (502)$$

nella quale h_n ed h_{n+1} indicano le altezze delle due verticali che comprendono il tratto parabolico sezionato e λ l'ampiezza dello scomparto.

I bracci di leva delle tensioni delle sbarre S_n I_n D_n e V_n chiamati rispettivamente s_n i_n d_n v_n sono dati dalle seguenti relazioni:

$$\left.\begin{aligned} s_n &= h_{n+1} \qquad i_n = \frac{o_n\, h}{\sqrt{h_n^2 + o_n^2}} \\ d_n &= \frac{o_n\, h_{n+1}}{\sqrt{\lambda^2 + h_{n+1}^2}} \qquad v_n = o_n \end{aligned}\right\} \qquad (503)$$

321. Reazioni sulla cerniera di chiave. — Per calcolare le tensioni bisogna prima determinare i corrispondenti valori delle reazioni degli appoggi, e basta limitarsi a quelle della cerniera di chiave, inquantochè per ogni sbarra, condotto il relativo piano di sezione, si prende in considerazione la porzione di armatura compresa fra la cerniera di chiave ed il piano medesimo.

Si consideri un peso P operante sulla mezza armatura di sinistra e posto alla distanza v dalla cerniera di chiave, Fig. 543. Esso origina una reazione sulla cerniera di chiave, che è diretta, rispetto alla mezza armatura di sinistra, nella direzione **B C**, e rispetto alla mezza armatura di destra, secondo la direzione **C B**. Si scomponga questa reazione nelle rispettive componenti verti-

cale V ed orizzontale O, e per ogni mezza armatura prendendo come polo la rispettiva cerniera di imposta si ha:

$$-V\,c - O\,f + P\,(c - v) = 0; \quad -V\,c + O\,f = 0$$

sommando e sottraendo le quali risulta rispettivamente

$$V = \frac{P\,(c - v)}{2\,c} \quad ; \quad O = \frac{P\,(c - v)}{2\,f} \tag{504}$$

confrontando le quali si trova:

$$O = \frac{c}{f}\,V \tag{505}$$

Un peso posto sulla mezza armatura di sinistra origina una reazione applicata alla medesima in corrispondenza alla cerniera di chiave, diretta dall'appoggio di destra verso la chiave cioè da **C** all'insù; mentre un peso posto sulla mezza armatura di destra origina una pressione rispetto alla mezza armatura di sinistra diretta dalla chiave verso l'appoggio di sinistra **A**, cioè da **C** all'ingiù, **Fig. 543-*c***. Scomposte queste due reazioni nelle loro componenti verticali ed orizzontali si scorge che le componenti verticali sono dirette in senso contrario e tendono ad annullarsi, mentre le componenti orizzontali sono dirette nello stesso senso, cioè si sommano. Due pesi eguali adunque posti simmetricamente rispetto alla cerniera di chiave producono sulla medesima una reazione verticale nulla, ed una reazione orizzontale eguale al doppio di quella prodotta da un solo peso. *Quando dunque i nodi di ambe le mezze armature sono simmetricamente caricati*, la reazione verticale sulla cerniera di chiave è nulla, mentre l'orizzontale ha per valore il doppio della somma delle reazioni parziali prodotte dai pesi che stanno sopra una sola mezza armatura, e cioè detti $P_1\ P_2 \ldots\ P_n$ questi pesi e $v_1\ v_2 \ldots\ v_n$ le loro distanze dalla chiave, è

$$V = 0;\ O = 2\,\frac{P_1\,(c - v_1) + P_2\,(c - v_2) + \ldots + P_n\,(c - v_n)}{2\,f} \tag{506}$$

e per pesi eguali, cioè $P_1 = P_2 = \ldots = P_n = P$ diventa

$$O = 2\,\frac{P\,\{(c - v_1) + (c - v_2) + \ldots + (c - v_n)\}}{2\,f} \tag{507}$$

Esempio.

Si supponga un ponte per ferrovia ad un binario avente le armature colla corda di 20^m e colla freccia di 2^m, **Fig. 544**. Ogni mezza armatura abbia l'altezza in chiave $m = 0{,}5$ e sia divisa in 5 eguali scomparti di ampiezza $\lambda = 2^m$. Mediante la (501) si calcolano le altezze dei montanti facendovi rispettivamente $x = 0, 2, 4, 6, 8, 10$ e si ottiene:

$$h_1 = 2{,}5 \quad h_2 = 1{,}78 \quad h_3 = 1{,}22 \quad h_4 = 0{,}82 \quad h_5 = 0{,}58 \quad h_6 = 0{,}5$$

Il carico permanente p per ogni metro corrente di armatura è dato dalla (426) cioè $p = 795 + 4{,}07 \times 20 = 876{,}40$ ed in cifra rotonda $p = 900$ Kg. Il carico accidentale per metro corrente di armatura si prende $k = 2000$ Kg. I nodi centrali portano quindi un carico

permanente $\quad P = p\,\lambda = 900 \times 2 = 1800$ Kg.

accidentale $\quad K = k\,\lambda = 2000 \times 2 = 4000$ Kg.

totale $\quad Q = P + K = 1800 + 4000 = 5800$ Kg.

mentre i nodi estremi, cioè quelli che corrispondono ai montanti di chiave e di imposta, portano pesi metà dei precedenti, ossia:

$$\frac{1}{2}P = 900 \quad , \quad \frac{1}{2}K = 2000 \quad , \quad \frac{1}{2}Q = 2900.$$

Il carico permanente che è simmetricamente distribuito rispetto alla cerniera di chiave produce ivi una reazione verticale $V = 0$ ed orizzontale O data dalla (507) ossia:

$$O = 2\,\frac{1800\left\{\frac{(10-10)}{2} + (10-8) + (10-6) + (10-4) + (10-2) + \frac{(10-0)}{2}\right\}}{2 \times 2} = 22500$$

In quanto al carico mobile, mediante le (504) si determinano le reazioni sulla cerniera di chiave, prodotte dai carichi che stanno su tutti i nodi delle due mezze armature. Per esempio il carico che sta sul nodo (3) di sinistra distante $v = 6^m$ dalla chiave dà, rispetto alla mezza armatura di sinistra

$$V = \frac{4000\,(10-6)}{2 \times 10} = 800 \qquad \text{ed} \qquad O = \frac{4000\,(10-6)}{2 \times 2} = 4000$$

mentre è facile vedere che il carico simmetrico che opera sul nodo (3) di destra produce sulla mezza armatura di sinistra in chiave le reazioni:

$$V = -800 \quad \text{ed} \quad O = 4000$$

In analogo modo si opera per i carichi che stanno sugli altri nodi ed i risultati si raccolgono nella seguente tabella.

Tabella *A*.

Pesi	Pesi K sull'armatura sinist. Reaz. V » »	Pesi K sull'armatura destra Reaz. V » sinist.	Pesi K su ambe le armature Reaz. O sull'armatura sinist.
1	0 Kg.	0 Kg. (*)	0 Kg.
2	400 »	— 400 »	2000 »
3	800 »	— 800 »	4000 »
4	1200 »	— 1200 »	6000 »
5	1600 »	— 1600 »	8000 »
6	1000 »	— 1000 »	5000 »

N B. Essendo $\frac{c}{f} = \frac{10}{2} = 5$, *si verifica l'esattezza dei calcolati valori colla relazione* (505) *cioè* $O = 5\ V$.

(*) *Il segno — indica che le reazioni verticali sulla mezza armatura di sinistra, prodotte dai pesi che operano sulla mezza armatura di destra, sono dirette in senso contrario di quelle prodotte dai pesi operanti sulla mezza armatura di sinistra, e cioè queste sono dirette dal basso all'alto, mentre le prime agiscono dall'alto verso il basso.*

322. Determinazione delle tensioni delle varie sbarre. — Essendo l'armatura cimentata dal carico permanente, che dà una tensione costante, e da quello mobile, che origina tensioni variabili col mutare della sua posizione, bisogna ricercare l'influenza dei due carichi, ed in ogni caso determinare le tensioni (*mas*) e (*min*) onde vedere quale è la più sfavorevole.

Chiamando in generale T la tensione di una qualunque sbarra e t il corrispondente braccio di leva, $\mathcal{R}$ la risultante di tutte le forze esterne applicate alla porzione di armatura considerata, comprese le reazioni di chiave, ed r il relativo braccio di leva, si ha la seguente espressione generale dell'equazione dei momenti statici

$$T t \pm \mathcal{R} r = 0$$

dalla quale si deduce:

1° Quando il momento della risultante $\mathcal{R}$ è nullo, quando cioè essa passa per il polo, la tensione T è pure nulla.

2° Quando la risultante $\mathfrak{R}$ dà un momento nello stesso senso di quello della tensione T, ossia di segno eguale, la tensione T è negativa, cioè rappresenta uno sforzo di *compressione*.

3° Quando la risultante $\mathfrak{R}$ dà un momento in senso contrario a quello della tensione T, ossia di segno opposto, la tensione T è positiva, cioè rappresenta uno sforzo di *trazione*,

Per la simmetria delle due mezze armature basta limitare i calcoli delle tensioni ad una sola di esse e nelle ricerche che seguono si considererà sempre la mezza armatura di sinistra, per esempio, quella rappresentata nella **Fig. 545**. Si prenderà come senso positivo della rotazione, ossia dei momenti, quello del movimento della sfera dell'orologio.

α) **Sbarre della nervatura superiore.** — Bisogna prima ricercare le posizioni del carico mobile che dànno le tensioni (*mas*) e (*min*). Si consideri una sbarra qualunque S_n, **Fig. 546**, per la quale si deve prendere come polo il punto **o**. Si tirino le rette **A o** e **B C** che prolungate si incontrano nel punto **i** e si immagini un peso P operante in corrispondenza di questo punto, e che produce una reazione $\mathfrak{R}_B$ sulla cerniera di chiave **C** diretta secondo **B i**, la quale reazione composta col peso P dà una risultante diretta secondo **i A**, che per la fatta costruzione passa per **o**, ed essendo questo punto il polo, essa dà un momento nullo, cioè il peso P non ha nessuna influenza sulla tensione della sbarra S_n. Qualunque peso posto a destra della verticale passante per **i** dà una risultante rispetto alla porzione di armatura compresa fra la cerniera **C** ed il piano **m n**, che passa al disotto del polo **o**, ed origina una rotazione positiva, mentre la tensione S_n origina invece una rotazione negativa, e quindi detta forza rende la tensione S_n positiva (trazione). Un peso posto a sinistra dell'anzidetta verticale opera in senso contrario, poichè produce una risultante che passa al di sopra del polo **o**, e quindi rende la tensione S_n negativa (compressione). Manifestamente dunque la verticale passante per **i**, individuata nel modo sopra indicato, rappresenta la linea di separazione dei carichi e divide cioè l'armatura in due parti, la destra delle quali deve essere caricata per avere la tensione $S_{n(mas)}$ e la sinistra per avere la tensione $S_{n(min)}$.

Si faccia applicazione alla sbarra S_3 dell'armatura considerata nell'esempio a pag. 711. Il relativo braccio s_3 dato dalla (503), è $s_3 = h_4 = 0{,}82$. Siccome le reazioni totali verticale ed orizzontale sulla cerniera di chiave, risultano

dalla somma delle reazioni parziali, e ricordando che il carico permanente produce una *reazione verticale* = 0 ed una *reazione orizzontale* = 22500, colla scorta della tabella A e delle **Fig. 547** e **548***a-b* si ha per la tensione (*min*)

$$V = 0 + 400 + 800 + 1200 + 1600 + 0 = 4000$$
$$O = 0 + 2000 + 4000 + 6000 + 8000 + 22500 = 42500$$

e per la tensione (*mas*)

$$V = (1000 - 1000) - (1600 + 1200 + 800 + 400 + 0) = -(4000)$$
$$O = 5000 + 5000 + 8000 + 6000 + 4000 + 2000 + 22500 + 0 = 52500$$

e quindi

$$-S_{3(min)} \times 0{,}82 - 42500 \times 0{,}32 - 4000 \times 4 + 1800\left(\frac{4}{2} + 2\right) + 4000 \times 2 = 0$$

$$S_{3(min)} = -17561$$

$$-S_{3(mas)} \times 0{,}82 - 52500 \times 0{,}32 + 4000 \times 4 + 1800\left(\frac{4}{2} + 2\right) + 2000 \times 4 = 0$$

$$S_{3(mas)} = +17561$$

Vedesi dai risultati della fatta applicazione che le due tensioni (*mas*) e (*min*) risultano fra di loro eguali, ma di segno contrario, per cui se fossero caricati tutti i nodi dell'armatura si avrebbe uno sforzo nullo; ne risultano quindi le seguenti norme:

1° Per carico completo, uniformemente distribuito sui nodi, le sbarre orizzontali non sono influenzate, ed il carico viene trasmesso all'arcone direttamente dai montanti, per cui ne consegue che nemmeno le diagonali sono influenzate dal carico completo. *Il carico permanente dunque, essendo distribuito equabilmente su tutti i nodi dell'armatura, non ha nessuna influenza sulle tensioni delle sbarre orizzontali e diagonali, e quindi si tralascia di tenerne conto.*

2° *Essendo fra loro eguali le due tensioni (mas) e (min) per le sbarre orizzontali e diagonali, basta calcolare un solo valore, e questo col segno invertito rappresenta anche l'altro.*

Applicando queste norme, il valore delle tensioni (*mas*) e (*min*) della sbarra S_3 si può ottenere speditamente nel modo seguente. Si determini la tensione (*min*). Le reazioni corrispondenti, verticale ed orizzontale della cerniera di chiave sono:

$$V = 0 + 400 + 800 + 1200 + 1600 = 4000$$
$$O = 0 + 2000 + 4000 + 6000 + 8000 = 20000$$

e quindi (**Fig. 548** *c*).

$$-S_3 \times 0{,}82 - 20000 \times 0{,}32 - 4000 \times 4 + 4000 \times 2 = 0$$

$$S_3 \begin{cases} (mas) = +17561 \\ (min) = -17561 \end{cases}$$

In analogo modo si procede per le altre tensioni S.

β) **Sbarre della nervatura inferiore.** — Si comincia dal determinare le posizioni del carico mobile che dànno le tensioni (*mas*) e (*min*). Si consideri una sbarra qualunque I_n, **Fig. 549**, per la quale si deve prendere per polo il punto **o**. Si tirino le rette **A o** e **B C** prolungandole finchè si incontrano in **i** e si supponga che un peso P operi in corrispondenza a detto punto. La reazione $\mathfrak{R}_B$ prodotta dal peso P sulla cerniera di chiave è diretta secondo **B C**, e componendola col peso P si ha una risultante che deve essere diretta secondo **i A**, e che per la fatta costruzione passa per il polo **o**, per cui essa dà un momento nullo, cioè il considerato peso non ha nessuna influenza sul valore delle tensioni della sbarra I_n. È facile vedere che qualunque peso posto alla destra di **i** produce una risultante che passa al disotto di **o** e che origina quindi una rotazione positiva, mentre la tensione I_n dà egualmente una rotazione positiva, e quindi detta forza rende I_n negativa (compressione). Il contrario succede per un peso qualunque posto alla sinistra di **i**, esso rende cioè I_n positiva (trazione). La verticale passante per **i** individuata nel modo indicato, rappresenta dunque la linea di separazione dei carichi, e cioè caricando tutti i nodi che stanno a destra della medesima si ottiene la tensione (*min*), e caricando quelli che stanno a sinistra si ottiene la tensione (*mas*).

Si faccia applicazione alla sbarra I_3 dell'armatura considerata nell'esempio a pag. 711 di cui la distanza o_3 ed il braccio i_3 sono dati dalle (502) e (503) cioè:

$$o_3 = \frac{2 \times 1{,}22}{1{,}22 - 0{,}82} = 6{,}1 \qquad i_3 = \frac{6{,}1 \times 1{,}22}{\sqrt{1{,}22^2 + 6{,}1^2}} = 1{,}2.$$

Determinata la linea di separazione dei carichi, **Fig. 550**, si valutano le reazioni sulla cerniera di chiave col mezzo della tabella *A* e ricordando che il carico permanente produce una reazione verticale $= 0$, ed una orizzontale $= 22500$, si ha
per la tensione (*mas*)

$V = 0 + 400 + 800 + 0 = 1200 \qquad O = 0 + 2000 + 4000 + 22500 = 28500$

per la tensione (*min*)

$$V = (1200 + 1600 + 1000 - 1000 - 1600 - 1200) - (800 + 400 + 0) = -1200$$

$$O = 6000 + 8000 + 5000 + 5000 + 8000 + 6000 + 4000 + 2000 + 0 + 22500 = 66500$$

e colla scorta delle **Fig. 551**-*a-b*, si trova

$$I_{3(mas)} \times 1{,}20 + 28500 \times 0{,}5 - 1200 \times 6 + 1800 \left(\frac{6}{2} + 4 + 2\right) = 0$$

$$I_{3(mas)} = + 19375$$

$$I_{3(min)} \times 1{,}2 + 66500 \times 0{,}5 + 1200 \times 6 + (4000 + 1800) \left(\frac{6}{2} + 4 + 2\right) = 0$$

$$I_{3(min)} = - 77208$$

Nell'ipotesi che l'armatura sia tutta carica risulta dalla tabella *A*.

$$V = 0 \text{ ed } O = 2(0 + 2000 + 4000 + 6000 + 8000 + 5000) + 22500 = 72500$$

$$I_3 \times 1{,}2 + 72500 \times 0{,}5 + 5800 \left(\frac{6}{2} + 4 + 2\right) = 0 \qquad I_3 = - 73703$$

Tenendo ora conto della sola azione del carico accidentale, in tutte tre le ipotesi antecedenti, deve risultare la tensione per carico completo eguale alla differenza fra la tensione (*min*) e la (*mas*). Infatti si ha:

$$I_{3(mas)} \times 1{,}2 + 6000 \times 0{,}5 - 1200 \times 6 = 0 \qquad I_{3(mas)} = + 3500$$

$$I_{3(min)} \times 1{,}2 + 44000 \times 0{,}5 + 1200 \times 6 + 4000 \left(\frac{6}{2} + 4 + 2\right) = 0 \qquad I_{3(min)} = - 54333$$

$$I_3 \times 1{,}2 + 50000 \times 0{,}5 + 4000 \left(\frac{6}{2} + 4 + 2\right) = 0 \qquad I_3 = - 50833$$

Dall'esame dell'ultima equazione si vede che la tensione I_3 dovuta al solo carico mobile, ma *completo*, è sempre negativa, inquantochè variano i valori numerici per le varie sbarre, ma i segni restano sempre gli stessi. Essendo dunque la differenza fra la tensione (*min*) e (*mas*), dipendenti dal solo carico accidentale, sempre negativa, vuol dire che la tensione (*min*) è sempre maggiore della tensione (*mas*), cioè il carico mobile produce sempre la tensione (*min*) *negativa* maggiore della (*mas*) *positiva*, mentre il carico permanente per essere completo dà sempre tensione negativa. Conseguentemente la tensione totale (*min*) è sempre maggiore della tensione totale (*mas*), e quindi è inutile di calcolare quest'ultima.

Osservazione. — Può avvenire che l'ultima diagonale cada nella stessa direzione **B C** della reazione $\mathcal{R}_B$ e passi quindi per il polo **o** relativo all'ultima porzione dell'arco, **Fig. 552**. In questo caso qualunque peso posto alla sinistra di **o** produce una reazione diretta secondo **B C** passante per il polo, che dà quindi

un momento nullo, vale a dire tutti i carichi alla sinistra di **o** non esercitano alcuna influenza sul valore della tensione dell'ultimo pezzo. Però si ha ancora la tensione (*mas*) e (*min*) e cioè la tensione (*mas*) la si ottiene supponendo tutti i nodi posti alla destra del piano **m n** caricati del solo peso permanente, e la (*min*) supponendoli caricati del peso permanente e del carico mobile.

γ) **Sbarre diagonali.** — Si è già veduto in α) che un carico completo non ha nessuna influenza sul valore delle tensioni delle diagonali, e quindi che i due valori (*mas*) e (*min*) per un carico mobile, sono eguali fra di loro e di segno contrario. Perciò essendo il carico permanente un carico completo, si trascura di tenerne conto nei calcoli, e basta ricercare il valore della sola tensione (*mas*) accidentale, perchè cambiato di segno rappresenta anche quello della tensione (*min*). Determinata la posizione del polo per la diagonale che si considera, onde stabilire le posizioni del carico mobile che dànno la tensione (*mas*) o (*min*) bisogna distinguere tre casi.

1° *Il polo cade a sinistra della reazione* $\mathfrak{R}_B$ *passante per la chiave.* La diagonale D_n abbia il polo **o** posto a sinistra della direzione **B C, Fig. 553.** Prolungate le rette **A o** e **B C** fino ad incontrarsi in **i**, si supponga che un peso P operi lungo la verticale passante per **i**. Questo peso produce sulla porzione di armatura **C m n** una risultante diretta secondo **i A**, che passa per il polo **o** e quindi ha un momento nullo, cioè il detto peso non ha nessuna influenza sul valore della tensione D_n. Qualunque peso posto alla destra di **i** produce sulla porzione **C m n** una risultante che passa al disotto di **o** e quindi dà una rotazione positiva, mentre la tensione D_n dà pure una rotazione positiva, in conseguenza detto peso rende negativa la tensione D_n. Qualunque peso posto alla sinistra di **i** opera in senso contrario, cioè rende positiva la tensione D_n, e quindi la verticale passante per **i** è la linea di separazione dei carichi, e cioè si devono caricare tutti i nodi posti alla destra di **i** per avere la tensione (*min*) e tutti quelli a sinistra per avere la tensione (*mas*).

Si faccia applicazione alla diagonale D_1 dell'armatura considerata nell'esempio a pag. 711 di cui la distanza o_1 ed il braccio d_1 sono dati dalle (502) (503) cioè :

$$o_1 = \frac{2 \times 2{,}5}{2{,}5 - 1{,}78} = 7 \quad , \quad d_1 = \frac{7 \times 1{,}78}{\sqrt{2^2 + 1{,}78^2}} = 4{,}66$$

Il polo **o** cadendo a 7^{m} dal capo della diagonale D_1 si trova alla sinistra della direzione **B C**, **Fig. 554**. Individuata la linea di separazione, si calcoli la tensione (*mas*), e perciò si devono supporre carichi i nodi che stanno alla sinistra. Valendosi della tabella *A* si calcolano le reazioni della cerniera di chiave

$$V = 0 + 400 + 800 + 1200 = 2400 \quad , \quad O = 0 + 2000 + 4000 + 6000 = 12000$$

$$D_1 \times 4{,}66 + 12000 \times 0{,}5 - 2400 \times 3 - 4000\,(5 + 3 + 1) = 0 \qquad D_1 \begin{cases} (mas) = + 7983 \\ (min) = - 7983 \end{cases}$$

2° *Il polo cade fra le reazioni* $\mathcal{R}_B$ *ed* $\mathcal{R}_A$ *passanti per la chiave*. La diagonale D_n abbia il polo **o** posto fra le rette **A C** e **B C**, **Fig. 555**. Condotta la **A o** si immagini che un peso P operi lungo la verticale che passa per il punto **i** di incontro di **A o** con **B C**. Questo peso produce sulla porzione **C m n** di armatura una risultante diretta secondo **i A**, e che dà quindi un momento nullo rispetto al polo **o**. Qualunque peso operante alla destra del punto **i**, origina sulla porzione **C m n** una risultante che passa al disotto di **o**, che produce quindi una rotazione positiva, e che rende negativa la tensione D_n, perchè D_n produce rotazione positiva. Qualunque peso posto fra il punto **i** ed il piano di sezione **m n** produce una forza, che è la risultante della reazione $\mathcal{R}_B$ col detto peso, operante verso **A** e la cui direzione passa al disopra del polo **o**, e quindi dà rotazione negativa per cui rende la tensione D_n positiva, ma qualunque peso posto alla sinistra del piano **m n** produce sulla porzione **C m n** una forza che è la stessa reazione $\mathcal{R}_A$ la quale passa al disotto del polo **o**, e quindi originando rotazione positiva, rende negativa la tensione D_n. In questo caso adunque si devono considerare due linee di separazione del carico mobile una passante per il punto **i** di incontro di **A o** con **B C**, e l'altra data dallo stesso piano segante **m n**. Caricando tutti i nodi interposti fra queste linee si ha la tensione (*mas*) caricando tutti i nodi posti esternamente a dette linee si ha la tensione (*min*).

Si faccia applicazione alla diagonale D_3, dell'armatura considerata nell'esempio a pag. 711 il cui braccio d_3 è dato dalla (503) ponendovi il valore di $o_3 = 6{,}1$ calcolato in β), cioè:

$$d_3 = \frac{6{,}1 \times 0{,}82}{\sqrt{2^2 + 0{,}82^2}} = 2{,}31$$

Il polo distando 6,1 dal capo della diagonale D_3, cade fra le direzioni **A C** e **B C**, e le linee di separazione dei carichi si vedono nella **Fig. 556**. Si calcoli

il valore della tensione (*mas*) e perciò si determinino le reazioni della cerniera di chiave mediante la tabella *A*. Si ha

$$V = 1200 + 1600 = 2800 \quad , \quad O = 6000 + 8000 = 14000$$

per cui risulta:

$$D_3 \times 2{,}31 + 14000 \times 0{,}5 + 2800 \times 0{,}1 - 4000\,(4{,}1 + 2{,}1) = 0$$

$$D_3 \begin{cases} (mas) = + 7585 \\ (min) = - 7585 \end{cases}$$

3° *Il polo cade a destra della reazione* $\mathfrak{R}_A$ *passante per la chiave.* La diagonale D_n abbia il polo **o** a destra della direzione **A C**, **Fig. 557**. Qualunque peso posto fra la chiave **C** ed il piano **m n** e qualunque peso posto sulla mezza armatura di destra, produce una risultante, sulla porzione di armatura **C m n**, diretta in senso contrario alla reazione $\mathfrak{R}_A$ e la cui direzione passa al disopra del polo **o**, per cui dà rotazione negativa e rende positiva la tensione D_n poichè questa dà rotazione positiva. Qualunque peso posto alla sinistra del piano **m n** produce sulla porzione **C m n** una risultante che cospira da **B** verso **C** e passa al disotto del polo **o** per cui dà una rotazione positiva, rendendo quindi negativa la tensione D_n. Il piano **m n** dunque rappresenta la linea di separazione del carico mobile e cioè bisogna caricare tutti i nodi alla destra del medesimo per avere la tensione (*mas*) e tutti quelli alla sinistra per avere la tensione (*min*).

Si faccia applicazione alla diagonale D_4, dell'armatura considerata nell'esempio a pag. 710 di cui la distanza o_4 ed il braccio d_4 sono dati dalle (502) (503) cioè:

$$o_4 = \frac{2 \times 0{,}82}{0{,}82 - 0{,}58} = 6{,}83 \quad ; \quad d_4 = \frac{6{,}83 \times 0{,}58}{\sqrt{2^2 + 0{,}58^2}} = 1.9$$

Distando il polo $6^m 83$ dal capo della diagonale D_4 esso cade a destra della reazione $\mathfrak{R}_A$, **Fig. 558**. Preso il piano segante come linea di separazione dei carichi si calcoli la tensione (*min*) valutando prima le reazioni della cerniera di chiave mediante la tabella *A*, cioè:

$$V = 0 + 400 + 800 + 1200 = 2400 \quad , \quad O = 0 + 2000 + 4000 + 6000 = 12000$$

e si ottiene:

$$D_4 \times 1{,}9 + 12000 \times 0{,}5 + 2400 \times 2{,}83 = 0 \qquad D_4 \begin{cases} (mas) = + 6627 \\ (min) = - 6627 \end{cases}$$

δ) **Sbarre verticali.** — Si è veduto in α) che il carico permanente non produce nessuna azione sulle sbarre orizzontali e dia-

gonali e quindi esso viene sopportato per intero dall'arco, che riceve il peso dell'impalcato mediante i montanti. Supponendo per semplicità che metà del carico permanente P di ogni nodo sia applicato direttamente all'arcone (*peso proprio e controventi*) e metà all'estremo superiore del relativo montante (*peso dell'impalcato*) vedesi che ogni montante è soggetto ad una tensione negativa (compressione) costante di valore $^1/_2$ P dipendente dal carico permanente. In quanto al carico mobile siccome le tensioni delle verticali dànno una rotazione in senso contrario delle diagonali, cioè sempre negativa, mentre hanno lo stesso polo delle diagonali, è facile dedurne che per determinare le posizioni del carico mobile che dànno le tensioni (*mas*) e (*min*) valgono le stesse norme date in γ) — 1°, 2°, 3°, avvertendo però che per le verticali si devono fare le ipotesi inverse delle diagonali, e che la linea di separazione dei carichi individuata dal piano di sezione viene spostata verso l'imposta di uno scomparto, **Fig. 559.** Nella somma delle tensioni parziali si hanno le tensioni totali (*mas*) e (*min*). Chiamando $\mathfrak{V}_n$ la tensione dipendente dal solo carico mobile, la tensione totale è :

$$V_n = \mathfrak{V}_n - \frac{P}{2} \qquad (508)$$

Se si suppongono caricati tutti i nodi dell'armatura dal carico mobile, siccome per carico completo il peso K di ogni nodo viene portato direttamente dal relativo montante, ne consegue che la tensione di ogni montante deve essere negativa ed eguale a (— K) e quindi sommando algebricamente le rispettive tensioni (*mas*) e (*min*) deve risultare — K. Si ha dunque

$$\mathfrak{V}_{n(mas)} + \mathfrak{V}_{n(min)} = - K$$

da cui

$$\mathfrak{V}_{n(mas)} = - \mathfrak{V}_{n(min)} - K \qquad (509)$$

cioè basta calcolare la tensione (*mas*) e colla (509) dedurre la tensione (*min*) o viceversa.

Si faccia applicazione all'armatura considerata nell'esempio a pag. 711.

1° *Il polo cade a sinistra della reazione* $\mathfrak{R}_B$ *passante per la chiave.* Questo avviene per la verticale V_1 il cui braccio è dato dalla (503) cioè $v_1 = o_1 = 7$, e la **Fig. 560** mostra la linea di separazione dei carichi. Si

calcoli la tensione (*min*) e perciò si valutino le reazioni della cerniera di chiave mediante la tabella *A*, cioè:

$$V = 0 + 400 + 800 + 1200 = 2400$$
$$O = 0 + 2000 + 4000 + 6000 = 12000$$

e si ottiene la tensione parziale dovuta al carico mobile

$$-\mathfrak{V}_{1(min)} \times 7 + 12000 \times 0{,}5 - 2400 \times 3 - 4000\left(\frac{7}{2} + 5 + 3 + 1\right) = 0$$

$$\mathfrak{V}_{1(min)} = -7314$$

e mediante la (509) si trova

$$\mathfrak{V}_{1(mas)} = -(-7314) - 4000 \qquad \mathfrak{V}_{1(mas)} = +3314$$

La (508) porge le tensioni totali cioè:

$$V_{1(mas)} = 3314 - \frac{1}{2}900 = +2864$$

$$V_{1(min)} = -7314 - \frac{1}{2}900 = -7764$$

2° *Il polo cade fra le reazioni* $\mathfrak{R}_B$ *ed* $\mathfrak{R}_A$ *passanti per la chiave.* Tale condizione si verifica per la verticale V_3 il cui braccio è $v_3 = o_3 = 6{,}1$ e la **Fig. 561** mostra le linee di separazione dei carichi. Si calcoli la tensione (*min*) determinando prima le reazioni della cerniera di chiave cioè

$$V = 800 + 1200 + 1600 = 3600 \quad , \quad O = 4000 + 6000 + 8000 = 18000$$

e risulta

$$-\mathfrak{V}_{3(min)} \times 6{,}1 + 18000 \times 0{,}5 + 3600 \times 0{,}1 - 4000\,(6{,}1 + 4{,}1 + 2{,}1) = 0$$

$$\mathfrak{V}_{3(min)} = -6531$$

e quindi

$$\mathfrak{V}_{3(mas)} = -(-6531) - 4000 \qquad \mathfrak{V}_{3(mas)} = +2531$$

e le tensioni totali diventano:

$$V_{3(mas)} = 2531 - 900 = +1631 \quad ; \quad V_{3(min)} = -6531 - 900 = -7431$$

3° *Il polo cade a destra della reazione* $\mathfrak{R}_B$ *passante per la chiave.* Ciò si verifica per la verticale V_4, il cui braccio è $v_4 = o_4 = 6{,}83$, e la **Fig. 562** mostra la linea di separazione dei carichi. Si calcoli la tensione (*mas*) determinando le reazioni della cerniera di chiave, cioè

$$V = 0 + 400 + 800 = 1200 \quad ; \quad O = 0 + 2000 + 4000 = 6000$$

$$-\mathfrak{V}_{4(mas)} \times 6{,}83 + 6000 \times 0{,}5 + 1200 \times 2{,}83 = 0 \qquad \mathfrak{V}_{4(mas)} = +936$$

e quindi

$$\mathfrak{V}_{4(min)} = -(936) - 4000 = -4936$$

e le tensioni totali sono:

$$V_{4(mas)} = 936 - 900 = 36 \quad ; \quad V_{4(min)} = -4936 - 900 = -5830$$

La verticale V_6 corrispondente alla cerniera di chiave, non essendo collegata a veruna diagonale viene cimentata soltanto dai carichi che agiscono direttamente sulla stessa, i quali producono sforzi di compressione e cioè il permanente che dà la tensione

$$V_{6(mas)} = -\frac{1}{4} P = -\frac{1}{4} 1800 = -450$$

ed il carico complessivo che dà la tensione:

$$V_{6(min)} = -\left(\frac{1}{4} P + \frac{1}{2} K\right) = -\left(\frac{1}{4} 1800 + \frac{1}{2} 4000\right) = -2450.$$

Nelle **Fig. 563, 564, 565, 566** sono poste in evidenza le linee separatrici dei carichi per le varie sbarre.

Esempio

Ponte con armature reticolari a tre cerniere.

Si prenda la corda $2c = 32$ *metri*, *la freccia* $f = 3$ *metri, cioè circa* $^1/_{10}$ *della corda, mentre si assume l'altezza delle armature in chiave ossia del relativo montante* $m = 0,8$. *Supponendo* 5 *scomparti per ogni mezza armatura risulta* $\lambda = 3,20$ *metri. Il ponte sia per ferrovia ad un binario, ed ogni arcata sia costituita da due arconi.*

Mediante la (501) $h_n = m + f\frac{x^2}{c^2}$, che si pone sotto la forma

$$h_n = 0,8 + \frac{3}{16^2} x^2 = 0,8 + 0,0117\, x^2$$

ed assumendo

$$x = 16 \; ; \; 12,8 \; ; \; 9,6 \; ; \; 6,4 \; ; \; 3,2 \; , \; 0$$

si ottiene

$$h_1 = 3,8 \; , \; h_2 = 2,72 \; , \; h_3 = 1,88 \; , \; h_4 = 1,28 \; , \; h_5 = 0,92 \; , \; h_6 = 0,8$$

Il *peso permanente* p per ogni metro corrente di armatura è dato dalla (426) $p = 795 + 4,07 \times 32 = 925$ Kg.

Il *carico accidentale* si può assumere mediamente $k = 2000$ Kg. per metro corrente di armatura.

I nodi intermedi portano quindi un carico permanente

$$P = 925 \times 3,2 = 2960 \text{ Kg.}$$

un carico accidentale

$$K = 2000 \times 3,2 = 6400 \text{ Kg.}$$

ed un carico totale

$$Q = P + K = 2960 + 6400 = 9360 \text{ Kg.}$$

mentre i nodi estremi, cioè quelli che corrispondono ai montanti di chiave e di imposta portano carichi metà dei precedenti, ossia:

$$\frac{1}{2}\,P = 1480 \quad , \quad \frac{1}{2}\,K = 3200 \quad , \quad \frac{1}{2}\,Q = 4680$$

NB. Si prende in considerazione la mezza armatura di sinistra e per il calcolo delle tensioni delle varie sbarre si considera sempre la porzione di armatura, che sta alla destra del rispettivo piano di sezione, **Fig. 567.**

Il carico permanente per essere simmetricamente distribuito rispetto alla cerniera di chiave vi produce una reazione verticale $V_p = 0$ ed una orizzontale data dalla (507)

$$O_p = 2\,\frac{P\left\{(c - v_1) + (c - v_2) + \ldots\ldots + (c - v_n)\right\}}{2f}$$

cioè:

$$O_p = 2\,\frac{2960\left\{\frac{1}{2}(16 - 16) + (16 - 12{,}8) + (16 - 9{,}6) + (16 - 6{,}4) + (16 - 3{,}2) + \frac{1}{2}(16 - 0)\right\}}{2 \times 3} = 39467 \text{ Kg.}$$

Le reazioni verticali ed orizzontali prodotte sulla cerniera di chiave, rispetto alla mezza armatura di sinistra, dai carichi accidentali che stanno sui nodi di ambedue le mezze armature sono date dalle (504)

$$V = \frac{K\,(c - v)}{2\,c} \quad , \quad O = \frac{K\,(c - v)}{2f}$$

ricordando che due carichi posti simmetricamente rispetto alla chiave producono due reazioni orizzontali eguali e positive, due reazioni verticali eguali, ma di segno contrario, cioè positiva quella dipendente dal carico che sta sulla mezza armatura di sinistra e che cospira all'insù, e negativa quella dipendente dal carico che sta sulla mezza armatura di destra, e che cospira all'ingiù; si ricorda inoltre la relazione (505)

$$O = \frac{c}{f}\,V$$

cioè

$$O = \frac{16}{3}\,V = 5{,}3333\,V$$

per cui basta calcolare le sole reazioni V prodotte dai carichi che stanno sulla mezza armatura di sinistra e da queste si decucono speditamente le reazioni O nonchè quelle prodotte dai carichi simmetrici posti sulla mezza armatura di destra. Tali reazioni sono raccolte nella tabella *A*.

Tabella *A*.

Nodi	Reazioni V per i pesi sull'armatura sinistra	Reazioni V per i pesi sull' armatura destra	Reazioni O per i pesi su ambe le armature
1	0 Kg.	0 Kg.	0 Kg.
2	640 »	— 640 »	3414 »
3	1280 »	— 1280 »	6826 »
4	1920 »	— 1920 »	10240 »
5	2560 »	— 2560 »	13654 »
6	1600 »	— 1600 »	8534 »
	8000 Kg.	— 8000 Kg.	42668 Kg.

α) Sbarre della nervatura superiore. — Nella **Fig. 568**, sono poste in evidenza le posizioni del carico mobile che dànno le tensioni (*mas*) e (*min*). Il carico permanente, operando continuamente su tutti i nodi, non ha alcuna influenza sulla tensione delle sbarre orizzontali, così si tralascia di tenerne conto, e siccome le tensioni (*mas*) e (*min*) sono eguali in valore numerico, basta calcolarne una sola, e precisamente la tensione (*mas*), come quella che si ottiene più speditamente.

Si comincia dal formare i valori V ed O delle reazioni sulla cerniera di chiave, rispettivamente per le varie sbarre.

(S_1) $V = 0 + 640 + 1280 + 1920 = 3840$
(S_2) $V = 0 + 640 + 1280 + 1920 = 3840$
(S_3) $V = 0 + 640 + 1280 + 1920 + 2560 = 6400$
(S_4) $V = 0 + 640 + 1280 + 1920 + 2560 = 6400$
(S_5) $V = 8000$ (carico completo)

(S_1) $O = 0 + 3414 + 6826 + 10240 = 20480$
(S_2) $O = 0 + 3414 + 6826 + 10240 = 20480$
(S_3) $O = 0 + 3414 + 6826 + 10240 + 13654 = 34134$
(S_4) $O = 0 + 3414 + 6826 + 10240 + 13654 = 34134$
(S_5) $O = 42668$ (carico completo)

I bracci di leva s_n sono dati dalla (503) $s_n = h_{n+1}$ cioè:

$$s_1 = 2{,}72 \quad , \quad s_2 = 1{,}88 \quad , \quad s_3 = 1{,}28 \quad , \quad s_4 = 0{,}92 \quad , \quad s_5 = 0{,}80$$

Mediante le equazioni dei momenti statici si ottiene

$-S_1 \times 2{,}72 - 3840\,(4 \times 3{,}2) - 20480\,(2{,}72 - 0{,}8) + 6400\,(1 + 2)\,3{,}2 = 0 \quad S_1 = \pm 9938$
$-S_2 \times 1{,}88 - 3840\,(3 \times 3{,}2) - 20480\,(1{,}88 - 0{,}8) + 6400\,(1)\,3{,}2 = 0 \quad . \quad S_2 = \pm 20480$
$-S_3 \times 1{,}28 - 6400\,(2 \times 3{,}2) - 34134\,(1{,}28 - 0{,}8) + 6400\,(1)\,3{,}2 = 0 \quad . \quad S_3 = \pm 28800$
$-S_4 \times 0{,}92 - 6400\,(3{,}2) - 34134\,(0{,}92 - 0{,}8) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad S_4 = \pm 25670$
$-S_5 \times 0{,}8 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .

α) Sbarre della nervatura inferiore. — Nella **Fig. 568** sono poste in evidenza le posizioni del carico mobile che dànno le tensioni (*mas*) e (*min*), basta però calcolare le sole tensioni (*min*) perchè le (*mas*) sono sempre di molto inferiori.

Valendosi della tabella *A* si calcolano i valori delle reazioni verticali ed orizzontali sulla cerniera di chiave rispettivamente per le varie sbarre e per la tensione (*min*), ricordando che il peso permanente produce una reazione verticale costante $V_p = 0$ ed una reazione orizzontale costante $O_p = 39467$ Kg.

(I_1) $V = 0$
(I_2) $V = -8000 + 1600 + 2560 + 1920 + 1280 = -640$
(I_3) $V = -8000 + 1600 + 2560 + 1920 = -1920$
(I_4) $V = -8000 + 1600 + 2560 = -3840$
(I_5) $V = -8000 + 1600 + 2560 = -3840$

(I_1) $O = 39467 + 2 \times 42668 = 124803$
(I_2) $O = 39467 + 42668 + 8534 + 13654 + 10240 + 6826 = 121389$
(I_3) $O = 39467 + 42668 + 8534 + 13654 + 10240 = 114563$
(I_4) $O = 39467 + 42668 + 8534 + 13654 = 104323$
(I_5) $O = 39467 + 42668 + 8534 + 13654 = 104323$

I bracci di leva i_n sono dati dalla (503)

$$i_n = \frac{\lambda\, h_n}{\sqrt{\{(h_n - h_{n+1})^2 + \lambda^2\}}}$$

applicando la quale si trova

$$i_1 = \frac{3{,}2 \times 3{,}8}{\sqrt{\{(3{,}8 - 2{,}72)^2 + 3{,}2^2\}}} = 3{,}6$$

$$i_2 = \frac{3{,}2 \times 2{,}72}{\sqrt{\{(2{,}72 - 1{,}88)^2 + 3{,}2^2\}}} = 2{,}63$$

$$i_3 = \frac{3{,}2 \times 1{,}88}{\sqrt{\{(1{,}88 - 1{,}28)^2 + 3{,}2^2\}}} = 1{,}85$$

$$i_4 = \frac{3{,}2 \times 1{,}28}{\sqrt{\{(1{,}28 - 0{,}92)^2 + 3{,}2^2\}}} = 1{,}27$$

$$i_5 = \frac{3{,}2 \times 0{,}92}{\sqrt{\{(0{,}92 - 0{,}8)^2 + 3{,}2^2\}}} = 0{,}92$$

Mediante le equazioni dei momenti statici e colla scorta della **Fig. 568** si ottiene:

(*min*)

$$I_1 \times 3{,}6 + 124803 \times 0{,}8 + (2960 + 6400)\left(\frac{5}{2} + 4 + 3 + 2 + 1\right)3{,}2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad I_1 = -131734$$

$$I_2 \times 2{,}63 + 121389 \times 0{,}8 + 640\,(4 \times 3{,}2) + (2960 + 6400)\left(\frac{4}{2} + 3 + 2 + 1\right)3{,}2 = 0 \quad I_2 = -131141$$

$$I_3 \times 1{,}85 + 114563 \times 0{,}8 + 1920\,(3 \times 3{,}2) + (2960 + 6400)\left(\frac{3}{2} + 2 + 1\right)3{,}20 = 0 \quad I_3 = -132360$$

$$I_4 \times 1{,}27 + 104323 \times 0{,}8 + 3840\,(2 \times 3{,}2) + (2960 + 6400)\left(\frac{2}{2} + 1\right)3{,}20 = 0 \quad I_4 = -132235$$

$$I_5 \times 0{,}92 + 104323 \times 0{,}8 + 3840\,(3{,}2) + (2960 + 6400)\left(\frac{1}{2}\right)3{,}2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad I_5 = -120350$$

β) Poli delle diagonali e delle verticali — Prima di determinare le tensioni delle diagonali e delle verticali conviene determinare le distanze o_n che individuano i poli rispettivi. A ciò serve la (502)

$$o_n = \frac{\lambda\, h_n}{h_n - h_{n+1}}$$

e si ottiene:

$$o_1 = \frac{3{,}2 \times 3{,}8}{3{,}8 - 2{,}72} = 11{,}26 \quad , \quad o_2 = \frac{3{,}2 \times 2{,}72}{2{,}72 - 1{,}88} = 10{,}36$$

$$o_3 = \frac{3{,}2 \times 1{,}88}{1{,}88 - 1{,}28} = 10{,}03 \quad , \quad o_4 = \frac{3{,}2 \times 1{,}28}{1{,}28 - 0{,}92} = 11{,}38$$

$$o_5 = \frac{3{,}2 \times 0{,}92}{0{,}92 - 0{,}80} = 24{,}53$$

γ) Sbarre diagonali. — Siccome il carico permanente, che è uniformemente distribuito su tutta la lunghezza dell'armatura, non ha nessuna influenza sul valore delle tensioni delle diagonali, si tralascia di tenerne conto; inoltre essendo le tensioni (*mas*) e (*min*) di egual valore numerico, basta calcolarne una soltanto, e precisamente la tensione (*mas*). Nella **Fig. 569**, sono individuate le posizioni del carico mobile che dànno le tensioni (*mas*) e (*min*) e colla scorta della stessa e mediante la tabella *A* si valutano le reazioni verticali V ed orizzontali O sulla cerniera di chiave, dipendentemente dal carico accidentale, per le tensioni (*mas*) delle varie diagonali e si ottiene:

(D_1) $V = 0 + 640 + 1280 + 1920 = 3840$
(D_2) $V = + 1280 + 1920 + 2560 = 5760$
(D_3) $V = + 1920 + 2560 = 4480$
(D_4) $V = - 8000 + 1600 + 2560 = - 3840$
(D_5) $V = - 8000 + 1600 = - 6400$

(D_1) $O = 0 + 3414 + 6826 + 10240 = 20480$
(D_2) $O = 6826 + 10240 + 13654 = 30720$
(D_3) $O = 10240 + 13654 = 23894$
(D_4) $O = 42668 + 8534 + 13654 = 64856$
(D_5) $O = 42668 + 8534 = 51202$

La (503)

$$d_n = \frac{o_n \, h_{n+1}}{\sqrt{\{\lambda^2 + h^2_{n+1}\}}}$$

serve a calcolare i bracci di leva

$$d_1 = \frac{11{,}26 \times 2{,}72}{\sqrt{\{3{,}2^2 + 2{,}72^2\}}} = 7{,}29 \quad , \quad d_2 = \frac{10{,}36 \times 1{,}88}{\sqrt{\{3{,}2^2 + 1{,}88^2\}}} = 5{,}25$$

$$d_3 = \frac{10{,}03 \times 1{,}28}{\sqrt{\{3{,}2^2 + 1{,}28^2\}}} = 3{,}72 \quad , \quad d_4 = \frac{11{,}38 \times 0{,}92}{\sqrt{\{3{,}2^2 + 0{,}92^2\}}} = 3{,}14$$

$$d_5 = \frac{24{,}53 \times 0{,}80}{\sqrt{\{3{,}2^2 + 0{,}8^2\}}} = 5{,}95$$

Mediante le equazioni dei momenti statici si trova

$$D_1 \times 7{,}29 + 20480 \times 0{,}8 - 3840\,(5 \times 3{,}2 - 11{,}26) - \\ - (2960 + 6400)\{3 \times 11{,}26 - (1 + 2 + 3)\,3{,}2\} = 0$$

$$D_2 \times 5{,}25 + 30720 \times 0{,}8 - 5760\,(4 \times 3{,}2 - 10{,}36) - \\ - (2960 + 6400)\{3 \times 10{,}36 - (1 + 2 + 3)\,3{,}2\} = 0$$

$$D_3 \times 3{,}72 + 23894 \times 0{,}8 + 4480\,(10{,}03 - 3 \times 3{,}2) - \\ - (2960 + 6400)\left\{2 \times 10{,}03 - (1 + 2)\,3{,}2 + \frac{10{,}03 - 3 \times 3{,}2}{2}\right\} = 0$$

$$D_4 \times 3{,}14 + 64856 \times 0{,}8 - 3840\,(11{,}38 - 2 \times 3{,}2) - \\ - (2960 + 6400)\left\{11{,}38 - (1)\,3{,}2 + \frac{11{,}38 - 2 \times 3{,}2}{2}\right\} = 0$$

$$D_5 \times 5{,}95 + 51202 \times 0{,}8 - 6400\,(24{,}53 - 3{,}2) - \\ - (2960 + 6400)\left(\frac{24{,}53 - 3{,}2}{2}\right) = 0$$

da cui

$$D_1 = \pm 18969 \quad , \quad D_2 = \pm 19176 \quad , \quad D_3 = \pm 21191$$
$$D_4 = \pm 21372 \quad , \quad D_5 = \pm 32828$$

δ) Sbarre verticali. — Non tutto il peso permanente influisce sulla tensione delle verticali poichè il peso proprio della nervatura inferiore poligonale e relativa controventatura non ha nessuna azione sulle medesime.

Per semplicità di calcolo si ammette che il peso permanente che gravita sulle verticali (cioè il peso della nervatura rettilinea, quello dell'impalcato ed il loro peso proprio) sia metà del peso totale. E siccome a carico completo su tutta l'arcata ogni verticale porta il carico del relativo nodo, così ne consegue che il peso permanente produce su tutte le verticali intermedie una tensione costante di valore:

$$-\frac{1}{2}P = -\frac{1}{2}2960 = -1480$$

e sulle verticali estreme una tensione costante di valore:

$$-\frac{1}{2}\frac{P}{2} = -\frac{1}{4}2960 = -740$$

In quanto al carico accidentale basta determinare la tensione (*min*) da esso prodotta e valendosi della relazione (509) $\mathfrak{V}_{n(mas)} + \mathfrak{V}_{n(min)} = -K$ se ne deduce speditamente la tensione (*mas*).

Col mezzo della tabella *A* e colla scorta della **Fig. 569**, nella quale sono poste in evidenza le posizioni del carico mobile che producono le tensioni (*mas*) e (*min*), si calcolano le reazioni verticali ed orizzontali sulla cerniera di chiave per le varie verticali e per la tensione (*min*).

(V_1) $V = 0 + 640 + 1280 + 1920 = 3840$
(V_2) $V = 640 + 1280 + 1920 + 2560 = 6400$
(V_3) $V = 1280 + 1920 + 2560 = 5760$
(V_4) $V = 1920 + 2560 + 1600 - 8000 = -1920$
(V_5) $V = 2560 + 1600 - 8000 = -3840$

(V_1) $O = 0 + 3414 + 6826 + 10240 = 20480$
(V_2) $O = 3414 + 6826 + 10240 + 13654 = 34134$
(V_3) $O = 6826 + 10240 + 13654 = 30720$
(V_4) $O = 10240 + 13654 + 8534 + 42668 = 75096$
(V_5) $O = 13654 + 8534 + 42668 = 64856$

i bracci v_n sono dati dalla (503) $v_n = o_n$, cioè:

$$v_1 = 11{,}26 \quad , \quad v_2 = 10{,}36 \quad , \quad v_3 = 10{,}03 \quad , \quad v_4 = 11{,}38 \quad , \quad v_5 = 24{,}53$$

Mediante le equazioni dei momenti statici si ottiene

$$-\mathfrak{V}_1 \times 11{,}26 + 20480 \times 0{,}8 - 3840\,(5 \times 3{,}2 - 11{,}26) -$$
$$- 6400 \left\{ \frac{11{,}26}{2} + 3 \times 11{,}26 - (1 + 2 + 3)\,3{,}2 \right\} = 0$$
$$-\mathfrak{V}_2 \times 10{,}36 + 34134 \times 0{,}8 - 6400\,(4 \times 3{,}2 - 10\,36) -$$
$$- 6400 \left\{ 4 \times 10{,}36 - (1 + 2 + 3)\,3{,}2 \right\} = 0$$
$$-\mathfrak{V}_3 \times 10{,}03 + 30720 \times 0{,}8 - 5760\,(10{,}03 - 3 \times 3{,}2) -$$
$$- 6400 \left\{ 3 \times 10{,}03 - (1 + 2)\,3{,}2 \right\} = 0$$
$$-\mathfrak{V}_4 \times 11{,}38 + 75096 \times 0{,}8 - 1920\,(11{,}38 - 2 \times 3{,}2) -$$
$$- 6400 \left\{ 2 \times 11{,}38 - (1)\,3{,}2 + \frac{11{,}38 - 2 \times 3{,}2}{2} \right\} = 0$$
$$-\mathfrak{V}_5 \times 24{,}53 + 64856 \times 0{,}8 - 3840\,(24{,}53 - 3{,}2) -$$
$$- 6400 \left\{ 24{,}53 + \frac{24{,}53 - 3{,}2}{2} \right\} = 0$$

da cui, mediante la (509), si deduce

$$\mathfrak{V}_{1(min)} = -11648 \qquad \mathfrak{V}_{1(mas)} = -(-11648) - \frac{6400}{2} = +8448$$
$$\mathfrak{V}_{2(min)} = -12610 \qquad \mathfrak{V}_{2(mas)} = -(-12610) - 6400 = +6210$$
$$\mathfrak{V}_{3(min)} = -10377 \qquad \mathfrak{V}_{3(mas)} = -(-10377) - 6400 = +3977$$
$$\mathfrak{V}_{4(min)} = -7962 \qquad \mathfrak{V}_{4(mas)} = -(-7962) - 6400 = +1562$$
$$\mathfrak{V}_{5(min)} = -10406 \qquad \mathfrak{V}_{5(mas)} = -(-10406) - 6400 = +4006$$

le tensioni totali dipendenti dall'azione simultanea del carico permanente ed accidentale si ottengono mediante la (508)

$$V_n = \mathfrak{V}_n - \frac{P}{2}$$

$$V_{1(mas)} = 8448 - 740 = +7707 \qquad V_{1(min)} = -11648 - 740 = -12388$$
$$V_{2(mas)} = 6210 - 1480 = +4730 \qquad V_{2(min)} = -12610 - 1480 = -14090$$
$$V_{3(mas)} = 3977 - 1480 = +2497 \qquad V_{3(min)} = -10377 - 1480 = -11857$$
$$V_{4(mas)} = 1562 - 1480 = +82 \qquad V_{4(min)} = -7962 - 1480 = -9442$$
$$V_{5(mas)} = 4006 - 1480 = +2526 \qquad V_{5(min)} = -10406 - 1480 = -11886$$
$$V_{6(mas)} = -\frac{1}{4}P = -740 \qquad V_{6(min)} = -\left(\frac{1}{4}P + \frac{1}{2}K\right) =$$
$$= -(740 + 3200) = -3940$$

Nella **Fig. 570** sono poste in evidenza le tensioni relative alle varie sbarre.

Osservazione. — Calcolate le tensioni per le varie sbarre, le riquadrature delle stesse si determinano cogli stessi procedimenti indicati per le travate rettilinee e poligonali a pagina 635.

Cerniere.

323. Raggio delle cerniere. — Il raggio delle cerniere dipende dalla massima pressione sulle stesse e dalla loro lunghezza effettivamente premuta che si indica con l.

α) **Cerniere d'imposta.** — La massima pressione per queste cerniere dipende dal massimo valore della reazione $\mathfrak{R}$ d'imposta. Indicando con $\mathfrak{R}_p$ quella prodotta dal peso permanente

» $\mathfrak{R}_k$ » » dal carico mobile completo.

» $\mathfrak{R}_\theta$ » » dalla massima variazione di temperatura è

$$mas\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_p + \mathfrak{R}_k + \mathfrak{R}_\theta \qquad (510)$$

Chiamando r_i il raggio della cerniera d'imposta, si deve assumere, *per cerniere di ferro*

$$r_i = \frac{1{,}60\ mas\mathfrak{R}}{l} \qquad (511)$$

per cerniere d'acciaio

$$r_i = \frac{0{,}8\ mas\mathfrak{R}}{l} \qquad (512)$$

β) **Cerniere di chiave.** — La massima pressione che le cimenta dipende dal massimo valore della reazione orizzontale O. Indicando con O_p quella prodotta dal peso permanente.

» O_k » » dal carico mobile completo è

$$masO = O_p + O_k \qquad (513)$$

Indicando con r_c il raggio della cerniera di chiave si deve prendere, *per cerniere di ferro*

$$r_c = \frac{1{,}6\ masO}{l} \qquad (514)$$

per cerniere d'acciaio

$$r_c = \frac{0{,}8\ masO}{l} \qquad (515)$$

nelle quali formule $mas\mathcal{R}$ e $masO$ si devono esprimere in tonnellate ed l in centimetri.

Osservazione. — Le formule (512) (515) per cerniere d'acciaio forniscono per r valori molto esigui abbenchè sufficienti, ma sta bene arrotondarli con notevole aumento.

Piedritti.

1. Testate.

324. Generalità. — Le testate sono influenzate dalla spinta del terrapieno addossato, da quella dell'acqua, dalla pressione dell'arcata metallica e dal loro peso proprio. Le azioni delle due prime spinte tendono ad annullarsi perchè dirette in senso contrario, ed in pratica, per semplicità di processo, si omette di considerarle, operando così in favore della stabilità, poichè la spinta del terrapieno, che va contata fra le resistenze, è maggiore di quella dell'acqua che tende a spingere od a rovesciare la spalla verso terra in concorso della pressione prodotta dall'arcata metallica.

Si prende in considerazione la testata di sinistra.

Sia n il numero delle armature ad arco componenti l'arcata, $\Sigma \mathcal{R}_A$ la pressione totale comunque inclinata prodotta da ognuna di esse, $\Sigma S = O$ e $\Sigma A = V$ le rispettive componenti orizzontale e verticale, e P il peso della testata, **Fig. 571**. Se la testata è profilata verso terra a scaglioni, nel peso P si deve tener conto anche di quella parte di terra che sovraincombe ai medesimi perchè concorre alla stabilità della testata. La testata è dunque sollecitata dalle forze nO, nV e P orizzontali e verticali, la cui risultante R passa per il punto **C** della base, che è il centro di pressione. La spinta orizzontale nO, può produrre rottura per scorrimento lungo il piano d'imposta, oppure il rovesciamento della testata intorno allo spigolo verso terra della base.

325. Verifica delle condizioni di stabilità. — Questa verifica bisogna farla separatamente per il rovesciamento e schiacciamento e per lo scorrimento.

α) **Stabilità rispetto allo schiacciamento ed al rovesciamento.** — Per la stabilità della testata rispetto allo schiacciamento ed al rovesciamento il centro di pressione deve cadere entro il terzo mediano della base, o per lo meno la sua distanza

dallo spigolo di rotazione $d = \mathbf{CM}$ deve essere $d = {}^1/_3\,\mathbf{MN}$. Scomposta la risultante R di tutte le forze che sollecitano il sistema nelle sue componenti orizzontale O_r e verticale V_r risulta

$$O_r = n\,O \qquad V_r = n\,V + P$$

la qual ultima rappresenta la pressione normale della testata sul piano di fondazione. Si può immaginare rimosso detto piano, e sostituitavi la propria reazione, cioè una forza eguale e direttamente contraria ad R, oppure due forze eguali e direttamente contrarie ad O_r e V_r. Per l'equilibrio del sistema rispetto alla rotazione intorno allo spigolo che si progetta in **M**, detti p e v i bracci di leva delle forze P ed n V deve essere

$$-n\,O\,h - (P + n\,V)\,d + P\,p + n\,V\,v = 0 \qquad (516)$$

col mezzo della quale, o si fissa la posizione del centro di pressione, cioè il valore di d e si lascia indeterminata la grossezza g in sommità (contenuta in P, p, d, v), che si ricava risolvendo la (516), oppure, come di solito si usa in pratica, si assume a priori anche il valore di g e si ricerca la posizione del centro di pressione, ossia la distanza d, mediante la (516) posta sotto la forma

$$d = \frac{P\,p + n\,V\,v - n\,O\,h}{P + n\,V} \qquad (517)$$

e per la stabilità deve essere $d \geq {}^1/_3\,\mathbf{MN}$.

β) **Stabilità rispetto allo scorrimento.** — Il piano d'imposta deve essere procurato mediante conci che ne comprendano tutta l'altezza. Si può prendere dunque come piano di più probabile scorrimento quello corrispondente alla linea di base del monolite costituente il piano d'imposta. Si chiami P_o il peso della parte di testata sovraincombente a tal piano. Non è conveniente di tener conto della resistenza delle malte, ed è invece consigliabile di far assegnamento sulla sola resistenza d'attrito, dipendente dalla pressione prodotta dal peso P_o e dalla pressione verticale n V sull'imposta, che operano superiormente al piano di scorrimento. Per la stabilità deve essere soddisfatta la relazione

$$\frac{f\,(P_o + n\,V)}{n\,O} \geq m \qquad (518)$$

nella quale f indica il coefficiente d'attrito delle murature ed m un coefficiente di stabilità che in pratica non si prende mai minore di 1,5 e che per i ponti ferroviari è opportuno di assumere anche eguale a 2, senza tema di esuberare nella stabilità.

326. Posizione più sfavorevole del sopraccarico nell'arcone. — Rispetto al rovesciamento la posizione più sfavorevole ha luogo per sovraccarico parziale, mentre per lo scorrimento sul piano d'imposta è più sfavorevole l'azione del carico completo. Per quest'ultimo modo di rottura non bisogna dunque fare particolari ricerche per determinare la posizione più sfavorevole del carico mobile, ed è invece necessario fare una tale ricerça per il movimento di rotazione, avendo particolare riguardo al numero delle cerniere. Bisogna cioè ricercare qual è il valore più sfavorevole della spinta $\Sigma \mathcal{R}_A$ prodotta da un'armatura metallica, ossia delle relative componenti $O = \Sigma S$ e $V = \Sigma A$.

α) **Archi con tre cerniere.** — Condotta la **M A** e la **B C**, Fig. 572, e prolungate finchè si incontrano in **r** vedesi che un peso operante in corrispondenza al punto **r** dà sulla testata una pressione diretta secondo **r A**, la quale per la fatta costruzione passa per **M** e quindi dà un momento nullo, cioè il peso considerato non ha nessuna influenza sulla testata. Qualunque peso posto alla destra di **r** dà una pressione sulla testata che passa al di fuori del punto **M**, mentre qualunque peso posto alla sinistra dà una pressione che passa entro la base **M N**, cioè la verticale passante per **r** è il limite del sopraccarico, ossia la testata riceve la più sfavorevole pressione da un'armatura quando questa è caricata dall'estremo di destra fino all'anzidetta verticale. I valori di $O = \Sigma S$ e $V = \Sigma A$ si devono calcolare coi procedimenti esposti al § **304** in base all'anzidetta ipotesi di sopraccarico.

β) **Archi con due cerniere.** — Condotta la retta **M A**, Fig. 573, e prolungata fino all'incontro in **r** colla curva delle reazioni di imposta **A' B'**, vedesi che un peso operante in corrispondenza al punto **r** dà due pressioni sulle imposte dirette secondo **r A** ed **r B**, e quindi, per la fatta costruzione, la pressione **r A** passando per lo spigolo di rotazione **M** dà un momento nullo, cioè il peso considerato non ha veruna influenza sulla testata. Qualunque peso posto alla destra del punto **r** dà una pressione sulla testata che passa al di fuori della base **M N** e quindi produrrebbe il rove-

sciamento, qualunque peso invece posto alla sinistra di r dà una pressione sulla testata che passa entro la base **M N** e quindi si opporrebbe al rovesciamento. Perciò è manifesto che la verticale passante per r rappresenta il limite del carico, e cioè la testata riceve la più sfavorevole pressione dall'armatura quando questa è caricata dall'estremo di destra fino alla verticale passante per r, individuata nel modo anzidetto. I valori dunque di $O = \Sigma S$ e $V = \Sigma A$ si devono calcolare coi procedimenti esposti al § **308** in base all'anzidetta ipotesi di sopraccarico.

Osservazione. — La linea delle reazioni di imposta è una curva **A' B'** qualora la spinta S sia calcolata colla (453) ed è una retta qualora la spinta venga calcolata colla (454).

γ) **Archi senza cerniera.** — Conducasi pel punto **M** una tangente alla inviluppante delle reazioni di imposta, **Fig. 574**, fino ad incontrare in r la linea delle reazioni d'imposta. Se un peso P opera in corrispondenza al punto r, il suo momento rispetto allo spigolo di rotazione **M** è nullo. Qualunque peso posto alla sinistra di r produce un momento che concorre alla stabilità della testata, mentre qualunque peso posto alla destra di r produce un momento che tende a far rovesciare il piedritto. Perciò caricando l'arcone sul tratto **r B'** si ha il massimo momento di rovesciamento sulla testata.

In questi archi la pressione totale $\Sigma \mathcal{R}_A$ all'imposta non passa pel centro **A** della sezione, ma incontra la verticale passante per questo centro, **Fig. 575**, in un punto s, (§ **313**), la cui distanza s da **A** è data analogamente alla (488) dà

$$s = \frac{\Sigma M_A}{\Sigma S} \qquad (519)$$

esprimendo con ΣM_A la somma algebrica dei momenti d'imposta M_A e con ΣS la somma algebrica delle spinte orizzontali S originate da tutti i carichi sollecitanti l'arco, compreso il peso permanente.

I valori di S, A ed M_A si devono calcolare coi procedimenti esposti al § **312** in base all'anzidetta ipotesi di sopraccarico.

δ) **Armature reticolari con tre cerniere.** — Nel caso di armature reticolari con tre cerniere si procede nello stesso modo indicato in α) per gli archi elastici con tre cerniere.

Resta solo a vedere come si determina il valore della pressione verticale A e della spinta orizzontale S sulla cerniera d'imposta prodotte da un carico P posto sopra un'armatura e distante v dalla cerniera di chiave. Si prende in considerazione la testata di sinistra.

Per un carico che sta sulla mezza armatura di sinistra, impostata sulla testata considerata, si ha

$$A\,2c - P\,(c+v) = o \qquad A\,c - P\,v - S\,f = o$$

da cui

$$A = \frac{P\,(c+v)}{2c} \qquad S = P\,\frac{(c-v)}{2f} \qquad (520)$$

Per un carico che sta sull'altra mezza armatura di destra, essendo

$$A\,2c - P\,(c-v) = o \qquad A\,c - S\,f = o$$

risulta

$$A = P\,\frac{(c-v)}{2c} \qquad S = P\,\frac{(c-v)}{2f} \qquad (521)$$

Calcolate poi le singole A ed S se ne deduce il valore delle forze $V = \Sigma A$ ed $O = \Sigma S$.

Se si chiama x la distanza della linea separatrice dei carichi dalla verticale passante per la cerniera di imposta del piedritto che si considera, Fig. 576, x_1 la distanza della stessa linea dall'altra cerniera di imposta, y l'ordinata del punto r che individua la linea separatrice, si ha:

$$x : y = b : h \quad , \quad x_1 : y = c : f \quad , \quad x + x_1 = 2c$$

elimando y fra le due prime risulta

$$\frac{h}{b}\,x = \frac{f}{c}\,(2c - x)$$

risolta la quale si trova:

$$x = \frac{2\,f\,b\,c}{c\,h + f\,b} \qquad (522)$$

essendo rispettivamente h e b le distanze verticale ed orizzontale della cerniera d'imposta A dallo spigolo di rotazione M.

2. Pile.

327. Generalità. — Sulle pile agiscono il peso proprio P e le pressioni delle due arcate sovra impostate. Sia $\mathfrak{R}_s$ la pressione di una delle armature di sinistra ed $\mathfrak{R}_d$ quella di una delle armature di destra. Essendo n il numero delle armature per ogni arcata, le pressioni totali delle due arcate di sinistra e di destra sulla pila hanno per valore $n\,\mathfrak{R}_s$ ed $n\,\mathfrak{R}_d$. Queste pressioni cospirano in senso contrario, Fig. 577, cioè $n\,\mathfrak{R}_s$ tende a far rovesciare la pila intorno allo spigolo di destra **N**, ed $n\,\mathfrak{R}_d$ invece tende a farla rovesciare intorno allo spigolo di sinistra **M**. Se le arcate sono eguali e per intero caricate i momenti di dette pressioni, eguali e contrari, si annullano, e la pila non è soggetta che a sola pressione verticale eguale alla risultante R delle forze $n\,\mathfrak{R}_s$, $n\,\mathfrak{R}_d$ e P, la quale passando per il centro della base si diffonde uniformemente sulla stessa. Questo però non è il caso più sfavorevole. Infatti se le pressioni $n\,\mathfrak{R}_s$ ed $n\,\mathfrak{R}_d$ sono diseguali la pila è soggetta ad una spinta orizzontale e ad un momento risultante eguale alla differenza dei momenti parziali, che tendono rispettivamente a farla scorrere sul piano d'imposta ed a farla rovesciare intorno allo spigolo di destra od a quello di sinistra, a seconda che prepondera il momento della $n\,\mathfrak{R}_s$ o della $n\,\mathfrak{R}_d$. Ciò avviene quando le due arcate non sono egualmente caricate. Ricordando che un' armatura produce il momento massimo di rovesciamento quando è caricata parzialmente, e produce invece il suo momento minimo quando è completamente scarica, è evidente che bisogna considerare un'arcata carica nel modo indicato e l'altra scarica onde avere il caso più sfavorevole, quello cioè che produce il momento risultante di massimo valore. Detta $\mathfrak{R}$ la pressione obliqua più sfavorevole prodotta da un'armatura carica ed $\mathfrak{R}_0$ quella prodotta da un'armatura scarica, si supponga che l'arcata carica sia quella di destra, e diventa allora $n\,\mathfrak{R}_d = n\,\mathfrak{R}$ ed $n\,\mathfrak{R}_s = n\,\mathfrak{R}_0$. Si scompongano queste pressioni totali nelle loro componenti orizzontali e verticali $n\,O$, $n\,V$ ed $n\,O_0$, $n\,V_0$, Fig. 578, e per la fatta ipotesi è $n\,O > n\,O_0$, cioè la pila è soggetta ad una forza orizzontale $n\,(O - O_0)$ diretta da destra verso sinistra che produce scorrimento e rotazione intorno allo spigolo di sinistra **M**.

328. Verifiche di stabilità. — Queste verifiche si eseguiscono separatamente per il rovesciamento e lo scorrimento.

α) **Stabilità rispetto al rovesciamento ed allo schiacciamento.** — Composte le forze $n\,\mathcal{R}, n\,\mathcal{R}_0$ e P sia R la loro risultante e **C** il relativo punto di passaggio sulla base, ossia il centro di pressione. Scomposta la R nelle sue componenti orizzontale O_r e verticale V_r è $O_r = n\,(O - O_0)$ e $V_r = n\,(V + V_0) + P$, la quale ultima rappresenta la pressione normale sul piano di fondazione, **Fig. 579**. Immaginando rimosso il medesimo e sostituita la reazione, eguale e contraria alla risultante R, per l'equilibrio della pila rispetto alla rotazione intorno al punto **M**, detti v, v_0, p i bracci di leva delle forze V, V_0, P, deve essere:

$$-n\,(O - O_0)\,h - V_r\,d + n\,V_0\,v_0 + n\,V\,v + P\,p = 0 \qquad (523)$$

La grossezza g in sommità è implicitamente contenuta nei bracci v, v_0 e nel momento $P\,p$. Fissando a priori la posizione del centro di pressione, ossia la distanza d, si determina l'incognita g risolvendo la (523). In pratica però si assume g a priori e si verificano le condizioni di stabilità ricercando la posizione del punto **C**, cioè la distanza d, che si ricava mediante la (523) posta sotto la forma

$$d = \frac{n\,V_0\,v_0 + n\,V\,v + P\,p - n\,(O - O_0)\,h}{n\,(V + V_0) + P} \qquad (524)$$

e per la stabilità deve essere $d \geqq {}^1/_3$ **M N**.

β) **Stabilità rispetto allo scorrimento.** — Analogamente a quanto si è veduto per le testate deve essere soddisfatta la condizione

$$\frac{f\,(P_0 + n\,V + n\,V_0)}{n\,(O - O_0)} \geqq m \qquad (525)$$

nella quale f, m e P_0 conservano quegli stessi significati.

Osservazione. — Se le due arcate hanno eguale la corda, ma differente la freccia, si deve supporre carica quella colla freccia minore; se hanno eguale la freccia e differente la corda si suppone carica quella colla corda maggiore.

329. Posizione più sfavorevole del sopraccarico nell'arcata. — La posizione del sopraccarico che produce il mas-

simo momento di rovesciamento della pila si determina in modo analogo a quello indicato per le testate al § **326**. Soltanto è da avvertire che per spigolo di rotazione **M** si deve prendere quello spigolo della base della pila che è opposto all'arcata caricata, cosichè è lo spigolo di sinistra qualora si supponga caricata l'arcata di destra. È dunque per questo spigolo **M** che si deve condurre la retta passante per la cerniera di imposta, o tangente alla inviluppante delle reazioni di imposta, che prolungata fino alla linea delle reazioni di imposta serve a determinare la posizione più sfavorevole del sopraccarico.

Per lo scorrimento poi si deve supporre che l'arcata caricata sia sotto l'azione di carico completo, analogamente alle testate.

Esempio 1°

Armatura reticolare ad arco con tre cerniere.

Si assumono i dati dell'esempio a pagina 722, cioè

$$c = 16\ m \quad , \quad f = 3\ m \quad , \quad m = 0{,}8 \text{ (altezza in chiave)}$$

e si suppone che la muratura dei piedritti sia di pietrame ad opera incerta, con rivestimenti a conci regolari di pietra da taglio, attribuendovi un peso medio di 2400 Kg. per metro cubo. Il numero degli scomparti di una mezza armatura è $N = 5$ e la loro ampiezza $\lambda = 3^m{,}2$.

Testate.

Le testate sieno profilate a scaglioni verso terra, ed a scarpa verso acqua nella parte inferiore. Assumendo una larghezza in base di metri 9,50 e profilando le testate colle dimensioni indicate dalla **Fig. 580**, si tratta di verificare se con queste dimensioni sieno soddisfatte le condizioni di stabilità.

Prima di tutto bisogna procedere alla ricerca di alcune quantità. Per semplicità si può ritenere che l'arco passante per le tre cerniere sia circolare, in luogo di parabolico. Il raggio di detto arco sarebbe

$$r = \frac{c^2 + f^2}{2f} = \frac{16^2 + 3^2}{2 \times 3} = 44{,}17$$

e chiamando φ l'angolo formato dal raggio all'imposta colla verticale si ha

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{c}{r} = \frac{16}{44{,}17} = 0{,}3622 \qquad \cos \varphi = \frac{r - f}{r} = \frac{44{,}17 - 3}{44{,}17} = 0{,}9322$$

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{c}{r - f} = \frac{16}{44{,}17 - 3} = 0{,}3885.$$

Il piano d'imposta lo si tiene parallelo al raggio passante per il centro della relativa cerniera e distante da questo di un centimetro, cosichè forma anch'esso l'angolo φ colla verticale, **Fig. 581, 582, 583.** Il cuscinetto della

cerniera venga adagiato entro una nicchia profonda 0,22 metri, larga al fondo 0,80 metri, ed alla bocca

$$0{,}80 + 0{,}22 \text{ tang } \varphi = 0{,}80 + 0{,}22 \times 0{,}3885 = 0{,}885 \text{ m.}$$

L'altezza del piano di imposta è

$$0{,}885 \cos \varphi = 0{,}885 \times 0{,}9322 = 0{,}825$$

e la sua proiezione orizzontale è:

$$0{,}885 \text{ sen } \varphi = 0{,}885 \times 0{,}3622 = 0{,}32$$

Il centro della cerniera dista 0,23 metri dal fondo della nicchia, ossia 0,01 metri dal piano di imposta, e la normale al raggio, per esso passante, divide per metà il fondo della nicchia. La distanza verticale del centro della cerniera dallo spigolo inferiore del piano di imposta è dunque

$$(0{,}22 \text{ tang } \varphi + 0{,}40 + 0{,}01 \text{ tang } \varphi) \cos \varphi =$$
$$= \left\{ (0{,}22 + 0{,}01)\ 0{,}3885 + 0{,}4 \right\} 0{,}9322 = 0{,}45$$

e la distanza orizzontale dallo stesso spigolo è:

$$(0{,}40 + 0{,}22 \text{ tang } \varphi - 0{,}01 \text{ cotg } \varphi) \text{ sen } \varphi =$$
$$= (0{,}40 + 0{,}22 \times 0{,}3885 - 0{,}01 \times 2{,}574)\ 0{,}3622 = 0{,}164.$$

La sopraelevazione della corda dell'arco sul piano di base della testata essendo di 5 metri, l'altezza della parte inferiore di testata, profilata a scarpa, risulta $5 - 0{,}45 = 4{,}55$ metri e quindi se si prende l'inclinazione della scarpa di $^1/_{14}$, la sua base diventa $\frac{4{,}55}{14} = 0{,}325$. Essendo di 8,80 metri la altezza della testata e di 9,50 metri la larghezza della sua base, la parte di profilo che si innalza verticalmente sopra il piano di imposta ha una altezza di $8{,}80 - (0{,}825 + 4{,}55) = 3{,}425$ metri e la grossezza della testata in sommità risulta di $9{,}50 - (2{,}00 + 0{,}32 + 0{,}325) = 6{,}855$ metri, **Fig. 580.**

Verifica della stabilità contro il rovesciamento e lo schiacciamento. — Per fare la verifica serve la (517) cioè

$$d = \frac{P p + n V v - n O h}{P + n V}$$

nella quale P indica il peso proprio della testata, V ed O la pressione verticale e la spinta orizzontale sulla cerniera di imposta di un'armatura, p, v ed h i rispettivi bracci di leva rispetto allo spigolo di rotazione **M**, ed n il numero delle armature. Il peso P della testata, la cui larghezza si prende di metri 5,5, è

$$P = \left\{ 1{,}00\ (3{,}00 + 6{,}00) + 6{,}855 \times 8{,}80 + 0{,}32 \times 4{,}55 + \frac{1}{2}\, 0{,}32 \times 0{,}825 + \frac{1}{2}\, 0{,}325 \times 4{,}55 \right\} 5{,}50 \times 2400$$
$$P = 873444 \text{ Kg.}$$

In luogo di determinare la posizione del baricentro della testata, onde valutare il braccio p del suo peso, è meglio procedere alla determinazione del momento totale Pp mediante la somma dei momenti parziali dei pesi relativi alle varie parti nelle quali la testata si può scomporre, e per i quali riesce facile valutare i bracci di leva. Così operando si ottiene:

$$Pp = \left[\begin{array}{l} 1{,}00 \times 3{,}00 \frac{1{,}00}{2} + 1{,}00 \times 6{,}00 \left(1{,}00 + \frac{1{,}00}{2}\right) + 6{,}855 \times 8{,}80 \left(1{,}00 + 1{,}00 + \frac{6{,}855}{2}\right) + \\ + 0{,}32 \times 4{,}55 \left(1{,}00 + 1{,}00 + 6{,}855 + \frac{0{,}32}{2}\right) + \frac{1}{2} 0{,}32 \times 0{,}825 \left(1{,}00 + 1{,}00 + 6{,}855 + \frac{0{,}32}{3}\right) + \\ + \frac{1}{2} 0{,}325 \times 4{,}55 \left(1{,}00 + 1{,}00 + 6{,}855 + 0{,}32 + \frac{0{,}325}{3}\right) \end{array} \right] 5{,}50 \times 2400$$

$$Pp = 4185292 \text{ Kgm.}$$

Per calcolare le forze $V = \Sigma A$ ed $O = \Sigma S$ bisogna prima determinare la posizione più sfavorevole del sopraccarico. La distanza x della linea separatrice dei carichi dalla verticale passante per il centro della cerniera di chiave è data dalla (522) cioè

$$x = \frac{2 f b c}{c h + f b}$$

ed essendo

$$h = 5{,}00 \qquad b = 9{,}50 - (0{,}164 + 0{,}325) = 9{,}00$$

risulta

$$x = \frac{2 \times 3{,}00 \times 9{,}00 \times 16{,}00}{16{,}0 \times 5{,}00 + 3{,}00 \times 9{,}00} = 8{,}07 \text{ m.}$$

e per essere l'ampiezza degli scomparti $\lambda = 3{,}2$, si vede facilmente che essa cade entro il terzo scomparto, laonde bisogna ritenere carichi tutti i montanti che si trovano alla destra del terzo scomparto, e gli altri scarichi, **Fig. 587**. Le forze A ed S sono date dalle (520) e (521) cioè:

Per un carico che sta sulla mezza armatura impostata sulla testata considerata:

$$A = \frac{P (c + v)}{2 c} \qquad S = \frac{P (c - v)}{2 f}$$

Per un carico che sta sull'altra mezza armatura

$$A = \frac{P (c - v)}{2 c} \qquad S = \frac{P (c - v)}{2 f}$$

nelle quali v indica la distanza del peso dalla cerniera di chiave.

Dall'esame delle (520) e (521) vedesi che due pesi eguali P simmetricamente posti rispetto alla cerniera di chiave producono sul piedritto due pressioni verticali, la cui somma è P, mentre producono due spinte orizzontali eguali fra di loro, e che sono poi eguali alla spinta orizzontale O prodotta sulla cerniera di chiave (504). Ricordando che sui nodi centrali si ha un carico accidentale K = 6400 Kg. e sugli estremi un carico $\frac{1}{2}$ K = 3200 valendosi della tabella *A* (pag. 724) è facile dedurre la seguente

Tabella *B*.

Nodi	Pressioni A_k per i pesi sulla mezza armatura adiacente alla testata	Pressioni A_k per i pesi sulla mezza armatura non adiacente alla testata	Spinte S_k per i pesi su ambe le mezze armature
1 (*)	3200 Kg.	0 Kg.	0 Kg.
2 (*)	5760 »	640 »	3414 »
3 (*)	5120 »	1280 »	6826 »
4	4480 »	1920 »	10240 »
5	3840 »	2560 »	13654 »
6	1600 »	1600 »	8534 »
	24000 Kg.	8000 Kg.	42668 Kg.

I nodi segnati con (*) devono considerarsi scarichi sulla mezza armatura adiacente alla testata.

Il peso permanente sui nodi intermedi è P = 2960, e sui nodi estremi $\frac{1}{2}$ P = 1480, i quali sono tutti caricati e quindi la pressione verticale A_p è eguale a metà del carico totale, cioè al peso di mezza armatura, ossia

$$A_p = 2 \times 1480 + 4 \times 2960 = 14800 \text{ Kg.};$$

mentre la spinta orizzontale S_p conserva il valore della spinta O in chiave calcolato a pagina 723, cioè S_p = 39467 Kg.

Tenendo conto dunque della posizione più sfavorevole del carico mobile, indicata nella **Fig. 587**, e colla scorta della tabella *B* si trova la totale pressione verticale sulla cerniera di imposta

$$V = \Sigma A = 14800 + 4480 + 3840 + 1600 + 8000 = 32720 \text{ Kg.}$$

e la totale spinta orizzontale sulla testata

$$O = \Sigma S = 39467 + 10240 + 13654 + 8534 + 42668 = 114563 \text{ Kg.}$$

I bracci v ed h si deducono dalle **Fig. 587, 584**, cioè

$$v = 9{,}50 - (0{,}325 + 0{,}164) = 9{,}01 \text{ m.}$$

$$h = 5{,}00 \text{ m.}$$

ed essendo una arcata costituita da due arconi e quindi $n = 2$ sostituendo i trovati valori nella (517) si trova:

$$d = \frac{4185292 + 2 \times 32720 \times 9{,}01 - 2 \times 114563 \times 5{,}00}{873444 + 2 \times 32720} = 4{,}46$$

Ora, osservando che la base della testata è larga 9,5 metri, siccome è $d > \frac{1}{3} 9{,}5$ cioè $4{,}46 > 3{,}166$ si conclude che le assunte dimensioni della testata garantiscono pienamente la sua stabilità sia rispetto al rovesciamento che allo schiacciamento, essendochè il centro di pressione si trova entro il terzo mediano della base.

Osservazione. — Si è trascurato di tener conto della terra insistente sopra gli scaglioni, la quale coopera col suo peso alla stabilità della testata, e ciò in favore della stabilità stessa.

VERIFICA DELLA STABILITÀ CONTRO LO SCORRIMENTO ALL'IMPOSTA. — Si può prendere come piano di più facile scorrimento quello corrispondente alla linea di base del monolite costituente il masso di imposta, **Fig. 580**. Si calcola il peso P_0 della parte di muratura sovraincombente a tal piano, che è:

$$P_0 = \left(1{,}00 \times 1{,}70 + 6{,}855 \times 4{,}50 + \frac{1{,}075 + 0{,}25}{2} 0{,}32\right) 5{,}5 \times 2400 = 404104 \text{ Kg.}$$

Per la stabilità deve essere soddisfatta la (518), cioè

$$\frac{f(P_0 + n\,V)}{n\,O} \geqq m$$

e trascurando di tener conto della coesione delle malte e facendo soltanto assegnamento sulla resistenza d'attrito, il coefficiente relativo per muratura di pietrame si può prendere mediamente $f = 0{,}70$. Per lo scorrimento bisogna considerare l'arcata completamente carica. In allora la pressione verticale V e la spinta orizzontale O sulla cerniera di imposta (riferendosi alla tabella B diventano

$$V = \Sigma A = 24000 + 8000 + 14800 = 46800$$

$$O = \Sigma S = 2 \times 42668 + 39467 = 124803$$

sostituendo nella (518) si ha

$$\frac{0{,}7\,(404104 + 2 \times 46800)}{2 \times 124803} = 1{,}39, \text{ cioè } m = 1{,}39.$$

E siccome il coefficiente di stabilità m non deve essere minore di 1,50, anzi per ponti ferroviari è conveniente che sia anche maggiore, cioè circa

1,80, così bisogna provvedere per una maggior resistenza. Due partiti si possono adottare:

Ingrossare la testata in sommità tanto che per il corrispondente aumento del peso P_0 risulti un conveniente valore per m: usare l'artificio di disporre alcuni grossi conci di pietra da taglio parallelamente al piano d'imposta, con che il piano di più facile scorrimento viene portato più in giù, procurando così un aumento del peso P_0 senza aumentare la grossezza della testata.

Accettando il secondo partito, si assegna ai conci una grossezza di metri 0,50, tagliandoli e disponendoli come è rappresentato nelle **Fig. 585, 586**. Ai fianchi questi conci sono tagliati ad angolo retto di cui il lato orizzontale è

$$0{,}50 \times \cos \varphi = 0{,}50 \times 0{,}9322 = 0{,}466$$

ed il lato verticale è

$$0{,}50 \times \operatorname{sen} \varphi = 0{,}50 \times 0{,}3622 = 0{,}18.$$

Il peso P_0 della parte di muratura che insiste sul piano di scorrimento **SS** è dunque

$$P_0 = \{1{,}00 \times 2{,}89 + 6{,}855 \times 4{,}25 + 4{,}175 \times 1{,}44 + 0{,}466 \times 0{,}18(1+2+3+4+5+6+7)\}\, 5{,}5 + 2400$$

$$P_0 = 502636 \text{ Kg.}$$

e sostituendolo nella (518) si trova

$$\frac{0{,}7\,(502636 + 2 \times 46800)}{2 \times 124803} = 1{,}67 \qquad \text{cioè } m = 1{,}67$$

e tenendo anche conto del peso della terra che sovraincombe allo scaglione, il quale concorre alla stabilità, diventa

$$P_0 = 502636 + 1{,}00 \times 2{,}80 \times 5{,}50 \times 1500 = 509236 \text{ Kg.}$$

e quindi

$$\frac{0{,}7\,(509236 + 2 \times 46800)}{2 \times 124803} = 1{,}69 \qquad \text{cioè } m = 1{,}69$$

laonde coll'adottata disposizione di conci, anche la stabilità rispetto allo scorrimento è sufficientemente garantita.

Pile.

Assumendo la larghezza in base della pila di 6 metri, e profilandola a scarpa, sotto il piano di imposta, con l'inclinazione di $\frac{1}{14}$ risultano le dimensioni indicate nella **Fig. 588**.

VERIFICA DELLA STABILITÀ RISPETTO AL ROVESCIAMENTO ED ALLO SCHIACCIAMENTO. — A tale scopo serve la (524), cioè

$$d = \frac{n\,V_0\,v_0 + n\,V\,v + P\,p - n\,(O - O_0)\,h}{n\,(V_0 + V) + P}$$

nella quale V_0 ed O_0 indicano rispettivamente la pressione verticale e la spinta orizzontale prodotta da una delle armature di quell'arcata che si suppone scarica (e che si ritiene la sinistra), mentre V ed O rappresentano la pressione verticale e la spinta orizzontale prodotte da una delle armature dell'arcata carica in quel modo che rende massimo il momento di rovesciamento (si ritiene carica la destra).

La posizione del carico mobile che rende massimo il momento di rovesciamento si trova speditamente nel modo indicato al § **329** e la verticale che limita la posizione del carico mobile ha una distanza x dalla verticale passante pel centro della cerniera di imposta data dalla (522) cioè:

$$x = \frac{2\,f\,c\,b}{c\,h + f\,b}$$

Nella **Fig. 588**, si vede essere

$$h = 5{,}00 \text{ metri} \quad , \quad b = 6{,}00 - (0{,}325 + 0{,}164) = 5{,}51$$

e quindi

$$x = \frac{2 \times 3{,}00 \times 16{,}00 \times 5{,}51}{16{,}00 \times 5{,}00 + 3{,}00 \times 5{,}51} = 5{,}48 \text{ m.}$$

sicchè ricordando che ogni scomparto è largo metri 3,2, la verticale separatrice dei carichi giace nel secondo scomparto, alla destra del quale si devono supporre i nodi carichi ed alla sinistra i nodi scarichi, **Fig. 588**. Colla scorta di questa figura e della tabella *B* si trova per l'arcata carica la totale pressione verticale

$$V = \Sigma\,A = 14800 + 5120 + 4480 + 3840 + 1600 + 8000 = 37840 \text{ Kg.}$$

e la totale spinta orizzontale

$$O = \Sigma\,S = 39467 + 6826 + 10240 + 13654 + 8534 + 42668 = 121389 \text{ Kg.}$$

mentre per l'arcata scarica si ha:

$$V_0 = 14800 \text{ Kg.} \qquad \text{ed} \qquad O_0 = 39467 \text{ Kg.}$$

Il peso P della pila è:

$$P = \left\{ \frac{6{,}00 + 5{,}35}{2}\,4{,}55 + \frac{5{,}35 + 4{,}71}{2}\,0{,}825 + 4{,}71 \times 3{,}425 \right\} 5{,}5 \times 2400 = 418545 \text{ Kg.}$$

I bracci di leva si desumono dalle **Fig. 584, 588**, cioè:

$$v_0 = 0{,}325 + 0{,}164 = 0{,}489 \quad , \quad v = 6{,}00 - (0{,}325 + 0{,}164) = 5{,}51$$

$$h = 5{,}00 \quad , \quad p = \frac{1}{2}\,6{,}00 = 3{,}00$$

Ricordando essere $n = 2$ e sostituendo nella (524) i trovati valori risulta:

$$d = \frac{2 \times 14800 \times 0{,}489 + 2 \times 37840 \times 5{,}51 + 418545 \times 3{,}00 - 2\ (121389 - 39467)\ 5{,}00}{2\ (14800 + 37840) + 418545} = 1{,}65$$

Risultando $d < \frac{1}{3}\,6{,}00$ cioè $1{,}65 < 2{,}00$ vuol dire che il centro di pressione cade fuori del terzo mediano della base, locchè sarebbe contro la prescrizione della buona pratica. Non è però a ritenersi senz'altro che le dimensioni assunte sieno deficienti, essendo che il centro di pressione è poco spostato fuori del terzo mediano. Contro il rovesciamento non vi è pericolo essendo il centro di pressione notevolmente distante dallo spigolo di rotazione; tutto al più potrebbe nascer dubbio sulla resistenza allo schiacciamento, e volendo assicurarsi anche rispetto a questo riguardo, basta fare la verifica mediante la (23 a) cioè $p = \frac{2\,F}{\omega}\,\frac{a}{3\,d}$ nella quale si deve porre

$$F = n\,(V_0 + V) + P = 2\,(14800 + 37840) + 418545 = 523825$$

$$a = 6{,}00 \quad , \quad \omega = 6{,}00 \times 5{,}5 = 33{,}00 \quad , \quad d = 1{,}65$$

e si ottiene

$$p = \frac{2 \times 523825 \times 6{,}00}{33{,}00 \times 3 \times 1{,}65} = 38481 \text{ Kg.}$$

cioè lo spigolo più premuto della base (quello di rotazione) è cimentato con uno sforzo di chilogrammi 38481 per metro quadrato. La resistenza minima alla rottura per schiacciamento della buona muratura di pietrame calcare è di 3000 tonnellate per metro quadrato, ed il carico di sicurezza trattandosi di muratura ad opera incerta, si deve prendere $\frac{1}{20}$ del carico di rottura cioè $\frac{3000}{20} = 150$ tonnellate. E siccome lo sforzo reale massimo di 38481 chilogrammi è ben inferiore allo sforzo pratico ammissibile di 150000 chilogrammi, si conclude che anche rispetto allo schiacciamento la stabilità è pienamente garantita colle assunte dimensioni.

Verifica della stabilità contro lo scorrimento all'imposta. — Si assume come piano di più facile scorrimento quello corrispondente alla linea di base del monolite costituente il masso di imposta. Il peso P_0 sovraincombente a tal piano è:

$$P_0 = \left(5{,}35 \times 0{,}25 + \frac{5{,}35 + 4{,}71}{2}\,0{,}825 + 4{,}71 \times 3{,}425\right) 5{,}5 \times 2400 = 285369 \text{ Kg.}$$

Ricorrendo alla (525) cioè

$$\frac{f(P_o + n V_o + n V)}{n(O - O_o)} \geqq m$$

e sostituendovi i corrispondenti valori, ricordando essere $V = 46800$ ed $O = 124803$ (pag. 742) si trova

$$\frac{0{,}7\,(285369 + 2 \times 14800 + 2 \times 46800)}{2\,(124803 - 39467)} = 1{,}67 \text{ cioè } m = 1{,}67$$

il quale valore di m soddisfa in modo sufficiente per la stabilità.

Cerniere.

Cerniera d'imposta. — La massima pressione *mas* $\mathfrak{R}$ sulla cerniera di imposta è data genericamente dalla (510). Il valore di questa pressione è

$$mas\ \mathfrak{R} = (\mathfrak{R}_p + \mathfrak{R}_k + \mathfrak{R}_\theta) = \sqrt{V^2 + O^2}$$

nella quale devesi prendere il valore di $\mathfrak{R}_k$ per carico completo.

In questo caso devesi porre $\mathfrak{R}_\theta = 0$ non avendosi alcuna pressione per variazioni di temperatura nelle armature con tre cerniere.

Avendosi trovato $V = 46800$ ed $O = 124803$ il valore di *mas* $\mathfrak{R}$ in tonnellate diventa

$$mas\ \mathfrak{R} = \sqrt{46{,}8^2 + 124{,}8^2} = 133{,}3 \text{ tonn.}$$

Assunta la lunghezza della cerniera, eguale alla larghezza della nervatura dell'arcone cioè $l = 25$ centimetri, si ha

per cerniere di ferro $\qquad r_i = \dfrac{1{,}6 \times 133{,}3}{25} = 8{,}5$ cent.

per cerniere d'acciaio $\qquad r_i = \dfrac{0{,}8 \times 133{,}3}{25} = 4{,}26$ cent.

Cerniera di chiave. — Il valore della massima pressione *mas* O che cimenta questa cerniera è dato dalla (513) nella quale si deve valutare O_k per carico completo, cioè

$$mas\ O = (O_p + O_k) = O = 124{,}8 \text{ tonn.}$$

e mantenuta la stessa lunghezza della cerniera di imposta $l = 25$ centimetri risulta

per cerniere di ferro $\qquad r_c = \dfrac{1{,}6 \times 124{,}8}{25} = 8$ cent.

per cerniere d'acciaio $\qquad r_c = \dfrac{0{,}8 \times 124{,}8}{25} = 4$ cent.

Vista la poca differenza fra i due raggi delle cerniere di imposta e di chiave, si possono fare tutte due col raggio di massimo valore.

Esempio 2°

Armatura ad archi elastici con due cerniere.

Si suppongano gli stessi dati dell'esempio precedente, ma l'arcata sia costituita da archi elastici con due cerniere.

Testate.

Le verifiche di stabilità si devono effettuare per il rovesciamento e per lo scorrimento

«) *Rovesciamento.* — In questo caso la posizione più sfavorevole del sopraccarico si determina mediante la retta **M A r**, **Fig. 589**, condotta dallo spigolo di rotazione **M** per la cerniera di imposta **A** fino ad incontrare in **r** la retta delle reazioni di imposta **A' B'**, che è una parallela alla corda distante dalla stessa $\frac{4}{3}f$. La verticale **v v**, condotta per **r**, cadente entro il terzo scomparto determina la linea separatrice dei carichi, cioè si devono supporre carichi soltanto i montanti posti alla destra di **v v** ossia il 4°, 5°, 6° 7°, 8°, 9°, 10°, 11°.

Per questa speciale posizione del sopraccarico le pressioni verticali A e le spinte orizzontali S sulla cerniera di imposta dipendenti dai carichi accidentali sui montanti suddetti, si determina rispettivamente colle (452) (454), le quali si pongono sotto la forma

$$A = \frac{6400}{2 \times 16}(16 + v) = 200\,(16 + v)$$

$$S = \frac{3 \times 6400}{8 \times 16 \times 3}(16^2 - v^2) = 50\,(256 - v^2)$$

e sostituendovi

$$v = +6{,}4\ ,\ +3{,}2\ ,\ 0\ ,\ -3{,}2\ ,\ -6{,}4\ ,\ -9{,}6\ ,\ -12{,}8\ ,\ -16$$

si ottiene

$A_4 = 200\,(16 + 6{,}4) = 4480$		$S_4 = 50\,(256 - 6{,}4^2) = 10752$	
$A_5 = 200\,(16 + 3{,}2) = 3840$		$S_5 = 50\,(256 - 3{,}2^2) = 12288$	
$A_6 = 200\,(16 + 0) = 3200$		$S_6 = 50\,(256 - 0) = 12800$	
$A_7 = 200\,(16 - 3{,}2) = 2560$		$S_7 = 50\,(256 - 3{,}2^2) = 12288$	
$A_8 = 200\,(16 - 6{,}4) = 1920$		$S_8 = 50\,(256 - 6{,}4^2) = 10752$	
$A_9 = 200\,(16 - 9{,}6) = 1280$		$S_9 = 50\,(256 - 9{,}6^2) = 8192$	
$A_{10} = 200\,(16 - 12{,}8) = 640$		$S_{10} = 50\,(256 - 12{,}8^2) = 4608$	
$A_{11} = 200\,(16 - 16) = 0$		$S_{11} = 50\,(256 - 16^2) = 0$	
	$A = 17920$		$S = 71680$

Il peso permanente calcolato di 925 chilogrammi per metro corrente di armatura, a pagina 722 produce sulla cerniera d'imposta due reazioni che si valutano colle (460), cioè:

$$A = 925 \times 16 = 14800 \qquad S = \frac{925 \times 16^2}{2 \times 3} = 39467$$

In questo caso bisogna tener conto anche della spinta prodotta da variazioni di temperatura e supponendo l'arco a sezione costante colla forma e dimensioni indicate nella **Fig. 590**, serve all'uopo la (461). Il momento di inerzia ha per valore $I = 1626629858$ ed assumendo una differenza massima di temperatura $t^0 = 25^0$,

$$E = 20000 \text{ Kg. per mill.}\square \quad , \quad \theta = 0{,}00001525$$

risulta

$$S = \frac{15 \times 0{,}00001525 \times 25^0 \times 20000 \times 1626629858}{8 \times 3^2} = 2584 \text{ Kg.}$$

assunta invece pel calcolo della spinta la (464) essendo

$$r = 44167 \text{ mill.} \qquad \operatorname{sen}\alpha = 0{,}36226$$

$$\cos\alpha = 0{,}93208 \qquad \alpha = 0{,}370676 \qquad \Omega = 26216$$

si ottiene:

$$S = \left[\frac{2 \times 0{,}00001525 \times 25 \times 20000 \times 1626629858 \times 26216 \times 0{,}370676 \times 0{,}93208}{2 \times 0{,}370676 \times 0{,}93208^2 \times 1626629858 + \\ + 44167^2 \times 26216\,(0{,}370676 + 2 \times 0{,}370676 \times 0{,}93208^2 - 3 \times 0{,}93208 \times 0{,}36226)} \right]$$

$$S = 2218 \text{ Kg.}$$

La totale pressione verticale e la totale spinta orizzontale sulla cerniera di imposta da assumersi nelle verifiche per la stabilità contro il rovesciamento, e da sostituire nella (517), sono dunque

$$V = \Sigma A = 14800 + 17920 = 32720$$

$$O = \Sigma S = 39467 + 71680 + 2218 = 113365$$

Scorrimento. — Per lo scorrimento si deve considerare tutta l'arcata carica, nel qual caso la pressione verticale e la spinta orizzontale sulla cerniera di imposta, dovute al carico mobile risultano

$$A = \frac{6400 \times 10}{2} = 32000$$

$$S = 2(S_7 + S_8 + S_9 + S_{10} + S_{11}) + S_6 = 2(4608 + 8192 + 10752 + 12288) + 12800 = 84480$$

e quindi:

$$V = \Sigma A = 14800 + 32000 = 46800$$

$$O = \Sigma S = 39467 + 84480 + 2218 = 126165$$

Trovate le forze V ed O si procede nelle verifiche come nell'esempio precedente, ed in modo analogo si opera per le *pile*.

Cerniere.

La massima pressione *mas* $\mathfrak{R}$ sulle cerniere di imposta è data dalla (510) cioè

$$mas\ \mathfrak{R} = \left(\mathfrak{R}_p + \mathfrak{R}_k + \mathfrak{R}_g\right) = \sqrt{V^2 + O^2}$$

nella quale si deve valutare $\mathfrak{R}_k$ per carico completo. Avendosi trovato V = 46800 ed O = 126165 si ha dunque, esprimendo tutto in tonnellate:

$$mas\ \mathfrak{R} = \sqrt{46{,}8^2 + 126{,}2^2} = 134{,}6 \text{ tonn.}$$

Si prenda la lunghezza delle cerniere $l = 40$ centimetri. Eseguendo le *cerniere di ferro* dalle (511) se ne deduce il raggio

$$r_1 = \frac{1{,}60 \times 134{,}6}{40} = 5{,}4 \text{ cent.}$$

e per *cerniere d'acciaio* dalla (512) risulta:

$$r_1 = \frac{0{,}8 \times 134{,}6}{40} = 2{,}7 \text{ cent.}$$

Esempio 3°

Armatura ad archi elastici senza cerniere.

Si suppongano gli stessi dati dell'esempio a pagina 738, ma l'arcata sia costituita da archi elastici senza cerniere.

Testate. — Anche in questo caso si devono effettuare le verifiche della stabilità per il rovesciamento e per lo scorrimento.

Rovesciamento. — Si individua la linea delle reazioni di imposta, **Fig. 591**, che è una retta distante $\frac{6}{5} f$ dalla corda, § **313**. Poscia si segna la inviluppante delle reazioni di imposta. Valendosi della tabella **LIII**, (pag. 688), si deducono i valori delle prime cinque ordinate della curva, cioè

$$y_1 = -0{,}4133 \times 3 = -1{,}24 \qquad y_2 = 0{,}24 \times 3 = 0{,}72$$

$$y_3 = 0{,}4488 \times 3 = 1{,}35 \qquad y_4 = 0{,}5466 \times 3 = 1{,}64$$

$$y_5 = 0{,}6 \times 3 = 1{,}8$$

mediante le quali si segna speditamente la curva stessa.

Per determinare la posizione più sfavorevole del carico mobile, partendo dallo spigolo di rotazione **M**, si conduce una retta tangente alla inviluppante delle reazioni di imposta, prolungandola fino ad incontrare la linea delle

dette reazioni nel punto r. Condotta per questo punto una verticale v v essa è la linea separatrice dei carichi, cioè si devono supporre carichi tutti i montanti a destra della linea medesima, avvertendo che essa cade entro il terzo scomparto. Le pressioni verticali, le spinte orizzontali ed i momenti all'imposta si deducono rispettivamente mediante le (473), (474), (475) le quali si pongono sotto la forma

$$A = \frac{6400}{4 \times 16^3} (16 + v)^2 (2 \times 16 - v) = 0{,}39 (16 + v)^2 (32 - v)$$

$$S = \frac{15}{32} \frac{6400}{3 \times 16^3} (16^2 - v^2)^2 = 0{,}2441 (256 - v^2)^2$$

$$M_A = \frac{6400}{16 \times 16^3} (16 + v)^2 \left\{ (16 - v)^2 - 4 v (16 - v) \right\}$$

$$= 0{,}0976 (16 + v)^2 \left\{ (16 - v)^2 - 4 v (16 - v) \right\}$$

e ponendovi successivamente

$$v = + 6{,}4 \ , \ + 3{,}2 \ , \ 0 \ , \ - 3{,}2 \ , \ - 6{,}4 \ , \ - 9{,}6 \ , \ 12{,}8 \ , \ - 16$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
A_4 &= 0{,}39 (16 + 6{,}4)^2 (32 - 6{,}4) = 5010 \\
A_5 &= 0{,}39 (16 + 3{,}2)^2 (32 - 3{,}2) = 4140 \\
A_6 &= 0{,}39 (16 + 0)^2 (32 - 0) = 3195 \\
A_7 &= 0{,}39 (16 - 3{,}2)^2 (32 + 3{,}2) = 2249 \\
A_8 &= 0{,}39 (16 - 6{,}4)^2 (32 + 6{,}4) = 1380 \\
A_9 &= 0{,}39 (16 - 9{,}6)^2 (32 + 9{,}6) = 665 \\
A_{10} &= 0{,}39 (16 - 12{,}8)^2 (32 + 12{,}8) = 459 \\
A_{11} &= 0{,}39 (16 - 16)^2 (32 + 16) = 0 \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad A = 17098
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_4 &= 0{,}2441 (256 - 6{,}4^2)^2 = 11288 \\
S_5 &= 0{,}2441 (256 - 3{,}2^2)^2 = 14743 \\
S_6 &= 0{,}2441 (256 - 0)^2 = 15997 \\
S_7 &= 0{,}2441 (256 - 3{,}2^2)^2 = 14743 \\
S_8 &= 0{,}2441 (256 - 6{,}4^2)^2 = 11288 \\
S_9 &= 0{,}2441 (256 - 9{,}6^2)^2 = 6552 \\
S_{10} &= 0.2441 (256 - 12{,}8^2)^2 = 2073 \\
S_{11} &= 0{,}2441 (256 - 16^2)^2 = 0 \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad S = 76684
\end{aligned}$$

$$(M_A)_4 = 0{,}0976\,(16 + 6{,}4)^2 \left\{ (16 - 6{,}4)^2 - 4 \times 6{,}4\,(16 - 6{,}4) \right\} = -\ 7522$$

$$(M_A)_5 = 0{,}0976\,(16 + 3{,}2)^2 \left\{ (16 - 3{,}2)^2 - 4 \times 3{,}2\,(16 - 3{,}2) \right\} = 0$$

$$(M_A)_6 = 0{,}0976\,(16 + 0)^2 \left\{ (16 - 0)^2 - 4 \times 0\,(16 - 0) \right\} = +\ 6396$$

$$(M_A)_7 = 0{,}0976\,(16 - 3{,}2)^2 \left\{ (16 + 3{,}2)^2 + 4 \times 3{,}2\,(16 + 3{,}2) \right\} = +\ 9825$$

$$(M_A)_8 = 0{,}0976\,(16 - 6{,}4)^2 \left\{ (16 + 6{,}4)^2 + 4 \times 6{,}4\,(16 + 6{,}4) \right\} = +\ 9671$$

$$(M_A)_9 = 0{,}0976\,(16 - 9{,}6)^2 \left\{ (16 + 9{,}6)^2 + 4 \times 9{,}6\,(16 + 9{,}6) \right\} = +\ 6550$$

$$(M_A)_{10} = 0{,}0976\,(16 - 12{,}8)^2 \left\{ (16 + 12{,}8)^2 + 4 \times 12{,}8\,(16 + 12{,}8) \right\} = +\ 2303$$

$$(M_A)_{11} = 0{,}0976\,(16 - 16)^2 \left\{ (16 + 16)^2 + 4 \times 16\,(16 + 16) \right\} = +\ 0$$

$$M_A = +\ 27223$$

Il peso permanente p calcolato di 925 chilogrammi per metro corrente di armatura produce una pressione verticale, una spinta orizzontale ed un momento di imposta da valutarsi mediante le (483) e risulta:

$$A = 925 \times 16 = 14800 \qquad S = \frac{925 \times 16^2}{2 \times 3} = 39467 \qquad M_A = 0$$

La spinta S ed il momento M_A di imposta prodotti dalla variazione di temperatura si calcolano mediante le (484) conservando tutti i dati dell'esempio precedente, assunti a pagina 748 cioè :

$$t = 25^0 \ , \quad I = 1626629858 \ , \quad E = 20000 \ , \quad \Omega = 26216.$$

Sostituendo risulta

$$S = \frac{45 \times 0{,}00001525 \times 25 \times 20000 \times 1626629858 \times 26216}{4 \times 26216 \times 3^2 + 45 \times 1626629858} = 14388$$

$$M_A = \frac{2}{3}\, 3 \times 14388 = 28776$$

Il totale valore della pressione verticale V e della spinta orizzontale O all'imposta è dunque:

$$V = \Sigma A = 17098 + 14800 = 31398$$

$$O = \Sigma S = 76684 + 39467 + 14388 = 130539$$

Mediante la (519) si determina il punto **s** d'applicazione della spinta orizzontale sulla verticale passante per il baricentro della sezione di imposta, e la relativa distanza s risulta

$$s = \frac{27233 + 0 + 28776}{76684 + 39467 + 14388} = 0{,}43$$

e quindi il braccio della spinta orizzontale h ha per valore:

$$h = 5{,}00 + 0{,}43 = 5{,}43$$

Scorrimento. — Per lo scorrimento dovendosi considerare tutta l'arcata carica, il carico mobile produce all'imposta una pressione verticale ed una spinta orizzontale i cui valori sono

$$A = \frac{6400 \times 10}{2} = 32000$$

$$S = 2(S_7 + S_8 + S_9 + S_{10} + S_{11}) + S_6 = 2(14743 + 11288 + 6552 + 2073) + 15997$$
$$S = 85309$$

cosichè risulta:

$$V = \Sigma A = 32000 + 14800 = 46800$$
$$O = \Sigma S = 85309 + 39467 + 14388 = 139164$$

Trovate le forze V ed O si procede nelle verifiche come nell'esempio a pagina 739 ed in modo analogo si opera per le pile.

IV.

PONTI MOBILI.

330. Generalità. — Allorchè si deve attraversare un corso d'acqua navigabile con una strada la cui livelletta ha una sopraelevazione assai limitata sul pelo della corrente, qualunque sia il tipo che si voglia adottare per la costruzione di un ponte fisso, questo sarebbe di ostacolo alla navigazione, che per tal modo resterebbe impedita. In questo caso bisogna costruire un ponte amovibile. Ciò si consegue mediante opportuni congegni i quali o fanno girare il ponte sia intorno ad un asse verticale, sia intorno ad un asse orizzontale, oppure lo fanno scorrere sul piano stradale in modo da rendere completamente libero il passaggio delle barche. Nel primo caso si hanno i ponti *girevoli* e si chiamano propriamente *girevoli* quelli che girano intorno ad asse verticale, e *levatoi* quelli che girano intorno ad asse orizzontale; e nel secondo caso si hanno i ponti *scorrevoli*.

331. Ponti girevoli. — La navigazione può essere fatta o con piccole barche senza alberatura: la *piccola navigazione*, o con grandi barche e navigli con alberatura: *la grande navigazione*. Se la piccola navigazione è continua e frequente e la grande invece assai limitata, è opportuno il tipo di ponte rappresentato nella **Tav. 49**, costituito da due parti simmetriche, foggiate con armature ad arco, entrambi girevoli intorno ad asse verticale una sopra una sponda, e l'altra sopra la sponda opposta, in modo che sia resa possibile la piccola navigazione senza bisogno di muovere il ponte, il quale non si fa girare se non al passaggio delle grandi barche o navigli con alberatura. Siccome le due parti si trovano a semplice contatto quando il ponte è chiuso, nè si può quindi far assegnamento sul loro mutuo contrasto, ne viene che il sistema riesce poco rigido, e quindi al passaggio dei carichi si manifestano delle forti oscillazioni. Per tal ragione questo tipo si presta bene soltanto per ponti pedonali, ed infatti tale è il ponte rappresentato nella **Tav. 49**, costruito nell'Arsenale di Spezia, nonchè quello simile costruito nel 1880 a Venezia sopra il canale di ingresso a quell'Arsenale. Entrambi questi ponti permettono comodamente la piccola navigazione, che è frequentissima, e si aprono soltanto per il passaggio dei navigli locchè succede di rado.

Quando la grande navigazione è frequente, e specialmente se si tratta di ponti carrozzabili, si usano altri tipi, la cui disposizione dipende specialmente dal numero delle campate.

1) **Ponti ad una campata.** — In questo caso il ponte si fa a travata rettilinea e si deve protendere notevolmente nella sponda con uno degli estremi, onde applicarvi il congegno che serve a farlo girare in modo che quando esso è aperto rimanga libera tutta la larghezza del canale. Perciò è necessario che nella sponda medesima sia praticata una camera nella quale va a disporsi il ponte, quando è del tutto aperto, col suo asse longitudinale parallelo al corso d'acqua, **Fig. 592**.

2) **Ponti a due o più campate.** — Quando il ponte è a due campate queste di solito si tengono di eguale lunghezza, e si attraversano con una travata continua a travi rettilinee. Il congegno che serve a far girare il ponte si colloca nella pila centrale, ed agisce in modo che quando il ponte è aperto, questo si dispone coll'asse parallelo a quello della corrente lasciando affatto libere

ambe le due campate, Fig. 593. Se il numero delle campate è maggiore di due, di solito se ne fanno due sole di amovibili, che devono essere adiacenti e si tengono di eguale portata, e possono essere le centrali, od altre due qualunque, a seconda delle circostanze.

L'impalcato e le travi principali si possono conformare nell'uno o nell'altro dei tanti modi indicati per i ponti a travata con travi diritte, per cui non occorrono a questo riguardo particolari schiarimenti. Soltanto il tipo di ponte pedonale rappresentato nella Tav. 49, ha una speciale conformazione all' intelligenza della quale basta l'ispezione della tavola stessa. Quello che interessa invece di studiare nei ponti girevoli è il congegno che serve a renderli tali.

332. Congegno per il movimento. — In generale questo congegno consta di una piattaforma alla quale si può far assumere un movimento rotatorio intorno al suo asse verticale, mediante opportuni ingranaggi, e sulla quale riposa direttamente la travata, od in corrispondenza alla mezzaria (nei ponti con due campate amovibili), o verso un estremo (nei ponti ad una travata), e questa gira colla piattaforma. Gli estremi della travata sono congegnati in modo, onde facilitare il movimento, che al momento della manovra essi possono muoversi liberamente o scorrendo sui piedritti o rimanendo da essi indipendenti,

A meglio chiarire le conformazioni di questi congegni, ed il modo di effettuare le manovre si descrivono i congegni dei ponti disegnati in dettaglio nell'Atlante.

Ponte nell'arsenale di Spezia (Tav. 49). — Una piattaforma rettangola *b*, Fig. 5, 11, 12, 15, di piccole dimensioni è fissata ai due traversi *t*, aventi sezione a T che sono collegati colle armature principali. La piattaforma porta nel centro un foro circolare con ribordi verticali a guisa di anello avente il profilo interno curvilineo, che serve di ralla, e che si infila in un perno d'acciaio fissato sopra un supporto conico di ghisa, il quale è inchiavardato ad una placca circolare di ghisa, Fig. 12, 13, saldata sul suolo, portante 4 bracci agli estremi di due diametri ortogonali, sui quali sono chiodati i due quadranti opposti di una rotaia circolare. Fra i traversi *t*, Fig. 15, ed aderenti alle due armature principali si trovano i supporti in ghisa di due ruo-

telle, i quali sono inchiavardati alle armature stesse, nonchè ai detti traversi. La mezza travata viene dunque sopportata direttamente da queste ruotelle coll'intermezzo dei due traversi t, e d'altronde al suo estremo di riva si appoggia sul piedritto mediante altre due ruotelle r, Fig. 5, poste sopra una rotaia imbasata sulla muratura. La piccola piattaforma b non serve che ad obbligare il sistema a girare intorno al perno centrale. Il movimento si ottiene applicando una manovella all'albero verticale p, sporgente dal palco del ponte, Fig. 1, 12, e facendolo girare si mette in movimento il sistema di ingranaggio rappresentato nelle Fig. 12, 15, e con esso l'albero verticale k, ed il rocchetto s, Fig. 11, 12, 13, fissato alla sua parte inferiore. Il rocchetto s si ingrana nella dentiera del quadrante u, fissato sulla placca orizzontale che porta il perno, ed è quindi obbligato a muoversi lungo il medesimo, e siccome l'albero k (e con esso il rocchetto s) è fissato ad uno dei traversi t che portano la mezza travata, Fig. 11, 12, questa si muove assieme al rocchetto s, e mediante la piastra b è costretta a girare intorno al perno centrale. Dopo un giro di 90° la mezza travata si porta tutta sulla sponda parallelamente al corso d'acqua.

Ponte sul naviglio Mira (**Tav. 50**). — La piattaforma in ghisa sulla quale si appoggia la testata è circolare, fusa in un sol pezzo ed è costituita da un'armilla perimetrale con sezione a I e da un tamburo cilindrico centrale, collegati da quattro bracci posti secondo due diametri che si intersecano a 90°, in corrispondenza ai quali l'armilla porta i supporti di quattro ruotelle. Alla parte inferiore del tamburo centrale è inchiavardato il perno che si infila in una ralla incavata nel centro di altra piattaforma costituita da un'armilla perimetrale con sezione a I, che serve di ruotaia alle indicate ruotelle, e da sei bracci, o raggi, che la collegano al nucleo centrale; il tutto fuso in un solo pezzo. Questa ultima piattaforma è fissata nel suolo, mentre l'altra soprapposta è mobile e può girare intorno al suo perno centrale e con essa la travata che vi si appoggia colle travi principali e con tre travi trasversali, come mostra la Fig. 2. Il movimento si produce applicando una manovella all'albero a, Fig. 6, 8, che arriva colla testa al livello del suolo, e che porta alla parte inferiore il rocchetto r, e facendolo girare si comunica il movimento, mediante la ruota r_1 ingranata dal rocchetto r, all'albero a_1 e quindi al

rocchetto $r_{''}$ fissato alla sua parte inferiore, il quale si ingrana nei denti del quadrante $r_{'''}$ inchiavardato alla piattaforma inferiore fissa. Essendo gli alberi a ed $a_{'}$ fissati alla piattaforma mobile, ed il quadrante dentato $r_{'''}$ fisso, ne consegue che il rocchetto $r_{''}$ è costretto a muoversi lungo il detto quadrante, e con esso gira tutto il sistema di ingranaggio, la piattaforma mobile, e la sovrapposta travata. Al momento della manovra, onde facilitarla, si rendono gli estremi della travata indipendenti dagli appoggi, ossia affatto liberi. — Ciò si consegue nel modo seguente. Ad ogni estremo della travata si fissa al di sotto un albero orizzontale di ferro O, Fig. 1, 2, 4, 5, 7, il quale porta delle suole di ghisa o piastrine p che possono girare a snodo all'estremo di un gambo fissato invariabilmente all'albero. Quando il ponte è chiuso queste piastrine si adagiano colla lor base sul piedritto e servono di supporto alla travata. Entrambi gli alberi O portano delle appendici fisse, o gambi, le cui estremità sono collegate a snodo con un sistema di tiranti (segnati con linee grosse nelle Fig. 1, 2), che mettono capo ad un'asta la quale si trova nella posizione indicata nella Fig. 1, quando il ponte è chiuso. Al momento della manovra portando l'asta nella posizione indicata da linee punteggiate essa obbliga i tiranti a muoversi verso il centro della piattaforma girevole e questi innalzando le dette appendici fanno girare gli alberi O e con essi i gambi che portano le piastrine, i quali pure si innalzano, sollevando con facilità le piastrine snodate, come mostra la **Fig. 594**, per cui gli estremi della trave rimangono affatto liberi.

Ponte sul Novissimo al passo Menai (**Tav. 51**). — Questo ponte ha un meccanismo analogo al precedente, solo vi è qualche differenza nei congegni che servono a render indipendenti gli estremi della travata dai piedritti. Gli alberi orizzontali O sono indipendenti l'uno dall'altro. Portano egualmente le suole o piastrine a snodo, Fig. 3, 4, 7, 8, 9, nonchè le appendici fisse m, ma queste sono conformate a staffa e disposte orizzontalmente quando il ponte è chiuso, ed il loro estremo è terminato da una madrevite entro cui passa una vite raccomandata all'albero verticale p, fisso di posizione, e che giunge colla testa al livello del suolo. Al momento della manovra adattando una manovella all'albero p, lo si fa girare, e con esso la vite, la quale obbliga il dado della madrevite ad innalzarsi con che le staffe m fanno girare l'albero O

intorno al suo asse, il quale perciò solleva le piastrine a snodo. Con questo sistema il manovratore è obbligato di portarsi da un estremo all'altro del ponte onde sollevare le piastrine, e di ritornare poi nel mezzo per far girare il ponte, con molta perdita di tempo. Il sistema precedente è molto più opportuno, perchè il manovratore portatosi sopra la piattaforma, trova lateralmente l'asta, mediante un semplice spostamento della quale solleva contemporaneamente e rapidamente le piastrine di ambo gli estremi del ponte, e senza cambiare di posto fa agire l'apparecchio di rotazione.

Ponte sul naviglio Strà-Dolo a Paluello (Tav. 52). — La travata è sopportata direttamente da un telaio composto di tre traversi distanti $1^m,4$ da asse ad asse, i quali sono collegati da tre file di lungarine interposte alla loro parte centrale ed aventi la distanza di 1^m l'una dall'altra. Questo telaio ha le travi in ferro con sezione a I composto ed è sovrapposto ad altro telaio a perimetro rettangolare con 6 bracci, posti secondo le diagonali e gli assi e concorrenti ad un tamburo centrale, il quale telaio è in ghisa fuso in un solo pezzo. Nel tamburo centrale è invitato un perno verticale che si addentra in una ralla incavata nel nucleo centrale di una piattaforma circolare in ghisa, costituita di un'armilla collegata con sei bracci al detto nucleo centrale, la quale è incassata nel suolo. L'armilla serve di rotaia a quattro ruotelle equidistanti dal perno centrale e fra di loro, che sono applicate mediante supporti due al telaio in ferro e le altre due a quello in ghisa e che sopportano i telai e la travata. Il congegno per far girare la travata è simile a quello del ponte sul naviglio Mira, prima descritto, ed è rappresentato in dettaglio nelle Fig. 4, 6, 9, 10. Gli estremi della travata si appoggiano ognuno su tre ruotelle ad essi inchiavardate, che al momento della manovra scorrono su apposite rotaie fissate nei piedritti allo scopo di facilitare il movimento.

333. Zavorra. — Acciocchè la rotazione della travata possa avvenire nel modo il più facile, coll'impiego della minor forza possibile per eseguire la manovra, è necessario che la travata sia equilibrata rispetto al perno di rotazione. Se questo perno è posto alla mezzaria della travata, come nei ponti a due campate, allora per la simmetria della costruzione la travata risulta equilibrata

di per se stessa. Se il perno è eccentrico, come nei ponti ad una travata, allora il peso della parte più lunga di travata è maggiore di quello della parte minore e ne consegue uno squilibrio che difficulterebbe la manovra. Si toglie però facilmente questo inconveniente applicando una zavorra al disotto dell'impalcato nella parte più corta della travata, il peso della quale zavorra deve essere tale da rendere equilibrata la costruzione. Questa zavorra si ottiene riempiendo di pietrame o ghiaia un cassone di lamiera Fig. 1, (**Tav. 52**), oppure disponendo dei massi greggi di ghisa, o delle pietre sopra un'orditura di travicelli metallici t, Fig. 1, 2, (**Tav. 50**).

Importa ora di vedere come si procede a calcolare il peso della zavorra. Sia L la lunghezza dell'intera travata, **Fig. 595**, P ed l il peso e la lunghezza della parte maggiore, p ed $(L-l)$ quelli della parte minore e z il peso che deve avere la zavorra onde la travata sia equilibrata rispetto al centro del perno **0**. I pesi P e p si possono immaginare concentrati alla metà della rispettiva parte di travata ed il peso z nel centro di gravità del sistema costituente la zavorra, e la relativa distanza dal perno **0**, sia λ. Per l' equilibrio della testata rispetto al punto **0** deve essere:

$$P\frac{l}{2} - p\frac{L-l}{2} - z\lambda = 0$$

col mezzo della quale si determina il valore di z o di λ. È meglio prendere λ quanto più grande è possibile, onde sia richiesto il minimo peso di zavorra.

334. Ponti levatoi. — Questo sistema è usato raramente nelle costruzioni metalliche. Un esempio si trova nel ponte che attraversa il naviglio Mira in vicinanza al sostegno di navigazione. Ad un estremo la travata è fissata rigidamente ad un albero orizzontale di ferro, sopportato da cuscinetti inchiavardati nel piedritto, nei quali detto albero può girare, e con esso la travata. In questo stesso estremo ad una delle travi principali a traliccio, formanti parapetto, è fissato esternamente un gran quadrante massiccio di ghisa col perimetro a dentiera, disposto in piano verticale parallelamente alla trave ed avente il centro in corrispondenza all'asse dell'albero anzidetto. Un rocchetto mosso da un opportuno sistema di ruote dentate (indipendente dalla

travata e fissato sul piedritto) ingranandosi nel quadrante lo fa girare intorno all'albero orizzontale e con esso la travata, che perciò va innalzandosi fintantochè il piano del suolo assume una posizione quasi verticale. Vedesi che in questo sistema tutto il peso della travata va a scaricarsi sul meccanismo, e se in causa di un urto facilmente avvenibile, si spezza qualche dente di una delle ruote, possono succedere delle funeste conseguenze, e la rovina del manufatto. Perciò è un sistema il cui uso è da sconsigliarsi.

335. Ponti scorrevoli. — È raro il caso che le circostanze locali si prestino convenientemente all'uso di un ponte scorrevole, e solo allora che si tratti di un ponte pedonale di poca larghezza si può, per ragioni di economia, ricorrere a tal tipo. Un esempio lo si vede nelle Fig. 600 a 607.

Calcoli di stabilità.

336. Generalità. — In quanto alle *membrature dell'impalcato* (travi trasversali, correntini e tavolato) servono gli stessi procedimenti indicati per i ponti fissi a travata rettilinea. Rispetto alle *travi principali* esse si trovano in differenti condizioni di cimento a seconda che il ponte è chiuso od aperto. Quando il ponte é chiuso le travi si appoggiano alla loro parte centrale sulla piattaforma girevole, ed agli estremi sui piedritti. In questa ipotesi i calcoli di stabilità si sviluppano nello stesso modo indicato per le travi rettilinee a due campate continue, tenendo conto del carico accidentale. Quando il ponte è aperto e durante la manovra, gli estremi della travata restano affatto liberi e quindi le travi principali si trovano nelle condizioni di un solido incastrato in una sezione intermedia, ed affatto libero agli estremi. Abbenchè in questo caso le travi non abbiano a sostenere che il solo peso permanente, pure può avvenire che in questa nuova condizione di appoggio, molto più sfavorevole della prima, alcune parti di essa trave sieno maggiormente cimentate che non allora che il ponte è chiuso e soggetto al carico mobile. Siccome il carico permanente, che è uniformemente distribuito, agisce costantemente su tutta la trave, è facile determinare gli sforzi che cimentano la trave in una sezione qualunque, e verificare le condizioni di stabilità di una parte qualsiasi. Di solito basta limitare

la verifica alle parti della trave che sono prossime all'apparecchio girevole (cioè alla sezione di incastro) inquantochè i momenti inflettenti e gli sforzi di taglio vanno rapidamente diminuendo dall'incastro verso l'estremo libero.

Nell'intento di mettere le travi principali nelle stesse condizioni di sostegno tanto a ponte chiuso che a ponte aperto, venne ideato di sostenere le travi principali alle loro estremità mediante tiranti che mettono capo ad un' armatura collegata alla travata in corrispondenza al centro di rotazione e costituita da ritti verticali fissati alle travi frontali e collegati superiormente da una architrave, Fig. 596. Un esempio lo si ha nel ponte costruito sul naviglio Mira in prossimità all'intersezione di questo col Novissimo. Siccome però i tiranti, specialmente se lunghi, aumentano notevolmente di lunghezza nei massimi innalzamenti di temperatura, permettendo così delle inflessioni nella travata durante le manovre, ne consegue che non si può a rigore far assegnamento sulla loro efficacia.

V.

PONTI SOSPESI

Costruzione.

337. Generalità. — I ponti sospesi constano di un impalcato terminato lateralmente da travi frontali longitudinali, il quale è sospeso d'ambo i lati a tiranti metallici che si attaccano in corrispondenza a ciascheduna fronte ad una o più funi metalliche oppure ad una o più catene, che accavalcandosi sopra ritti lapidei o metallici imbasati sulle testate vanno ad ammarrarsi in un masso murale apposito, detto *pozzo d'ammarra*, od anche nel masso stesso costituente le testate, Fig. 597. L'impalcato può essere di legname, di ferro, o di struttura mista. Nulla di particolare presenta l'impalcato che si può costruire nei tanti modi già conosciuti, ed importa soltanto di occuparsi delle funi o ca-

tene e relativi tiranti di sospensione, nonchè dei ritti e pozzi d'ammarra.

α) **Funi metalliche.** — Queste sono formate con sottili fili di ferro o di acciaio fuso (dal n° 16 al 20) ed ogni fune consta di parecchi toroni, ognuno dei quali è composto di buon numero di fili aggruppati insieme e legati strettamente con altro filo di ferro ravvolto a spire serrate attorno ai medesimi. Nel ponte di Friburgo ogni fune è formata di 20 toroni ed ogni torone consta di 48 a 56 fili. Agli estremi le funi vengono ripiegate su se stesse così da formare un occhio che serve per l'ammarraggio, ed i capi ripiegati si saldano con legature ravvolte ad elica, o discontinue, che talvolta si estendono a tutta la lunghezza della gomena. I tiranti in questo caso sono formati nel modo stesso delle funi e posti ad eguale distanza.

β) **Catene.** — Queste possono essere formate o con anelli oblunghi nei quali bisogna intercalare dei tasselli di ghisa onde mantenerli alla prefissa distanza, oppure con sbarre piatte poste di coltello e rilegate fra di loro con perni preferibilmente di acciaio, sia direttamente, sia col mezzo di piastre di giunzione. In questo caso i tiranti sono ferri tondi o ferri piatti che si infilano nei medesimi perni colleganti le sbarre, o che vi si sospendono in altro modo, e che hanno distanze differenti qualora le sbarre della catena sieno di eguale lunghezza.

Le funi sono preferibili alle catene, perchè il ferro in fili presenta una resistenza molto maggiore del ferro in sbarre (*Vedi n°* 9) e perchè quest'ultime possono rompersi istantaneamente senza dar nessun segno di debolezza, mentre i fili si allungano notevolmente prima di rompersi, ciò che si scorge nel soverchio abbassamento del tavolato, e d'altronde è difficile che i fili si rompano tutti insieme nella stessa sezione.

γ) **Ritti di sospensione.** — Quelli in muratura hanno la forma di pilastri piramidali a base quadrata o rettangola, meglio se monoliti, e se a conci, questi devono avere la maggiore possibile grandezza ed essere fra loro solidamente collegati con duroni di ferro. Quelli metallici ordinariamente sono di ghisa e formati da una o più colonne aggruppate ed inchiavardate sul zoccolo di muratura. Siccome però sotto l'azione del carico mobile, le funi o catene producono uno sforzo orizzontale che tende ad inflettterli, si preferisce di renderli girevoli intorno alla loro base in un piano

verticale parallelo all'asse del ponte, allo scopo di annullare lo sforzo di flessione e di renderli soggetti soltanto a compressione. In questo caso i ritti hanno la sezione in forma di —|— con rigonfiamento a metà della loro lunghezza, Fig. 8, 9, (**Tav. 54**). È anche giovevole che le colonne o pilastri sieno collegati alla vetta mediante traversi foggiati ad arco o rettilinei, sia massicci che reticolati, i quali ne impediscono le deviazioni trasversali.

δ) **Apparecchi di scorrimento.** — Dove le funi o catene si accavalcano sui ritti, esse devono essere incurvate, e non si appoggiano direttamente su di essi, bensì sopra di apparecchi di scorrimento, destinati a facilitare i movimenti delle gomene dipendenti dalle deformazioni prodotte dal carico mobile e dalle variazioni di temperatura. In tal modo si impedisce lo strisciamento delle catene sui piedritti evitandone l'usura e diminuendo notevolmente gli attriti. Questi apparecchi constano di uno o più rulli di ghisa frapposti a due piastre, l'inferiore delle quali fissa sul piedritto, l'altra servente d'appoggio alle catene che non si spostano dalla stessa, ma che le incutono i loro stessi movimenti al di sopra dei rulli obbligandoli a ruotare in avanti od all'indietro.

ε) **Ammarraggi.** — Gli ammarraggi si operano come si vede nella **Fig. 597**, sia ripiegando verticalmente le catene o funi dentro dei pozzi, sia prolungandole senza deviazioni o con deviazione lieve entro ai medesimi, e si fissano contro alla muratura, al quale scopo si passano delle robuste sbarre di ferro entro all'occhio con cui esse terminano. Queste sbarre distribuiscono la pressione sulle murature mediante una larga e grossa lastra di pietra, od una piastra di ghisa. È necessario che si possano visitare i punti d'ammarraggio, sia con dei pozzi verticali sia con delle gallerie laterali che diano accesso ai medesimi.

Calcoli di stabilità

338. I carichi permanente e mobile si considerano come uniformemente distribuiti sulla proiezione orizzontale in ragione di p e k per metro corrente di fune e sia q il carico unitario complessivo per ogni fune.

α) **Fune o catena.** — La fune flessibile si dispone secondo la curva d'equilibrio, e dalla meccanica si sa che in quest'ipotesi di carico è una parabola. Si suppongano i due punti di sospen-

sione a differente livello, Fig. 598, e sieno f_r ed f_{rr} le loro distanze verticali, c_r e c_{rr} quelle orizzontali dal punto più basso **0**, e

$$c_r + c_{rr} = C$$

Prendendo questo punto **0** come origine, l'asse delle Y verticale e quello delle X orizzontale, si hanno due rami di parabola le di cui equazioni sono

$$\left.\begin{array}{ll} \text{per il ramo } \mathbf{0\,A} & y = \dfrac{f'}{c_r^2}\,x^2 \\ \text{per il ramo } \mathbf{0\,B} & y = \dfrac{f_{rr}}{c_{rr}^2}\,x^2 \end{array}\right\} \quad (526)$$

nelle quali le distanze c_r e c_{rr} sono da valutarsi colle seguenti espressioni, nell'ipotesi che sia $f_{rr} > f_r$

$$c_r = \frac{C}{f_{rr} - f_r}\left\{\sqrt{f_r\,f_{rr}} - f_r\right\} \; ; \; c_{rr} = \frac{C}{f_{rr} - f_r}\left\{f_{rr} - \sqrt{f_r\,f_{rr}}\right\} \; ; \; c_r + c_{rr} = C$$

Se i punti di sospensione sono a livello, ossia $f_r = f_{rr} = f$ e $c_r = c_{rr} = c$, si ha $y = \dfrac{f}{c^2}\,x^2$ ed in questo caso la tensione T_x in un punto qualunque ha per valore

$$T_x = \frac{qc^2}{2f}\left\{1 + \frac{4\,f^2\,x^2}{c^4}\right\} \quad (527)$$

la quale cresce col crescere di x e quindi è massima per $x = c$, cioè al punto di sospensione, ove ha per valore

$$_{mas}\,T = \frac{qc^2}{2f}\left\{1 + \frac{4\,f^2}{c^2}\right\} \quad (528)$$

e minima per $x = 0$, cioè al punto più basso **0** ove diventa:

$$T_0 = \frac{qc^2}{2f} \quad (529)$$

Per punti di sospensione a differente livello si deve sostituire nelle (527) (528) (529) in luogo di c ed f rispettivamente c_r c_{rr} ed f_r f_{rr}.

Le funi si fanno a sezione costante la quale detta ω, si calcola colla $\frac{mas\,T}{\omega} = R_t$ mentre le catene si possono fare di uniforme resistenza moltiplicando il numero dei ferri piatti per ogni sbarra, od aumentandone lo spessore mano a mano che cresce lo sforzo. Detto n il numero delle sbarre costituenti mezzo arco (cominciando la numerazione dal punto più basso) la sezione ω_m della sbarra m^{ma} si calcola colla $\omega_m = \frac{T_x}{R_t}$ nella quale si pone per T_x il valore dato dalla (527) prendendo per x la lunghezza in proiezione orizzontale delle prime $(m-1)$ sbarre dell'arco.

La *lunghezza* rigorosa l di un ramo dell'arco parabolico (contata dal vertice **0** al punto di sospensione) è data dall'espressione

$$l = f\sqrt{\left\{1+\frac{c^2}{4f^2}\right\}} + \frac{c}{4f^2}\log^{ip}\frac{2f}{c}\left\{1+\sqrt{1+\frac{c^2}{4f^2}}\right\}$$

ma siccome questa è incomoda a calcolarsi per la presenza della funzione logaritmica, così si usa una espressione più semplice ed abbastanza approssimata cioè:

$$l = c\left(1+\frac{2}{3}\frac{f^2}{c^2}\right) \qquad (530)$$

Osservazione. — La freccia naturale che prende l'arco catenario viene aumentata dall'allungamento in esso prodotto dai carichi cimentanti sia permanente, che accidentale. Bisogna dunque conoscere qual'è la freccia definitiva che questo arco prende onde regolarsi nell'assegnare le dimensioni della fune in modo, che dopo la costruzione la freccia risultante sia quella prefissa nel progetto. A tale scopo si calcolino gli allungamenti prodotti dal peso permanente p e dal mobile k. La tensione $(T_0)_p$ prodotta dal carico permanente all'origine **0** dell'arco (ove agisce orizzontalmente) e quella al punto di sospensione $mas(T)_p$ si valutano colle (528) (529) ponendovi p in luogo di q ed è

$$(T_0)_p = \frac{p\,c^2}{2f} \qquad mas(T)_p = \frac{p\,c^2}{2f}\left(1+\frac{4f^2}{c^2}\right)$$

confrontando le quali si vede che per essere $\frac{f^2}{c^2}$ una quantità assai piccola, la tensione $(T_0)_p$ è di poco inferiore alla tensione $mas(T)_p$. Si supponga per semplicità dunque che l'arco (*di sezione* ω) abbia una tensione costante $(T_0)_p$ la quale produrrà quindi un allungamento $(\lambda_r)_p$ che si può valutare

colla (1) cioè $(\lambda_r)_p = \frac{(T_o)_p\, l}{E_t\, \omega}$. Sia l_o la lunghezza della fune dalla vetta del ritto fino al punto d'ammarraggio; questo tratto di fune alla sommità ha una tensione $mas(T)_p$, ma poi il peso proprio agisce con una tensione negativa (*compressione*) che va crescendo fino al punto d'ammarraggio, ove ha per valore $\pi\, l_o \cos\gamma$, essendo π il peso dell'unità corrente di fune, e γ l'angolo di inclinazione alla verticale. La tensione complessiva $(T_a)_p$ al punto d'ammarraggio è dunque $(T_a)_p = mas(T)_p - \pi\, l_o \cos\gamma$, la quale presa come costante per semplicità, produce un allungamento $(\lambda_{rr})_p = \frac{(T_a)_p\, l_o}{E_t\, \omega}$, e quindi l'allungamento totale $(\lambda)_p$ dovuto al carico permanente è

$$(\lambda)_p = (\lambda_r)_p + (\lambda_{rr})_p = \frac{(T_o)_p\, l + (T_a)_p\, l_o}{E_t\, \omega}.$$

L'allungamento prodotto dal carico mobile k, non è affatto permanente, e si ammette in pratica che esso risulti $^1/_3$ di quello dovuto al carico di prova (carico completo sul ponte). La tensione prodotta dal carico completo si può ritener costante nell'arco catenario e di valore $(T_o)_k = \frac{k\, c^2}{2\, f}$, mentre nel tratto rettilineo è veramente costante e di valore

$$(T_a)_k = mas(T)_k = \frac{k\, c^2}{2\, f}\left(1 + \frac{4\, f^2}{c^2}\right),$$

per cui gli allungamenti parziali da esse prodotti sono rispettivamente

$$(\lambda_r)_k = \frac{(T_o)_k\, l}{E_t\, \omega} \qquad (\lambda_{rr})_k = \frac{(T_a)_k\, l_o}{E_t\, \omega}$$

e quindi l'allungamento totale $(\lambda)_k$ causato dal carico mobile è

$$(\lambda)_k = (\lambda_r)_k + (\lambda_{rr})_k = \frac{(T_o)_k\, l + (T_a)_k\, l_o}{E_t\, \omega}$$

la terza parte del quale si può ritenere come permanente, e quindi l'allungamento complessivo λ dell'arco catenario è $\lambda = (\lambda)_p + \frac{1}{3}(\lambda)_k$ e la lunghezza aumentata l_1 dello stesso diventa $l_1 = l + \lambda$ e quindi col mezzo della (530) si deduce la corrispondente freccia f_1 che diventa:

$$f_1 = \sqrt{\left\{\frac{3}{2}(l_1 - c)\, c\right\}}$$

L'aumento di freccia è dunque $f_1 - f = \varphi$ e quindi la freccia f_o, che si deve assegnare originariamente alla fune perchè sotto l'azione dei carichi essa prenda la freccia prestabilita f, deve essere $f_o = f - \varphi = 2\, f - f_1$. In questo modo si ammette che l'allungamento λ corrispondente all'arco di freccia f

sia quello stesso che avviene realmente per l'arco di freccia f_0, locchè se a rigore non è esatto si può però ammettere in pratica.

L'aumento di freccia dipendente da variazioni di temperatura si valuta nel modo seguente. Nota la grandezza reale della freccia f ad una data temperatura t° e la corrispondente lunghezza della fune contata dal punto d'ammarraggio al punto più basso dell'arco, cioè $(l + l_0)$, per avere la freccia $f_,$ alla temperatura $t_,^\circ$ si calcola la variazione di lunghezza λ colla relazione $\lambda = (t_,^\circ - t^\circ)\,\theta\,(l + l_0)$, per cui la lunghezza dell'arco diventa

$$l_, = l + (t_,^\circ - t^\circ)\,\theta\,(l + l_0)$$

e mediante la (530), ponendo $l_,$ in luogo di l si determina la freccia corrispondente a questa lunghezza cioè:

$$f_, = \sqrt{\left(\frac{3}{2}(l_, - c)\,c\right)}$$

β) **Tiranti.** — Dette λ_s e λ_d le lunghezze degli scomparti adiacenti al tirante che si considera, il peso P sopportato dal tirante è $P = \frac{1}{2}(\lambda_s + \lambda_d)(p + h)$ e quindi la sezione ω dello stesso è data dalla relazione $\frac{P}{\omega} = R_t$.

L'impalcato può avere profilo orizzontale od in contropendenza ascendente o ad arco parabolico, e sia h l'altezza compresa fra il punto più basso **0** della fune ed il punto più alto dell'impalcato. La *lunghezza dei tiranti* consta della porzione y, Fig. 598, compresa fra l'orizzontale passante per **0** e la fune e della porzione z compresa fra detta orizzontale ed il profilo dell'impalcato. La prima si calcola colla formula $y = \frac{f}{c^2}x^2$, essendo x la distanza del tirante che si considera dal punto **0**, e la seconda z è costante per l'impalcato orizzontale, cioè $z = h$, ed in caso contrario è variabile, cioè $z = h + y_,$ dove $y_,$ varia colla legge delle ordinate di un arco di parabola, o di una retta inclinata, e quindi facilmente calcolabile.

γ) **Travi longitudinali di fronte.** — Queste travi sono sostenute dai tiranti in molti punti assai vicini, equidistanti o quasi, e quindi si fanno di dimensioni costanti su tutta la loro lunghezza, calcolandole coi noti procedimenti, e prendendo a base dei calcoli il tratto di trave di massima lunghezza compreso fra un tirante ed il successivo, e supponendolo liberamente appoggiato agli estremi.

δ) **Ritti di sospensione.** — È opportuno che la tangente dell'arco al punto di sospensione ed il tratto rettilineo di fune abbiano eguale inclinazione alla verticale ed allora il ritto è soggetto unicamente ad una pressione verticale diretta secondo l'asse del medesimo. Se il ritto è in muratura la base deve avere tale riquadratura che la pressione unitaria uniforme risultante non sia superiore ai limiti consentiti dalla pratica: se è metallico si trova nelle condizioni di un solido caricato di punta, e la riquadratura si determina colle solite norme. Qualora le suddette inclinazioni non riescono eguali, allora il ritto è soggetto in corrispondenza al punto di sospensione ad una forza orizzontale. Se il piedritto è in muratura è soggetto ad una pressione obliqua, che non deve sortire dalla sua base, anzi deve essere compresa nel terzo mediano della medesima. Se il ritto è metallico bisogna distinguere due casi: quando esso è incastrato al piede, ed allora oltre che essere caricato di punta è soggetto altresì ad uno sforzo di flessione dipendente dalla forza orizzontale, che è facile di determinare, e la riquadratura deve calcolarsi in base ed entrambe queste due azioni: quando esso gira a cerniera intorno al suo piede, ed allora è soltanto caricato di punta, e la riquadratura si determina coi soliti procedimenti.

Osservazione. — Questo tipo di ponti se, oltre al vantaggio di una grande economia, offre anche quello di poter superare facilmente grandissime portate, presenta però degli inconvenienti così gravi rispetto alla resistenza ed alla durata che ora è caduto in discredito. Difatti il carico mobile facendo mutare continuamente la curva d'equilibrio produce delle forti oscillazioni e quindi ne nascono delle scosse verticali, la cui azione ripetuta può produrre la rottura dei tiranti; d'altronde è assai difficile di conseguire un buon sistema di controventamento e quindi l'impalcatura resta affatto esposta alla violenza dei venti, la cui azione riesce assai perniciosa stante la leggerezza e la conformazione del ponte che può essere sollevato e capovolto.

339. Ponti sospesi rigidi o ad archi rovesci. — Ultimamente si costruirono dei ponti sospesi rigidi, nei quali cioè le funi sono sostituite da archi di ferro laminato che sono collegati con un traliccio ai travi longitudinali che sopportano direttamente il tavolato. Questi archi possono anche essere costituiti da due eguali porzioni unite da una cerniera nel vertice, che sta al basso, a somiglianza dei ponti ad archi con tre cerniere.

INDICE

PARTE I.

RIASSUNTO DELLE TEORIE SULLA RESISTENZA DEI MATERIALI

GENERALITÀ

Forze esterne . . *Pag.* 1
Forze interne . . . . » *ivi*
Ricerca delle forze esterne ed interne . . . . . » 2

I. TRAZIONE

Resistenza allo snervamento » 3
Limiti della resistenza allo snervamento . . . » 5
Influenza del peso del solido sull'allungamento . . » 6
Resistenza alla rottura . » 7
Carico di sicurezza . . » 9
Resistenza dei fili di ferro » 12

II. COMPRESSIONE

Resistenza allo snervamento » 13
Limite della resistenza allo snervamento . . . » 14
Resistenza alla rottura . » 15
Carico di sicurezza . . » 16
Resistenza dei solidi che si piegano sotto l'azione di forze comprimenti, ossia dei solidi caricati di punta . . » 17
Formule empiriche di Hodgkinson e regola di Rondelet per i solidi di legno . . » 18
Formule empiriche di Hodgkinson per le colonne di ghisa » 19
Formule empiriche di Lowe per le colonne di ghisa e di ferro » 24
Colonne vuote . . . . » 27
Metodo dei coefficienti di riduzione . . . . . » *ivi*
Metodo degli equivalenti di compressione . . . » 30
Resistenza dei rulli . . » 32
Resistenza delle pietre . » 33

III. SCORRIMENTO O TAGLIO

Resistenza alla rottura . *Pag.* 42
Carico di sicurezza . . » 44

IV. FLESSIONE

Generalità . . . » 45
Leggi sulla flessione . » 46

A) Forze interne o reazioni molecolari

Natura delle reazioni molecolari . . . . » 48
Resistenza al taglio . . » 49
Momento resistente nei limiti di elasticità . . . » 50
Resistenza rispetto alla rottura » 52
Posizione dell'asse neutro. » 55
Equazioni di condizione per la stabilità . . . » *ivi*
Determinazione dei baricentri » 56
Altra espressione del momento resistente . . . » 60
Determinazione grafica del momento resistente . . » 62
Momenti di inerzia di figure semplici regolari. . . » 66
Momento di inerzia rispetto ad un asse parallelo all'asse neutro . . . . » 71
Momenti di inerzia di figure irregolari e composte . » *ivi*
Formule approssimative per la determinazione spedita dei momenti di inerzia . . » 73
Determinazione grafica dei momenti d'inerzia . . » 79
Raggi di inerzia . . » 84
Differenti valori del momento d'inerzia per figure della stessa area, ma di forma diversa » 86

B) **Forze esterne**

1. Sforzi di taglio e momenti inflettenti prodotti da carichi di posizione invariabile

a) Processo analitico.

Carichi concentrati . . *Pag.* 88
Peso uniformemente distribuito . . . . . » 89
Azione simultanea di un peso uniformemente distribuito, e di carichi concentrati . » 90

b) Processo grafico

Carichi concentrati . . » 91
Peso uniformemente distribuito » 93
Pesi concentrati e peso uniformemente distribuito . » 94

2. Sforzi di taglio e momenti inflettenti prodotti da carichi mobili

a) Processo analitico.

Carico unico concentrato » 95
Sistema di molti carichi concentrati . . . . . » 96
Carico uniformemente distribuito . . . . . » 103
Azione simultanea di un sistema di carichi concentrati e di un peso uniformemente distribuito . . . . » 104
Azione simultanea di un peso permanente e di un carico mobile, entrambi uniformemente distribuiti . . . » *ivi*

b) Processo grafico.

Sistema di carichi concentrati. » 106
Carico uniformemente distribuito 110
Azione simultanea di due pesi uniformemente distribuiti, uno permanente, l'altro mobile » *ivi*
Relazione fra il momento inflettente e lo sforzo di taglio » 111
Freccia dipendente dalla flessione . . . . . » 112
Ricerca del momento inflettente e dello sforzo di taglio per travi incastrate . . » 116
Momenti inflettenti e freccie di massimo valore . . » 117

C) **Forze radenti orizzontali.**

Valore delle forze radenti orizzontali . . . . » 122
Rappresentazione grafica delle forze radenti orizzontali *Pag.* 125
Resistenza alle forze radenti orizzontali . . . . . » 126

D) **Flessione dei solidi caricati di punta.**

Formule teoriche . . » 128
Formule empiriche . . » 131

E) **Trave continua su piu appoggi.**

a) Appoggi fissi.

Generalità . . . » 134
Espressione generale del momento inflettente . . » *ivi*
Espressione generale dello sforzo di taglio . . . » 136
Espressione generale delle reazioni degli appoggi . » *ivi*
Determinazione dei momenti inflettenti sugli appoggi . » 137
Rappresentazione grafica dei momenti inflettenti . . » 139
Rappresentazione grafica degli sforzi di taglio . . » 142

b) Appoggi mobili.

Momenti sugli appoggi ed abbassamenti . . . . » 143

V. SISTEMI RETICOLARI STATICAMENTE DETERMINATI.

a) Processo analitico.

Metodo dei momenti statici pel calcolo delle tensioni . » 147
Travature poligonali . » 148
Posizione del carico mobile per le tensioni (*mas*) e (*min*) » 151
Travature diritte . . » 152

b) Formule generali.

Formule generali per il calcolo delle tensioni nelle travate reticolari . . . . . » 155

c) Processo grafico.

Carichi fissi.

Metodo delle figure reciproche » 160

Carichi mobili.

Generalità . . . » 163
Metodo delle sezioni o dei momenti statici. . . » *ivi*

VI. DETERMINAZIONE DEI COEFFICIENTI DI LAVORO SECONDO LA LEGGE DI WÖHLER.

Generalità . . . *Pag.* 166
Determinazione della resistenza al lavoro . . . » *ivi*
Carico di sicurezza o coefficiente di lavoro . . . » 174

VII. SPINTA DELLE TERRE.

Generalità . . . . » 178

a) Processo analitico.

Terrapieno spianato di livello colla sommità del muro che deve sostenerlo, e caricato superiormente di un peso uniformemente distribuito . » 179
Terrapieno spianato di livello colla sommità del muro, senza sopraccarico . . . *Pag.* 185
Centro di pressione . » 186
Terrapieno spianato orizzontalmente e sopraccaricato di un peso uniformemente distribuito . . . . » *ivi*
Terrapieno senza sopraccarico » 187

b) Processo grafico.

Generalità . . . . » 188
Terrapieno spianato di livello colla sommità del muro, senza sopraccarico, e col muro profilato a scarpa . . » 189
Terrapieno sopraccaricato » 190
Casi particolari . . » 191
Determinazione del centro di pressione . . . » 193

PARTE II.

PONTI METALLICI
COSTRUZIONE E CALCOLI DI STABILITÀ

Premesse Generali.

Diversi tipi di ponti metallici *Pag.* 197
Più opportuna collocazione del ponte . . . . » 198
Luce libera . . . » 199
Altezza libera . . . » *ivi*
Altezza della costruzione . » *ivi*
Franco . . . . » 200
Travi principali ed impalcato » *ivi*

IMPALCATO
Costruzione.

Generalità . . . » 202

A) Suolo per ponti pedonali.

Legname . . . . » *ivi*
Pietra da taglio . . » 203
Lamiera di ferro rigata . » *ivi*
Coperta d'asfalto . . » 204

B) Suolo per ponti carrozzabili.

1) Carreggiata

a) Legname.

Tavolato semplice . . » 204
Tavolato con ghiaia . » 205
Coperta a dadi . . » 206

b) Pietra.

Volte in mattoni . . *Pag.* 207
Lastre in pietra da taglio » 208

c) Ghisa.

Piastre a costole . . » 209
Le piastre a celle . . » *ivi*

d) Ferro.

Lamiera ondulata . . » 210
Lamiere cilindriche . . » 212
Lamiere gobbe . . . » 213
Ferri sagomati . . . » 215
Tipi da preferirsi e posizione in opera dei ferri speciali » 218

2) Marciapiedi

Varie strutture di suolo . » 220
Sopraelevazione dei marciapiedi e scolo dell'acqua . . » *ivi*
Scansaruote . . . » 221

C) Suolo per ponti di ferrovia.

Rotaie . . . . » 222
Traversine . . . » *ivi*
Lungarine . . . » 224
Lungarine armate . . » 225

Appoggio diretto delle rotaie sulle travi metalliche . *Pag.* 225
Tavolato . . . . . » 226
Provvedimenti contro il deragliamento . . . » 228
Coperta di ballast . . » 229

D) **Travi dell'impalcato.**

Travi trasversali e longitudinali . . . . . » *ivi*
Travi per marciapiedi . » 238

Calcoli di stabilità

Generalità . . . » 240
Carico permanente . . » *ivi*
Carico accidentale . . » 241

A) **Suolo per ponti pedonali.**

Peso complessivo sull'unità di lunghezza . . . » 246
Tavoloni di legname . » *ivi*
Lastre di pietra . . » 247
Lamiera di ferro rigata . » 250

B) **Suolo per ponti carrozzabili.**

1) **Carreggiata**

Distribuzione della pressione col mezzo della ghiaia . » 252
Tavoloni di legname . » 254
Lamiere ondulate . . » 258
Lamiere cilindriche . . » 262
Lamiere gobbe . . . » 266
Ferri sagomati . . . » 269
Volte in mattoni . . » 274

2) **Marciapiedi**

Suolo per marciapiedi . » 276

C) **Suolo per ponti ferroviari.**

Suolo per ponti ferroviari » *ivi*

D) **Travi dell'impalcato.**

Generalità . . . . » *ivi*

PONTI PEDONALI.

Travi trasversali . . » 277

PONTI CARRETTIERI.

Carichi . . . . . » 279
Appoggio diretto del tavolato sulle travi trasversali . » *ivi*
Appoggio del tavolato sopra correntini . . . . » 291

PONTI FERROVIARI.

Lungarine . . . » 299
Travi trasversali . . » 303
Determinazione grafica di P_0 » 307

STABILITÀ DELLE TRAVI COL GAMBO A TRALICCIO

Natura e valore degli sforzi nelle sbarre del traliccio . *Pag.* 309
Travi trasversali per ponti carrettieri . . . . » 313
Travi trasversali per ponti ferroviari . . . . » 317

TRAVI PER MARCIAPIEDI E MENSOLE.

Carichi . . . . . » 318
Travi frontali . . . » *ivi*
Mensole a parete piena . » 319
Mensole senza gambo . » 321
Mensole col gambo reticolato » 323

I. PONTI A TRAVATA CON TRAVI DIRITTE E RETTILINEE

Generalità . . . . » 327

A) **Ponti ad una travata di piccola portata.**

Forma delle travi . . » 328

PONTI PEDONALI O PASSERELLE.

Costruzione.

Larghezza . . . » *ivi*
Vari tipi . . . . » 329
Ponticello per giardino . » *ivi*
Ponticello privato . . » 330
Ponticello con gradini . » 331

Calcoli di stabilità

Travi principali . . » *ivi*

PONTI PER STRADA ORDINARIA.

Costruzione.

Generalità . . . » 337
Numero e forma delle travi principali . . . . » 338
Palco del Ponte . . » *ivi*
Ponti senza marciapiedi . » 339
Controventi . . . » 340
Appoggi delle travi . . » 341
Ponti con marciapiedi . » *ivi*

Calcoli di stabilità.

Appoggio diretto del tavolato » 345
Appoggio del tavolato sopra travi secondarie . . . » 348
Travi principali col gambo a traliccio . . . » 353

PONTI PER FERROVIA.

Costruzione.

Generalità . . . *Pag.* 356
Sovrapassaggi con rotaie . » 358
Ponti con sole travi principali sotto rotaia . . . . » 359
Ponti con travi gemelle . » 360
Ponti con travi trasversali » 361
Ponti con più di due travi principali per ogni binario . » 362

Calcoli di stabilità.

Ponti senza travi trasversali » 363
Ponti con travi trasversali » 365

STABILITÀ DELLE TESTATE.

Verifica delle condizioni di stabilità . . . . . » 368

B) Ponti ad una sola travata rettilinea di grande portata

Costruzione.

Generalità . . . » 373
Ponti pedonali . . » *ivi*
Ponti per strada ordinaria » 374
Ponti per ferrovia . . » *ivi*
Ponti col binario in curva » 376
Ponti col suolo in pendenza » 381
Congiunzione dei ponti per strada ordinaria e ferrovia . » 382

Travi principali.

Forma delle travi principali » 383
Altezza delle travi principali » 384
Generalità sui vari tipi di traliccio . . . . . » 385
Nervature o briglie . . » 390
Sbarre del traliccio . . » 394
Collegamento delle sbarre del traliccio colle nervature » 395
Collegamento delle sbarre del traliccio fra loro . . » 396
Montanti estremi o pareti sugli appoggi . . . . » 397
Attaccatura delle travi trasversali alle principali . » 399

Controventi.

Generalità . . . » 400
Controventi verticali o trasversali 400
Controventi orizzontali . » 402

Appoggi ed apparecchi di dilatazione.

Generalità . . . » 403
Appoggi fissi . . . » 404
Appoggi mobili . . *Pag.* 404
Appoggi oscillanti . . » 406

B) Calcoli di stabilità

Impalcato.

Calcoli per l'impalcato dei ponti con binario in curva . » 407

Travi principali.

Carico permanente . . » 409
Carico accidentale . . » 413

TRAVI A TRALICCIO SIMMETRICO MULTIPLO CON MAGLIE PICCOLE

Generalità . . . » 421
Lunghezza totale e teorica delle travi principali . . » *ivi*
Nervature . . . » 422
Traliccio . . . » 425
Pareti sugli appoggi . » 427

TRAVI A TRALICCIO DISSIMETRICO

Procedimento numerico.

Generalità . . . » 432
Azione dei carichi . . » 433
Influenza della posizione dell'impalcato . . . . » 434

Formule generali.

Generalità . . . » 446
Travi a traliccio dissimetrico semplice, con sole diagonali stirate» 448
Travi a traliccio dissimetrico composto con diagonali tese e compresse . . . » 456

Procedimento grafico.

Generalità . . . » 462
Travi a traliccio dissimetrico semplice con sole diagonali stirate . . . . » 463
Travi a traliccio dissimetrico doppio . . . . » 468
Travi a traliccio dissimetrico ugnolo con diagonali stirate e compresse . . . » 473

TRAVI A TRALICCIO SIMMETRICO MULTIPLO A GRANDI MAGLIE

Procedimento numerico.

Generalità . . . » 476

Procedimento grafico.

Travi a traliccio simmetrico doppio a grandi maglie . » 488

Controventi.

Controventi verticali . *Pag.* 490
Controventi orizzontali . » 491

Appoggi ed apparecchi di dilatazione.

Appoggi fissi . . . » 494
Appoggi mobili . . » *ivi*
Appoggi oscillanti . . » 497

C) Ponti a più travate rettilinee continue

Costruzione.

Generalità . . . » 499

Calcoli di stabilità.

Generalità . . . » 500
Carico permanente ed accidentale . . . . . » *ivi*
Formule numeriche per i momenti sugli appoggi . » 501
Ipotesi sulla posizione del carico mobile . . . . » 506
Rapporto fra le travate estreme ed intermedie . . » 510
Tracciamento del diagramma dei momenti inflettenti . » 511
Tracciamento del diagramma degli sforzi di taglio . » 513
Montanti sugli appoggi . » 514

Chiodature.

Generalità . . . . » 520

Costruzione.

Bulle e Bolloni . . » *ivi*

Calcoli di stabilità.

Resistenza delle chiodature » 523
Chiodature per le sbarre stirate » 525
Sbarre compresse . . » 526
Chiodature per le travi composte . . . . » 527

Piedritti.

Costruzione.

Generalità . . . » 531
Piedritti di muratura . » 532
Piedritti ad aria compressa » *ivi*
Piedritti interamente metallici » *ivi*

Calcoli di stabilità.

Spalle o testate . . » 535
Pile . . . . . » 538

II. PONTI CON TRAVI POLIGONALI

Costruzione.

Generalità . . . *Pag.* 543
Forma delle nervature . » *ivi*
Tipi di traliccio e forma delle sbarre . . . . » 544
Controventi . . . » *ivi*
Estremi delle travi . . » *ivi*
Apparecchi di dilatazione » 545

Calcoli di stabilità.

Generalità . . . » *ivi*
Travi colla nervatura inferiore rettilinea . . . » 546
Travi colle due nervature poligonali . . . » 548
Rapporto delle altezze di due verticali successive . » 550

Travi paraboliche.

Procedimento numerico.

Forma della trave . . » 551
Calcolo delle tensioni . » 555

Formule generali.

Numero pari di scomparti » 562
Numero dispari di scomparti » 567

Procedimento grafico.

Forma della trave . . « 571
Calcolo delle tensioni . » 572
Altro procedimento per il calcolo delle tensioni . » 575

Travi Schwedler (iperboliche).

Procedimento numerico.

Forma della trave . . » 580
Calcolo delle tensioni mediante le equazioni dei momenti statici » 589

Formule generali pel calcolo delle tensioni.

Calcolo delle tensioni mediante le formule . . . » 590

Procedimento grafico.

Forma della trave . . » 595
Calcolo delle tensioni . » 596

Travi Pauli.

Procedimento numerico.

Forma della trave . . » 599
Calcolo delle tensioni mediante le equazioni dei momenti statici » 603

Formule generali.

Calcolo delle tensioni col mezzo di formule . . . *Pag.* 605

Procedimento grafico.

Forma della trave . . » 611
Calcolo delle tensioni . » 609

TRAVI PARABOLICO-SMUSSATE.

Forma della trave . . » 614
Calcolo delle tensioni . » 616

TRAVI ELLITTICHE.

Forma della trave . . » 562
Calcolo delle tensioni . » 630

Determinazione della riquadratura delle sbarre nelle travi a grandi maglie

Generalità . . . . » 635
Riquadratura delle sbarre » 637

III. PONTI AD ARCHI

Costruzione.

Generalità . . . . » 647
Armature con archi elastici » *ivi*
Armature reticolari ad arco con cerniere . . . . » 649
Numero delle armature ad arco » *ivi*
Controventi . . . . » 650
Appoggi . . . . . » 651

Calcoli di stabilità.

Carico permanente . . » 653
Carico mobile . . . . » 655

Archi elastici.

Generalità . . . . » 657
Natura delle tensioni che cimentano l'arco . . . . » *ivi*

Archi elastici con tre cerniere.

Reazioni d'imposta . . » 662
Curva delle reazioni d'imposta » 664
Posizione più sfavorevole del sopraccarico . . . . » 665
Determinazione di N, T, M, M_e, M_i . . . . . » 666

Archi elastici con due cerniere.

Reazioni d'imposta . . » 671
Curva delle reazioni di imposta » 678
Posizione più sfavorevole del sopraccarico . . . . » 679
Determinazione di N T M M_e M_i » 680

Archi elastici senza cerniere.

Reazione di imposta . . *Pag.* 683
Curva delle reazioni di imposta » 685
Linea inviluppante delle reazioni di imposta . . . . » 686
Posizione più sfavorevole del sopraccarico . . . . » 689
Determinazione di N, T, M, M_e, M_i . . . . » *ivi*

DETERMINAZIONE DELLE RIQUADRATURE NELLE ARMATURE CON ARCHI ELASTICI

Arco o nervatura inferiore » 692
Montanti . . . . . » 693
Corrente o nervatura superiore » *ivi*

Armature reticolari ad arco con cerniere.

Generalità . . . . » 708
Reazioni sulla cerniera di chiave » 709
Determinazione delle tensioni delle varie sbarre . . . » 719

Cerniere.

Raggio delle cerniere . » 730

Piedritti.

Testate.

Generalità . . . . » 731
Verifica delle condizioni di stabilità . . . . . » *ivi*
Posizione sfavorevole del sopraccarico nell'arcone . . » 733

Pile.

Generalità . . . . » 736
Verifiche di stabilità . » 737
Posizione più sfavorevole del sopraccarico nell'arcata . » *ivi*

IV. PONTI MOBILI

Generalità . . . . » 752
Ponti girevoli . . . . » 753
Congegno per il movimento » 754
Ponti levatoi . . . . » 758
Ponti scorrevoli . . . » 759
Calcoli di stabilità . . » *ivi*

V. PONTI SOSPESI

Costruzione . . . . » 760
Calcoli di stabilità . . » 762
Ponti sospesi rigidi o ad archi rovesci . . . . . » 767

ERRATA

Pagina	*Linea*	*In luogo di*	*correggasi*
52	5 (Form. V)	$\ldots\ldots + \frac{E_t}{\rho}\int_0^c \ldots\ldots$	$\ldots\ldots + \frac{E_c}{\rho}\int_0^c \ldots\ldots$
53	11	(III)	(V)
77	3	$I_1 = \frac{}{12}\{\ldots\ldots$	$I_1 = \frac{1}{12}\{\ldots\ldots$
92	5	.....P K Q.....	.....e P K Q.....
100	14 (Form. 60)	$\frac{\Sigma P_s}{l-x}$	$\frac{\Sigma P_d}{l-x}$
105	15	$\ldots\ldots - k\,a$	$\ldots\ldots - k\,a^2$
183	10 (Form. VI)	$\ldots\ldots\left(\frac{\sqrt{fc+ab}-\sqrt{fc}}{b}\right)$	$\ldots\ldots\left(\frac{\sqrt{fc+ab}-\sqrt{fc}}{b}\right)^2$
»	11	(126)	(V_a)
203	ult.	Tav. 3ª	Tav. 4ª
204	29	Tav. 4ª	Tav. 2ª
»	31	Tav. 5ª	Tav. 3ª
207	26	Tav. 7ª	Tav. 5ª
256	14	$d = \frac{b}{2}$	$d = \frac{s}{2}$
257	9 (Form. 150)	$\times$	+
290	1	.....(7,0 — 395).....	.....(7,0 — 3,95).....
591	8	$\frac{P}{2}(N+1-2m) - \frac{\lambda\, m\,(m-1)}{a_m}$	$\frac{P}{2}\{(N+1-2m) - \frac{\lambda\, m\,(m-1)}{a_m}\{$
686	10 (Formola)	(476)	(487)
687	7 »	(477)	(488)
»	8 »	(478)	(489)
»	15 »	(479)	(490)
688	1 »	(479)	(490)
696	ult.	.....per tutta la corda.	.....su tutta la corda.
702	17	$A = \frac{800}{2 \times 15}\{\ldots\ldots$	$A = \frac{800}{4 \times 15}\{\ldots\ldots$

UNIVERSITA' FACOLTA' D'INGEGNERIA
BIBLIOTECA CENTRALE
ARCHIVIO
— PADOVA —

BIBLIO SCUOLA DI INGEGNERIA
— PADOVA —

BOLOGNA ENRICO
LEGATORE DI LIBR.
ROVIGO

CHICCHI

PONTI
METALLICI

UNIVERSITÀ DI PADOVA
FACOLTÀ D'INGEGNERIA
BIBLIOTECA CENTRALE
SILOS
IX
D
166.1