TOPOLOGIA MODULO B
A.A 2000/2001

GIUSEPPE DE MARCO

1. Spazi quoziente

1.1. **Definizione e preliminari.** Avendo una funzione $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$, dove (X, τ) e (Y, σ) sono spazi topologici, è tanto più difficile per f essere continua quanto più fine è la topologia σ sull'insieme di arrivo Y, e tanto meno fine è quella τ sull'insieme di partenza. Se f è continua quando sull'insieme di arrivo c'è la σ, è significativo sapere che lo è ancora per una topologia più fine di σ. Sia (X, τ) spazio topologico, Y insieme, $f : X \to Y$ una funzione. Se su Y si pone la topologia banale, chiaramente f è continua; è interessante un'eventuale topologia più fine tra tutte quelle che rendono f continua; questa esiste ed è detta *topologia quoziente*, talvolta anche *topologia finale*, di f.

. *Nelle ipotesi e notazioni precedenti, la topologia quoziente di f è*

$$\tau(f) = \{V \subseteq Y : f^{\leftarrow}V \in \tau\}.$$

Dimostrazione. Che la precedente sia una topologia è conseguenza del fatto che l'antiimmagine conserva unioni ed intersezioni arbitrarie. È evidente che f è in tale topologia continua, e che se σ è una topologia su Y che rende f continua, allora $\sigma \subseteq \tau(f)$: basta ricordare che una funzione è continua se e solo se le antiimagini degli aperti sono aperte. □

Osserviamo che nella topologia quoziente un sottoinsieme $G \subseteq Y$ è chiuso se e solo se $f^{\leftarrow}G$ è chiuso in Y. Si noti che su $Y \setminus f(X)$ la topologia quoziente induce la topologia discreta, banalmente; per lo più si richiede ad f di essere suriettiva, oppure il nome topologia quoziente viene riservato alla topologia ottenuta come sopra sull'immagine $f(X)$ di f. Un caso frequente è quello di avere una relazione di equivalenza R su di uno spazio topologico X, e di avere come f la proiezione canonica $q : X \to X/R$ sull'insieme quoziente X/R. Chiaramente questo caso è il caso generale, con R la relazione di equivalenza $K(f)$ associata ad f, le cui classi di equivalenza sono le fibre di f: in questo ordine di idee, spesso Y viene pensato come l'insieme delle fibre di f; gli aperti quoziente corrispondono agli aperti *saturi* di X, cioè a quegli aperti di X che sono unione di fibre.

Se (X, τ) ed (Y, σ) sono spazi topologici, ed $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ è continua, in generale si ha $\sigma \subseteq \tau(f)$; se $\sigma = \tau(f)$, si dice che f è *quoziente*, che è una funzione quoziente.

Proposizione. *Siano X, Y spazi topologici, $f : X \to Y$ suriettiva e continua. Se f è* aperta *(che significa: $f(A)$ è aperto in Y, per ogni aperto A di X), oppure è* chiusa *(che significa: $f(F)$ è chiuso in Y, per ogni chiuso F di X), allora f è quoziente.*

Dimostrazione. Essendo f suriettiva si ha $B = f(f^{\leftarrow}B)$ per ogni $B \subseteq Y$; se $V \subseteq Y$, $f^{\leftarrow}(V)$ è aperto in X, ed f è aperta, allora $V = f(f^{\leftarrow}V)$ è aperto in Y, e quindi f è quoziente; similmente per i chiusi, se f è chiusa. □

Si noti che quando f è quoziente f è aperta se e solo se per ogni aperto A di X si ha che $f^{\leftarrow}(f(A))$, saturato di f mediante la relazione di equivalenza $K(f)$, è aperto; $f^{\leftarrow}(f(A))$ può anche essere descritto come l'unione di tutte le fibre di f che intersecano A. Similmente, f è chiusa se e solo se il saturato $f^{\leftarrow}(f(C))$ di ogni chiuso C di X è chiuso. Si noti: se $f : X \to Y$ è continua e suriettiva, X è compatto, ed Y è di Hausdorff, allora f è chiusa (la dimostrazione si lascia al lettore), e se f è suriettiva è allora anche quoziente: in altre parole, Y è omeomorfo allo spazio $X/K(f)$ ottenuto identificando le fibre di f con singoli punti. Alcuni dei seguenti esempi illustrano questa idea.

Esempio 1. Sia $X = [0, 1]$ l'intervallo chiuso unitario con la topologia usuale. Identifichiamo gli estremi dell'intervallo lasciando stare gli altri punti; si considera cioè la relazione R in cui l'unica classe di equivalenza non banale è $\{0, 1\}$. Si intuisce che X/R, nella topologia quoziente, è omeomorfo ad un cerchio. La cosa si dimostra rigorosamente nel modo seguente; si considera $f : X \to \mathbb{S}^1$ data da $f(t) =$

$(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$; f è continua e suriettiva, e le fibre di f sono esattamente le classi di equivalenza di R; la topologia di $\mathbb{S}^1$ è quella quoziente perché X è compatto ed $\mathbb{S}^1$ è di Hausdorff; naturalmente $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ è il circolo unitario in $\mathbb{R}^2$.

Esempio 2. Sia $X = [0,1] \times [0,1]$ il quadrato unitario con la topologia usuale (indotta dalla euclidea su $\mathbb{R}^2$). Identifichiamo in X i punti del lato destro con quelli del lato sinistro con la stessa ordinata, lasciando gli altri indisturbati; cioè si considera su X la relazione di equivalenza in cui le uniche classi non ridotte a singoli sono $\{(0,y),(1,y)\}$, al variare di $y \in [0,1]$. Il quoziente è chiaramente omeomorfo al cilindro $Y = \mathbb{S}^1 \times [0,1]$: si prende $f : X \to Y$ definita da $f(x,y) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), y)$, banalmente continua e suriettiva, e le cui fibre sono esattamente quelle descritte come classi di equivalenza in X (quest'esempio è in fondo solo il precedente con una coordinata in piú, che però non gioca alcun ruolo).

Esempio 3. Sempre $X = [0,1] \times [0,1]$, ma ora identifichiamo i punti del lato destro con quelli del lato sinistro con la stessa ordinata, ed anche i punti del lato superiore con quelli del lato inferiore con la stessa ascissa: le classi di equivalenza che non siano singoli punti sono quindi ora $\{(0,y),(1,y)\}$, al variare di $y \in [0,1]$, ma anche $\{(x,0),(x,1)\}$, al variare di $x \in [0,1]$. Il quoziente è evidentemente omeomorfo ad un *toro*, (camera d'aria di un pneumatico), $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{U} \times \mathbb{U}$, mediante

$$f(x,y) = (e^{2i\pi x}, e^{2i\pi y}).$$

Esempio 4. Sempre $X = [0,1] \times [0,1]$, ma ora identifichiamo i punti del lato destro con quelli del lato sinistro con la stessa ordinata, ed invece $(x,0)$ viene identificato con $(1-x,1)$; le classi di equivalenza non banali sono quindi $\{(0,y),(1,y)\}$, al variare di $y \in [0,1]$, e $\{(x,0),(1-x,1)\}$, al variare di $x \in [0,1]$. Lo spazio che si ottiene è l'*otre di Klein*, o bottiglia di Klein; si può dimostrare che esso ha struttura di varietà $2-$dimensionale, che non è però sottovarietà di $\mathbb{R}^3$, ma solo di $\mathbb{R}^4$. Per ora, ci limitiamo ad invitare il lettore a mostrare che l'otre di Klein è spazio di Hausdorff; si tratta di esibire, per ogni coppia di classi di equivalenza distinte, aperti disgiunti di X che le contengono, che siano saturi rispetto alla relazione di equivalenza data, cosa non difficile.

Esempio 5. Piano proiettivo Sempre $X = [0,1] \times [0,1]$, ed ora identifichiamo i punti del bordo del quadrato simmetrici rispetto al centro dello stesso, cioè le classi di equivalenza non banali sono $\{(x,y),(u,v)\}$, dove uno almeno tra (x,y) è 0 oppure 1, e così per (u,v) ed inoltre $(x+u)/2 = (y+v)/2 = 1/2$. Il quoziente è il *piano proiettivo reale*, anch'esso sottovarietà $2-$dimensionale di $\mathbb{R}^4$, che poi vedremo in altro modo. Mostrare che è di Hausdorff.

Esercizio 6. Composizioni di mappe quoziente sono quoziente (se $f : X \to Y$ è quoziente, e $g : Y \to Z$ è quoziente, allora $g \circ f : X \to Z$ è quoziente).

Esempio 7. Cono su uno spazio dato uno spazio topologico X, il *cono* su X è lo spazio così ottenuto: si fa il quoziente di $X \times [0,1]$ rispetto all'equivalenza su $X \times [0,1]$ che ha $X \times \{1\}$ come unica classe non banale; l'unico punto con cui viene identificata tale classe è il *vertice* v del cono; il cono si indica con CX. Si verifichi che $CX \smallsetminus \{v\}$ è omeomorfo ad $X \times [0,1[$, e che il cono è di Hausdorff se e solo se X è di Hausdorff. Supponiamo che sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$, sottospazio nella topologia euclidea; come insieme, il cono può naturalmente essere identificato con un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, usando la funzione

$$f : X \times [0,1] \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \quad \text{data da} \quad f(x,t) = (1-t)x + t\vec{e}_{n+1} = ((1-t)x, t);$$

tale funzione è continua, e le sue fibre sono esattamente le classi di equivalenza descritte, per cui la topologia indotta dalla euclidea su $f(X \times [0,1])$ è meno fine della quoziente; e si dimostra che le due topologie coincidono se e solo se X è compatto (se X non è compatto esiste una funzione $r : X \to]0, +\infty[$ continua con $\inf r(X) = 0$; $\{((1-s)x, s) : x \in X, 1 - r(x) < s \le 1\}$ è aperto nella quoziente, ma non nella euclidea).

Esercizio 8. Una funzione continua si dice *monotòna* se le sue fibre sono tutte connesse. Provare che se $f : X \to Y$ è monotona, quoziente e suriettiva, e $C \subseteq Y$ è chiuso, C è connesso se e solo se $f^{\leftarrow}C$ è connesso.

Dato uno spazio topologico X, si consideri su X la partizione data dalle componenti connesse di X; sia Y il quoziente e $p : X \to Y$ la proiezione canonica. Provare che Y è *totalmente sconnesso*, cioè che le sue componenti connesse si riducono ai singoli.

1.2. **Sottospazi di spazi quoziente.** Se $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ è quoziente, e $B \subseteq Y$, B può essere considerato con la topologia che ha in quanto sottospazio di Y, diciamola σ_B, ed anche con la topologia τ_B, quoziente della restrizione $f_B = B|f|f^{\leftarrow}B$, $f_B : f^{\leftarrow}B \to B$. Come sempre, si ha $\sigma_B \subseteq \tau_B$, ma le due topologie possono differire (si veda [Dugundji, pag 122]). A noi interessa osservare

Proposizione. *Nelle notazioni precedenti, se f è aperta, oppure chiusa, si ha $\sigma_B = \tau_B$, qualunque sia $B \subseteq Y$. Se invece B è aperto, oppure chiuso, si ha ancora $\sigma_B = \tau_B$ (senza condizioni su f).*

Dimostrazione. Esercizio. □

1.3. **Caratterizzazione della topologia quoziente.**

Proposizione. *Siano X, Y, Z spazi topologici, sia $f : X \to Y$ continua e suriettiva, e sia $g : Y \to Z$ funzione. Se f è quoziente, e $g \circ f$ è continua, allora g è continua.*

Dimostrazione. Sia W aperto di Z; $(g \circ f)^{\leftarrow}(W) = f^{\leftarrow}(g^{\leftarrow}W)$ è aperto in X, il che mostra che $g^{\leftarrow}(W)$ è aperto in Y, essendo f quoziente. □

Tale condizione caratterizza le topologie quoziente, in questo senso:

. *Se per ogni funzione $g : Y \to Z$ la continuità di $g \circ f$ implica quella di g, allora f è quoziente.*

Dimostrazione. Se $\tau(f)$ è la topologia quoziente su Y, e σ è la topologia assegnata su Y, sia $g : (Y, \sigma) \to (Y, \tau(f))$ l'identità di Y; $\varphi = g \circ f$ è continua, e per l'ipotesi g è allora continua, il che si ha se e solo se $\tau(f) \subseteq \sigma$; l'inclusione $\sigma \subseteq \tau(f)$ è sempre banalmente vera, per cui $\tau(f) = \sigma$, come voluto. □

1.4. **Fattorizzazione.** Si può dare anche per funzioni continue una fattorizzazione mediante funzioni iniettive e suriettive analoga a a quella usata in algebra.

Proposizione. *Si consideri il diagramma di funzioni continue e spazi topologici*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & Y \\ Q & \end{tikzcd}$$

dove p è suriettiva e quoziente. Esiste $g : Q \to Y$, continua, che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & Y \\ Q \arrow[ur, "g"] & \end{tikzcd}$$

se e solo se $K(p) \subseteq K(f)$; g è iniettiva se e solo se $K(p) = K(f)$, ed è suriettiva se e solo se tale è f.

Dimostrazione. La continuità di g è conseguenza del fatto che $g \circ p = f$ è continua, e p è per ipotesi quoziente. Il resto è ben noto. □

1.5. **Sezioni.** Se $f : X \to Y$ è continua, ogni sua inversa destra continua $s : Y \to X$, tale cioè che sia $f \circ s = 1_Y$ è detta *sezione continua* di f. Se f ammette una sezione continua, è suriettiva e quoziente: la suriettività è ovvia; se poi $U = f^{\leftarrow}V$ è aperto in X, essendo $V = 1_Y^{\leftarrow}V = (f \circ s)^{\leftarrow}V = s^{\leftarrow}(f^{\leftarrow}V) = s^{\leftarrow}(U)$, V è aperto in Y perché s è continua. Una sezione continua è spesso chiamata selezione continua, perché s sceglie in modo continuo elementi nella fibra $f^{\leftarrow}y$, per ogni $y \in Y$. Si noti che se $s : Y \to X$ è inversa destra di f allora s induce un omeomorfismo di Y su $S = s(Y)$, ed $s \circ f : X \to X$ è una retrazione di X su S. È una condizione molto restrittiva per una funzione l'ammettere sezioni continue: ad esempio $f : [0, 1] \to \mathbb{S}^1$ data da $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ non ammette inverse destre continue, come ben noto. Spesso una funzione suriettiva ha *localmente* delle inverse a destra, nel senso che per ogni $y \in Y$ esiste un intorno V di y ed $s : V \to X$ continua tale che $f(s(\eta)) = \eta$ per ogni $\eta \in V$; si mostri che se f ha localmente delle sezioni allora è quoziente.

1.6. **Quozienti di Hausdorff.** In generale un quoziente non è di Hausdorff. Una semplice condizione necessaria è che le classi di equivalenza siano chiuse: ciò infatti equivale a dire che nel quoziente i singoli sono chiusi (il quoziente è spazio T_1), il che come sappiamo accade negli spazi di Hausdorff. Ma anche questa condizione non è sufficiente: perché il quoziente sia di Hausdorff occorre e basta che ogni coppia di classi di equivalenza distinte siano contenute in aperti saturi disgiunti; è facile vedere che ciò non sempre accade; esempi dopo.

Proposizione. *Se $f : X \to Y$ è continua, ed Y è di Hausdorff, allora $K(f)$ è chiuso in $X \times X$. Se f è suriettiva ed aperta, e $K(f)$ è chiuso in $X \times X$, allora Y è di Hausdorff.*

Dimostrazione. Se Y è di Hausdorff, allora $\Delta(Y) = \{(y, y); y \in Y\}$ diagonale di Y, è chiusa nel prodotto $Y \times Y$ (ciò caratterizza gli spazi di Hausdorff); poiché $f \times f : X \times X \to Y \times Y$ definita da $f \times f(x_1, x_2) = (f(x_1), f(x_2))$ è continua, $K(f) = (f \times f)^{\leftarrow}\Delta(Y)$ è chiuso in $X \times X$. Se poi f è aperta e suriettiva (cosicché Y ha la topologia quoziente di f), ed $y_1, y_2 \in Y$, con $y_1 \neq y_2$, dati $x_1 \in f^{\leftarrow}y_1$ ed $x_2 \in f^{\leftarrow}y_2$ si ha $(x_1, x_2) \notin K(f)$, ed essendo $K(f)$ chiuso in $X \times X$ esistono aperti U_1, U_2, con $x_1 \in U_1$ ed $x_2 \in U_2$ tali che $(U_1 \times U_2) \cap K(f) = \emptyset$. Gli insiemi $f(U_1)$ ed $f(U_2)$ sono aperti perché f è aperta, sono disgiunti perché $(U_1 \times U_2) \cap K(f) = \emptyset$, e chiaramente $y_1 \in f(U_1)$, $y_2 \in f(U_2)$. □

Esempio 1. Da [Jänich] prendiamo il seguente esempio che sarà spiegato poi; lo spazio X è la striscia

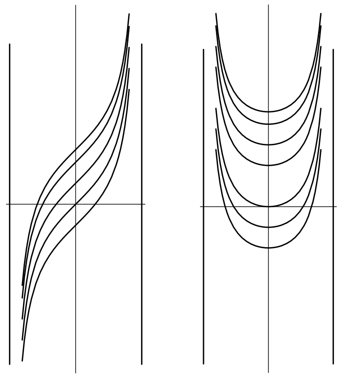


Figura 1. Quozienti: uno non è di Hausdorff, quale?

$[-\pi/2, \pi/2] \times \mathbb{R}$ del piano euclideo, in cui le classi di equivalenza sono i grafici disegnati (a sinistra $\tan x + c$, a destra $(1/\cos x) + c$, $c \in \mathbb{R}$) e le due rette verticali $x = \pm\pi/2$; mostrare che le mappe quoziente sono entrambe aperte, e che i quozienti sono T_1.

Esempio 2. (Spazi proiettivi) Sia $\mathbb{K}$ il corpo reale $\mathbb{R}$ o quello complesso $\mathbb{C}$, od anche il corpo $\mathbb{H}$ dei quaternioni di Hamilton. In $\mathbb{K}_\bullet^{n+1} = \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ introduciamo la relazione di equivalenza

$$x \sim y : \quad \text{esiste } \lambda \in \mathbb{K}^\times = \mathbb{K} \setminus \{0\} \text{ tale che sia } \quad y = \lambda x$$

dove naturalmente $y = \lambda x$ significa dire che $y_j = \lambda x_j$ per $j = 0, 1, \dots, n$, se $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ ed $y = (y_0, y_1, \dots, y_n)$; la classe di equivalenza di $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ si indica con $[x_0, x_1, \dots, x_n]$; la $(n+1)-$pla $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ di numeri non tutti nulli fornisce le *coordinate omogenee* del punto $[x_0, x_1, \dots, x_n]$. L'insieme quoziente, munito della topologia quoziente, è lo *spazio proiettivo* $n-$dimensionale su $\mathbb{K}$, $\mathrm{P}^n\,\mathbb{K}$. Mostriamo che $\mathrm{P}^n\,\mathbb{K}$ è di Hausdorff e compatto. La compattezza è immediata: se $\mathbb{K}^{n+1}$ è munito della norma euclidea $|x| = \left(\sum_{j=0}^n |x_j|^2\right)^{1/2}$, si vede subito che ogni classe di equivalenza interseca la sfera dei versori $S = \{x \in \mathbb{K}^{n+1} : |x| = 1\}$; se $p : \mathbb{K}_\bullet^{n+1} \to \mathrm{P}^n\,\mathbb{K}$ è la mappa quoziente, si ha $p(S) = \mathrm{P}^n\,\mathbb{K}$, e quindi $\mathrm{P}^n\,\mathbb{K}$ è compatto, perchè immagine continua di un compatto (di fatto, $\mathrm{P}^n\,\mathbb{K}$ è anche quoziente di S nella relazione di equivalenza indotta su S). Anzitutto p è aperta: se $A \subseteq \mathbb{K}_\cdot^{n+1}$ è aperto, il suo saturato nella relazione di equivalenza è

$$p^{\leftarrow}(p(A)) = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{K}^*} \lambda A,$$

e ciascun λA, immagine dell'aperto A nell'omotetia di rapporto λ, che è omeomorfismo di $\mathbb{K}^{n+1}$ in sé, è aperto.

Mostriamo in due modi che $\mathrm{P}^n\,\mathbb{K}$ è di Hausdorff.

Primo metodo La relazione di equivalenza è chiusa in $\mathbb{K}_\bullet^{n+1} \times \mathbb{K}_\bullet^{n+1}$: se $(x(k), y(k))$ è una successione di punti equivalenti, $y(k) = \lambda_k x(k)$ con $\lambda_k \in \mathbb{K}^*$, convergente ad $(x, y) \in \mathbb{K}_\bullet^{n+1} \times \mathbb{K}_\bullet^{n+1}$, allora $y = \lambda x$: se infatti $x_j \neq 0$ si ha anche $x_j(k) \neq 0$ per k abbastanza grande; ne segue che $\lambda_k = y_j(k)(x_j(k))^{-1}$ tende ad $y_j x_j^{-1}$ per $k \to \infty$; si può allora passare al limite nelle relazioni $y_r(k) = \lambda_k x_r(k)$ ottenendo $y_r = \lambda x_r$, per $r = 0, \dots, n$; non può essere $\lambda = 0$ perché altrimenti sarebbe $y = 0$, contro l'ipotesi $y \in \mathbb{K}_\bullet^{n+1}$.

Secondo Metodo Si abbia una forma lineare non nulla $\psi : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}$; sia $C = \{x \in \mathbb{K}^{n+1} : \psi(x) = 0\}$ il nucleo della forma; $U = \mathbb{K}^{n+1} \setminus C$ è un aperto saturo di $\mathbb{K}_\cdot^{n+1}$, come subito si vede; e $V = p(U)$ è un aperto di $\mathrm{P}^n\,\mathbb{K}$ omeomorfo ad uno spazio $\mathbb{K}^n$, un omeomorfismo s di V con la varietà affine $n-$dimensionale $E=\{x\in\mathbb{K}^{n+1}:\psi(x)=1\}$ essendo dato da

$$s[x_0,\dots,x_n]=\left(\psi(x_0,\dots,x_n)^{-1}x_0,\dots,\psi(x_0,\dots,x_n)^{-1}x_n\right).$$

In realtà s è un'inversa destra di $p_U=p|p^{\leftarrow}V=U$; la continuità di s si ottiene precisamente osservando che $s\circ p_U$ è continua, e che V ha la topologia quoziente di p_U (vedi 2); $s\circ p_U(x)=\psi(x)^{-1}x$ non è altro che la retrazione di U su E, "sezione", che ad punto $x\in U$ associa l'intersezione con E della retta per x e per l'origine. Data una coppia di punti distinti di $\mathrm{P}^n\,\mathbb{K}$ si trova sempre una forma lineare $\psi\in(\mathbb{K}^{n+1})^*$ che non è nulla su entrambi i vettori; i due punti hanno intorni disgiunti nell'aperto V legato a tale forma.

Una volta visto che gli spazi proiettivi sono di Hausdorff, è evidente che essi sono anche quozienti della sfera S dei versori.Nel caso reale, $\mathrm{P}^n\,\mathbb{R}$ è il quoziente della sfera $\mathbb{S}^n$ dei versori di $\mathbb{R}^{n+1}$ in cui si identificano coppie di punti antipodali $x,-x\in\mathbb{S}^n$. Se si considera solo l'emisfero nord chiuso di tale sfera, quello formato dai punti la cui $(n+1)-$esima coordinata è non negativa, la restrizione ad esso della mappa quoziente è ancora suriettiva; ed usando l'ovvio omeomorfismo $(\xi_1,\dots\xi_n)\mapsto\left(\xi_1,\dots\xi_n,\sqrt{1-(\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)}\right)$ della palla $n-$dimensionale chiusa con tale emisfero, si ha che $\mathrm{P}^n\,\mathbb{R}$ è anche quoziente della palla $n-$dimensionale chiusa, ottenuto identificando coppie di punti antipodali del bordo. Si noti che $\mathrm{P}^1\,\mathbb{R}$ è omeomorfo ad $\mathbb{S}^1$: ciò si vede subito grazie all'ultima osservazione, oppure in questo modo: si prende la funzione $z\mapsto z^2$ di $\mathbb{U}=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ in se stesso; f è suriettiva, ed $\mathbb{U}$ è compatto di Hausdorff, quindi $\mathbb{U}$ è quoziente di $\mathbb{U}$ mediante f; e le fibre di f sono esattamente coppie di punti antipodali di $\mathbb{U}$. Se invece si pensa a $\mathrm{P}^n\,\mathbb{C}$ come quoziente della sfera, le fibre sono qui dei circoli: se $|x|=|y|=1$, $y=\lambda x$ si ha per $\lambda=1$; la classe di equivalenza di un $x\in S$ è quindi $\{\lambda x:\lambda\in\mathbb{U}\}$. È facile vedere che $\mathrm{P}^1\,\mathbb{C}$ è omeomorfo alla compattificazione con un punto di $\mathbb{C}$ e quindi ad $\mathbb{S}^2$: si prenda ad esempio la funzione $f:S\to\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ definita da $f(z_0,z_1)=z_1/z_0$ se $z_0\neq0$, ed $f(0,z_1)=\infty$; qui è ovviamente $S=\{(z_0,z_1)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}:|z_0|^2+|z_1|^2=1\}$ (S è identificabile con $\mathbb{S}^3$). È immediato vedere che f è continua (infatti si ha $\lim_{z_0\to0(z_0,z_1)\in S}z_1/z_0=\infty$, come si vede da $|z_1/z_0|=\sqrt{1-|z_0|^2}/|z_0|\to+\infty$ se $|z_0|\to0$), e che le fibre di f sono esattamente le classi di equivalenza sopra dette. La funzione $f:\mathbb{S}^3\to\mathbb{S}^2$ è la celebre *mappa di Hopf.*

1.7. **Caso compatto.** Se il dominio è compatto e di Hausdorff si hanno naturalmente risultati migliori.

Proposizione. *Sia X compatto di Hausdorff, $f:X\to Y$ continua e suriettiva. Sono equivalenti le condizioni:*

(i) *f è chiusa.*
(ii) *Y è di Hausdorff.*
(iii) *$K(f)$ è chiusa in $X\times X$, ed f è mappa quoziente.*

Dimostrazione. (i) implica (ii): siano $y_1=f(x_1),y_2=f(x_2)$ punti distinti di Y; $\{y_1\}$ ed $\{y_2\}$ sono chiusi in Y (perché f è chiusa ed $\{x_1\}$, $\{x_2\}$ sono chiusi in X; ne segue che $F_1=f^{\leftarrow}(y_1)$ ed $F_2=f^{\leftarrow}(y_2)$ sono chiusi in X. Uno spazio compatto e di Hausdorff X è spazio normale, intendendo con ciò che chiusi disgiunti di X sono contenuti in aperti disgiunti di X (esercizio, vedi anche il "teorema di Wallace"). Esistono insomma U_1,U_2 aperti di X con $F_1\subseteq U_1$, $F_2\subseteq U_2$, ed $U_1\cap U_2=\emptyset$; tale condizione equivale ad $(X\setminus U_1)\cup(X\setminus U_2)=X$, da cui segue $f(X\setminus U_1)\cup f(X\setminus U_2)=Y$; essendo f chiusa, $f(X\setminus U_1)$ ed $f(X\setminus U_2)$ sono chiusi in Y; inoltre $y_1\neq f(X\setminus U_1)$ perchè $f^{\leftarrow}(y_1)\subseteq U_1$, e per la stessa ragione $y_2\notin f(X\setminus U_2)$; allora $V_1=Y\setminus f(X\setminus U_1)$ e $V_2=Y\setminus f(X\setminus U_2)$ sono aperti, sono disgiunti, e sono intorni di y_1 ed y_2 rispettivamente. Che se (ii) vale $K(f)$ è chiusa si è visto in generale, così come si è osservato che f è quoziente se il dominio è compatto e l'arrivo è di Hausdorff.

(iii) implica (i): sia C sottoinsieme chiuso di X; essendo f per ipotesi quoziente $f(C)$ è chiuso in Y se e solo se $f^{\leftarrow}(f(C))$ è chiuso in X. Se $C\subseteq X$ si ha

$$f^{\leftarrow}(f(C))=\mathrm{pr}_2(\mathrm{pr}_1^{\leftarrow}(C)\cap K(f))=\mathrm{pr}_2((C\times X)\cap K(f));$$

ma $C\times X$ è compatto se C è chiuso nel compatto X; allora anche $(C\times X)\cap K(f)$ è compatto, e quindi $\mathrm{pr}_2((C\times X)\cap K(f))$, compatto nello spazio di Hausdorff X, vi è anche chiuso. $\square$

In particolare quindi

Corollario. *Sia X uno spazio compatto e di Hausdorff, ed R una relazione di equivalenza su X; lo spazio X/R è di Hausdorff se e solo se R è chiusa in $X\times X$.*

1.8. **Un risultato di topologia generale.**

. Teorema di Wallace *Siano S, T spazi topologici. Se A, B sono sottospazi compatti degli spazi topologici S, T, allora gli aperti della forma $U \times V$ dove U è un aperto di S contenente A, e V è un aperto di T contenente B sono una base per gli intorni di $A \times B$ in $S \times T$ (cioè per ogni aperto Ω di $S \times T$ contenente $A \times B$ esistono U, V come sopra detto tali che sia $A \times B \subseteq U \times V \subseteq \Omega$).*

Dimostrazione. È un classico esercizio: si comincia supponendo che A consista di un unico punto, $A = \{x\}$; in tal caso, per ogni $y \in B$ esistono $U(y)$ aperto di S contenente x e $V(y)$ aperto di T contenente y tali che sia $U(y) \times V(y) \subseteq \Omega$; se $y_1, \dots, y_n \in B$ sono tali che sia $B \subseteq V(y_1) \cup \cdots \cup V(y_n)$, posto $U = \bigcap_{k=1}^n U(y_k)$ e $V = \bigcup_{k=1}^n V(y_k)$, U è aperto contenente $\{x\}$, V è aperto contenente B e si ha $U \times V = \bigcup_{k=1}^n U \times V(y_k) \subseteq \Omega$, giacché $U \times V(y_k) \subseteq \Omega$ per ogni $k = 1, \dots, n$. Si ripete poi lo stesso procedimento: per ogni $x \in A$ sappiamo che esistono un intorno aperto $U(x)$ di x in S, ed un aperto $V(x)$ di T contenente B, tali che sia $U(x) \times V(x) \subseteq \Omega$; presi $x_1, \dots, x_m \in A$ tali che sia $A \subseteq \bigcup_{j=1}^m U(x_j)$, si pone $U = \bigcup_{j=1}^m U(x_j)$ e $V = \bigcap_{j=1}^m V(x_j)$. □

Diciamo *perfetta* una funzione $f : X \to Y$ che sia continua, chiusa ($f(F)$ chiuso in Y per ogni chiuso F di X) ed a fibre compatte, cioè $f^{\leftarrow}(y)$ è compatto, per ogni $y \in Y$.

Corollario. *La proiezione parallela ad un compatto è perfetta; cioè , se T è compatto, per ogni spazio topologico X la proiezione $\mathrm{pr}_X : X \times T \to X$, $\mathrm{pr}_X(x, t) = x$, è perfetta.*

Dimostrazione. L'unica verifica non banale è che pr_X è chiusa. Se $F \subseteq X \times T$ è chiuso, ed $x \notin \mathrm{pr}_X(F)$, $\{x\} \times T = \mathrm{pr}_X^{\leftarrow}(x)$ è rettangolo compatto contenuto nell'aperto $X \times T \setminus F$; esiste allora un aperto U di X contenente x tale che $U \times T \subseteq X \times T \setminus F$; ma allora $U \subseteq X \setminus \mathrm{pr}_X(F)$. □

1.9. **Un ultimo risultato sui quozienti.**

Proposizione. *Sia $f : X \to Y$ funzione quoziente, e sia Z spazio localmente compatto (basta: ogni punto di Z ha una base di intorni compatti). Allora $f \times 1_Z : X \times Z \to Y \times Z$ è quoziente.*

Dimostrazione. Sia $V \subseteq Y \times Z$ tale che $A = (f \times 1_Z)^{\leftarrow}(V)$ sia aperto in $X \times Z$. Sia $(y, z) \in V$, e sia $x \in X$ con $f(x) = y$. Essendo A aperto, esistono un intorno U di $x \in X$, ed un intorno compatto W di z in Z tali che $U \times W \subseteq A$.Ora, $\mathrm{pr}_X((X \times W) \setminus A)$ è chiuso in X, essendo W compatto; e poiché si ha $f^{\leftarrow}(\mathrm{pr}_Y((Y \times W) \setminus V)) = \mathrm{pr}_X((X \times W) \setminus A)$ ed f è quoziente, l'insieme $\mathrm{pr}_Y((Y \times W) \setminus V)$ è chiuso in Y, e chiaramente non contiene y. Ma allora V contiene $O \times W$, dove $O = Y \setminus (\mathrm{pr}_Y((Y \times W) \setminus V))$. Quindi V è aperto in $Y \times Z$. □

2. Gruppi topologici e spazi omogenei

2.1. **Definizione di gruppo topologico.** Si chiama gruppo topologico una terna $(G, \cdot, \tau)$, dove $(G, \cdot)$ è un gruppo, e (G, τ) è uno spazio topologico tale che le operazioni di gruppo siano continue, ovvero

- La moltiplicazione $\mu : G \times G \to G$ è continua, quando $G \times G$ è munito della topologia prodotto.
- Il passaggio all'inverso $\iota : G \to G$, $\iota(x) = x^{-1}$ è continuo.

Una definizione equivalente più concisa è la seguente:

. *$(G, \cdot, \tau)$ è gruppo topologico se e solo se la topologia τ rende continua la divisione $\delta : G \times G \to G$, $\delta(x, y) = xy^{-1}$.*

Dimostrazione. Ammesso che valgano le due precedenti, si può scrivere $\delta = \mu \circ j$, dove $j : G \times G \to G \times G$ è data da $j(x, y) = (x, \iota(y)) = (x, y^{-1})$; j è continua perché tali sono le sue composizioni con le proiezioni, $\mathrm{pr}_1 \circ j = \mathrm{pr}_1$, mentre $\mathrm{pr}_2 \circ j = \iota \circ \mathrm{pr}_2$; quindi δ è continua. Se poi δ è continua, anzitutto ι è continua essendo $\iota = \delta \circ \iota_2$, dove $\iota_2 : G \to G \times G$ è definito da $\iota_2(y) = (1, y)$; si ha poi $\mu = \delta \circ j$ dove j è come sopra, continua perché tale è ι. □

2.2. **Prime conseguenze.** Il fatto importante è tuttavia la continuità delle operazioni che rendono G gruppo. Si noti che $x \mapsto x^{-1}$ è omeomorfismo. Per ogni $a \in G$, $\sigma_a : G \to G$, $\sigma_a(x) = ax$ definisce la *moltiplicazione a sinistra* per a, e similmente $\delta_a(x) = xa$ definisce la moltiplicazione a destra; ebbene

. *Moltiplicazioni destre e sinistre per fissati elementi di G sono omeomorfismi.*

Dimostrazione. Si ha $\sigma_a = \mu \circ \iota_a$, dove $\iota_a : G \to G \times G$ è definita da $\iota_a(x) = (a, x)$, per ogni $x \in G$. Quindi σ_a è continua; ha per inversa $\sigma_{a^{-1}}$, continua come σ_a, e quindi è omeomorfismo. Similmente per δ_a. □

Questo fatto permette spesso di localizzare questioni entro un gruppo topologico ad un elemento dello stesso, in genere l'elemento neutro 1. Se $\mathcal{B}$ è una base per il filtro degli intorni dell'1, allora $\{aU : U \in \mathcal{B}\}$ ed $\{Ua : U \in \mathcal{B}\}$ sono basi per il filtro degli intorni di a in G. Se U è intorno di 1, tale è anche $U^{-1} = \{x^{-1} : x \in U\} = \iota(U)$, e tale è quindi anche $W = U \cap U^{-1}$, che è simmetrico, cioè $W^{-1} = W$, e contenuto in U; il filtro degli intorni di 1 ha quindi sempre una base formata da elementi simmetrici. La continuità delle operazioni di gruppo nell'elemento neutro dice che

. *Per ogni base $\mathcal{B}$ di intorni di* 1 *nel gruppo topologico G si ha*

- *Per ogni $V \in \mathcal{B}$, esiste $U \in \mathcal{B}$ tale che sia $UU \subseteq V$ (qui ed in seguito, se $A, B \subseteq G$ si pone $AB = \mu(A \times B) = \{ab : a \in A,\, b \in B\}$).*
- *Per ogni $V \in \mathcal{B}$ esiste $U \in \mathcal{B}$ tale che $U^{-1} \subseteq V$.*

Inversamente, avendo un gruppo munito di una topologia in cui le moltiplicazioni destre e sinistre sono omeomorfismi, ed il filtro degli intorni di 1 ha le due proprietà precedenti, che equivalgono alla continuità della moltiplicazione in $(1,1)$ e di ι in 1, allora esso è gruppo topologico: si osservi che per ogni $(a,b) \in G \times G$ si può scrivere $\mu = (\sigma_a \circ \delta_b) \circ \mu \circ (\sigma_{a^{-1}} \times \delta_{b^{-1}})$, e che la continuità di μ in (a,b) è allora assicurata dalla continuità di μ in $(1,1)$; similmente, per ogni $a \in G$ si scrive $\iota = \delta_{a^{-1}} \circ \iota \circ \sigma_{a^{-1}}$, forma che mostra la continuità di ι in a.

Si noti che gli automorfismi interni sono tutti omeomorfismi.

È appena il caso di osservare che ogni sottogruppo di un gruppo topologico è gruppo topologico nella topologia indotta.

2.3. **Esempi.**

Esempio 1. Ogni gruppo discreto è gruppo topologico.

Esempio 2. $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}, \mathbb{C}^n$ sono additivamente gruppi topologici; in generale ogni spazio vettoriale topologico è additivamente gruppo topologico. Si noti che $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ nella topologia della convergenza uniforme è additivamente gruppo topologico senza essere spazio vettoriale topologico.

Esempio 3. $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^> = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sono moltiplicativamente gruppi topologici, come $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, sottogruppo compatto di $\mathbb{C}^\times$.

Esempio 4. Se V è spazio di Banach, il gruppo $\mathrm{Gl}(V)$ degli automorfismi continui di V è gruppo topologico, nella topologia indotta su esso da $\mathrm{L}(V)$, in cui le norme sono quelle operatoriali, $\|A\| = \sup\{\|Ax\|_X : \|x\|_X = 1\}$, per ogni $A \in \mathrm{L}(V)$. La moltiplicazione è continua grazie alla disuguaglianza $\|A \circ B\| \le \|A\|\|B\|$, per il passaggio all'inversa si veda ad esempio Analisi Due/2, dove si prova di piú. Si sa anche che $\mathrm{Gl}(V)$ è aperto in $\mathrm{L}(V)$; tutto si basa sul fatto che se $\|A\| < 1$ allora $1 - A$ è invertibile, con $(1-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$. In particolare $\mathrm{Gl}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ e $\mathrm{Gl}(\mathbb{C}^n) = \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ sono gruppi topologici. Si noti che il sottogruppo $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ è compatto: esso consiste delle trasformazioni unitarie di $\mathbb{C}^n$ in sé, quelle trasformazioni lineari che lasciano invariante il prodotto hermitiano $(x|y) = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j$ di $\mathbb{C}^n$, in altre parole $U \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ vuol dire che si ha $(Ux|Uy) = (x|y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{C}^n$; è equivalente asserire che si ha $|Ux| = |x|$ per ogni $x \in \mathbb{C}^n$ (sono le *isometrie* lineari della norma hermitiana) od anche che si ha $U^{-1} = U^*$, quest'ultimo essendo l'aggiunto di U rispetto al prodotto hermitiano, cioè essendo definito dalla validità della relazione $(Ux|y) = (x|U^*y)$, per ogni $x, y \in \mathbb{C}^n$. La compattezza di $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ è immediata: nello spazio vettoriale $\mathrm{L}(\mathbb{C}^n) = \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ degli operatori lineari di $\mathbb{C}^n$ in sé, di dimensione complessa n^2, $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ è chiuso (è puntualmente chiuso, passare al limite nella relazione $(U_jx|U_jy) = (x|y)$) e limitato (la norma operatoriale di ogni $U \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ è uguale ad 1). È allora compatto anche il sottogruppo chiuso $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$ delle matrici a determinante 1 di $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$, ed i sottogruppi $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{U}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ delle matrici ortogonali reali, ed $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{SU}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ delle matrici speciali ortogonali. Ricordiamo che $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ è isomorfo, con un isomorfismo che è omeomorfismo, al gruppo $\mathbb{U}$ dei complessi di modulo 1, un tale isomorfismo essendo ad esempio

$$e^{i\vartheta} \mapsto \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

Esercizio 5. Diremo che uno spazio topologico (X, τ) è *localmente compatto* se ogni punto di X ha una base di intorni chiusi e compatti in X (se X è di Hausdorff, esso è localmente compatto se e solo se ogni punto ha almeno un intorno compatto, come è facile vedere; in particolare i compatti di Hausdorff sono anche localmente compatti). Dati X, Y spazi, se K è un sottoinsieme di X, e V è sottoinsieme di Y, si indica con (K, V) l'insieme delle $f \in C(X, Y)$ che mappano K entro V, cioè

$$(K, V) = \{f \in C(X, Y) : f(K) \subseteq V\}.$$

La *topologia compact–open* è quella topologia su $C(X,Y)$ che ha gli insiemi (K,V) come prebase di aperti, al variare di K nell'insieme dei compatti di X e di V nell'insieme degli aperti di Y. Base di aperti sono quindi gli insiemi del tipo

$$\bigcap_{j=1}^{m}(K_j,V_j) \qquad K_j \text{ compatto in } X, \quad V_j \text{ aperto in } Y.$$

(i) ⊙⊙ Verificare che se Y è pseudometrizzabile la topologia compact–open su $C(X,Y)$ coincide con quella della convergenza uniforme sui compatti.

Per ogni spazio topologico X indichiamo con $\mathrm{Hm}(X)$ il gruppo di tutti gli omeomorfismi di X in sé.

(ii) ⊙⊙ Mostrare che se X è compatto e regolare la topologia compact–open rende $\mathrm{Hm}(X)$ gruppo topologico.

(c'è un controesempio con X solo localmente compatto). Se X,Y sono spazi topologici, e $\Phi \subseteq C(X,Y)$, una topologia su Φ è detta *congiuntamente continua* su Φ se la valutazione $\omega : (f,x) \mapsto f(x)$ è continua da $\Phi \times X$ ad Y. Se Y è pseudometrizzabile la topologia della convergenza uniforme su $C(X,Y)$ è sempre congiuntamente continua su tutto $C(X,Y)$. Come altro esempio, se X,Y sono normati la topologia della norma operatoriale su $\mathrm{L}(X,Y)$ è congiuntamente continua.

(iii) Se X è localmente compatto la topologia compact–open è congiuntamente continua su tutto $C(X,Y)$.

(iv) Se $\Phi \subseteq C(X,Y)$ ha una topologia congiuntamente continua, allora questa è più fine della topologia compact–open su Φ (se $f_0 \in (K,V)$ con K compatto di X e V aperto in Y, posto $W = \omega^{\leftarrow}(V)$, aperto in $\Phi \times X$ contenente $\{f_0\} \times K$, il teorema di Wallace assicura che esistono un intorno A di f_0 in Φ ed un intorno B di K in X tali che sia $A \times B \subseteq W$; ne segue $f_0 \in A \subseteq (K,V)$).

2.4. **Digressione sulle topologie congiuntamente continue.** Rimandando il lettore a [Kelley] e [Dugundji] per maggiori dettagli, vogliamo qui discutere la continuità di certe funzioni canoniche. Una funzione di due variabili $\alpha : X \times T \to Y$ può come si sa essere pensata come una funzione $\hat{\alpha} : X \to Y^T$, per ogni $x \in X$ $\hat{\alpha}(x) : T \to Y$ essendo quella funzione che ad $t \in T$ associa $\alpha(x,t) \in Y$. Sia $\Phi_\alpha \subseteq Y^T$ l'immagine di $\hat{\alpha}$; si noti che α si fattorizza come $\omega \circ (\hat{\alpha} \times 1_T)$, dove $\omega : \Phi_\alpha \times T \to Y$ è la valutazione, $\omega(f,t) = f(t)$. Ne viene: se supponiamo X,T,Y spazi topologici ed $\hat{\alpha}$ continua per una topologia su Φ_α che sia congiuntamente continua allora $\alpha : X \times T \to Y$ è continua; in particolare ciò accade se T è localmente compatto, e la topologia su $C(T,Y)$ è la compact–open. Inversamente se $\alpha : X \times T \to Y$ è continua, $\hat{\alpha}$ è sempre continua se su $C(T,Y)$ c'è la topologia compact–open (se $a \in \hat{\alpha}^{\leftarrow}(K,V)$ dove K è compatto in T e V è aperto in Y, si noti che $W = \alpha^{\leftarrow}(V)$ è aperto in $X \times T$ perché α è continua; inoltre $\{a\} \times K \subseteq W$, dato che $\hat{\alpha}(a) \in (K,V)$, in altre parole $\hat{\alpha}(x)(t) = \alpha(x,t) \in V$ per ogni $t \in K$. Il teorema di Wallace dice che c'è un intorno U di a in X tale che sia $U \times K \subseteq W$, dal che si trae $\hat{\alpha}(x) \in (K,V)$ per ogni $x \in U$, essendo $\alpha(U \times K) \subseteq V$.

. *Sia T spazio localmente compatto, X,Y spazi. Assegnare una funzione continua $\alpha : X \times T \to Y$ equivale ad assegnare una funzione continua $\beta : X \to C(T,Y)$, dove $C(T,Y)$ è munito della topologia compact–open.*

Dimostrazione. Dalle considerazioni precedenti. □

2.5. **Varie.**

. *Se G è gruppo topologico, ed H è sottosemigruppo di G, la chiusura di H è sottosemigruppo; se H è sottogruppo di G, la chiusura di H è sottogruppo di G; e se H è invariante in G, tale è la sua chiusura.*

Dimostrazione. La chiusura di $H \times H$ in $G \times G$ è $\mathrm{cl}_G(H) \times \mathrm{cl}_G(H)$; la moltiplicazione essendo continua mappa la chiusura di $H \times H$ entro la chiusura dell'immagine HH di $H \times H$; ma se H è chiuso rispetto alla moltiplicazione si ha $HH \subseteq H$; quindi $\mathrm{cl}_G(H)\,\mathrm{cl}_G(H) \subseteq \mathrm{cl}_G(H)$, il che appunto dice che $\mathrm{cl}_G(H)$ è sottosemigruppo. Se poi H è anche sottogruppo, si ha $H^{-1} \subseteq H$, e la continuità dell'inversa dice che $(\mathrm{cl}_G(H))^{-1} \subseteq \mathrm{cl}_G(H)$; la continuità degli automorfismi interni mostra, sempre allo stesso modo, che se un sottoinsieme è stabile per automorfismi interni, tale è la sua chiusura. □

Ne segue che la chiusura del sottogruppo banale $\{1\}$ di G è un sottogruppo invariante N di G: si verifichi che la topologia indotta su N è quella banale. È assai facile provare che G è di Hausdorff se e solo se $N = \{1\}$; se infatti $\{1\}$ è chiuso in G ogni singolo è chiuso in G; dati $g \neq h$ in G esiste un intorno V di 1 tale che $g^{-1}h \notin V$; se U è intorno simmetrico di 1, con $UU \subseteq V$ si ha $gU \cap hU = \emptyset$ (se fosse $gu = hv$ con $u,v \in U$ sarebbe $g^{-1}h = uv^{-1} \in UU^{-1} = UU \subseteq V$, assurdo). Si può dimostrare di più, e cioè che ogni gruppo topologico è , come spazio topologico, *completamente regolare*, cioè la sua topologia è quella debole delle sue funzioni continue a valori reali.

Esercizio 6. Mostrare che si hanno le seguenti formule per la chiusura di un sottoinsieme S di un gruppo topologico G, se $\mathcal{B}$ è una qualsiasi base per il filtro degli intorni di 1 in G:

$$\mathrm{cl}_G(S) = \bigcap\nolimits_{U \in \mathcal{B}} SU = \bigcap\nolimits_{V \in \mathcal{B}} VS.$$

Dedurne che un gruppo topologico è spazio topologico *regolare* : per ogni punto c'è una base di intorni *chiusi*.

Esercizio 7. In un gruppo topologico un sottogruppo aperto è anche chiuso.

Esercizio 8. Sia G gruppo topologico, h un suo sottogruppo. Dato $h \in H$, H si dice *localmente chiuso* ad (oppure in) h se esiste un intorno U di H di h tale che $H \cap U$ sia chiuso in U. Mostrare che sono equivalenti:

(i) H è localmente chiuso ad un suo elemento h.
(ii) H è localmente chiuso ad 1.
(iii) H è localmente chiuso ad ogni suo elemento.

Un sottogruppo soddisfacente ad una della condizioni precedenti si dice *localmente chiuso* in G. Mostrare che

(iv) Un sottogruppo H di G è chiuso in G se e solo se è localmente chiuso in G

(per (iii) implica (iv): restringendosi a $\mathrm{cl}_G(H)$, basta farlo per H denso in G, mostrare cioè che un sottogruppo denso H di G localmente chiuso in G coincide con G; si provi anzitutto, cosa di per sé interessante,

in uno spazio topologico X, se D è denso in X si ha $\mathrm{cl}_X(A \cap D) = \mathrm{cl}_X(A)$ per ogni aperto A di X;

in particolare, $A \cap D$ è denso in A, per ogni aperto A; se poi V è intorno di 1 in G tale che $V \cap H$ è chiuso in V, ed $A = \mathrm{int}_G(V)$, si noti che $A \cap H$ è chiuso in A, essendo $A \cap H = (A \cap V) \cap H = A \cap (V \cap H)$; ma allora la chiusura in A di $A \cap H$, che deve contenere A, coincide con $A \cap H$; si ha allora $A \subseteq H$; quindi H è aperto, ed allora anche chiuso).

Esercizio 9. In un gruppo topologico G un sottogruppo H è discreto nella topologia indotta se e solo se ha almeno un punto isolato; e la sua chiusura è $HN = NH$, dove N è la chiusura dell'elemento neutro; in un gruppo topologico di Hausdorff ogni sottogruppo discreto è chiuso.

Esercizio 10. Siano G, Γ gruppi topologici e sia $f : G \to \Gamma$ omomorfismo continuo e suriettivo. Provare che

(i) f è quoziente se e solo se è mappa aperta.
(ii) Se f è mappa chiusa, allora è anche aperta.

. *La componente connessa di* 1 *è , in ogni gruppo topologico G, un sottogruppo invariante chiuso di G.*

Dimostrazione. Se C è tale componente, essa è chiusa come in ogni spazio topologico. Poichè $C \times C$ è connesso, CC è connesso, e contiene 1, quindi $CC \subseteq C$; analogamente $C^{-1} \subseteq C$. Quindi C è sottogruppo. Per ogni $x \in G$ xCx^{-1} è connesso e contiene 1, quindi $xCx^{-1} \subseteq C$. □

Esercizio 11. Sia G gruppo topologico connesso. Sia H sottogruppo invariante discreto di G. Mostrare che allora H è centrale, cioè che $gh = hg$ per ogni $h \in H$ ed ogni $g \in G$.

. Omomorfismi continui *Siano X, Y gruppi topologici, e sia $f : X \to Y$ omomorfismo; f è continuo se e solo se è continuo sull'elemento neutro di X.*

Dimostrazione. Sia $g \in X$ fissato, e sia V intorno dell'elemento neutro di Y. Supposto f continuo su $1 \in X$, esiste U intorno di 1 in X tale che sia $f(U) \subseteq V$. Allora si ha $f(gU) = f(g)f(U) \subseteq f(g)V$; ed $f(g)V$ è un intorno arbitrario di $f(g)$ in Y. □

Se H è sottogruppo di G si hanno le due congruenze modulo H

$$\text{sinistra} \quad x^{-1}y \in H: \quad \text{classi laterali sinistre} \quad xH$$
$$\text{destra} \quad xy^{-1} \in H: \quad \text{classi laterali destre} \quad Hx$$

Si ricorda che ogni relazione di equivalenza su G compatible con le moltiplicazioni a sinistra (cioè tale che se $x \sim y$ allora $ax \sim ay$, per ogni $a \in G$) è di questo tipo, con H la classe di equivalenza di 1, ed analogamente a destra. Prendiamo l'insieme delle classi laterali sinistre $G/H = \{xH : x \in G\}$ e muniamolo della topologia quoziente della proiezione canonica $p : G \to G/H$; G/H è uno *spazio omogeneo.*

. *Nelle ipotesi precedenti la proiezione canonica è aperta; G/H è di Hausdorff se e solo se H è chiuso in G; e se H è invariante in G, allora G/H è anche gruppo topologico.*

Dimostrazione. Il saturato di un sottoinsieme A di G è

$$p^{\leftarrow}(p(A)) = \bigcup_{x \in A} xH = AH = \bigcup_{h \in H} Ah,$$

e se A è aperto Ah è aperto per ogni $h \in H$. Essendo p aperta, il quoziente è di Hausdorff se e solo se la relazione di equivalenza $\{(x, y) : x^{-1}y \in H\}$ è chiusa in $G \times G$; ciò accade se e solo se H è chiuso, come si vede facilmente (supposto H chiuso, la relazione di equivalenza è l'antiimagine in G del chiuso H mediante la funzione continua $(x, y) \mapsto x^{-1}y$; se poi G/H è di Hausdorff, i suoi singoli sono chiusi, e quindi H è chiuso in G). Se H è invariante, G/H è gruppo; l'inversione $\iota_{G/H}$ è continua essendo $\iota_{G/H} \circ p = p \circ \iota_G$, quest'ultima continua. Per vedere che G/H è gruppo topologico nella topologia quoziente basta allora vedere che la moltiplicazione è continua; poiché p è aperta, la topologia prodotto di $(G/H) \times (G/H)$ è quella quoziente di $G \times G$ mediante $p \times p$; ciò prova subito la continuità della moltiplicazione di G/H, essendo $\mu_{G/H} \circ (p \times p) = p \circ \mu_G$. □

Osservazione. In generale p non è chiusa; ad esempio se $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ è la proiezione canonica, ogni sottogruppo $a\mathbb{Z}$ di $\mathbb{R}$, che è chiuso in $\mathbb{R}$, ha immagine densa e propria in $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ se a è irrazionale.

Osservazione. Se H è aperto in G, allora G/H è discreto.

2.6. **Esempio: sottogruppi additivi di $\mathbb{R}^n$.** Un gruppo topologico contenuto in uno spazio euclideo ha, se non è discreto, una struttura sorprendentemente regolare; la teoria dei gruppi di Lie usa per l'appunto anche questi fatti. Limitandoci ad un caso molto semplice, vediamo la struttura dei sottogruppi additivi di $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 1. Ricordiamo che se X è $\mathbb{R}-$spazio vettoriale normato, S è sottoinsieme di X, e $p \in X$ è di accumulazione per S, un vettore $v \in X$ si dice *semitangente* ad S in p se è nullo, oppure se esiste una successione $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ di $S \setminus \{p\}$ convergente a p tale che sia $v/\|v\| = \lim_{j\to\infty}(x_j - p)/\|x_j - p\|$. Provare che il vettore non nullo $v \in X$ è semitangente ad S in p se e solo se esiste una successione $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ di $S \setminus \{p\}$ convergente a p, ed una successione $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ di numeri reali strettamente positivi tale che sia $v = \lim_{j\to\infty} t_j(x_j - p)$.

Da ciò si deduce che la nozione di vettore semitangente è invariante per norme equivalenti.

Risoluzione. Per scrivere meno, supponiamo che sia $p = 0$. La necessità della condizione è ovvia, con $t_j = 1/\|x_j\|$. Se poi $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ e $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sono come nell'enunciato, si ha, ricordando che è $t_j > 0$, $\|v\| = \lim_{j\to\infty} t_j\|x_j\|$. Si ha

$$\frac{x_j}{\|x_j\|} = \frac{t_jx_j}{t_j\|x_j\|} = \frac{t_jx_j}{\|t_jx_j\|} \to \frac{v}{\|v\|} \quad \text{per } j \to \infty.$$

□

Sia ora X normato di dimensione finita. Poiché $j \mapsto (x_j - p)/\|x_j - p\|$ è una successione di vettori di norma 1, la compattezza della sfera unitaria in dimensione finita mostra che se p è di accumulazione per S ed X ha dimensione finita certamente S ha in p vettori semitangenti non nulli. Mostriamo

Teorema. *Sia G sottogruppo additivo chiuso e non discreto di X. Allora G contiene un sottospazio vettoriale non banale di X; ed il massimo tale sottospazio T è esattamente l'insieme dei vettori semitangenti a G in 0. Se poi S è un supplementare di T in X, allora $S \cap G$ è discreto, e $G = T \oplus (S \cap G)$.*

Dimostrazione. Mostriamo anzitutto che ogni vettore semitangente a G in 0 sta in G, se G è chiuso. Se infatti $v = \lim_{j\to\infty} t_jx_j$, dove $x_j \to 0$, si scrive $t_j = [t_j] + s_j$, dove $[t_j] \in \mathbb{N}$ è la parte intera di t_j, e $0 \le s_j < 1$. Poiché $\lim_{j\to\infty} s_jx_j = 0$, si ha $v = \lim_{j\to+\infty}[t_j]x_j$; ma $[t_j]x_j \in G$ perché $[t_j]$ è intero, e pertanto v sta nella chiusura di G, che coincide con G, chiuso.

Per vedere che esistono vettori non nulli tangenti in 0 a G, se G non è discreto, prendiamo una successione x_j di vettori non nulli di G che tende a zero; sia m_j il minimo naturale tale che sia $\|m_jx_j\| > 1$; ne segue $\|(m_j - 1)x_j\| \le 1$. La successione $(m_j - 1)x_j$ ha una sottosuccessione convergente nella palla unitaria di X, che è compatta; per semplicità, si può supporre, cambiando i nomi della successioni considerate, che l'intera stessa successione $(m_j - 1)x_j$ converga ad un vettore v, con $\|v\| \le 1$; si noti che anche $m_jx_j = (m_j - 1)x_j + x_j$ tende a v, dato che x_j tende al vettore nullo; ma essendo $\|m_jx_j\| > 1$, si ha $\|v\| \ge 1$, ed in definitiva $\|v\| = 1$, e quindi v non è il vettore nullo.

Indichiamo con T l'insieme dei vettori semitangenti a G in 0; finora si è visto che ogni $v \in T$ è limite di una successione di G, anzi che $v \in T$ se e solo se esiste una successione m_j di naturali strettamente positivi ed una successione x_j di elementi di $G \setminus \{0\}$ che tende a zero tale che sia $v = \lim_{j\to\infty} m_jx_j$; inoltre, come sopra osservato, se G non é discreto T contiene vettori non nulli. È evidente che se $v \in T$ e $t > 0$ allora $tv \in T$; infatti l'insieme dei vettori semitangenti ad un insieme ha sempre questa proprietà; inoltre se $v \in T$ allora $-v \in T$ (basta prendere $m_j(-x_j)$, se $m_jx_j \to v$); T è quindi unione di rette per l'origine. Poiché $T \subseteq G$, e lo spazio vettoriale V generato da T è l'insieme delle somme finite di elementi di T, si ha $V \subseteq G$. Sia ora W il massimo sottospazio lineare di X contenuto in G; chiaramente $V \subseteq W$. Ma se W è sottospazio non banale di X, l'insieme dei vettori di X semitangenti a W in 0 è W stesso, come è immediato vedere. Ne segue che si ha $T = V = W$. Se $X = T \oplus S$, ogni $x \in X$ si scrive in modo unico come $x = t + s$ con $t \in T$ ed $s \in S$; se $x \in G$, essendo $T \subseteq G$ si ha $s = x - t \in G$, e quindi $G = T \oplus (S \cap G)$. Inoltre $S \cap G$ è discreto, poiché altrimenti avrebbe vettori semitangenti in 0 non nulli, e questi sarebbero semitangenti a G, e quindi contenuti in T, assurdo. □

Si può anche dimostrare che se G è sottogruppo discreto di X, spazio normato di dimensione finita, allora G è abeliano libero, con una base di cardinale pari alla dimensione del sottospazio lineare di X generato da G: esistono cioè $a_1, \dots, a_r \in G$ tali che ogni $x \in G$ si scriva in un unico modo come

$$x = m_1a_1 + \cdots + m_ra_r \qquad m_1, \dots, m_r \in \mathbb{Z};$$

in altre parole G è isomorfo al gruppo $\mathbb{Z}^r$. La struttura dei sottogruppi additivi chiusi di $\mathbb{R}^n$ è così completamente chiarita: la loro componente connessa è un sottospazio vettoriale C di $\mathbb{R}^n$, aperta in G, e G è , algebricamente e topologicamente, prodotto diretto di C e di un gruppo abeliano discreto libero di rango finito, $G \approx C \times \mathbb{Z}^r$.

3. Azioni di gruppi topologici

3.1. **Azioni di gruppo.** Ricordiamo che si ha un'azione a sinistra del gruppo G sull'insieme X se è assegnata una funzione

$$\alpha : G \times X \to X \quad \text{(si scrive in generale } \alpha(g,x) = g.x \quad \text{oppure } \alpha(g,x) = g\,x)$$

tale che

(i) $1\,x = x$, per ogni $x \in X$;
(ii) $g(h\,x) = (gh)\,x$, per ogni $g, h \in G$ ed ogni $x \in X$.

Se anziché $g(h\,x) = (gh)\,x$ si ha $g(h\,x) = (hg)\,x$ per ogni $g, h \in G$ ed ogni $x \in X$ si dice che si ha un'azione destra di G su X; si scrive allora $x.g$ oppure $x\,g$ anziché $g.x$, gx. Si dice che G *opera a sinistra* (a destra) su X se è assegnata un'azione sinistra (destra) di g su X. Data un'azione di G su X, per ogni fissato $g \in G$ la funzione $\rho_g : X \to X$ definita da $\rho_g(x) = g\,x$ è biiettiva, con inversa $\rho_{g^{-1}}$. Si ha quindi una funzione $\eta : g \mapsto \rho_g$ di G nel gruppo $X!$ delle biiezioni di X in sé; si vede subito che tale funzione è un omomorfismo di G in $X!$ (cioè che si ha $\rho_{gh} = \rho_g \circ \rho_h$, per ogni $g, h \in G$) se tale azione è sinistra, un anti–omomorfismo ($\rho_{gh} = \rho_h \circ \rho_g$) se l'azione è destra. Ed assegnare un'azione sinistra (destra) equivale ad assegnare un omomorfismo (un anti–omomorfismo) $\eta : G \to X!$; l'azione può infatti essere ricostruita come $g\,x = \eta(g)(x)$. Assegnata un'azione di G su X (d'ora in poi sinistra), per ogni $x \in X$ si definisce l'*orbita* $G\,x = \{g\,x : g \in G\}$ e lo *stabilizzatore*, o sottogruppo di isotropia, di x, che è $G_x = \{g \in G : g\,x = x\}$. È immediato vedere che le orbite sono una partizione di X, rispetto alla relazione di equivalenza

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\iff} \text{esiste } g \in G \text{ tale che } y = gx.$$

È anche immediato osservare che G_x è un sottogruppo di G, per ogni $x \in X$.

Esercizio 2. Sia assegnata un'azione destra di G su X. Fissato $a \in X$, sia $b \in a\,G$, orbita di a; mostrare che gli stabilizzatori G_a e G_b sono coniugati in G; se $b = a\,\gamma$ si ha infatti $G_b = \gamma^{-1} G_a \gamma$.

Risoluzione. Sia $b = a\,\gamma$. L'elemento $g \in G$ appartiene allo stabilizzatore di b se e solo se $b\,g = b$ e quindi se e solo se $a\,\gamma g = b = a\,\gamma$; il che accade se e solo se $a(\gamma g \gamma^{-1}) = a$, e cioè se e solo se $\gamma g \gamma^{-1} \in G_a$. Ciò mostra che se $b = a\,\gamma$ allora $h_\gamma(t) = \gamma t \gamma^{-1}$ trasforma G_b in G_a. □

Un'azione si dice

- *transitiva* se dati $x, y \in X$ esiste $g \in G$ tale che sia $y = g\,x$; equivalentemente, c'è una sola orbita.
- *libera* se $G_x = \{1\}$ per ogni $x \in X$.
- Un punto x si dice *unito* per un'azione se lo stabilizzatore G_x coincide con G.

Se un'azione è assieme transitiva e libera, per ogni coppia x, y di elementi di X esiste un unico $g \in G$ tale che sia $y = g\,x$; ad esempio, uno spazio affine avente un dato spazio vettoriale V come spazio direttore può essere definito come un insieme su cui il gruppo additivo di V opera transitivamente e liberamente.

Le orbite di un'azione chiaramente sono una partizione di X; e su ogni singola orbita è indotta un'azione transitiva; ogni azione può essere decomposta in somma diretta di più azioni transitive, con lo stesso gruppo di operatori.

Esempio 3. Ogni gruppo G opera su se stesso in vari modi: a sinistra con le moltiplicazioni sinistre, $(g,x) \mapsto gx$, a destra con le moltiplicazioni destre $(x,g) \mapsto xg$; a sinistra con gli automorfismi interni $(g,x) \mapsto {}^g x = gxg^{-1}$, a destra sempre con gli automorfismi interni, $(x,g) \mapsto x^g = g^{-1}xg$.

Esempio 4. Ogni sottogruppo di $X!$, gruppo simmetrico di X, ovviamente opera a sinistra su X stesso; anzi, quasi tutti i gruppi nascono in questo modo. In particolare $\mathrm{Gl}(V)$ opera a sinistra su V, e così i suoi sottogruppi.

Esempio 5. Se G opera a sinistra su X, e si ha un altro insieme Y, G opera a destra sull'insieme Y^X delle funzioni di X in Y mediante $(f,g) \mapsto f.g = f \circ \rho_g$; in altre parole $f.g(x) = f(g\,x)$, per ogni $x \in X$: è azione destra perché

$$(f.g).h = (f \circ \rho_g).h = (f \circ \rho_g) \circ \rho_h = f \circ (\rho_g \circ \rho_h) = f \circ (\rho_{gh}) = f.(gh)$$

grazie all'associatività delle composizioni. Un'azione a sinistra è invece $(g,f) \mapsto f \circ \rho_{g^{-1}}$, quella funzione di X in Y definita da $x \mapsto f(g^{-1}x)$. Se G opera a sinistra su Y, allora G opera ancora a sinistra su X^Y mediante $(g,f) \mapsto g.f$, definita da $g.f(y) = g\,f(y)$, per ogni $y \in Y$.

Esercizio 6. Supponiamo che G operi a destra sia su X che su Y; un *morfismo* di azioni destre è una funzione $\varphi : X \to Y$ tale che sia $\varphi(x\,g) = \varphi(x)\,g$, per ogni $x \in X$ ed ogni $g \in G$. Supponiamo che entrambe le azioni siano transitive; scegliamo $a \in X$ e $b \in Y$, cosicché $X = G\,a$ ed $Y = G\,b$.

(i) Mostrare che esiste un morfismo $\varphi : X \to Y$ tale che sia $\varphi(a) = b$ se e solo se lo stabilizzatore G_a di a è contenuto nello stabilizzatore G_b di b. Tale morfismo, se esiste, è unico, ed è un isomorfismo se e solo se $G_a = G_b$.

(ii) Si provi che dati $a, b \in X$ esiste un automorfismo $\varphi : X \to X$ tale che $\varphi(a) = b$ se e solo se si ha $b = a\,\gamma$ con γ nel normalizzante $N(G_a)$ di G_a (per definizione, $N(G_a) = \{\gamma \in G : G_a^\gamma = \gamma^{-1}G_a\gamma = G_a\}$; è il massimo sottogruppo di G contenente G_a in cui G_a sia invariante). Mostrare che $\mathrm{Aut}_G(X)$ è isomorfo in modo naturale ad $N(G_a)/G_a$.

(iii) Mostrare che se $X = aG$, X è isomorfo allo spazio omogeneo dei laterali destri di G modulo lo stabilizzatore G_a di a.

L'ultima affermazione (iii) mostra che essenzialmente ogni azione di gruppo (a destra) è identificabile con un'azione (o meglio, con più azioni, una per ogni orbita) sui laterali (destri) di un sottogruppo di una classe coniugata di sottogruppi.

Osservazione. Un'azione di gruppo si dice *fedele* se l'omomorfismo (o anti–omomorfismo) $\eta : G \to X!$ di cui sopra è iniettivo. In ogni caso il nucleo $K = \mathrm{Ker}(\eta)$ di η è l'intersezione di tutti gli stabilizzatori $K = \bigcap_{a\in X} G_a$; e chiaramente viene indotta un'azione fedele di G/K su X.

3.2. **Azioni topologiche.** Si ha un'azione topologica di gruppo topologico se si ha un gruppo topologico G, uno spazio topologico X ed una funzione continua $\alpha : G \times X \to X$ che sia azione destra o sinistra del gruppo G su X; si dice anche che G opera in modo continuo su X. Se l'azione è topologica, le funzioni ρ_g sono omeomorfismi di X in se stesso; assegnare un'azione topologica sinistra di G su X significa dare un omomorfismo continuo $\eta : G \to \mathit{\Gamma}$, dove $\mathit{\Gamma}$ è un sottogruppo del gruppo $\mathrm{Hm}(X)$ degli omeomorfismi di X in sé, $\mathit{\Gamma}$ essendo munito di una topologia che sia congiuntamente continua (vedi 2.3, 2.4). Infatti, assegnata un'azione continua $\alpha : G \times X \to X$, si munisce $\mathit{\Gamma} = \eta(G)$ della topologia quoziente di η; tale topologia è congiuntamente continua, perchè $\eta \times 1_X : G \times X \to \mathit{\Gamma} \times X$ è continua ed aperta, e quindi quoziente. Viceversa, se $\eta : G \to \mathit{\Gamma}$ è un omomorfismo continuo su $\mathit{\Gamma}$, sottogruppo di $\mathrm{Hm}(X)$, la topologia di $\mathit{\Gamma}$ essendo congiuntamente continua, allora chiaramente $\alpha(g, x) = \eta(g)(x)$ definisce una funzione continua su $G \times X$, essendo $\alpha = \omega \circ (\eta \times 1_X)$, dove ω è la valutazione, $\omega : \mathit{\Gamma} \times X \to X$ (vedi anche 2.3).

Se G è discreto, assegnare un'azione topologica di G sullo spazio topologico X chiaramente equivale ad assegnare un omomorfismo (anti–omomorfismo per le azioni destre) di G nel gruppo $\mathrm{Hm}(X)$.

Esempio 1. Tutte le azioni di un gruppo su se stesso descritte al numero precedente (Esempio 2) sono azioni topologiche, se il gruppo stesso è topologico.

Esempio 2. Il gruppo lineare $\mathrm{Gl}(V)$ degli automorfismi lineari continui dello spazio di Banach V in sé opera su V in modo continuo.

Esempio 3. Se G è gruppo topologico, H è sottogruppo di G, e G/H è l'insieme dei laterali sinistri di H, G opera a sinistra su G/H nel modo ovvio: le moltiplicazioni a sinistra sono compatibili con la congruenza sinistra modulo H e quindi scendono su G/H, $(g, xH) \mapsto g\,xH = (gx)H$. L'azione è topologica, grazie alle proprietà dei quozienti (se α denota l'azione, $\alpha : G \times (G/H) \to G/H$, si scrive $\alpha \circ (1_G \times p) = p \circ \mu_G$, equivalentemente il diagramma

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\mu} & G \\ \Big\downarrow{\scriptstyle 1_G \times p} & & \Big\downarrow{\scriptstyle p} \\ G/H \times G & \xrightarrow{\alpha} & G/H \end{array}$$

è commutativo; e $1_G \times p$ è quoziente perché è aperta). Chiaramente l'azione è transitiva. Lo stabilizzatore di $H(\in G/H)$ è H stesso; lo stabilizzatore di xH è xHx^{-1}.

Esempio 4. Sia X aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : X \to \mathbb{R}^n$ funzione localmente lipschitziana; si supponga che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\xi} = f(\xi) \\ \xi(0) = x \end{cases}$$

abbia una soluzione (necessariamente unica) $\xi : t \mapsto \varphi(t,x)$, definita su tutto $\mathbb{R}$, qualunque sia $x \in X$. Si ottiene un'azione del gruppo additivo $\mathbb{R}$ su X associando $\varphi(t,x)$ a (t,x); l'azione è il cosiddetto *flusso* dell'equazione differenziale, ed è descritta in parole come il valore all'istante t di quella soluzione che vale x all'istante $t = 0$. L'equazione è autonoma, quindi traslate di soluzioni sono ancora soluzioni; in particolare, per ogni $s \in \mathbb{R}$ fissato $t \mapsto \varphi(t+s,x)$ è ancora soluzione, che all'istante $t = 0$ vale $\varphi(s,x)$; si ha allora $\varphi(s+t,x) = \varphi(t,\varphi(s,x))$, qulunque sia $t \in \mathbb{R}$, per unicità, ambo i membri essendo il valore all'istante t di quella soluzione che vale $\varphi(s,x)$ all'istante $t = 0$; quindi φ è azione di gruppo. Sappiamo che $\varphi : \mathbb{R} \times X \to X$ è continua (vedi ad esempio Analisi Due/2), e se f è di classe C^r, $1 \le r \le +\infty$, si dimostra che tale è φ (vedere un testo di equazioni ordinarie, ad esempio [Hille]).

Esempio 5. Il gruppo ortogonale $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ed il gruppo ortogonale speciale $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ operano a sinistra sulla sfera $(n-1)-$dimensionale $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, nel modo ovvio, $(A,x) = Ax$ (ricordare che se A è ortogonale si ha $|Ax| = |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, cosicché $\mathbb{S}^{n-1}$ è stabile per A). Similmente $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ e $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$ operano a sinistra sulla sfera S dei versori di $\mathbb{C}^n$. Tali azioni sono transitive se $n \ge 2$ (la $0-$sfera è $\{-1,1\}$; su essa l'azione di $\mathrm{SO}_1(\mathbb{R})$, gruppo banale, non è transitiva!); la cosa si vede facilmente; facciamolo prima per $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$; chiaramente l'azione di $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ su $\mathbb{S}^1$ è transitiva; se $n > 2$ si prende un versore $u \in \mathbb{S}^{n-1}$; se questo è linearmente indipendente da $e_1 = (1,\dots,0)$ si prende una trasformazione in $\mathrm{SO}(V)$, dove V è il sottospazio $2-$dimensionale generato da e_1 ed u che applica e_1 su u, e la si completa con l'identità su $V^\perp$; se u ed e_1 sono linearmente indipendenti, ma distinti, allora $u = -e_1$, ed una trasformazione di $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ che mappa e_1 in $-e_1$ è ad esempio $(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n) \mapsto (-x_1,-x_2,x_3,\dots,x_n)$. Similmente per mostrare la transitività dell'azione di $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$ su S, per $n \ge 2$ (la sfera dei versori di $\mathbb{C}^1$ è $\mathbb{U}$, ed $\mathrm{SU}_1(\mathbb{C})$ è il gruppo banale, con azione non transitiva su $\mathbb{U}$); rileviamo soltanto che $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ consiste delle matrici della forma

$$\begin{bmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{bmatrix} \quad \text{con } a,b \in \mathbb{C}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Esempio 6. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: il gruppo lineare $\mathrm{Gl}_{n+1}(\mathbb{K})$ opera (transitivamente) a sinistra su $\dot{\mathbb{K}}^{n+1} = \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$; l'azione è compatibile con la relazione di equivalenza $y \sim x : \stackrel{\text{def}}{\iff} y = \lambda x$, con $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$; il gruppo $\mathrm{Gl}_{n+1}(\mathbb{K})$ opera quindi anche sullo spazio proiettivo $\mathrm{P}^n\,\mathbb{K}$; l'azione è topologica per le proprietà dei quozienti. Ogni omotetia induce l'identità su $\mathrm{P}^n\,\mathbb{K}$; il gruppo quoziente $\mathrm{PGl}_n(\mathbb{K})$ opera fedelmente e transitivamente su $\mathrm{P}^n\,\mathbb{K}$; è il gruppo delle *proiettività* di $\mathrm{P}^n\,\mathbb{K}$.

3.3. **Spazi di orbite.** Dato un gruppo topologico G che opera in modo continuo sullo spazio X, X può essere ripartito in orbite; l'insieme delle orbite X/G viene munito della topologia quoziente della proiezione canonica $p : X \to X/G$. Osserviamo

. *La proiezione $p : X \to X/G$ di X sullo spazio delle orbite è una mappa aperta.*

Dimostrazione. Secondo uno schema già visto per i gruppi topologici si ha

$$p^{\leftarrow}(p(A)) = \{g\,x : x \in A,\ g \in G\} = \bigcup_{g \in G} g\,A$$

ed ogni $g\,A$ è aperto in X se A è aperto in X. □

Ne segue che uno spazio di orbite è di Hausdorff se e solo se la relazione di equivalenza associata alle orbite è chiusa in $X \times X$. In generale uno spazio di orbite non è di Hausdorff.

Esempio 1. Il gruppo topologico $\mathbb{K}^\times$, ($\mathbb{K}$ i reali, i complessi, o i quaternioni di Hamilton) opera come gruppo delle omotetie su $\dot{\mathbb{K}}^{n+1} = \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$. Lo spazio delle orbite è evidentemente omeomorfo allo spazio proiettivo $\mathrm{P}^n\,\mathbb{K}$.

Esercizio 2. Sia G gruppo compatto di Hausdorff che opera in modo continuo sullo spazio compatto e di Hausdorff X. Lo spazio delle orbite è di Hausdorff (applicare la proposizione 1.7).

Un caso particolarmente importante è il seguente

Definizione. Sia G un gruppo discreto che opera su uno spazio topologico X. L'azione si dice *propriamente discontinua* se per ogni punto $x \in X$ esiste un intorno U di x in X tale che sia $gU \cap U = \emptyset$ per ogni $g \in G$ diverso dall'unità. (equivalentemente, per ogni $x \in X$ esiste un intorno U di x in X tale che sia $gU \cap hU = \emptyset$ se $g,h \in G$, $g \ne h$). Diremo poi che un gruppo discreto opera *propriamente* su X se per ogni compatto $K \subseteq X$ l'insieme $D_K = \{g \in G : gK \cap K \ne \emptyset\}$ è finito in G.

Ebbene

. *Se un gruppo discreto G opera propriamente e senza punti uniti sullo spazio localmente compatto e di Hausdorff X, allora G opera in modo propriamente discontinuo su X; e lo spazio delle orbite X/G è (localmente compatto e) di Hausdorff.*

Dimostrazione. Sia $x \in G$ fissato; osserviamo anzitutto che l'orbita Gx di x è chiusa e discreta: infatti l'ipotesi che l'azione sia propria, unita alla locale compattezza, dice che per ogni punto $y \in X$ ed ogni intorno compatto V di y in X l'insieme $Gx \cap V$ è finito (se $z \in Gx \cap V$, si ha $Gz \cap V = Gx \cap V$; ma $gz \in V$ implica $g \in D_V$, quindi $\mathrm{Card}(Gz \cap V) \leq \mathrm{Card}(D_V)$). Essendo localmente finito nello spazio X, che è T_1, Gx è chiuso e discreto. Dato x, si può allora prendere un intorno compatto V di x tale che $Gx \cap V = \{x\}$; sia ora

$$U = V \setminus \bigcup_{g \in D_V \setminus \{1\}} gV$$

chiaramente U è intorno di x in X, e $gU \cap U = \emptyset$ se $g \neq 1$. Sia ora $y \notin Gx$; essendo Gx chiuso in X esiste un intorno compatto V di y tale che $V \cap Gx = \emptyset$; sia A intorno compatto di x disgiunto da V, e tale che $gA \cap A = \emptyset$ se $g \neq 1$. Si prenda ora

$$U = A \setminus \bigcup_{g \in D_{A \cup V}} gV;$$

chiaramente U è intorno di x in X, dato che $\bigcup_{g \in D_{A\cup V}} gV$ è un chiuso che non contiene x. Si ha ora $gU \cap hV = \emptyset$ per ogni $g, h \in G$ (basta provare che è $U \cap \gamma V = \emptyset$ per ogni $\gamma \in G$, il che è ovvio se $\gamma \notin D_{A\cup V}$, ed è vero per costruzione di U se $\gamma \in D_{A\cup V}$. Ciò mostra che X/G è di Hausdorff. □

3.4. **Esempi.** Vediamo di ricondurre a flussi di equazioni ordinarie i due esempi visti in 1.6, Esempio 1. Alteriamo per comodità gli esempi, supponendo che il primo sia $\tan x + c$, il secondo $1/\cos x + c$, con $-\pi/2 < x < \pi/2$. Ci serve un'equazione ordinaria che abbia $y - \tan x$ come integrale primo. Differenziando si ha l'equazione totale $dy - dx/\cos^2 x = 0$, equivalentemente $\cos^2 x dy - dx = 0$ con sistema Hamiltoniano associato

$$\begin{cases} \dot{x} &= \cos^2 x \\ \dot{y} &= 1 \end{cases}$$

Tale equazione viene considerata su tutto $\mathbb{R}^2$. Il flusso si trova in modo esplicito:

$$\varphi(t,(x,y)) = \begin{cases} \left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi, t + y\right) & \text{se} \qquad x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ (\arctan(t + \tan x) + k\pi, t + y) & \text{se} \qquad -\dfrac{\pi}{2} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + k\pi. \end{cases}$$

Si dimostri che associando ad ogni orbita la sua intersezione con l'asse delle ascisse si ottiene un omeomorfismo dello spazio delle orbite su $\mathbb{R}$.

Un'equazione che abbia $y - \dfrac{1}{\cos x}$ come integrale primo si trova in modo analogo ($dy - (\sin x/\cos^2 x)dx = 0 \iff \cos^2 x\, dy - \sin x\, dx = 0$; un sistema Hamiltoniano associato è)

$$\begin{cases} \dot{x} &= \cos^2 x \\ \dot{y} &= \sin x \end{cases}$$

In questo caso lo spazio delle orbite non è più di Hausdorff; si dimostri che esso è omeomorfo allo spazio così ottenuto: come insieme, l'insieme dei reali; gli aperti sono gli aperti ordinari di $\mathbb{R}$ che, se contengono un punto $\pi/2 + k\pi$, devono anche contenere un intervallo del tipo $]\pi/2 + (k-1)\pi, \pi/2 + (k-1)\pi + \delta[$ ed un intervallo del tipo $]\pi/2 + (k+1)\pi - \delta, \pi/2 + (k+1)\pi[$, con $\delta > 0$ opportuno. Su $\mathbb{R} \setminus (\pi/2 + \mathbb{Z}\pi)$ viene quindi indotta la topologia usuale; ma lo spazio delle orbite non è di Hausdorff. Se restringiamo l'azione al sottogruppo discreto degli interi l'azione è propriamente discontinua, ma non propria, e lo spazio delle orbite è ancora non di Hausdorff. Sia infatti K il compatto $([-\pi/2, -a] \times \{0\}) \cup ([a, \pi/2] \times \{0\})$, dove a è fissato, $0 < a < \pi/2$. Mostriamo che esistono infiniti interi tali che il tempo occorrente a passare da un punto del primo segmento al secondo sia intero. Fissato $b \in [a, \pi/2[$ il tempo occorrente per andare da $(-b, 0)$ a $(b, 0)$ è infatti, come si ricava dalla prima equazione

$$t(b) = \int_{-b}^{b} \frac{dx}{\cos^2 x} = 2\tan b;$$

se b varia in $[a, \pi/2[$ tale espressione assume tutti i valori della semiretta $[2\tan a, +\infty[$, che contiene infiniti interi; tutti questi interi stanno in $D(K)$; e si comprende che le orbite di $(-\pi/2, 0)$ e di $(\pi/2, 0)$ non hanno intorni disgiunti nel quoziente (tratto da [Massey–Alg.Top.:an Introduction]). Si è visto che l'azione non è propria; la sua restrizione alla striscia aperta $]-\pi/2,\pi/2[\times\mathbb{R}$ è invece propria (se K è un compatto di tale striscia, esso è certamente contenuto in una striscia della forma $[-a,a]\times\mathbb{R}$; se $|t|>2\tan a$, partendo da un punto $p=(x,y)$ della striscia di certo $t.p$ sta fuori dalla striscia.

Quanto segue è alquanto poco elegante e complicato; ma non sono riuscito a far di meglio; Massey lo liquida con un " si vede facilmente che"

Se siamo invece sul lato sinistro della striscia, prendiamo il punto $p=(-\pi/2,0)$ e mostriamo che dato un intorno U abbastanza piccolo di tale punto esiste $\rho>0$ tale che $t.U$ è disgiunto da U se $|t|>\rho$. Sia $\delta>0$ da precisare; prendiamo un intorno di p così fatto: $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1/2<y<1/12;\ y<1/\cos x-(2+1/3)\}$. Dimostriamo anzitutto che se $1<t<2/\sqrt{3}$ allora $t.U$ è disgiunto da U. Infatti si ha che l'ascissa x di $t.(x_0,y_0)$ obbedisce alla relazione $t=\tan x-\tan x_0$, da cui si ricava

$$\tan x=\tan x_0+t<\tan(-\pi/3)+t=-\sqrt{3}+t<-\sqrt{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}};$$

ne segue che è $-\pi/2\le x<-\pi/6$, e quindi che si ha sempre, sulla traiettoria, $\sin x<-1/2$; ne segue che si ha $\dot y<-1/2$, da cui l'ordinata di $t.(x,y)$ soddisfa a $y-y_0<-1/2$, se $1<t<2/\sqrt{3}$, e quindi che $y<y_0-1/2<1/12-1/2=-5/12<-1/3$. Quindi $t.U$ è disgiunto da u se $1<t<2/\sqrt{3}$; a più forte ragione ciò accade se $t\ge 1/\sqrt{3}$; infatti finchè la x resta minore di 0 la y decresce, e quando si ha $x\ge 0$ di certo il punto non sta più in U. Per $t<0$ basta osservare che si ha sempre $\sin x<-1/2$ e quindi per $t<-1$ di certo $t.U$ è disgiunto da U: si ha $y-y_0>t/2$, da cui $y_0-y<1/2$ se $t<-1$ e quindi $y>y_0+1/2>-1/3+1/2=1/6>1/12$.

3.5. **Topologia di un'orbita.** Se un'azione è transitiva, lo spazio X, orbita di uno qualsiasi dei suoi elementi mediante l'azione, può esser visto come lo spazio delle possibili "posizioni" che un oggetto di X assume sotto l'azione di G. Esiste sempre una funzione continua dello spazio omogeneo G/G_a sull'orbita Ga; se G è compatto ed X è di Hausdorff allora G/G_a è omeomorfo a Ga.

Esempio 1. Grassmanniane Sia $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ oppure $\mathbb{K}=\mathbb{C}$; e sia $1\le k\le n$ intero fissato. Indichiamo con $\mathrm{G}_{k,n}(\mathbb{K})$ l'insieme (senza per ora alcuna struttura) di tutti i sottospazi $k-$dimensionali di $\mathbb{K}^n$. Il gruppo lineare $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$ opera a sinistra su $\mathrm{G}_{k,n}(\mathbb{K})$ in modo ovvio (se V è sottospazio $k-$dimensionale di $\mathbb{K}^n$, ed A è lineare non singolare, allora $A(V)$ è ancora sottospazio $k-$dimensionale di $\mathbb{K}^{n+1}$). L'azione è chiaramente transitiva; osserviamo che anzi essa è transitiva anche se restringiamo il gruppo al gruppo $\mathrm{SU}_n(\mathbb{K})$. Fissato uno spazio di riferimento, ad esempio $E=\{(x_1,\dots,x_k,0,\dots,0):(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{K}^k\}$, possiamo topologizzare $\mathrm{G}_{k,n}(\mathbb{K})$ asserendo che esso ha la topologia di $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})/G_E$, dove G_E, stabilizzatore di E in $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$, è chiaramente il sottogruppo delle matrici della forma

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{k,1} & a_{k,2} & \dots & a_{k,k} & a_{k,k+1} & \dots & a_{k,n}\\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n+1,k+1} & \dots & a_{n,n}\end{bmatrix}$$

Lo spazio così ottenuto è la *varietà grassmanniana* degli spazi $k-$ dimensionali. È uno spazio compatto e di Hausdorff essendo omeomorfo allo spazio omogeneo $\mathrm{U}_n(\mathbb{K})/\mathrm{U}_{k,n-k}(\mathbb{K})$, dove $\mathrm{U}_{k,n-k}(\mathbb{K})$ è il sottogruppo del gruppo unitario consistente delle matrici della forma

$$\begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & u_{1k} & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ u_{k,1} & u_{k,2} & \dots & u_{k,k} & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & u_{k+1,k+1} & \dots & u_{k+1,n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & u_{n+1,k+1} & \dots & u_{n,n}\end{bmatrix}$$

si dimostra che $\mathrm{G}_{k,n}(\mathbb{R})$ è una varietà differenziale, di dimensione $(n-k)k$.

Esempio 2. Il gruppo $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ opera transitivamente sulla sfera $\mathbb{S}^{n-1}$. Fissato un elemento di $\mathbb{S}^{n-1}$, ad esempio il polo nord $\vec{e}_n=(0,\dots,1)$, lo stabilizzatore di questo è chiaramente identificabile con $\mathrm{SO}_{n-1}(\mathbb{R})$ (identificando $\mathbb{R}^{n-1}$ con il sottospazio $\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}$ dei vettori di $\mathbb{R}^n$ ortogonali a $\vec{e}_n$, e cioè con l'ultima coordinata nulla). La sfera è pertanto omeomorfa allo spazio omogeneo $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_{n-1}(\mathbb{R})$.

3.6. **Forma polare delle matrici.** Dimostriamo ora una decomposizione per $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ analoga alla decomposizione polare dei numeri complessi. Indichiamo con $\mathrm{H}_n(\mathbb{C})$ lo $\mathbb{R}$ spazio vettoriale delle matrici autoaggiunte ($A = A^*$, coincidono con la coniugata della trasposta); si noti che se A è autoaggiunta allora $(Ax|x)$ è reale per ogni $x \in \mathbb{C}^n$. Si noti che gli autovalori di una matrice autoaggiunta sono reali (se $Ax = \lambda x$ con $x \neq 0$ si ha $(Ax|x) = (x|Ax)$ che si scrive anche $(\lambda x|x) = (x|\lambda x)$ ovvero $\lambda|x|^2 = \bar{\lambda}|x|^2$ e quindi $\lambda = \bar{\lambda}$). Inoltre, se S è sottospazio di stabilità per una matrice autoaggiunta A, tale è anche il suo supplementare ortogonale $T = S^\perp$ (se $x \in T$ ed $y \in S$ si ha $(Ax|y) = (x|Ay) = 0$ perché $Ay \in S$ se $y \in S$) e da ciò è facile dedurre, per induzione sulla dimensione, che una matrice autoaggiunta A è diagonalizzabile, e che anzi $\mathbb{C}^n$ ha una base ortonormale formata da autovettori di A, e quindi esiste una $U \in \mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$ tale che UAU^{-1} sia diagonale; insomma se $A \in \mathrm{H}_n(\mathbb{C})$, con autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ si ha $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ e

$$\mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}(\lambda_1 1_n - A) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(\lambda_p 1_n - A) \qquad \text{(somma diretta ortogonale).}$$

Da ciò segue anche che se A è autoaggiunta allora la norma operatoriale di A è il massimo del modulo degli autovalori di A.

Una matrice $A \in \mathrm{H}_n(\mathbb{C})$ è detta *strettamente positiva* se $(Ax|x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{C}^n$ non nullo; sia $\mathrm{H}_n^+(\mathbb{C})$ l'insieme delle matrici positive . Ci serve il seguente fatto

. *Ogni matrice hermitiana strettamente positiva A è l'esponenziale di un'unica matrice hermitiana* $\log A$*, e quadrato di una sola matrice strettamente positiva,* $\sqrt{A} = \exp(\frac{1}{2}\log A)$.

Dimostrazione. Vediamo anzitutto l'unicità. Sia $B \in \mathrm{H}_n(\mathbb{C})$ tale che $\exp B = A$. Se $\mu_1, \dots, \mu_q$ sono gli autovalori di B, si ha $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^q \mathrm{Ker}(\mu_j 1_n - B)$, e su ciascuno degli spazi $E(\mu_j) = \mathrm{Ker}(\mu_j 1_n - B)$ la matrice B opera come moltiplicazione per μ_j; ne viene che su ciascuno degli spazi $E(\mu_j)$ la matrice $\exp B$ opera come moltiplicazione per $\lambda_j = e^{\mu_j} > 0$; la decomposizione $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^q E(\mu_j)$ è quindi anche quella degli autospazi di $\exp B = A$; da ciò l'unicità. Similmente per $B \in H_n^+(\mathbb{C})$ tale che sia $B^2 = A$. Per l'esistenza, si prende la decomposizione di $\mathbb{C}^n$ data dagli autospazi di A, e su $E(\lambda_j) = \mathrm{Ker}(\lambda_j 1_n - A)$ si definisce B ponendo $Bx = \log \lambda_j\, x$, per ogni $x \in E(\lambda_j)$; similmente per $\sqrt{A}$. $\square$

Mostriamo

. *La funzione esponenziale induce un omemorfismo di* $\mathrm{H}_n(\mathbb{C})$ *su* $\mathrm{H}_n^+(\mathbb{C})$*; e* $A \mapsto \sqrt{A}$ *è omeomorfismo di* $\mathrm{H}_n^+(\mathbb{C})$ *in se stesso.*

Dimostrazione. Si è visto sopra che $\exp : \mathrm{H}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{H}_n^+(\mathbb{C})$ è biiettiva; mostriamo che la funzione exp è propria da $\mathrm{H}_n(\mathbb{C})$ ad $\mathrm{H}_n^+(\mathbb{C})$; si deve mostrare che l'anti–immagine di un compatto è compatta. Le funzioni di $\mathrm{H}_n^+(\mathbb{C}) \to]0, +\infty[$ date da $A \mapsto \|A\|$ (massimo degli autovalori di A), ed $A \mapsto 1/\|A^{-1}\|$ (minimo degli autovalori di A) sono entrambe continue; ne segue che per ogni compatto K di $\mathrm{H}_n^+(\mathbb{C})$ esistono $0 < r \leq s < +\infty$ tali che K sia contenuto in $C = \{B \in \mathrm{H}_n^+(\mathbb{C}) : r \leq \|B\| \leq s\}$, l'antiimagine di questo in $\mathrm{H}_n(\mathbb{C})$ mediante exp è contenuta nella palla chiusa $\{A \in \mathrm{H}_n(\mathbb{C}) : \|A\| \leq \max\{\log s, -\log r\}\}$. Ne segue che $\exp | \mathrm{H}_n(\mathbb{C})$ è mappa chiusa su $\mathrm{H}_n^+(\mathbb{C})$, quindi che è omeomorfismo. Pertanto log è a sua volta continua, e quindi $A \mapsto \sqrt{A} = \exp(\frac{1}{2}\log A)$ è omeomorfismo di $\mathrm{H}_n^+(\mathbb{C})$ in sé. $\square$

Arriviamo all'importante decomposizione

Teorema. *L'applicazione* $(R, U) \mapsto RU$ *stabilisce un omeomorfismo di* $\mathrm{H}_n^+(\mathbb{C}) \times \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ *su* $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$.

Dimostrazione. Se $A = RU$, con R strettamente positiva ed U unitaria si ha $A^* = (RU)^* = U^*R^* = U^{-1}R$, per cui $AA^* = RUU^{-1}R = RR = R^2$. Si osservi ora che se $A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ allora AA^* è strettamente positiva (si ha $(AA^*x|x) = (A^*x|A^*x) = |A^*x|^2 > 0$ se $x \neq 0$), e quindi $R = \sqrt{AA^*}$ è univocamente individuata da A. Se proviamo che $R^{-1}A = (\sqrt{AA^*})^{-1}A$ è unitaria qualunque sia $A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ abbiamo concluso.Infatti si ha:

$$(R^{-1}A)^*(R^{-1}A) = A^*(R^{-1})^*R^{-1}A = A^*(R^*)^{-1}R^{-1}A = A^*R^{-1}R^{-1}A = A^*(R^2)^{-1}A = \\ A^*(AA^*)^{-1}A = A^*(A^*)^{-1}A^{-1}A = 1_n,$$

quindi $R^{-1}A$ è unitaria. L'inversa $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{H}_n^+(\mathbb{C}) \times \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ è continua, perché è data, come visto, da $A \mapsto (\sqrt{AA^*}, (\sqrt{AA^*})^{-1}A)$. $\square$

Osservazione. Tale decomposizione è ovviamente solo topologica, e non gruppale; $\mathrm{H}_n^+(\mathbb{C})$ non è gruppo, salvo che per $n = 1$. Si noti anche che $A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ se e solo se R è reale definita positiva, ed U è reale ortogonale.

Si osservi anche che $\mathrm{H}_n(\mathbb{C})$ è $\mathbb{R}-$spazio lineare, di dimensione reale $n(n-1)+n=n^2$; ne segue che $H_n^+(\mathbb{C})$, ad esso omeomorfo, è contrattile. La struttura topologica di $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ è quindi riposta in $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$. Il risultato che segue inizia a chiarire la questione; indichiamo una matrice come $n-$pla delle sue colonne, $U=[u_1,\dots,u_n]$

. *La funzione* $(\lambda,[u_1,\dots,u_n])\mapsto[\lambda u_1,\dots,u_n]$ *di* $\mathbb{U}\times\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$ *in* $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ *è un omeomorfismo (*non è *algebricamente isomorfismo).*

Dimostrazione. È chiaramente continua ed ha $A=[v_1,\dots,v_n]\mapsto(\det A,[v_1/\det A,\dots,v_n])$ come inversa, altrettanto chiaramente continua. □

Osservazione. Non esiste un isomorfismo del gruppo prodotto $\eta:\mathbb{U}\times\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})\to\mathrm{U}_n$. Il centro di $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ è il gruppo delle matrici scalari di rapporto $\lambda\in\mathbb{U}$, isomorfo ad $\mathbb{U}$. Il centro di $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$ è costituito dalle matrici scalari aventi una radice $n-$esima dell'unità come rapporto, isomorfo a C_n, gruppo ciclico di ordine n. Il centro di $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ dovrebbe essere isomorfo al prodotto diretto dei centri, cioè $\mathbb{U}$ sarebbe isomorfo ad $\mathbb{U}\times C_n$, assurdo. Invece $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$, come sopra visto, è prodotto *semidiretto* di $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$ e del sottogruppo $[\lambda\vec{e}_1,\vec{e}_2\dots,\vec{e}_n]$ $(\lambda\in\mathbb{U})$, algebricamente e topologicamente.

Ovviamente si ha $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})\approx\mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})\times\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, dove $\mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})$ sono le matrici simmetriche reali definite positive, ed $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ sono le matrici ortogonali. Anche qui, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ è topologicamente omeomorfo, ed algebricamente isomorfo come prodotto semidiretto ad $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})\times\{1,-1\}$, tramite la funzione $A=[u_1,\dots,u_n]\mapsto[u_1/\det A,u_2,\dots,u_n],\det A)$. Se n è dispari si ha però anche un isomorfismo, algebrico e topologico, di $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ con $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})\times\{1,-1\}$, stavolta come prodotto diretto, usando la mappa $A\mapsto(A/\det A,\det A)$.

3.6.1. $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$*,* $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$*,* $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ *sono connessi per archi.* Per $n=1$ la cosa è banale. Per $n=2$ si nota che $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ è omeomorfo alla sfera dei versori di $\mathbb{C}^2$ e cioè ad $\mathbb{S}^3$, e quindi è connesso per archi: ciò è stato visto in 3.2, Esempio 6; ne segue che $\mathrm{U}_2(\mathbb{C})$ è connesso per archi. Le idee contenute nello stesso riferimento portano alla soluzione, per induzione su n: data $A\in\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$, ci sono due possibilità:

- Ae_1 ed e_1 sono linearmente indipendenti
- $Ae_1=\alpha e_1$, con $\alpha\in\mathbb{C}$ necessariamente di modulo 1.

Nel primo caso si definisce un operatore $B\in\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ come segue: detto V lo spazio generato da e_1 ed Ae_1, si definisce $B\in\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ come l'identità sullo spazio ortogonale di V, mentre su V esso induce un operatore appartenente ad $\mathrm{U}(V)$ che applica e_1 in Ae_1, come segue: si prende un vettore $v\in V$ in modo che e_1,v sia base ortonormale per V, cioè $v=(Ae_1-(Ae_1|e_1)e_1)/(|Ae_1-(Ae_1|e_1)e_1|)$, e si definisce $B:V\to V$ ponendo $Be_1=Ae_1=(Ae_1|e_1)e_1+(Ae_1|v)v$, $Bv=-(v|Ae_1)e_1+(e_1|Ae_1)v$; è chiaro che B è unitario. L'operatore $B^{-1}A$ è unitario e tiene fermo e_1; sul supplementare ortogonale esso induce un operatore unitario, identificabile con un elemento $C\in\mathrm{U}_{n-1}(\mathbb{C})$. Per l'ipotesi induttiva esiste una funzione continua $\alpha:[0,1]\to\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ tale che $\alpha(0)=1_n$. $\alpha(1)=C$; per il caso $n=2$ esiste una funzione continua $\beta:[0,1]\to\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ tale che $\beta(0)=1_n$, $\beta(1)=B$. Allora $\beta\alpha:[0,1]\to\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ definito da $\beta\alpha(t)=\beta(t)\alpha(t)$ è continuo, vale 1_n per $t=0$, e vale $B(B^{-1}A=a$ per $t=1$. Se $Ae_1=\alpha e_1$ si prenda una funzione continua $\gamma:[0,1]\to\mathbb{U}$ con $\gamma(0)=\alpha$ e $\gamma(1)=1$; la funzione

$$\Gamma(t)=[\gamma(t)e_1;Ae_2,\dots,Ae_n]$$

è una cammino in $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ tra A e l'operatore B che lascia fermo e_1, e su $e_2,\dots,e_n$ coincide con A; per l'ipotesi induttiva c'è un arco in $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ che congiunge B con 1_n. Ciò prova che $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ è connesso per archi; ne segue subito che tale è anche $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$. La stessa dimostrazione prova anche la connessione di $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$; occorre una cautela in più nel secondo caso sopra, $Ae_1=-e_1$; in questo caso si osserva che essendo 1 il determinante, ed inducendo A un trasformazione ortogonale sullo spazio generato da $e_2,\dots,e_n$, supplementare di e_1; questa deve avere a sua volta determinante -1, e deve quindi esistere un altro versore v con $Av=-v$; si ragiona sullo spazio generato da e_1 e v, dove A induce la trasformazione $x\mapsto-x$, che si attacca all'identità: pensare alle matrici

$$\begin{bmatrix}\cos(\pi t) & -\sin(\pi t)\\ \sin(\pi t) & \cos(\pi t)\end{bmatrix}.$$

3.7. **Quaternioni e rotazioni tridimensionali.** Il corpo $\mathbb{H}$ (da Hamilton) dei quaternioni è una $\mathbb{R}-$algebra con divisione di dimensione 4 su $\mathbb{R}$; essa è quindi, come spazio vettoriale, isomorfa ad $\mathbb{R}^4$; se

$$1=(1,0,0,0);\ i=(0,1,0,0);\ j=(0,0,1,0);\ k=(0,0,0,1),$$

ogni $p = (\lambda, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{H}$ si scrive come $\lambda\, 1 + x_1\, i + x_2\, j + x_3\, k$; la moltiplicazione è definita dal fatto che $\mathbb{H}$ è un'$\mathbb{R}-$ algebra, e dall'assumere 1 come neutro per la moltiplicazione, mentre si ha

$$ii = jj = kk = -1;\ ij = k;\ jk = i;\ ki = j;\ ji = -ij;\ kj = -jk;\ ik = -ki.$$

Si noti che le regole di moltiplicazione di i, j, k sono esattamente quelle del prodotto vettoriale dei versori standard di $\mathbb{R}^3$, almeno quando i fattori sono diversi. Ne viene che se pensiamo ai quaternioni $\mathbb{H}$ come ad $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$, scrivendo ogni quaternione come $\lambda + x = \lambda\, 1 + (0, x_1, x_2, x_3)$, somma di una *parte scalare, o parte reale,* λ e di una *parte vettoriale, o parte immaginaria,* x, il prodotto $pq = (\lambda + x)(\mu + y)$ si scrive $\lambda\mu + \mu\, x + \lambda y + x\, y$; ora, per $x\, y$ si ha

$$x\, y = (x_1\, i + x_2\, j + x_3\, k)(y_1\, i + y_2\, j + y_3\, k) = -(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) + x \times y.$$

Si ha quindi: se $p = \lambda + x$, $q = \mu + y$ il prodotto pq è un quaternione che ha come parte scalare $\lambda\mu - (x|y)$, dove $(x|y)$ è il prodotto scalare di x ed y, e come parte vettoriale $\mu x + \lambda y + x \times y$, dove $x \times y$ è il prodotto vettoriale di x ed y:

$$pq = (\lambda\mu - (x|y)) + \lambda y + \mu x + x \times y$$

Si dimostra che la moltiplicazione è associativa; chiaramente non è commutativa: $pq - qp = 2x \times y$; da tale relazione si ha anzi subito che il centro di $\mathbb{H}$ consta dei quaternioni scalari, e che non esiste quindi una struttura di $\mathbb{C}-$algebra su $\mathbb{H}$ che estenda la struttura di $\mathbb{R}-$algebra (se ci fosse una struttura di $\mathbb{C}-$algebra, $(\alpha, p) \mapsto \alpha.p$, $\mathbb{C}.1$ sarebbe contenuto nel centro di $\mathbb{H}$, con dimensione 2 su $\mathbb{R}$).

Il coniugato del quaternione $p = \lambda + x$ è il quaternione $\tilde{p} = \lambda - x$, la *norma* è $|p| = \sqrt{p\tilde{p}} = \sqrt{\lambda^2 + |x|^2}$, il *reciproco* è pertanto $\tilde{p}/|p|^2$; si noti che allora $\widetilde{pq} = \tilde{q}\tilde{p}$, e che $|pq| = |p||q|$.

L'insieme $\mathbb{S}^3$ dei quaternioni di norma 1 è un sottogruppo compatto del gruppo moltiplicativo dei quaternioni non nulli, che è evidentemente isomorfo al prodotto diretto $]0, +\infty[\times \mathbb{S}^3$, via $p \mapsto (|p|, p/|p|)$; si ha $p^{-1} = \tilde{p}$ per ogni $p \in \mathbb{S}^3$. Mostriamo che se $|p| = 1$, $h_p(x) = px\tilde{p}$ definisce un elemento di $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$: supposto che sia $p = \lambda + a$, si ha $(\lambda + a)x(\lambda - a)= (-(a|x) + \lambda x + a \times x)(\lambda - a)= (-\lambda(a|x) + \lambda(x|a) + (a \times x|a)) + (a|x)a + \lambda^2 x + \lambda a \times x - \lambda x \times a - (a \times x) \times a$. Osserviamo che la parte scalare di questo quaternione è nulla; inoltre $-(a \times x) \times a = a(a|x) - x(a|a)$; in definitiva si ottiene:

$$h_p(x) = px\tilde{p} = (\lambda^2 - |a|^2)x + 2(x|a)a + 2\lambda a \times x$$

Se $|p|^2 = \lambda^2 + |a|^2 = 1$, e supponiamo per ora $a \neq 0$ si può scrivere

$$p = \cos(\alpha/2) + \sin(\alpha/2)u$$

dove $u \in \mathbb{R}^3$ è versore; $u = \pm a/|a|$ ed, una volta fissato uno dei due segni, il valore $\alpha/2$ è individuato modulo 2π; i quaternioni $1, -1$ rientrano nella precedente rappresentazione con $\alpha = 0, 2\pi$ rispettivamente. Essendo $a = \sin(\alpha/2)u$ si ha $|a|^2 = \sin^2(\alpha/2)$, da cui

$$h_p(x) = \cos\alpha x + \sin\alpha u \times x + 2\sin^2(\alpha/2)(x|u)u$$

È immediato vedere che $x \to h_p(x)$ è la rotazione di $\mathbb{R}^3$, di angolo α, che ha l'asse parallelo ad u; si ha infatti $h_p(u) = u$, e se x è ortogonale a u, $(x|u) = 0$, si ha

$$h_p(x) = \cos\alpha x + \sin\alpha u \times x$$

che per l'appunto è una rotazione nel piano perpendicolare ad u, "vista da u in verso antiorario": con ciò si intende che ogni vettore del piano ortogonale ad u si sovrappone al suo trasformato ruotando di α radianti nella direzione antioraria del piano, come vista dalla parte di u, se $\alpha > 0$; ruota invece di un angolo $-\alpha = |\alpha|$ radianti nel verso orario se $\alpha < 0$. Se α è multiplo intero di 2π, si ha $p = \pm 1$, ed h_p è l'identità di $\mathbb{R}^3$; solo in questi casi si ha l'identità. Si ha quindi subito che $p \to h_p$ è omomorfismo di $\mathbb{S}^3$ su $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$, avente come nucleo $\{1, -1\}$; la suriettività di tale omomorfismo è pure immediata, e viene dal fatto che ogni elemento di $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ è una rotazione intorno ad un asse (ciò dovrebbe essere noto, in ogni caso vedi dopo). Si noti quindi che $h_p = h_{-p}$ per ogni quaternione unitario; ed infatti se $p = \cos(\alpha/2) + \sin(\alpha/2)u$, si ha $-p = -\cos(\alpha/2) - \sin(\alpha/2)u = \cos((2\pi - \alpha)/2) + \sin((2\pi - \alpha)/2)(-u)$, corrispondentemente al fatto che una rotazione di angolo α diventa la rotazione di angolo $2\pi - \alpha$ se "vista dalla parte opposta del piano". Invece è $h_{\tilde{p}} = h_p^{-1}$, ed infatti $\tilde{p} = \cos(-\alpha/2) + \sin(-\alpha/2)u$ porge la rotazione inversa di angolo $-\alpha$.

Si può fare operare $\mathbb{S}^3$ anche su se stesso con il coniugio, $(p, q) \mapsto pq\tilde{p} = p(\lambda + x)\tilde{p} = \lambda + px\tilde{p} = \lambda + h_p(x)$, dove λ è la parte scalare di q, ed x la parte vettoriale. Ne viene che l'orbita di q consta esattamente del "parallelo" della sfera, relativo ai poli opposti $1, -1$:

$$C_\lambda = \{\lambda + y : |y| = |x|\},$$

gli $y \in \mathbb{R}^3$ tali che $\lambda + y \in C_\lambda$ sono $\lambda-$sezione della sfera $\mathbb{S}^3$; è una 2−sfera in $\mathbb{R}^3$ di raggio $|x| = \sqrt{1-\lambda^2}$ e centro nel punto $(0,0,0)$, che ovviamente si riduce all'origine per $\lambda = \pm 1$. Per la dimostrazione, basta osservare che l'azione di $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ sulle 2−sfere di $\mathbb{R}^3$ è transitiva. Ogni sotto gruppo invariante di $\mathbb{S}^3$ deve ovviamente essere unione di tali classi di coniugio. Ne viene

Proposizione. *Nella sfera dei quaternioni unitari, l'unico sottogruppo invariante proprio e non banale è il centro* $\{1, -1\}$.

Dimostrazione. Sia G sottogruppo invariante di $\mathbb{S}^3$ contenente un elemento $q \neq \pm 1$; mostriamo che si ha $G = \mathbb{S}^3$. Infatti G contiene l'intera classe coniugata di $q = \lambda + x$, e cioè C_λ; e contiene quindi anche $C_\lambda \tilde{q}$; quest'insieme contiene 1, e le parti scalari dei suoi elementi sono date dalla formula $\lambda^2 + (x|y)$, al variare di y nella $\lambda-$ sezione di C_λ, sfera di $\mathbb{R}^3$ che ha raggio $|x|$; la funzione $y \mapsto \lambda^2 + (x|y)$ è continua su tale 2−sfera, che è compatta e connessa; l'insieme dei valori assunti è quindi un intervallo compatto, che ha per massimo $\lambda^2 + |x|^2 = 1$, e per minimo $\lambda^2 - |x|^2 = 2\lambda^2 - 1$; ma se G è invariante, si ha che G contiene tutti i quaternioni con parte scalare in tale intervallo; in particolare, l'interno di G non è vuoto, e quindi G è aperto in $\mathbb{S}^3$. ma allora G è anche chiuso, e per connessione della 3−sfera si ha $G = \mathbb{S}^3$. □

Corollario. *Il gruppo* $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ *è semplice.*

Dimostrazione. Basta rimontare un sottogruppo normale non banale Γ di $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ ed applicare la precedente proposizione. □

La $\mathbb{R}-$algebra $\mathbb{H}$ è anche realizzabile come una $\mathbb{R}-$sottoalgebra dell'algebra delle matrici $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$. Si noti anzitutto che gli insiemi

$$\mathbb{R}\,1 + \mathbb{R}\,i; \quad \mathbb{R}\,1 + \mathbb{R}\,j; \quad \mathbb{R}\,1 + \mathbb{R}\,k$$

sono sottoalgebre (su $\mathbb{R}$) di $\mathbb{H}$ isomorfe a $\mathbb{C}$; ed $\mathbb{H}$ può essere pensato come un $\mathbb{C}-$spazio vettoriale (ma *non* una $\mathbb{C}-$algebra) di dimensione 2, avente 1 e i come base, sulla sua sotto $\mathbb{R}-$algebra $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}\,1 + \mathbb{R}\,j$, usando le moltiplicazioni a destra: si ha infatti $\lambda\,1 + x_1\,i + x_2\,j + x_3\,k = 1(\lambda + x_2\,j) + i\,(x_1 + x_3\,j)$. Se facciamo operare $\mathbb{H}$ su se stesso con le moltiplicazioni a sinistra il gruppo moltiplicativo di $\mathbb{H}$ opera $\mathbb{C}-$linearmente (rispetto alla moltiplicazione prima introdotta) a sinistra su $\mathbb{H}$ stesso; e posto $\eta_q(p) = qp$, la funzione $q \mapsto \eta_q$ è un isomorfismo della $\mathbb{R}-$algebra $\mathbb{H}$ su una sottoalgebra di $L_{\mathbb{C}}(\mathbb{H}) \approx \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ consistente delle matrici della forma (escludiamo lo 0)

$$\begin{bmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{bmatrix},$$

dove la matrice $\begin{bmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{bmatrix}$ appartiene ad $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$, e $\lambda > 0$ coincide con la radice quadrata di $\det \begin{bmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{bmatrix} = |a|^2 + |b|^2$. Infatti la matrice di η_q nella base $(1, i)$ di $\mathbb{H}$, se $q = \mu + y_1\,i + y_2\,j + y_3\,k = 1\,(\mu + y_2\,j) + i\,(y_1 + y_3\,j) = 1\,a + i\,b$, ha chiaramente a, b come prima colonna, e quella di componenti $-\bar{b}, \bar{a}$ come seconda, essendo

$$q\,i = \mu\,i - y_1 - y_2\,k + y_3\,j = 1\,(-y_1 + y_3\,j) + i\,(\mu - y_2\,j) = 1(-\bar{b}) + i\,\bar{a},$$

Insomma, ponendo (nella matrice si scrive i in luogo di j, i l'unità immaginaria dei complessi)

$$q = \mu + y_1\,i + y_2\,j + y_3\,k \mapsto \begin{bmatrix} \mu + y_2\,i & -y_1 + y_3\,i \\ y_1 + y_3\,i & \mu - y_2\,i \end{bmatrix}$$

si ottiene un isomorfismo di $\mathbb{H}$ su una $\mathbb{R}-$sottoalgebra di $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$; notando che il determinante è $|\mu + y_2\,i|^2 + |y_1 + y_3\,i|^2 = |q|^2$, si ottiene che $\mathbb{S}^3$ è isomorfo a $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$. In particolare:

$$1 \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \; i \mapsto \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \; j \mapsto \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}; \; k \mapsto \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

La precedente funzione $p \mapsto p\tilde{q}$ può naturalmente essere pensata anche come un elemento ρ_q di $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$; ne viene che si ha un omomorfismo iniettivo $\rho : q \mapsto \rho_q$ di $\mathbb{S}^3$ in $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$; si vede da questo omomorfismo che $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$ opera transitivamente sulla sfera $\mathbb{S}^3$ (cosa che sapevamo già per altra via). Si ha un omeomorfismo (che non è però omomorfismo di gruppi) di $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$ su $\mathbb{S}^3 \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ nel modo seguente:2

3.7.1. SO_2 *ed* SO_3. Ricordiamo qui cose che dovrebbero essere note su SO_2 ed SO_3. Il termine "spazio euclideo" denota uno spazio di dimensione finita su $\mathbb{R}$, munito di un prodotto scalare.

Proposizione. *Sia V euclideo di dimensione 2.*

- *Ogni $A \in \mathrm{SO}(V)$ ha una matrice della forma*

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},$$

  in una qualsiasi base ortonormale v, w di V; viceversa, se $A \in \mathrm{L}(V)$ si scrive con tale matrice in qualche base ortonormale, allora A appartiene ad $\mathrm{SO}(V)$.
- *Se $A \in \mathrm{O}(V) \setminus \mathrm{SO}(V)$, allora A ha $1, -1$ come autovalori, ed è una simmetria assiale, rispetto ad un sottospazio unidimensionale.*

Dimostrazione. Sia $A \in \mathrm{O}(V)$. Sia $v \in V$ versore fissato; anche Av è allora versore, e se w è un qualsiasi versore ortogonale a v si scrive $Av = (Av|v)v + (Av|w)w$; essendo $|Av|^2 = |(Av|v)|^2 + |(Av|w)|^2 = 1$ si ha $(Av|v) = \cos\alpha$, $(Av|w) = \sin\alpha$ per $\alpha \in \mathbb{R}$ individuato modulo 2π. Anche Aw è versore, ed è ortogonale ad Av; ne segue che si ha $Aw = -\sin\alpha\, u + \cos\alpha\, w$, oppure $Aw = \sin\alpha\, u - \cos\alpha\, w$; si ha $\det A = 1$ solo con la prima scelta, la seconda porge $\det A = -1$. Il polinomio caratteristico è $\zeta^2 - \mathrm{Tr}(A)\,\zeta + \det A$; si ottiene $\zeta^2 + 2\cos\alpha\,\zeta + 1$ nel caso speciale, $\zeta^2 - 1$ nel secondo. Il resto è facile. □

Supponendo $A \in \mathrm{SO}(V)$ si dimostra anche (per esempio usando $\mathbb{C}$ come modello di spazio euclideo 2−dimensionale, ed osservando che gli elementi di $\mathrm{SO}(V)$ sono in questo caso esattamente le moltiplicazioni per numeri complessi di modulo 1) che il valore $\cos\alpha = (Av|v)$ dipende unicamente da A e non dalla base (v, w) scelta; il segno di $\sin\alpha$ è invece influenzato dalla scelta di w ortogonale a v; la matrice di A è la stessa sulle basi ortonormali dello stesso segno; su basi di segno opposto cambia il segno di $\sin\alpha$.

In uno spazio euclideo W di dimensione 3 sia L sottospazio unidimensionale; una rotazione di asse L è una trasformazione $A \in \mathrm{O}(W)$ che è l'identità su L, e che induce una trasformazione $A \in \mathrm{SO}(V)$ sul supplementare ortogonale V di L; chiaramente una rotazione di asse L è un elemento di $\mathrm{SO}(V)$.

Proposizione. *Sia W euclideo di dimensione 3. Sia $A \in \mathrm{SO}(W)$ diversa dall'identità; allora A ha un unico asse di rotazione.*

Dimostrazione. Il polinomio caratteristico $\chi_A(\zeta) = \det(\zeta 1_3 - A)$ ha grado 3 e quindi ha almeno una radice reale, necessariamente di modulo 1; il prodotto delle radici è $\det A = 1$, quindi se una radice è reale e due complesse coniugate $e^{\pm i\alpha}$ la radice reale deve essere 1; se ha tre radici reali, possono tutte e tre essere 1, oppure una dev'essere 1 e due devono essere -1. In ogni caso 1 è un autovalore di A, e quindi c'è un sottospazio unidimensionale L di punti uniti; se V è l'ortogonale di L, A induce una trasformazione $A_{|V} \in \mathrm{SO}(V)$; se tutti e tre gli autovalori di A fossero 1, $A_{|V}$ sarebbe l'identità, e quindi A sarebbe l'identità, contro l'ipotesi. □

4. Omotopia

4.1. **Definizione.**

Definizione. Siano X, Y spazi topologici, e siano $f, g : X \to Y$ funzioni continue. Un'*omotopia* H da f a g, o di f in g, è una funzione continua $H : X \times [0,1] \to Y$ tale che sia $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = g(x)$, per ogni $x \in X$.

Possiamo pensare ad un'omotopia come ad una famiglia ad un parametro di funzioni continue $f_t \in C(X,Y)$, $t \in [0,1]$, con $f_0 = f$ ed $f_1 = g$, ponendo $f_t(x) = H(x,t)$ per ogni $(x,t) \in X \times I$ ($I = [0,1]$): intuitivamente, un'omotopia deforma in modo continuo la funzione f nella funzione g. Se su $C(X,Y)$ c'è una topologia congiuntamente continua, ogni funzione continua $t \mapsto f_t$ da $[0,1]$ a $C(X,Y)$ fornisce un'omotopia $H : X \times [0,1] \to Y$, ponendo $H(x,t) = f_t(x)$; inversamente, se X è localmente compatto, le omotopie H da $f \in C(X,Y)$ a $g \in C(X,Y)$ sono identificabili con gli archi continui in $C(X,Y)$ che congiungono f con g, una volta munito $C(X,Y)$ della topologia compact-open (vedi 2.5). Prima di procedere è opportuno osservare che la relazione di omotopia tra funzioni è relazione di equivalenza (Riflessività: ovvia. Simmetria: se H è omotopia da f a g, $\bar{H} : X \times I \to Y$ definita da $\bar{H}(x,t) = H(x, 1-t)$ è omotopia da g ad f. Transitività: se H è omotopia da f a g, e K è omotopia da g ad h, allora $H.K : X \times I \to Y$ definita da $H.K(x,t) = H(x,2t)$ se $t \in [0,1/2]$, $H.K(x,t) = K(x,2t-1)$ per $t \in [1/2,1]$ è omotopia da f a g, come subito si vede).

Si può quindi parlare delle *classi di omotopia* di funzioni continue da X ad Y; se X è localmente compatto, tali classi sono esattamente le arco–componenti di $C(X,Y)$ nella topologia compact–open. L'insieme delle classi di omotopia delle funzioni continue da X ad Y si indica con $[X,Y]$.

Una $f \in C(X,Y)$ si dice *nullomòtopa* se è omotopa ad una costante. Uno spazio topologico X è detto *contrattile*, o *contraibile*, se l'identità $1_X : X \to X$ è nullomòtopa.

Esempio 1. Le funzioni $z \mapsto z$ e $z \mapsto -z$ di $\mathbb{U}$ in sé (identità e mappa antipodale del toro $\mathbb{U}$) sono omòtope: in pratica possiamo "ruotare di un angolo piatto" l'identità per sovrapporla all'antipodo; un'omotopia è cioè $H : \mathbb{U} \times I \to \mathbb{U}$ data da $H(z,t) = ze^{i\pi t}$. Invece l'identità di $\mathbb{U}$ non è nullomotopa; chi sa un po' di analisi complessa sa che se così fosse, si avrebbe $\int_\gamma dz/z = 0$, dove $\gamma(\vartheta) = e^{i\vartheta}$ ($\vartheta \in [0,2\pi]$) è il circolo unitario, mentre invece si ha $\int_\gamma dz/z = 2\pi i$. Risultati generali su cose di questo tipo si vedranno poi: in particolare, dimostreremo che *le sfere unitarie degli spazi euclidei non sono contrattili.* Osserviamo che l'identità e la mappa antipodale non sono in modo evidente fra loro omotope sulla sfera $\mathbb{S}^2$; invece non è difficile, in analogia a quanto fatto per $\mathbb{U}$, vedere che lo sono sulla sfera $\mathbb{S}^3 = \{x = (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : |x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$; un'omotopia è

$$H(x,t) = \begin{bmatrix} \cos\pi t & -\sin\pi t & 0 & 0 \\ \sin\pi t & \cos\pi t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\pi t & -\sin\pi t \\ 0 & 0 & \sin\pi t & \cos\pi t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} =$$

$$(\cos(\pi t)x_1 - \sin(\pi t)x_2, \sin(\pi t)x_1 + \cos(\pi t)x_2, \cos(\pi t)x_3 - \sin(\pi t)x_4, \sin(\pi t)x_3 + \cos(\pi t)x_4) \quad t \in I.$$

Più generalmente, se $A \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, le funzioni $x \mapsto Ax$ e l'identita di $\mathbb{S}^{n-1}$ sono omotope come funzioni di $\mathbb{S}^{n-1}$ in sé: se $t \mapsto A_t$ è un arco continuo entro $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ con $A_0 = 1_n$ ed $A_1 = A$, l'omotopia è $(x,t) \mapsto A_t(x)$.

Si dimostrerà (ma non sarà facile) che sulle sfere di dimensione pari identità e mappa antipodale non sono omotope. Sono invece omotope su ogni sfera di dimensione dispari (imitando quanto fatto sopra, od usando il fatto che la mappa antipodale sta in $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ se n è pari).

Esercizio 2. Siano $f, g \in C(X,Y)$ costanti, $f(x) = a$, $g(x) = b$ per ogni $x \in X$, Mostrare che f e g sono omotope se e solo se a e b stanno nella stessa arco–componente di Y.

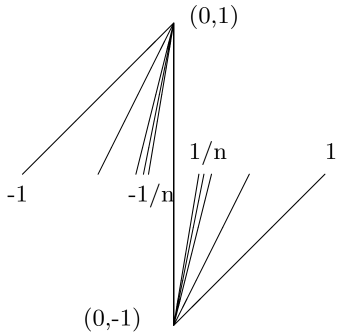
Esempio 3. Se Y è sottoinsieme convesso di uno spazio vettoriale topologico, per ogni spazio X due funzioni $f, g \in C(X,Y)$ sono sempre omotope, potendosi deformare l'una nell'altra lungo i segmenti che uniscono $f(x)$ con $g(x)$:

$$H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x);$$

quest'*omotopia affine* è di uso assai frequente. Se Y è un convesso, $[X,Y]$ consta quindi di un unico elemento; in particolare Y è contrattile.

Esercizio 4. Ogni spazio contrattile è connesso per archi.

Esercizio 5. Il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^2$, pur essendo connesso per archi non è contrattile; verificarlo.



Lo spazio è l'unione dei segmenti $[(-1/n,0);(0,1)]$ e dei segmenti $[(1/n,0);(0,-1)]$, al variare di $n \in \mathbb{N}^>$, con il segmento $[(0,-1);(0,1)]$.

Suggerimento: se per assurdo X fosse contrattile, esisterebbe un'omotopia $H : X \times I \to X$ con $H(x,0) = x$ ed $H(x,1) = (0,0)$ Se $x_n = (1/n,0)$, ed $x_{-n} = (-1/n,0)$ si mostri che per ogni n esiste un minimo $t \in I$ tale che sia $H(x_n,t_n) = (0,-1)$, sia esso t_n ed un minimo $t \in I$ tale che sia $H(x_{-n},t) = (0,1)$, sia esso t_{-n}. Posto $t_+ = \text{minlim}_n\, t_n$, $t_- = \text{minlim}_n\, t_{-n}$, mostrare che se $t < t_+$ si ha $\text{pr}_2(H((0,0),t) \le 0$, mentre se $t < t_-$ si ha $\text{pr}_2(H((0,0),t) \ge 0 \dots$

È importante osservare

. *L'omotopia tra funzioni è compatibile con la composizione; in altre parole, se $f_0, f_1 \in C(X,Y)$ sono omotope, e $g_0, g_1 \in C(Y,Z)$ sono omotope, allora $g_1 \circ f_1$ e $g_0 \circ f_0$ sono omotope in $C(X,Z)$.*

Dimostrazione. Se $H \in C(X \times I, Y)$ è un'omotopia da f_0 ad f_1, è $K : Y \times I \to Z$ è un'omotopia da g_0 a g_1, è immediato vedere che $(x,t) \mapsto K(H(x,t),t)$ è un'omotopia come si richiede. □

Esercizio 6. Se Y è contrattile, allora $[X,Y]$ contiene un unico elemento, per ogni spazio X.

Esercizio 7. Se X è contrattile, c'è una biiezione naturale tra $[X,Y]$ e le arco–componenti di Y.

Quanto prima detto mostra che si può considerare un'altra categoria, quella degli spazi topologici con morfismi le classi di omotopia delle funzioni continue, $\text{Mor}(X,Y) := [X,Y]$; se definiamo $[g]\circ[f] := [g \circ f]$ come composizione, il risultato precedente assicura che questa è una buona definizione. Il morfismo identico di X è la classe di omotopia dell'identità 1_X di X.

4.2. **Omotopia relativamente ad un sottospazio.** È molto importante osservare che la nozione di omotopia è fortemente legata agli spazi X ed Y fissati; ampliando Y, funzioni che prima non erano omotope possono diventarlo. Avremo frequentemente bisogno della nozione di omotopia relativamente ad un sottospazio: $f, g \in C(X,Y)$ sono omotope relativamente al sottospazio $A \subseteq X$ se esiste un'omotopia H da f a g relativamente ad A, cioè $H : X \times I \to Y$ deve essere tale che $H(x,t) = f(x)$ per ogni $t \in I$, in aggiunta alle condizioni $H(x,0) = f(x)$ ed $H(x,1) = g(x)$, per ogni $x \in X$. In altre parole, si vuole un'omotopia che lasci fermo $f(x)$, per ogni $x \in A$. È evidente che anche la nozione di omotopia relativamente ad un sottospazio è di equivalenza. Particolarmente importante è l'omotopia tra funzioni $f \in C(I,X)$ relativamente al sottoinsieme $\dot{I} = \{0,1\}$ di I consistente degli estremi. Gli elementi di $C(I,X)$ sono, come è ben noto, gli *archi* o *cammini* di X: $\alpha : I \to X$, α continua, è un *cammino* in X, di origine $\alpha(0)$ ed estremo $\alpha(1)$; l'omotopia di cammini relativamente ad $\dot{I} = \{0,1\}$ è l'*omotopia ad estremi fissi* dei cammini. Generalizzando, è spesso utile l'omotopia tra funzioni $\alpha : I^n \to X$ relativamente alla frontiera ∂I^n di I^n, o (ciò che è lo stesso) l'omotopia di funzioni $f : B \to X$, dove B è la palla euclidea di qualche spazio normato, relativamente alla "buccia" $S = \partial B$ della palla stessa.

Esercizio 1. Lo spazio pettine P, descritto in Analisi Due/1,Cap.II,12.14, Es 1, è

$$P = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{1/n\} \times [0,1]\right) \cup (\{0\} \times [0,1])\,.$$

Mostrare che P è contrattile, ma che se $A = \{v\}$, dove $v = (0,1)$ è il vertice del pettine, non esiste un'omotopia relativamente ad A dell'identità di P con la costante $x \mapsto v$.

4.3. **Funzioni che hanno per codominio un sfera.** Per funzioni che arrivano su una sfera $S = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ di uno spazio normato $(E, \|\cdot\|)$, il seguente risultato è assai utile

. *Se $f, g \in C(X, S)$ non sono mai antipodali ($f(x) \neq -g(x)$, per ogni $x \in X$), e coincidono sul sottospazio A di X ($f(x) = g(x)$, per ogni $x \in A$), allora f, g sono omotope relativameente ad A.*

Ogni $f \in C(X, S)$ non suriettiva è nullomotopa.

Dimostrazione. Si scrive

$$H(x,t) = \frac{(1-t)f(x) + tg(x)}{\|(1-t)f(x) + tg(x)\|} ;$$

se $f(x) \neq -g(x)$, per ogni $x \in X$, allora $(1-t)f(x) + tg(x) \neq 0$, per ogni $x \in X$, ed ogni $t \in [0,1]$. Se poi $a \in S \smallsetminus f(X)$, allora f e la costante $g(x) = -a$ non sono mai antipodali, e quindi f è omotopa a g, quindi nullomotopa. □

Osservazione. Si noti che l'omotopia è quella affine, proiettata radialmente sulla sfera dei versori con la funzione segno, $x \mapsto x/\|x\|$.

Esercizio 1. Si consideri lo spazio di Hilbert $\ell^2(\mathbb{N}) = \ell^2$ delle successioni (reali o complesse) di quadrato sommabile; lo shift–operator di ℓ^2 in sé è $(x_0, x_1, \dots) \mapsto (0, x_0, x_1, \dots)$; è un'operatore lineare di ℓ^2 in sé, isometrico e quindi iniettivo, ma non suriettivo. Essendo isometrico, esso mappa la sfera S dei versori di ℓ^2 in se stessa, non suriettivamente. Dedurne che S è contrattile.

Si può dimostrare che in ogni spazio di Banach di dimensione infinita la sfera unitaria è contrattile.

Esercizio 2. Sia $S = \mathbb{S}^{n-1}$ l'ordinaria sfera dei versori nello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$. Un campo di vettori tangenti sulla sfera, o semplicemente un campo vettoriale sulla sfera, è una funzione $f \in C(S, \mathbb{R}^n)$ tale che $f(x)$ sia tangente in x alla sfera per ogni $x \in S$, equivalentementee che sia $(f(x)|x) = 0$ per ogni $x \in S$. Mostrare che se esiste un campo di vettori tangenti ad S *che non sia mai nullo* allora l'identità e la mappa antipodale di S sono omotope. Esibire esplicitamente un campo di versori tangenti ad S se $n-1$ è dispari. Si vedrà in futuro che se $n-1$ è pari una sfera non ammette campi di versori tangenti ("non si possono pettinare i capelli ad una sfera")

4.4. **Retratti.**

Definizione. Se X è spazio topologico, un suo sottospazio S è detto *retratto* di X quando l'inclusione canonica $i_S : S \to X$ ha un' inversa sinistra continua.

In altre parole, $S \subseteq X$ è retratto di X se esiste $\rho : X \to S$ tale che sia $1_S = \rho \circ i_S$. Tale $\rho \in C(X, S)$, pensata come funzione di X in X (cioè , considerando $r = i_S \circ \rho$) è una funzione tale che

(1) $r(x) = x$ per ogni $x \in S$;
(2) $r(x) \in S$ per ogni $x \in S$.

Si dice che r è una *retrazione* di X su S. Ogni sottospazio consistente di un unico punto è banalmente un retratto dell'intero spazio. Se prendiamo $X = B^1 = [-1,1]$, palla unitaria di $\mathbb{R}^1$, la $0-$sfera $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$ non è un retratto di B^1, dato che questo è connesso, mentre $\mathbb{S}^0$ non lo è ; in generale, $\mathbb{S}^n$ non è un retratto della palla $B^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| \leq 1\}$ di cui è bordo; vedremo fra poco come si dimostra quest'importante non banale risultato. Osserviamo che invece la sfera $\mathbb{S}^n$ è un retratto dello spazio euclideo "bucato" $\dot{\mathbb{R}}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$, una retrazione essendo la funzione segno, $x \mapsto x/|x|$; la sfera è anche dunque retratto della palla $(n+1)-$dimensionale bucata $B^{n+1} \smallsetminus \{0\}$. Una limitazione all'essere retratto viene dalla seguente osservazione:

. *Se X è di Hausdorff, ed S è retratto di X, allora S è chiuso in X.*

Dimostrazione. Basta ricordare che se $f, g : T \to X$ sono continue, ed X è di Hausdorff, allora $\{t \in T : f(t) = g(t)\}$ è chiuso in T, ed applicare tale fatto ad 1_X e alla retrazione $r : X \to (S \overset{i_S}{\hookrightarrow}) X$. □

Ma un sottospazio può essere chiuso e connesso e non essere retratto: ad esempio lo spazio pettine P, sopra ricordato, non è un retratto del quadrato unitario $X = [0,1] \times [0,1]$: la cosa si riconosce osservando che il vertice v del pettine non ha una base di intorni connessi nel pettine, e da ciò segue che ogni funzione continua $r : X \to P$, con $r(v) = v$, non può indurre l'identità su intorni piccoli di v in P.

4.5. **Funzioni che hanno per dominio un sfera.** Dimostriamo

Proposizione. *Sia E spazio normato, sia $B = \{x \in E : \|x\| \le 1\}$ la palla unitaria di E, e sia $S = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ la sfera unitaria di E. Per ogni spazio topologico Y, ed ogni funzione continua $f : S \to Y$ la condizioni che seguono sono equivalenti:*

(i) *f è nullomotopa.*
(ii) *f si estende ad una funzione continua $F : B \to Y$.*
(iii) *Per ogni $a \in S$ fissato, f è nullomotopa relativamente al sottospazio $\{a\}$ di S.*

Dimostrazione. (i) implica (ii): sia $H : S\times[0,1] \to Y$ omotopia dalla costante $x \mapsto H(x,0)$, costantemente uguale a $c \in Y$, con la funzione $f(x) = H(x,1)$. Sia $u : [0,1] \to [0,1]$ funzione continua, nulla su di un intorno di 0 (diciamo su $[0,\alpha[$, con $\alpha > 0$), con $u(1) = 1$. La funzione $F : B \to Y$ definita da $F(x) = H(x/\|x\|, u(\|x\|))$ per $x \in B \setminus \{0\}$, $F(0) = c$ è continua (sulla palla aperta di centro 0 e raggio α vale costantemente c, sull'aperto $B \setminus \{0\}$ è composizione di funzioni continue, quindi è continua) , ed altrettanto chiaramente estende F (perché $u(1) = 1$).

(ii) implica (iii) Se $F : B \to Y$ estende f, l'omotopia si scrive, usando la convessità di B:

$$H(x,t) = F((1-t)x + ta); \quad \text{si noti } H(a,t) = F(a) = f(a), \text{ per ogni } t \in [0,1].$$

(iii) implica (i) Ovvio. □

Corollario. *La sfera è contrattile se e solo se esiste una retrazione della palla sulla sfera suo bordo.*

Dimostrazione. Proposizione precedente, con $Y = S$. □

Come detto, in un Banach di dimensione infinita le sfere sono contrattili. Al prossimo numero vedremo che ciò non accade mai in dimensione finita.

Osservazione. Naturalmente il teorema si applica ad ogni coppia di spazi B ed S che siano nella stessa situazione della palla e della sfera, in particolare B può essere un qualsiasi chiuso convesso limitato di uno spazio normato E, con l'interno non vuoto, ed $S = \partial B$ la frontiera di B in E. Si ha infatti

. *In uno spazio normato E sia C chiuso convesso limitato con l'interno non vuoto, e sia $T = \partial C$ la frontiera di C in E. Esiste un omeomorfismo $u : B \to C$, tale che $u(S) = T$.*

Dimostrazione. Si osservi anzitutto che:

. *Se a è interno al convesso C, e $b \in C$, il segmento semiaperto $[a;b[= \{(1-t)a + tb : t \in [0,1[\}$ è contenuto nell'interno di C.*

Dimostrazione. Se $\delta > 0$ è tale che $a + \delta\overset{\circ}{B} \subseteq C$, dove $\overset{\circ}{B}$ è l'interno di B, si ha $y = (1-t)(a+x) + tb \in C$ per ogni $t \in [0,1[$; l'insieme A di tali y è aperto, potendosi scrivere come

$$A = \bigcup_{t\in[0,1[} \left((1-t)a + tb + (1-t)\delta\overset{\circ}{B}\right),$$

unione di aperti, e quindi aperto. Pertanto $[a;b[\subseteq A$ è contenuto all'interno di C. □

Essendo per ipotesi l'interno di C non vuoto, per traslazione si può supporre che 0 sia interno a C. Costruiremo l'omeomorfismo radialmente. Per ogni versore $u \in S$ la semiretta $\{tu : t \ge 0\}$ contiene certamente punti di C e di $E \setminus C$ (è illimitata, mentre per ipotesi C è limitato) e quindi punti della frontiera di C (essendo connessa, "passaggio della dogana"); per il lemma appena svolto, essa contiene un unico punto della frontiera di C. Per ogni $x \in E$ si definisce

$$p_C(x) = \inf\left\{t > 0 : \frac{x}{t} \in C\right\};$$

(p_C è il *funzionale di Minkowski* di C); $p_C(x) \le 1$ per ogni $x \in C$, e si vede facilmente che $p_C(x) = 1$ se e solo se $x \in T = \partial C$ (se $p_C(x) < 1$, esiste $s < 1$ tale che $x/s \in C$; ma allora x sta sul segmento $[0; x/s[$ e quindi x è interno a C, per il lemma; se $p_C(x) > 1$, x non appartiene a C e quindi neanche a T). La convessità di C mostra subito che il funzionale p_C è subadditivo: se $x/s, y/t \in C$ si ha

$$\frac{x+y}{s+t} = \frac{s}{s+t}\left(\frac{x}{s}\right) + \frac{t}{s+t}\left(\frac{y}{t}\right) \in C, \quad \text{per cui} \quad p_C(x+y) \le p_C(x) + p_C(y);$$

banalmente p_C è positivamente omogeneo, $p_C(tx) = tp_C(x)$ se $t \ge 0$; ed inoltre $p_C(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ (perché C è limitato; p_C ha le proprietà di una norma, eccetto la $p_C(-x) = p_C(x)$). Da ciò segue che p_C è continuo: $p_C(x+h) \le p_C(x) + p_C(h)$, da cui anche $p_C(x+h) - p_C(x) \le p_C(h)$, e $p_C(x) \le p_C(x+h) + p_C(-h)$, per cui si ha

$$|p_C(x+h) - p_C(x)| \le \max\{p_C(h), p_C(-h)\},$$

e per concludere basta mostrare che $\lim_{h\to 0} p_C(h) = 0$, cioè che p_C è continua in 0. Ciò è immediato, perché C ha 0 come punto interno ($p_C(x) \le \varepsilon \iff p_C(x/\varepsilon) \le 1 \iff x/\varepsilon \in C \iff x \in \varepsilon C$; e se C contiene δB, allora εC contiene $\varepsilon\delta B$). La continuità di p_C mostra che se si definisce $u : B \to C$ ponendo $u(x) = \|x\|(x/p_C(x))$ se $x \ne 0$, ed $u(0) = 0$, si ha un omeomorfismo di B su C, che ha per omeomorfismo inverso $v(x) = p_C(x)(x/\|x\|)$, $v(0) = 0$, omeomorfismo che applica S su T. □

Applicheremo assai spesso la proposizione con $C = [0,1] \times [0,1]$, il quadrato unitario di $\mathbb{R}^2$.

4.6. **La sfera euclidea non è contrattile.**

Proposizione. *Sia $0 \le l \le +\infty$. Sono equivalenti:*

(i) *Ogni $f : B \to B$, di classe C^l, ha almeno un punto unito in B.*
(ii) *Non esistono retrazioni di classe C^l di B su S.*

Dimostrazione. Per mostrare che (i) implica (ii) ricorriamo alla seguente idea (dovuta a M.Hirsch); se si ha una $f \in C^l(B,B)$ senza punti uniti, essa porge una retrazione di classe C^l di B su S, nel modo seguente: per ogni $x \in B$ si prende la semiretta di origine $y = f(x)$ passante per x; essa incontra S in un unico punto $\rho(x)$; $x \to \rho(x)$ è retrazione C^l di B su S. Infatti, i punti di tale semiretta si scrivono $\{y + t(x-y) : t \ge 0\}$; si ha $|y + t(x-y)|^2 = |y|^2 + 2t(y|x-y) + t^2|x-y|^2$, per cui $\rho(x)$ si ha per quel valore di $t > 0$ per cui $|y|^2 + 2t(y|x-y) + t^2|x-y|^2 = 1$, e cioè per

$$t = \frac{-(y|x-y) + \sqrt{(y|x-y)^2 + (1-|y|^2)|x-y|^2}}{|x-y|^2}$$

(si noti che l'altra radice della precedente equazione quadratica è negativa o nulla). Il discriminante è strettamente positivo: infatti esso è somma di termini non negativi, $(y|x-y)^2$ e $(1-|y|^2)|x-y|^2$, e può essere quindi nullo se e solo se entrambi i suoi addendi sono nulli, in altre parole se e solo se è $(y|x-y) = 0$ e simultaneamente $1 - |y|^2 = 0$; dalla seconda si ha $|y| = 1$, dalla prima $(y|x) - (y|y) = 0$ e cioè $(y|x) = 1$. Ma se $y, x \in B$, $(y|x) = 1$ si ha solo se $x = y \in S$. Ne segue che il radicando è funzione C^∞ dei suoi argomenti, in particolare

$$x \to t(x) = \frac{-(f(x)|x-f(x)) + \sqrt{(f(x)|x-f(x))^2 + (1-|f(x)|^2)|x-f(x)|^2}}{|x-f(x)|^2}$$

è di classe C^l se tale è f; quindi $\rho(x) = f(x) + t(x)(x - f(x))$ è della stessa classe di f. Concludiamo mostrando che (ii) implica (i): se $\rho : B \to S$ è retrazione, $f(x) = -\rho(x)$ è funzione di $C(B,B)$ senza punti uniti. □

. *Se ogni $g \in C^\infty(B,B)$ ha punti uniti, allora anche ogni $f \in C^0(B,B)$ ha punti uniti.*

Dimostrazione. Sia $f \in C^0(B,B)$ senza punti uniti; allora $\mu = \min\{|x - f(x)| : x \in B\} > 0$. Sia $h \in C^\infty(B,\mathbb{R}^n)$ tale che sia $|f(x) - h(x)| < \mu/2$, per ogni $x \in B$; h esiste per il teorema di Weierstrass, può ad esempio essere presa a coefficienti polinomiali. Osserviamo che $g = h/(1+\mu/2)$ mappa B in se stesso (da $|f(x) - h(x)| < \mu/2$ si trae $|h(x)| < |f(x)| + \mu/2 \le 1 + \mu/2$) ed inoltre è $|f(x) - g(x)| < \mu$, per ogni $x \in B$ ($|f(x) - h(x)/(1+\mu/2)| = (1+\mu/2)^{-1}|f(x) - h(x) + (\mu/2)f(x)| \le (1+\mu/2)^{-1}(|f(x) - h(x)| + (\mu/2)|f(x)|) < (1+\mu/2)^{-1}(\mu/2 + \mu/2) < \mu$). Se $a \in B$ è punto unito per g si ha $|a - f(a)| = |a - g(a) + g(a) - f(a)| \le |a - g(a)| + |g(a) - f(a)| = |g(a) - f(a)| < \mu$, assurdo perche μ è il minimo di $|x - f(x)|$. □

Proviamo infine

. *Non esiste una retrazione $\rho : B \to S$ di classe C^1, dove B ed S sono rispettivamente la palla euclidea chiusa e la sfera di $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Per $t \in [0,1]$ definiamo $f_t : B \to B$ ponendo $f_t(x) = (1-t)x + t\rho(x) = x - t(x - \rho(x))$ per ogni $x \in B$. Proviamo che esiste $\delta > 0$ tale che per $t \le \delta$ f_t è diffeomorfismo di B su B. Si ha $f_t'(x) = 1_n - t\psi'(x)$, avendo posto $\psi(x) = x - \rho(x)$; ne segue che è

$$J(x,t) = \det f_t'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)t^k$$

dove le $a_k \in C^{l-1}(B,\mathbb{R}), k = 0,\ldots,n$ sono funzioni scalari. Poiché $J(x,0) = 1$ per ogni $x \in B$, dalla continuità uniforme di J in $B \times [0,1]$ si trae che esiste $\delta_1 > 0$ tale che sia $J(x,t) > 0$ per ogni $x \in B$ e $t \in [0,\delta_1]$. Inoltre ψ, di classe C^1 sul convesso compatto B, vi è lipschitziana, con costante di Lipschitz $\lambda = \max\{\|\psi'(x)\| : x \in B\}$. Se $t\lambda < 1$ allora f_t è iniettiva; infatti si ha $|f_t(x_1) - f_t(x_2)| = |(x_1 - x_2) -$

$t(\psi(x_1)-\psi(x_2))|\geq|x_1-x_2|-t|\psi(x_1)-\psi(x_2)|\geq(1-t\lambda)|x_1-x_2|>0$ se $1-t\lambda>0$. Posto $\delta=\delta_1\wedge(1/\lambda)$, si ha che per $t\leq\delta$ f_t è iniettiva e con jacobiano positivo su B; si noti inoltre che è $f_t(x)=x$ per ogni $x\in S=\mathrm{fr}_{\mathbb{R}^n}(B)$; ne segue che $f_t(B)=B$ per $t\leq\delta$; per il teorema d'inversione locale infatti un punto della frontiera del compatto $K_t=f_t(B)$ non può che provenire dalla frontiera di B, e cioè da S; ne segue $\mathrm{fr}_{\mathbb{R}^n}(K_t)\subseteq S$; ma allora $K_t=B$; infatti $K_t\subseteq B$, ed $S\subset K_t$; inoltre K_t ha punti interni, almeno quelli di $f_t(B\setminus S)$, e tali punti sono tutti contenuti in $B\setminus S$; se qualche $x\in B\setminus S$ non stesse in K_t, il segmento che ha per estremi x ed un punto y interno a K_t, tutto contenuto nel convesso $B\setminus S$ dovrebbe contenere un punto della frontiera di K_t, assurdo perché tale frontiera è contenuta in S. Il teorema di cambiamento di variabili negli integrali multipli dice che si ha

$$\lambda_n(B)=\int_B J(x,t)\,d\lambda_n(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k t^k \qquad \forall t\in[0,\delta]$$

dove si è posto $c_k=\int_B a_k(x)\,d\lambda_n(x)$. Per il principio di identità dei polinomi, il polinomio nella precedente relazione è allora costantemente uguale a $\lambda_n(B)$; ma quando $t=1$ si ha $J(x,1)=0$ identicamente in $x\in B$, poiché $f_1=\rho$ mappa B in S, che è privo di punti interni. E si conclude. $\square$

La "non retrazione" equivale al fatto che ogni funzione continua di B in sé ha almeno un punto unito (un punto $a\in B$ tale che sia $a=f(a)$). I seguenti fatti, tra loro equivalenti, sono quindi stati provati

- Non retrazione della palla sulla sfera *La sfera $\mathbb{S}^{n-1}$ non è un retratto della palla B^n.*
- Non contrattilità della sfera *La sfera $\mathbb{S}^{n-1}$ non è contrattile.*
- Teorema di Brouwer sul punto unito *Ogni funzione continua $f:B^n\to B^n$ della palla nella palla ha almeno un punto unito.*

4.7. **Equivalenza omotopica.** Gli isomorfismi nella categoria $\mathcal{HTOP}$ degli spazi topologici con classi di omotopia di funzioni continue come morfismi sono detti *equivalenze omotopiche*; le classi di isomorfismo sono dette tipi di omotopia. Una $f\in C(X,Y)$ è tale che $[f]\in[X,Y]$ è equivalenza omotopica se esiste $g\in C(Y,X)$ tale che $[g]\circ[f]=[1_X]$ e $[f]\circ[g]=[1_Y]$, equivalentemente $g\circ f:X\to X$ è omotopo ad 1_X e $f\circ g:Y\to Y$ è omotopo ad 1_Y. Ad esempio, gli spazi contrattili sono esattamente gli spazi il cui tipo di omotopia è quello di uno spazio con un singolo punto; sono anche detti spazi omotopicamente banali. Se X è contrattile, ogni $f:X\to\{*\}$, dove $\{*\}$ è uno spazio con un solo punto, è una equivalenza omotopica; se $g:\{*\}\to X$ è una qualsiasi funzione, con $g(*)=c$, $g\circ f$ è omotopa ad 1_X (due qualsiasi funzioni che arrivano su uno spazio contrattile sono omotope), e viceversa $f\circ g$ è l'identità di $\{*\}$. Ciò prova che se X è contrattile allora è omotopicamente equivalente ad un singolo. Ed ogni omotopia tra 1_X e $g\circ f$ dice che X è contrattile. Un caso importante di equivalenza omotopica tra uno spazio ed un suo sottospazio è il seguente:

Definizione. Sia X spazio topologico. Un sottospazio S di X è detto *retratto di deformazione forte* di X se esiste una retrazione $r:X\to(S\overset{i_S}{\hookrightarrow})X$ che è omotopa *relativamente ad* S all'identità di X.

Se ciò accade, l'inclusione canonica è chiaramente un'equivalenza omotopica, avendo come inversa omotopica esattamente la retrazione ρ (ottenuta restringendo ad S il codominio di r).

Esempio 1. La sfera dei versori $S\{x\in X:\|x\|=1\}$ è , in ogni spazio normato X, un retratto di deformazione forte dello spazio bucato $X_{.}=X\setminus\{0\}$, la funzione segno $\nu(x)=x/\|x\|$ essendo una retrazione del tipo voluto, come mostrato dall'omotopia $H(x,t)=(1-t)x+t\nu(x)$. La sfera è quindi anche retratto di deformazione forte della palla bucata $B_{.}=B\setminus\{0\}$ $(B=\{x\in X:\|x\|\leq1\})$.

È molto importante riconoscere "a vista" che alcune figure sono retratti di deformazione forte di altre.

Esempio 2. Riconoscere che un "bouquet" di due circoli, ad esempio l'unione dei circoli di raggio 1 con centro nei punti $(-1,0)$ ed $(1,0)$ è retratto di deformazione forte del piano con due buchi, $\mathbb{R}^2\setminus\{(-1,0),(1,0)\}$. Scrivere esplicitamente una retrazione è abbastanza complicato; è tuttavia chiaro che ce n'è una. Una retrazione può essere dedotta dal flusso legato al sistema differenziale $(\dot{x},\dot{y})=\nabla f(x,y)/|\nabla f(x,y)|$, dove $f(x,y)=((x-1)^2+y^2)((x+1)^2+y^2)$.

L'essere retratto di deformazione forte è ovviamente assai più di quanto occorre per assicurare che l'inclusione canonica è equivalenza omotopica. Ad esempio l'inclusione del pettine P nel quadrato unitario è un'equivalenza omotopica (entrambi gli spazi sono contrattili) ma il pettine non è un retratto del quadrato. Ed il sottospazio del pettine formato dal solo vertice, $S=\{v\}$, è un retratto del pettine, e l'inclusione è equivalenza omotopica, ma il vertice non è retratto di deformazione forte del pettine.

5. Il gruppo fondamentale di uno spazio topologico

5.1. Gruppoide fondamentale.

Definizione. Si chiama gruppoide una categoria ristretta (in cui cioè la classe degli oggetti è un insieme) in cui ogni morfismo è un isomorfismo .

Il più importante esempio di gruppoide è il *gruppoide fondamentale*, o gruppoide di Poincaré, di uno spazio topologico, che fra poco descriveremo. Nel gruppoide di Poincaré i morfismi si compongono in ordine inverso all'usuale. Dato uno spazio topologico X, e dati $x_0, x_1 \in X$, un cammino da x_0 ad x_1 è come ben noto una funzione continua $\alpha : [0,1] \to X$, con $\alpha(0) = x_0$ origine ed $\alpha(1) = 1$ estremità del cammino stesso. Due cammini α, β da x_0 ad x_1 sono equivalenti se fra essi c'è un'omotopia ad estremi fissi, cioè una funzione $h : [0,1] \times [0,1] \to X$, continua, con $h(t,0) = \alpha(t)$, $h(t,1) = \beta(t)$, e $h(0,\lambda) = x_0$, $h(1,\lambda) = x_1$. Dato un cammino $\alpha : I \to X$, la sua classe di omotopia ad estremi fissi (relativamente cioè al sottoinsieme $\{0,1\}$ di I) è indicata con $[\alpha]$. Nel gruppoide dei cammini $\Pi_1 X$ i morfismi di $x_0 \in X$ in $x_1 \in X$ sono esattamente le classi di omotopia di cammini con estremi x_0, x_1 fissi. In pratica stiamo considerando i possibili modi di andare da x_0 ad x_1, considerando equivalenti quelli che sono deformabili con continuità l'uno nell'altro. Vediamo anzitutto che ogni possibile riparametrizzazione di un cammino, purché non alteri gli estremi, non altera la classe del cammino:

. *Sia $p : I \to I$ continua e tale che $p(0) = 0$ e $p(1) = 1$. Allora $[\alpha \circ p] = [\alpha]$, per ogni cammino $\alpha \in C(I,X)$.*

Dimostrazione. Si pone $h(t,\lambda) = \alpha((1-\lambda)t + \lambda p(t))$, per $(t,\lambda) \in I \times I$; si verifica subito che h è omotopia ad estremi fissi di α con $\alpha \circ p$. □

Dati cammini $\alpha, \beta \in C(I,X)$, con $\alpha(1) = \beta(0)$, si può formare il cammino *prodotto* $\alpha.\beta$, che talvolta si legge "beta dopo alfa", secondo la seguente idea: si prende la funzione $\gamma : [0,2] \to X$ definita da $\gamma(t) = \alpha(t)$ per $t \in [0,1]$,e $\gamma(t) = \beta(t-1)$ per $t \in [1,2]$; si riparametrizza poi tale cammino γ sull'intervallo $[0,1]$ usando l'unico omeomorfismo affine crescente di $[0,1]$ su $[0,2]$, che è $t \mapsto 2t$; si ottiene quindi

$$\alpha.\beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se} \quad t \in [1,1/2]; \\ \beta(2t-1) & \text{se} \quad t \in [1/2,1]. \end{cases}$$

D'altra parte un qualsiasi omeomorfismo crescente di $[0,1]$ su $[0,2]$ darebbe luogo ad un cammino della stessa classe, in base al precedente risultato. Il prodotto *non è associativo*: se $\alpha, \beta, \gamma \in C(I,X)$ sono cammini con $\alpha(1) = \beta(0)$ e $\beta(1) = \gamma(0)$, si ha certamente

$$(\alpha.\beta).\gamma \neq \alpha.(\beta.\gamma),$$

eccettuati casi banali.

Il prodotto tuttavia è compatibile con l'omotopia ad estremi fissi: se $[\alpha_0] = [\alpha_1]$ e $[\beta_0] = [\beta_1]$, con $\alpha_0(1) = \beta_0(1)$ (e quindi $\alpha_1(1) = \beta_1(0)$), allora $[\alpha_0.\beta_0] = [\alpha_1.\beta_1]$, come è immediato vedere. Si può quindi definire il prodotto di classi di omotopia ad estremi fissi, prodotto di morfismi nel gruppoide $\Pi_1 X$:

$$[\alpha][\beta] := [\alpha.\beta] \qquad \text{se} \quad \alpha(1) = \beta(0).$$

Si verifica facilmente che

. Associatività *Il prodotto tra classi di omotopia di cammini ad estremi fissi è associativo.*

Dimostrazione. È abbastanza chiaro che $\alpha.(\beta.\gamma)$ si ottiene riparametrizzando $(\alpha.\beta).\gamma$; basta prendere l'omeomorfismo affine a tratti p di I in sé che applica $[0,1/2]$ su $[0,1/4]$, $[1/2,3/4]$ su $[1/4,1/2]$, e $[3/4,1]$ su $[1/2,1]$ (e cioè $p(t) = t/2$ per $t \in [0,1/2]$, $p(t) = 1/4 + (t-1/2)/2$ per $t \in [1/2,3/4]$, $p(t) = 1/2 + 2(t-3/4))$ per ottenere $\alpha.(\beta.\gamma) = ((\alpha.\beta).\gamma) \circ p$; per il risultato sulla riparametrizzazione si ha $[(\alpha.\beta).\gamma] = [\alpha.(\beta.\gamma)]$. □

La classe dei cammini costanti svolge il ruolo di elemento neutro. Per ogni $c \in X$, sia $\varepsilon_c : I \to X$ la costante c, $\varepsilon_c(t) = c$, per ogni $t \in I$

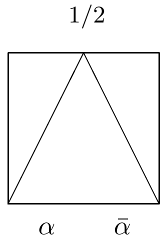
. *Sia α cammino di origine a ed estremità b. Si ha $[\varepsilon_a][\alpha] = [\alpha] = [\alpha][\varepsilon_b]$.*

Dimostrazione. Sia $p : I \to I$ definito da $p(t) = 0$ per $t \in [0,1/2]$, e $p(t) = 2t-1$ per $t \in [1/2,1]$. Si ha $\alpha \circ p = \varepsilon_a.\alpha$, e quindi $[\varepsilon_a.\alpha] = [\alpha]$. Similmente, se ora si pone $p(t) = 2t$ per $t \in [0,1/2]$, e $p(t) = 1$ per $t \in [1/2,1]$ si ottiene $\alpha \circ p = \alpha.\varepsilon_b$, da cui $[\alpha] = [\alpha][\varepsilon_b]$. □

Mostriamo infine che se $\alpha \in C(I, X)$ è cammino di origine a ed estremità b, la classe di omotopia del cammino inverso $\bar{\alpha} : I \to X$ definito da $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$ giuoca il ruolo di morfismo inverso nel gruppoide dei cammini

. Inverso *Si ha* $[\varepsilon_a] = [\alpha][\bar{\alpha}]$*, nonché* $[\varepsilon_b] = [\bar{\alpha}][\alpha]$.

Dimostrazione. Si noti che $\alpha.\bar{\alpha}(t) = \alpha(2t)$ per $t \in [0, 1/2]$, mentre $\alpha.\bar{\alpha}(t) = \bar{\alpha}(2t-1) = \alpha(2-2t)$ per $t \in [1/2, 1]$. L'idea è quella di ritirare il "doppio cammino" $\alpha.\bar{\alpha}$, che è α ripiegato su se stesso, sull'origine a di α.



Sia $q : [0, 1] \to [0, 1]$ la funzione affine a tratti continua tale che $q(0) = q(1) = 0$ e $q(1/2) = 1$; cioè q è data da $q(t) = 2t$ per $t \in [0, 1/2]$, $q(t) = 2 - 2t$ per $t \in [1/2, 1]$; si noti che è $\alpha \circ q = \alpha.\bar{\alpha}$. Si pone $h(t, \lambda) = \alpha((1-\lambda)q(t))$ per $(t, \lambda) \in I \times I$; h è omotopia di $\alpha.\bar{\alpha}$ con ε_a. Allo stesso modo si prova che $[\bar{\alpha}][\alpha] = [\varepsilon_b]$. □

Se $[t_1, t_2]$ ($t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 < t_2$) è un intervallo compatto di $\mathbb{R}$, e $\varphi : [t_1, t_2] \to X$ è funzione continua, esiste un unico omeomorfismo affine crescente di $[0, 1]$ su $[t_1, t_2]$, che è $p(t) = t_1 + (t_2 - t_1)t$; il cammino $\alpha \circ p$ è identificato con φ. Dato un cammino $\alpha : [0, 1] \to X$, per ogni suddivisione $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$ di $[0, 1]$ si ottengono m cammini $\alpha_k = \alpha|_{[t_{k-1}, t_k]}$ (a rigore $\alpha_k(s) = \alpha(t_{k-1} + (t_k - t_{k-1})s)$, con $s \in [0, 1]$), e chiaramente si ha, nel gruppoide $\Pi_1 X$, $[\alpha] = [\alpha_1] \cdots [\alpha_m]$. Useremo spesso questo fatto.

Un morfismo di gruppoidi $\mathcal{X}$ ed $\mathcal{Y}$ è ovviamente definito come un funtore covariante $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$; si ha la categoria dei gruppoidi, con questi come morfismi. È immediato vedere che si ha un funtore covariante Π_1 dalla categoria degli spazi topologici alla categoria dei gruppoidi associando ad ogni $f \in C(X, Y)$ la funzione $\Pi_1 f = f_* : \Pi_1 X \to \Pi_1 Y$ definita come f stessa a livello degli oggetti, e ponendo $f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$, per ogni classe di cammini $[a] \in \operatorname{Mor} \Pi_1 X$ (la $(g \circ f) \circ \alpha = g \circ (f \circ \alpha)$ assicura la funtorialità).

5.2. **Il lemma del quadrato.** In questo numero K denota un compatto convesso K di $\mathbb{R}^2$, con l'interno non vuoto; K è , come sappiamo (4.5), omeomorfo al disco unitario $B = B^2$ di $\mathbb{R}^2$, con un omeomorfismo che applica $\mathbb{S}^1 = \partial B$ su ∂K. Fissiamo una volta per tutte un tale omeomorfismo $\eta : B \to K$. Dato $c \in \mathbb{U} = \mathbb{S}^1$ esiste un'applicazione standard ρ_c di $[0, 1]$ su $\mathbb{U}$ che "piega" $[0, 1]$ su $\mathbb{U}$ con punto base c, e cioè $\rho_c(t) = ce^{2\pi i t}$; e la funzione ρ_c si estende ad una funzione continua $P_c : I \times I \to B$ ponendo $P_c(t, \lambda) = (1-\lambda)\rho_c(t) + \lambda c$; si noti che tutti i punti del bordo del quadrato non sulla base $[0, 1] \times \{0\}$ sono applicati in c. Fissate tali mappe, ogni funzione continua $u : \partial K \to X$ può essere pensata come un circuito basato ad $a = u(\eta(c))$, il circuito $\alpha = u \circ \eta \circ \rho_c : I \to X$; e viceversa, se $\alpha : I \to X$ è circuito basato ad $a = \alpha(0) = \alpha(1)$, esiste un'unica funzione continua $u_\alpha : \partial K \to X$ tale che sia $\alpha = u_\alpha \circ \eta \circ \rho_c$; ciò è immediata conseguenza del fatto che $\mathbb{U}$ ha la topologia quoziente di I rispetto a ρ_c. Ciò detto

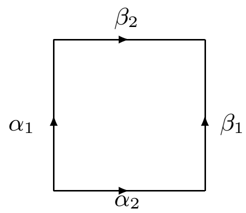
. *Siano* $[\alpha]$ *circuito di* X *basato in* a *ed* $u_\alpha \in C(\partial K, X)$ *legati come sopra; si ha* $[\alpha] = [\varepsilon_a]$ *se e solo se* u_α *è nullomotopa.*

Dimostrazione. Se $h : I \times I \to X$ è un'omotopia di α con ε_a, h applica in $a \in X$ tutti i punti del bordo del quadrato $I \times I$; ne segue che esiste $w : B \to X$ continua, con $w(c) = a$, tale cha sia $h = w \circ P_c$ (diagramma quoziente); trasferendo la cosa su K mediante l'omeomorfismo η, esiste $v : K \to X$ tale che $h = v \circ (\eta \circ P_c)$ ($v = w \circ \eta^{-1}$). Banalmente $v|\partial K = u_\alpha$; pertanto u_α si estende con continuità all'interno di K, e quindi è nullomotopa. Viceversa, se u_α è nullomotopa, essa lo è anche relativamente al punto $\eta(c) \in \partial K$; se $H : \partial K \times I \to X$ è un'omotopia relativamente a tale punto di u_α, $h(t, \lambda) = H(u_\alpha(\eta(\rho_c(t))), \lambda)$ è un'omotopia che mostra $[\alpha] = [\varepsilon_a]$. □

Un significativo caso particolare spesso usato è il seguente

. Lemma del quadrato *Siano* $\alpha_2, \beta_1, \alpha_1, \beta_2$ *cammini in* X *che formino un quadrato in* $\Pi_1 X$*, nel senso che*

$$\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = v_{00}, \quad \alpha_1(1) = \beta_2(0) = v_{01}, \quad \alpha_2(1) = \beta_1(0) = v_{10}, \quad \beta_2(1) = \beta_1(1).$$



Il quadrato è commutativo in $\Pi_1 X$, cioè si ha $[\alpha_1][\beta_2] = [\alpha_2][\beta_1]$ se e solo se la funzione $u : \partial(I \times I) \to X$ definita sul bordo del quadrato ponendo $u(t,0) = \alpha_2(t)$, $u(t,1) = \beta_2(t)$, $u(0,\lambda) = \alpha_1(\lambda)$, $u(1,\lambda) = \beta_1(\lambda)$ si estende ad una funzione continua $U : [0,1] \times [0,1] \to X$.

Dimostrazione. $[\alpha_1][\beta_2] = [\alpha_2][\beta_1]$ si ha se e solo se $[\alpha_2][\beta_1][\beta_2]^{-1}[\alpha_1]^{-1} = \varepsilon_{v_{00}}$; a sua volta ciò si verifica se e solo se u è nullomotopa, per quanto appena visto. □

5.3. **Gruppo fondamentale.** Dato un gruppoide X, ed un elemento $a \in X$, l'insieme $\mathrm{Mor}(a,a)$ è chiaramente un gruppo, X_a. Se $a, b \in X$, e $\mathrm{Mor}(a,b)$ non è vuoto, allora X_a ed X_b sono isomorfi; se infatti $[\gamma] \in \mathrm{Mor}(a,b)$, l'applicazione

$$h_{[\gamma]} : X_a \to X_b \qquad \text{definita da} \quad h_{[\gamma]}([\alpha]) = [\gamma]^{-1}[\alpha][\gamma]$$

è un isomorfismo, avendo $h_{[\gamma]^{-1}} : X_b \to X_a$ come inversa. due siffatti isomorfismi sono fra loro coniugati, come è immediato vedere. Se il gruppoide è *connesso*, se cioè $\mathrm{Mor}(a,b)$ non è mai vuoto, allora al gruppoide è associata una ben precisa classe di isomorfismo di gruppi. Per uno spazio topologico X il gruppoide dei cammini è connesso se e solo se lo spazio è connesso per archi.

Definizione. Sia X spazio topologico, e sia a un punto di X. Il *gruppo fondamentale* dello spazio topologico X, basato ad a, è il gruppo $\pi_1(X,a)$ delle classi di omotopia ad estremo a fisso dei circuiti basati ad a.

Per quanto sopra detto, se $a, b \in X$ appartengono alla stessa arco–componente di X allora $\pi_1(X,a)$ e $\pi_1(X,b)$ sono isomorfi. Ma anche quando X è connesso per archi non si può parlare de *il* gruppo fondamentale dello spazio: la classe di isomorfismo è individuata, ma il gruppo è individuato solo a meno di isomorfismi fra loro coniugati. Il funtore gruppo fondamentale è dalla categoria spazi puntati alla categoria gruppi; è covariante. Se (X,a) ed (Y,b) sono spazi puntati, ed $f : (X,a) \to (Y,b)$ è morfismo (funzione continua di X in Y con $f(a) = b$) l'assegnazione

$$f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$$

definisce un omomorfismo del gruppo $\pi_1(X,a)$ nel gruppo $\pi_1(Y,b)$, come è immediato vedere; se $g : (Y,b) \to (Z,c)$ è un altro morfismo di spazi puntati si ha subito anche $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$.

L'omomorfismo indotto da una funzione continua fra i gruppi fondamentali è invariante per omotopia, in senso stretto per omotopie che conservano il punto base:

Proposizione. *Siano $f, g : (X,a) \to (Y,b)$ mappe di spazi topologici puntati, e sia $H : X \times I \to Y$ omotopia relativamente ad $\{a\}$ tra f e g. Allora gli omomorfismi $f_*, g_* : \pi_1(X,a) \to \pi_1(Y,b)$ coincidono.*

Dimostrazione. Si ha $[f \circ \alpha] = [g \circ \alpha]$ per ogni circuito α di X basato ad a: se α è un tale circuito, $(t,\lambda) \mapsto H(\alpha(t),\lambda)$ è omotopia di $f \circ \alpha$ con $g \circ \alpha$ in cui $b = f(a) = g(a)$ rimane fisso. □

Corollario. *Sia X spazio, ed S sottospazio di X. Se S è retratto di deformazione forte di X, allora l'inclusione canonica $i_S : S \to X$ induce un isomorfismo $i_{S*} : \pi_1(S,a) \to \pi_1(X,a)$, per ogni $a \in S$.*

Dimostrazione. Si ha una retrazione $\rho : X \to S$ tale che $\rho \circ i_S = 1_S$; per funtorialità si ha $1_{S*} = \rho_* \circ i_{S*}$, e sempre per funtorialità 1_{S*} è l'identità del gruppo $\pi_1(S,a)$, per ogni $a \in S$. Se $r = i_S \circ \rho$, l'ipotesi dice che c'è un'omotopia di r con 1_X, in cui ogni punto di S, in particolare a, resta fisso. Dalla proposizione precedente segue $r_* = 1_{X*}$, e chiaramente 1_{X*} è l'identità di $\pi_1(X,a)$, per ogni $a \in X$; ma allora $1_{\pi_1(X,a)} = i_{S*} \circ \rho_*$, e pertanto i_{S*} è isomorfismo, con inversa ρ_* . □

Esempio 3. Vedremo in seguito che $\pi_1(\mathbb{U},1)$ è ciclico infinito, isomorfo cioè al gruppo additivo degli interi, e che un generatore è la classe del circuito $t \mapsto e^{2\pi i t}$. Lo stesso circuito genera allora $\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)$, gruppo fondamentale del piano bucato $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, di cui $\mathbb{U}$ è retratto di deformazione forte.

5.4. **Spazi con gruppo fondamentale banale.**

Definizione. Diciamo *semplicemente connesso* ogni spazio topologico connesso per archi, in cui (la classe di isomorfismo de) il gruppo fondamentale sia banale.

Si ottiene subito

Proposizione. *Sia X spazio connesso per archi. Sono equivalenti*

(i) *X è semplicemente connesso.*
(ii) *Se α, β sono cammini in X con la stessa origine e lo stesso estremo, essi sono omotopi in X, con una omotopia ad estremi fissi (equivalentemente, se $a, b \in X$, nel gruppoide dei cammini $\mathrm{Mor}(a, b)$ contiene esattamente un elemento).*
(iii) *Ogni $f \in C(\mathbb{S}^1, X)$ è nullomotopa.*
(iv) *Ogni $f \in C(\mathbb{S}^1, X)$ si estende ad una $F \in C(B^2, X)$.*

Dimostrazione. (i) è equivalente ad (ii): se α, β sono cammini in X con la stessa origine a e lo stesso estremo b, si ha $[\alpha] = [\beta]$ se e solo se $[\beta]^{-1}[\alpha] = [\varepsilon_a]$, ed X è semplicemente connesso se e solo se $\pi_1(X, a)$ si riduce a $\{[\varepsilon_a]\}$. È ben noto (4.5) che (iii) e (iv) sono equivalenti. L'equivalenza di (i) con (iii) è fornita da 5.2. □

Corollario. *Ogni spazio contrattile è semplicemente connesso.*

Dimostrazione. Se X è contrattile, $[T, X]$ consta di un unico elemento, per ogni spazio topologico T; in particolare, ogni $f \in C(\mathbb{S}^1, X)$ è nullomotopa. □

Esistono spazi semplicemente connessi non contrattili; vedremo in futuro che le sfere $\mathbb{S}^n$ sono semplicemente connesse se $n \geq 2$; sappiamo che non sono contrattili. Lo spazio descritto in 4.1,Esercizio 5, pur non essendo contrattile, è semplicemente connesso (esercizio non banale).

5.5. **Gruppo fondamentale e tipo d'omotopia.** Vediamo cosa succede se un'omotopia sposta il punto base:

Proposizione. *Siano $f, g : X \to Y$ funzioni continue tra gli spazi topologici X, Y; sia $H : X \times I \to Y$ un'omotopia da f a g. Fissato $a \in X$, sia $b = f(a), c = g(a)$, e sia $\gamma : I \to Y$ definita da $\gamma(t) = H(a, t)$ (γ è cammino in Y di origine b ed estremità c); si ha allora $g_* = h_{[\gamma]} \circ f_*$.*

Dimostrazione. Si deve verificare che per ogni circuito α di X basato ad a si ha $[g \circ \alpha] = [\gamma]^{-1}[f \circ \alpha][\gamma]$, equivalentemente che $[\gamma][g \circ \alpha] = [f \circ \alpha][\gamma]$. Si prenda $h : I \times I \to Y$ definita da $h(t, \lambda) = H(\alpha(t), \lambda)$. Si ha $h(0, \lambda) = H(a, \lambda) = \gamma(\lambda)$; $h(t, 1) = H(\alpha(t), 1) = g \circ \alpha(t)$, $h(t, 0) = H(\alpha(t), 0) = f \circ \alpha(t)$, $h(1, \lambda) = H(\alpha(1), \lambda) = H(a, \lambda) = \gamma(\lambda)$ per ogni $t, \lambda \in I$; la conclusione segue dal lemma del quadrato. □

Osservazione. In generale, considerando i gruppoidi dei cammini si ha, per ogni coppia di oggetti $a_1, a_2 \in X$, ed ogni cammino α da a_1 ad a_2 , un quadrato commutativo

$$\begin{tikzcd} g(a_1) \arrow[r, "{[g\circ\alpha]}"] & g(a_2) \\ f(a_1) \arrow[u, "{[\gamma_{a_1}]}"] \arrow[r, "{[f\circ\alpha]}"] & f(a_2) \arrow[u, "{[\gamma_{a_2}]}"'] \end{tikzcd}$$

dove $\gamma_{a_j}(t) = H(a_j, t)$, ($j = 1, 2$); un'omotopia H da f a g è insomma una *trasformazione naturale* dal funtore $f_* : \Pi_1 X \to \Pi_1 Y$ al funtore $g_* : \Pi_1 X \to \Pi_1 Y$. Ricordiamo che se $F, G : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ sono funtori covarianti dalla categoria $\mathcal{X}$ alla categoria $\mathcal{Y}$, una *trasformazione naturale* da F a G è un'assegnazione di un morfismo $\nu(X) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{Y}}(F(X), G(X))$, per ogni oggetto $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{X})$, tale che il quadrato (in $\mathcal{Y}$)

$$\begin{tikzcd} G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y) \\ F(X) \arrow[u, "\nu(X)"] \arrow[r, "F(f)"] & F(Y) \arrow[u, "\nu(Y)"'] \end{tikzcd}$$

sia commutativo, per ogni morfismo $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{X}}(X, Y)$.

Nella proposizione precedente abbiamo considerato $a_1 = a_2 = a$, $b = f(a), c = g(a), \gamma = \gamma_1 = \gamma_2$:

$$\begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{[g\circ\alpha]} & c \\ {\scriptstyle[\gamma]}\Big\uparrow & & \Big\uparrow{\scriptstyle[\gamma]} \\ b & \xrightarrow{[f\circ\alpha]} & b \end{array}$$

Corollario. *Se $f : X \to Y$ è equivalenza omotopica, per ogni $a \in X$ fissato $f_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(Y, f(a))$ è isomorfismo di gruppi.*

Dimostrazione. Sia $g : Y \to X$ inversa omotopica di f, cioè sia $[g \circ f] = [1_X]$ ed $[f \circ g] = [1_Y]$. Posto $b = f(a)$, e $c = g(b)$, se H è omotopia di 1_X con $g \circ f$, posto $\eta(t) = H(a, t)$, l'identità di $\pi_1(X, c)$ coincide con $h_{[\eta]} \circ (g \circ f)_*$, dove $(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(X, c)$. Poichè $h_{[\eta]}$ è isomorfismo, $g_* \circ f_*$ è pure isomorfismo, in particolare g_* è suriettivo e f_* è iniettivo. Usando il fatto che anche $f \circ g$ è omotopa all'identità di Y, si scopre che f_* è suriettivo e g_* è iniettivo (fra altri punti base, ma la differenza è per composizione con isomorfismi). Pertanto sono biiettivi, e cioè isomorfismi. □

5.6. **Gruppo fondamentale di un prodotto di spazi.** Se $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ è una famiglia di spazi topologici, ed $a_\lambda \in X_\lambda$ per ogni λ, se $a = (a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ si ha, detto $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ il prodotto degli spazi X_λ dati:

Proposizione. *La funzione*

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} p_{*\lambda} : \pi_1(X, a) \to \prod_{\lambda\in\Lambda} \pi_1(X_\lambda, a_\lambda)$$

è un isomorfismo di gruppi. In altre parole, il gruppo fondamentale di un prodotto di spazi topologici è canonicamente isomorfo al prodotto diretto dei gruppi fondamentali degli spazi stessi.

Dimostrazione. È immediata, osservando che cammini ed omotopie fra essi si fanno componente per componente in $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. □

Come corollario, osserviamo che il toro 2−dimensionale $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ ha gruppo fondmentale $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, gruppo abeliano libero su due generatori, che sono chiaramente (ad esempio) un meridiano ed un parallelo.

5.7. **Gruppo fondamentale di un gruppo topologico.** Dato un gruppo topologico $(G, \cdot, \tau)$ sull'insieme delle classi di omotopia dei circuiti basati all'elemento neutro 1 di G si può introdurre anche l'operazione di *moltiplicazione puntuale*: $[\alpha] \bullet [\beta] := [\alpha \cdot \beta]$, dove $\alpha \cdot \beta : [0, 1] \to G$ è definito da $\alpha \cdot \beta(t) = \alpha(t)\beta(t)(= \mu(\alpha(t), \beta(t)$, se μ è la moltiplicazione di G), per ogni $t \in [0, 1]$. Si vede subito che tale operazione è ben definita (le omotopie si possono anch' esse moltiplicare membro a membro); ma si prova anche che essa coincide con l' operazione di $\pi_1(G, 1)$. Ciò può essere provato astrattamente, osservando che le due operazioni hanno un stesso elemento neutro, che è $[\varepsilon_a]$, ed inoltre che si ha, dati $[\alpha], [\beta], [\eta], [\zeta] \in \pi_1(G, 1)$

$$([\alpha] \bullet [\beta])([\eta] \bullet [\zeta]) = ([\alpha][\eta]) \bullet ([\beta][\zeta]);$$

si noti che si ha infatti addirittura fra cammini

$$(\alpha\beta).(\eta\zeta) = (\alpha.\eta)(\beta.\zeta)$$

($\alpha.\eta$ è la giustapposizione, $\alpha\beta$ è il prodotto puntuale).

Esercizio 1. Sia S un insieme, e siano $(x, y) \to xy$, $(x, y) \to x \bullet y$ due leggi di composizione binarie su S, con un comune elemento neutro ε, tali che sia

$$(x \bullet y)(u \bullet v) = (xu) \bullet (yv) \qquad \text{per ogni} \quad x, y, u, v \in S.$$

Allora le due operazioni coincidono su S, e sono entrambe associative e commutative.

Risoluzione. Posto $y = u = \varepsilon$ nella formula precedente, il primo membro è xv, il secondo $x \bullet v$, con $x, v \in S$ arbitrari; le due operazioni quindi coincidono. Posto $x = v = \varepsilon$ il primo membro è yu, il secondo $u \bullet y = uy$, quindi l'operazione è commutativa. Infine, posto $y = \varepsilon$ il primo membro è $x(uv)$ il secondo è $(xu)v$. □

Si noti che tutto ciò che si usa è il fatto che c'è una moltiplicazione binaria continua con elemento neutro: in tal caso il gruppo fondamentale è commutativo, e l'operazione coincide con quella di moltiplicazione puntuale delle classi di omotopia di circuiti. La risoluzione dell'esercizio precedente mostra anche come trovare esplicitamente un'omotopia tra $[\alpha][\zeta]$ ed $[\alpha \bullet \zeta]$; scriverla.

5.8. **Teorema di Seifert e Van Kampen.**

. *Sia X spazio topologico, e sia $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ricoprimento aperto di X tale che*

(i) *Il ricoprimento è chiuso per intersezione finita.*
(ii) *Ogni U_λ è connesso per archi.*
(iii) *Esiste un punto comune a tutti gli U_λ (diciamolo a).*

Allora $\pi_1(X,a)$ è il colimite dei gruppi $\pi_1(U_\lambda,a)$ rispetto al sistema diretto di morfismi $i_{*\lambda}:\pi_1(U_\lambda,a)\to\pi_1(X,a)$, $i^\lambda_{*\mu}:\pi_1(U_\lambda,a)\to\pi_1(U_\mu,a)$ ogni volta che sia $U_\lambda\subseteq U_\mu$, dato dalle inclusioni canoniche $i_\lambda:(U_\lambda,a)\to(X,a)$, $i^\lambda_\mu:U_\lambda\to U_\mu$. In altre parole, se H è un gruppo qualsiasi, e $\rho_\lambda:\pi_1(U_\lambda,a)\to H$ è famiglia compatibile di omomorfismi di gruppi, esiste un unico omomorfismo $\rho:\pi_1(X,a)\to H$ tale che sia $\rho\circ i_{*\lambda}=\rho_\lambda$, per ogni $\lambda\in\Lambda$.

Dimostrazione. Proviamo anzitutto, posto $j_\lambda=i_{*\lambda}$ per semplificare la scrittura, che $\pi(X)$ (abbreviazione di $\pi_1(X,a)$) è generato dall'unione dei sottogruppi $j_\lambda(\pi(U_\lambda))$. Sia infatti $\alpha:I\to X$ circuito basato ad a. Esiste una suddivisione $t_0=0<t_1<\cdots<t_m=1$ tale che per ogni $k=1,\dots,m$ $\alpha([t_{k-1},t_k])$ è contenuto in qualche membro $U_{\lambda(k)}$ del ricoprimento (scegliere una suddivisione con maglia minore del numero di Lebesgue del ricoprimento $(\alpha^{\leftarrow}(U_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ del compatto $[0,1]$). Ciascuno dei punti $\alpha(t_k)$ $k=1\dots,m-1$ appartiene a $U_{\lambda(k)}\cap U_{\lambda(k+1)}$; scegliamo un arco γ_k in $U_{\lambda(k)}\cap U_{\lambda(k+1)}$ di origine a ed estremità $\alpha(t_k)$, convenendo che tale arco sia ε_a se $\alpha(t_k)=a$. Se $\alpha_k=\alpha|[t_{k-1},t_k]$, si ha

$$\begin{aligned}[\alpha]&=[\alpha_1]\dots[\alpha_m]=[\alpha_1]([\gamma_1]^{-1}[\gamma_1])[\alpha_2]([\gamma_2]^{-1}[\gamma_2])\cdots([\gamma_{m-1}]^{-1}[\gamma_{m-1}])[\alpha_m]=\\&([\alpha_1][\gamma_1]^{-1})([\gamma_2][\alpha_2][\gamma_3]^{-1})\cdots([\gamma_{m-2}][\alpha_{m-1}][\gamma_{m-1}]^{-1})([\gamma_{m-1}][\alpha_m])=[\beta_1][\beta_2]\cdots[\beta_{m-1}][\beta_m]\end{aligned}$$

avendo posto $[\beta_k]=[\gamma_{k-1}]^{-1}[\alpha_k][\gamma_k]$ per $k=2,\dots,m-1$, nonché $[\beta_1]=[\alpha_1][\gamma_1]^{-1}$ e $[\beta_m]=[\gamma_{m-1}][\alpha_m]$. Si ha $[\beta_k]\in\pi(U_{\lambda(k)}$ per $k=1,\dots,m$; chiaramente $[\alpha]=\prod_{k=1}^m j_{\lambda(k)}([\beta_k])$. Ciò prova quanto affermato, che $\pi(X)$ è generato dall'unione delle immagini dei $\pi(U_\lambda)$. Si noti

Corollario. *Nelle ipotesi poste, se $(U_\lambda)_{\lambda\in M}$ è sottoricoprimento, ed U_λ è semplicemente connesso per ogni $\lambda\in M$, allora X è semplicemente connesso.*

Dimostrazione. Basta rifare il ragionamento precedente usando $(U_\lambda)_{\lambda\in M}$ in luogo dell'intero ricoprimento. □

Osservazione. Osserviamo che da questo corollario si ricava facilmente che le sfere $\mathbb{S}^n$ sono semplicemente connesse per $n\geq 2$: se si prende il ricoprimento $\{U,V,U\cap V\}$, dove $U=\mathbb{S}^n\setminus\{-\nu\}$, $V=\mathbb{S}^n\setminus\{\nu\}$, con ν il polo nord della sfera, U e V sono semplicemente connessi in quanto contrattili (sono omeomorfi ad $\mathbb{R}^n$, via proiezione stereografica); $U\cap V$ è semplicemente connesso per $n\geq 3$, ma provare ciò equivale a provare la semplice connessione di $\mathbb{S}^{n-1}$. Il ragionamento non si applica per $n=1$, perché in quel caso $U\cap V$ non è connesso.

Tornando al teorema, dobbiamo ora provare che ρ esiste. Si è in sostanza visto che ogni circuito di X basato ad a può essere scritto come prodotto di circuiti con il sostegno nei singoli U_λ. Ciò prova che ρ, se esiste, è unico, e suggerisce anche il modo di definire ρ: se $[\alpha]\in\pi(X)$ si scrive

$$[\alpha]=\prod_{k=1}^m j_{\lambda(k)}([\beta_k]),\quad\text{con}\quad[\beta_k]\in\pi(U_{\lambda(k)})\ k=1,\dots,m,\quad\text{allora}\quad\rho([\alpha])=\prod_{k=1}^m\rho_{\lambda(k)}([\beta_k]).$$

Basta naturalmente per questo mostrare che se $[\alpha]=[\varepsilon_a]$ in $\pi(X)$ allora anche $\prod_{k=1}^m\rho_{\lambda(k)}([\beta_k])=1$ (in H), in qualsiasi modo si scriva $[\alpha]$ come prodotto di circuiti $j_{\lambda(k)}([\beta_k])$ con i sostegni nei singoli $U_{\lambda(k)}$. Si osservi come dalla condizione di compatibilità del sistema di morfismi segua che se un circuito β basato ad a ha il sostegno contenuto sia in U_λ che in U_μ, allora $\rho_\lambda([\beta])=\rho_\mu([\beta]$: infatti $U_\lambda\cap U_\mu=U_\nu$, altro membro del ricoprimento, e

$$\rho_\lambda([\beta])=\rho_\nu(i^\lambda_{*\nu}([\beta])=\rho_\nu(i^\mu_{*\nu}([\beta])=\rho_\mu([\beta];$$

possiamo quindi scrivere $\rho([\beta]):=\rho_\lambda([\beta])$ per un circuito con il sostegno in qualche U_λ del ricoprimento, senza ambiguità. Sia quindi $[\alpha]=[\varepsilon_a]$ in X, sia $h:I\times I\to X$ un'omotopia di α con ε_a, e sia anche $[\alpha]=\prod_{k=1}^m j_{\lambda(k)}([\beta_k])$, con $[\beta_k]\in\pi(U_{\lambda(k)})$. Dobbiamo mostrare che $\prod_{k=1}^m\rho([\beta_k])=1$. Se ogni circuito β_k viene, entro $U_{\lambda(k)}$, scritto come prodotto di altri circuiti, $[\beta_k]=[\gamma_{k1}]\dots[\gamma_{kr(k)}]$ si ha $\rho_{\lambda(k)}([\beta_k])=\prod_{j=1}^{r(k)}\rho_\lambda([\gamma_{kj}])$; in altre parole, la decomposizione di $[\alpha]$ in prodotto di circuiti entro i singoli U_λ può arbitrariamente essere raffinata, senza alterare la questione. Si scelga un numero di Lebesgue δ per il ricoprimento aperto $h^{\leftarrow}(U_\lambda)$ del compatto $I\times I$; si prenda una suddivisione del quadrato $I\times I$

in rettangoli, tutti con diametro minore di δ, fatta mediante i punti $(t_j, s_k) : 0 \leq j, k \leq n$, in modo che fra i punti t_j compaiano anche quelli di una scrittura di α come $\beta_1.\beta_2.\dots.\beta_m$ (prodotto di cammini, in un qualsiasi ordine di parentesi). Ne segue che per ogni coppia ordinata (j, k), con $0 \leq j, k \leq n$, si può scegliere $\lambda(j, k) \in \Lambda$ tale che $h([t_{j-1}, t_j] \times [s_{k-1}, s_k]) \subseteq U_{\lambda(j,k)}$. Per ciascuno degli $(n+1)^2$ vertici $v_{jk} = h(t_j, s_k)$ si scelga un cammino γ_{jk} da a a v_{jk} con il sostegno nell'intersezione degli $U_{\lambda(r,s)}$ che lo contengono; se $v_{jk} = a$ si prende $\gamma_{jk} = a$. Per ogni $k = 0, \dots, n$ sia $\alpha_k(t) = h(t, s_k)$; α_k è un circuito basato ad a, omotopo ad $\alpha = \alpha_0$ in X; fissato k, per $j = 1, \dots, n$ sia $\alpha_{jk} = [\gamma_{(j-1)k}][\alpha_k|_{[t_{j-1},t_j]}][\gamma_{jk}]^{-1}$; α_{jk} è circuito basato ad a, con il sostegno in $U_{\lambda(j,k)}$, ed anche in $U_{\lambda(j(k-1)}$ se $k \geq 1$; si ha $[\alpha_k] = [\alpha_{1k}] \dots [\alpha_{nk}]$. Verticalmente, sia $\beta_j(s) = h(t_j, s)$, per $j = 0, \dots, n$, e sia $\beta_{jk} = [\gamma_{j(k-1)}][\beta_j|_{[s_{k-1},s_k]}][\gamma_{jk}]^{-1}$ per $k = 1, \dots, n$; β_{jk} è circuito basato ad a, con il sostegno in $U_{\lambda(j,k)}$, ed anche in $U_{\lambda(j-1,k)}$ se $j \geq 1$. Si ha $[\beta_{(j-1)k}][\alpha_{jk}] = [\alpha_{j(k-1)}][\beta_{jk}]$ in $U_{\lambda(j,k)}$ per $j, k = 1 \dots, n$: ciò equivale a

$$([\gamma_{(j-1)(k-1)}][\beta_{j-1}|_{[s_{k-1},s_k]}][\gamma_{(j-1)k}]^{-1})([\gamma_{(j-1)k}][\alpha_k|_{[t_{j-1},t_j]}][\gamma_{jk}]^{-1}) =$$
$$([\gamma_{(j-1)(k-1)}][\alpha_{k-1}|_{[t_{j-1},t_j]}][\gamma_{j(k-1)}]^{-1})([\gamma_{j(k-1)}][\beta_j|_{[s_{k-1},s_k]}][\gamma_{jk}]^{-1}),$$

e semplificando

$$[\beta_{j-1}|_{[s_{k-1},s_k]}][\alpha_k|_{[t_{j-1},t_j]}] = [\alpha_{k-1}|_{[t_{j-1},t_j]}][\beta_j|_{[s_{k-1},s_k]}],$$

che non è altro che il lemma del quadrato. Sia ora $a_{jk} = \rho(\alpha_{jk})$ e $b_{jk} = \rho(\beta_{jk})$; sono elementi di H; le relazioni precedenti valendo entro $\pi(U_{\lambda(j,k)})$ dicono che si ha

$$b_{(j-1)k}a_{jk} = a_{j(k-1)}b_{jk} \qquad \text{in} \quad H.$$

Noi dobbiamo mostrare che si ha $\prod_{j=1}^{m} a_{j0} = 1$ (in H). Si osservi che si ha $b_{n1} = 1$ (sempre in H). Ne segue

$$a_{10}a_{20} \cdots a_{n0} = a_{10} \cdots a_{(n-1)0}a_{n0}b_{n1},$$

ed usando la relazione $a_{n0}b_{n1} = b_{(n-1)1}a_{n1}$ si ottiene

$$\prod_{j=1}^{n} a_{j0} = a_{10}a_{20} \cdots a_{(n-1)0}b_{(n-1)1}a_{n1},$$

ma $a_{(n-1)0}b_{(n-1)1} = b_{(n-2)1}a_{(n-1)1}$ per cui

$$\prod_{j=1}^{n} a_{j0} = a_{10}a_{20} \cdots a_{(n-2)0}b_{(n-2)1}a_{(n-1)1}a_{n1},$$

e così proseguendo si arriva a

$$\prod_{j=1}^{n} a_{j0} = b_{01}a_{11} \cdots a_{n1} = a_{11} \cdots a_{n1} \left(= \prod_{j=1}^{n} a_{j1} \right),$$

ricordando che anche $b_{01} = 1$. Per induzione si ha quindi

$$\prod_{j=1}^{n} a_{j0} = \prod_{j=1}^{n} a_{jk} \qquad \text{per} \quad k = 1, \dots, n,$$

in particolare

$$\prod_{j=1}^{n} a_{j0} = \prod_{j=1}^{n} a_{jn},$$

ma ciascuno degli a_{jn} vale 1, e si conclude. □

5.8.1. *Casi particolari.* Una situazione molto frequente è quella in cui ci sono tre elementi nel ricoprimento, U, V ed $U \cap V$, tre aperti connessi per archi di X, con $X = U \cup V$. In quanto segue si ritiene scelto un punto base $x_0 \in U \cap V$, e scriviamo $\pi_1(X), \pi_1(U), \pi_1(V)$ ecc. omettendo l'indicazione di x_0. Se $i : U \to X$, $j : V \to X$, $l : U \cap V \to U$, $k : U \cap V \to V$ sono le inclusioni canoniche, con i_*, j_* ecc gli associati omomorfismi di guppi fondamentali, $\pi_1(X)$ è isomorfo al quoziente del gruppo prodotto libero $\pi_1(U) * \pi_1(V)$ modulo N, dove N è il minimo sottogruppo normale di $\pi_1(U) * \pi_1(V)$ contenente gli elementi della forma $l_*([\alpha])k_*([\alpha]^{-1})$, al variare di $[\alpha] \in \pi_1(U \cap V)$ Se $U \cap V$ è semplicemente connesso, allora $\pi_1(X) = \pi_1(U) * \pi_1(V)$ è semplicemente il prodotto libero dei due gruppi $\pi_1(U)$ e $\pi_1(V)$.

Ad esempio, se X è un bouquet di due circoli si prende come x_0 il punto comune ai due circoli, si prende come U l'intero spazio privato di un punto su uno dei circoli ma non sull'altro, e come V lo spazio privato di un punto sull'altro circolo. Chiaramente $U \cap V$ è contrattile, e U, V hanno circoli come retratti di deformazione forte; quindi $\pi_1(X)$ è un gruppo non–abeliano libero su due generatori.

Se invece uno dei due aperti, ad esempio U, è semplicemente connesso,si ha $\pi_1(X) = \pi_1(V)/N$, dove N è il minimo sottogruppo normale di $\pi_1(V)$ che contiene il gruppo $k_*(\pi_1(U \cap V))$. Se ad esempio si pensa al piano proiettivo X come al quoziente del disco unitario D ottenuto identificando punti antipodali sul bordo del disco, sia $p : D \to X$ la proiezione canonica; sia $U = p(D \setminus \partial D)$, $V = p(D \setminus \{O\})$; questi sono aperti nel quoziente; scegliamo come punto base $x_0 = 1/2$. È chiaro che U, omeomorfo al disco aperto, è contrattile. La retrazione per deformazione $(x, t) \mapsto (1 - t)x + tx/|x|$ di $D \setminus \{O\}$ su ∂D scende su X ad una retrazione di V su $p(\partial D)$; e si comprende come il generatore $s \mapsto e^{2\pi i s}/2$ di $U \cap V$ sia uguale in $\pi_1(V)$ a $[\gamma]^2$, se $[\gamma]$ è il generatore di V ottenuto da $p(e^{2\pi i s/2}/2)$, $s \in [0, 1]$. Ne segue che $\pi_1(X)$ è ciclico di ordine 2.

6. Rivestimenti

6.1. **Spazi al di sopra di un altro spazio.**

Definizione. Sia X spazio topologico. La categoria degli *spazi sopra X* è così definita:

- Gli oggetti sono funzioni continue suriettive $p : Y \to X$ (in realtà Y è pensato come lo spazio sopra X, p è la mappa, o proiezione, associata).
- I morfismi da $p : Y \to X$ a $q : Z \to X$ sono funzioni continue $f : Y \to Z$ tali che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Z \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle q} \\ X & = & X \end{array}$$

sia commutativo.

Per ogni $x \in X$, se $p : Y \to X$ è spazio sopra X, il sottospazio $Y_x = p^{\leftarrow}(x)$ è la *fibra* al di sopra di X. I morfismi $f : Y \to Z$ di spazi sopra X sono esattamente le funzioni continue che "rispettano le fibre", tali cioè che sia $f(Y_x) \subseteq Z_x = q^{\leftarrow}(x)$ per ogni $x \in X$. Se $f : Y \to Z$ è morfismo di spazi sopra X, ed è omeomorfismo di Y su Z, allora $f^{-1} : Z \to Y$ è ancora morfismo di spazi sopra X. Ne viene che gli isomorfismi di spazi sopra X sono i morfismi biiettivi, con inversa continua. Se $f : Y \to Z$ è isomorfismo di spazi sopra X, chiaramente f induce, per ogni $x \in X$, un omeomorfismo di Y_x su Z_x.

Se $B \subseteq X$, la restrizione $q =_B |p|_{p^{\leftarrow}(B)}$ di p definisce uno spazio $q : p^{\leftarrow}(B) \to B$, chiamato *restrizione di Y al di sopra di B*, o semplicemente restrizione di Y a B, e spesso indicato con $Y|B$.

Uno spazio $p : Y \to X$ su X sarà detto *banale* se esiste uno spazio F (fibra tipo) tale che Y sia isomorfo a $p_1 : X \times F \to X$, dove p_1 è la proiezione sul primo fattore. In tal caso, come sopra osservato, le fibre sono tutte omeomorfe ad F.

6.2. **Spazi localmente banali al di sopra di un altro spazio: fibrati.**

Si chiama *fibrato* uno spazio $p : Y \to X$ sopra X se questo ha la proprietà di banalizzazione locale: per ogni $x \in Y$ esistono: un intorno U di x in X, ed uno spazio F_x tale che la restrizione di Y su U è isomorfa al fibrato banale $U \times F_x$. In altre parole, per ogni $x \in X$ esiste un intorno U di x, uno spazio topologico F_x, ed un omeomorfismo $\phi_U : p^{\leftarrow}(U) \to U \times F_x$ (ϕ_U è chiamato una trivializzazione locale) tale che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} p^{\leftarrow}(U) & \xrightarrow{\phi_U} & U \times F_x \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_U} \\ U & = & U \end{array}$$

sia commutativo. Se $Y_x = p^{\leftarrow}(x)$ è la fibra al di sopra di x, chiaramente Y_x è omeomorfa ad F_x; e la classe di omeomorfismo della fibra è la stessa, ed è quella di F_x, per ogni $\xi \in U$. La classe di omeomorfismo della fibra è localmente costante: le classi di omeomorfismo delle fibre dividono la base di un fibrato localmente banale in una partizione in chiusaperti. Non è restrittivo considerare fibrati con fibra in un'unica classe di omeomorfismo. Ciò necessariamente accade se la base X è spazio connesso.

Definizione. Siano X ed F spazi topologici. Un fibrato localmente banale sopra X, con *fibra tipo F*, è uno spazio $p : Y \to X$ su X tale che per ogni $x \in X$ esiste un intorno U di x in X al disopra del quale c'è una trivializzazione locale, cioè un isomorfismo di fibrati $\varphi_U : p^{\leftarrow}(U) \to U \times F$.

Esempio 1. L'esempio forse più importante è quello dei *fibrati tangenti* ad una varietà, (che hanno una struttura ancora piú ricca, essendo fibrati vettoriali, con le fibre spazi vettoriali; ma usiamoli lo stesso). Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ varietà C^1 $m-$dimensionale immersa in $\mathbb{R}^n$; il fibrato tangente ad X è lo spazio topologico, sottospazio di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$:

$$\mathrm{T}\,X = \{(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : v \in \mathrm{T}_x\,X\}.$$

Si può dimostrare facilmente che $\mathrm{T}\,X$ è sottovarietà C^0 di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$; ma a noi qui interessa la struttura di fibrato. La proiezione $p : \mathrm{T}\,X \to X$ è data da $p(x, v) = x$; la fibra tipo è $\mathbb{R}^m$; se $x \in X$, e $\varphi : U_0 \to U$ è una parametrizzazione locale di X ad x, con U_0 aperto in $\mathbb{R}^m$, V aperto di $\mathbb{R}^n$ contenente x ed $U = X \cap V$, una banalizzazione locale di $\mathrm{T}\,X$ al di sopra di U è $\phi_U : p^{\leftarrow}(U) \to U \times \mathbb{R}^m$ è data da $\phi_U(\xi, v) = (\xi, \varphi'(\varphi^{-1}(\xi))v)$, per ogni $\xi \in U$. Il fibrato tangente al circolo $\mathbb{S}^1$ è globalmente banale, essendo omeomorfo (anche C^∞ diffeomorfo se la differenziabilità viene considerata) al cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$;

basta osservare che la funzione $(x, y, t) \mapsto (x, y, -ty, tx)$ ($(x, y) \in \mathbb{S}^1$, $t \in \mathbb{R}$) stabilisce un omeomorfismo (anche diffeomorfismo C^∞) di $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ su $\mathrm{T}\,\mathbb{S}^1$ (descriverne l'inversa).

Esempio 2. Il nastro di Möbius ha evidentemente una struttura di fibrato con base il suo circolo centrale S, e con fibra tipo $]-1,1[$: pensiamo al nastro come allo spazio delle orbite del gruppo ciclico a^n, dove $a(x, y) = (x + 1, -y)$ opera sulla striscia piana $\mathbb{R}\times]-1,1[$; il circolo centrale è $S = p(\mathbb{R} \times \{0\})$; equivalentemente, può anche essere pensato come fibrato vettoriale con fibra unidimensionale, essendo $\mathbb{R}$ omeomorfo a $]-1,1[$. Esso non è globalmente banale, non è cioè isomorfo ad un cilindro. Se infatti così fosse, se ci fosse un isomorfismo $\phi : M \to S\times]-1,1[$, $M \setminus S$ avrebbe due componenti connesse, mentre è ovviamente connesso per archi (tagliandolo lungo il circolo centrale resta di un pezzo solo, la ben nota classica esibizione!).

6.3. **Rivestimenti.**

Definizione. Sia X spazio topologico. Si chiama *rivestimento* di X ogni spazio Y su X ($p : Y \to X$) che sia fibrato localmente banale su X a fibre discrete.

Ripetiamo la definizione in altre parole: $p : Y \to X$ è rivestimento se per ogni $x \in X$ esistono un intorno U di x in X, ed uno spazio discreto Λ tale che $p^{\leftarrow}(U)$ sia unione disgiunta di insiemi $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tali che p induca un omeomorfismo di ciascun V_λ su U: si lascia al lettore il facile compito di controllare che ciò equivale ad affermare l'esistenza di un omeomorfismo $\phi_U : p^{\leftarrow}(U) \to U \times \Lambda$ tale che sia $p = \mathrm{pr}_U \circ \phi_U$ (si pone $V_\lambda = \phi_U^{-1}(U \times \{\lambda\})$, ecc.ecc.). Il cardinale di Λ coincide con il cardinale della fibra; il cardinale delle fibre è localmente costante, ed è il numero di fogli del rivestimento; i singoli V_λ sono i fogli sopra U. Se U è aperto connesso, i V_λ sono evidentemente le componenti connesse di $p^{\leftarrow}(U)$, e sono in questo caso univocamente individuati da U; altrimenti ci possono essere più decomposizioni di $p^{\leftarrow}(U)$ in somma di sottospazi, su ciascuno dei quali p induce un omeomorfismo su U. Un aperto al di sopra del quale ci sia una banalizzazione locale è talvolta detto *equicoperto*, od *equirivestito* (evenly covered) da p (i rivestimenti sono "covering spaces" e "covering maps" sono le proiezioni di rivestimento, in inglese).

Esempio 1. L'esponenziale complesso $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ è un rivestimento del piano bucato $\mathbb{C}^\times$, ad un'infinità numerabile di fogli. È evidente infatti che ogni "piano tagliato" $\mathbb{C}_\alpha = \mathbb{C} \setminus \{te^{i\alpha}; t \leq 0\}$ è equicoperto da exp, essendo $\exp^{\leftarrow}(\mathbb{C}_\alpha) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\{z \in \mathbb{C} : \alpha + (k-1)\pi < \operatorname{Im} z < \alpha + (k+1)\pi\}$, con exp che induce un omeomorfismo di ciascuna di tali striscie $S_k(\alpha) = \{z \in \mathbb{C} : \alpha + (k - 1)\pi < \operatorname{Im} z, \alpha + (k + 1)\pi\}$ su $\mathbb{C}_\alpha$.

Anche l'avvolgente $\mathrm{cis} : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$, $\mathrm{cis}(t) = e^{it}$ è un rivestimento con un'infinità numerabile di fogli; l'avvolgente è la parte non banale dell'esempio appena dato.

Esempio 2. Se $m \neq 2$ è intero, la funzione potenza $m-$esima $p_m : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ è rivestimento ad m fogli di $\mathbb{C}^\times$. Si vede infatti ancora che ogni piano tagliato è equicoperto da p_m, le antiimmagini essendo (ci limitiamo ad $\alpha = 0$) gli angoli $A_k = \{z \in \mathbb{C}^\times : -\pi/m + (k-1)2\pi/m < \arg z < \pi/m + k2\pi/m\}$, con $k = 1, \dots, m$.

Esempio 3. Un esempio tra i più importanti, in cui rientrano i precedenti, è il seguente:

. *Si abbia uno spazio topologico Y su cui un gruppo discreto G opera (a sinistra, per fissare le idee) in modo propriamente discontinuo. La proiezione $p : Y \to Y/G$ di Y sullo spazio delle orbite è un rivestimento.*

Dimostrazione. Ricordiamo che la proiezione sullo spazio delle orbite è aperta. Fissata un'orbita Gx, sia V intorno aperto di x in Y tale che sia $gV \cap V = \emptyset$ se $g \neq 1$; allora $U = p(V)$ è equicoperto da p; si ha infatti $p^{\leftarrow}(p(U)) = \bigcup_{g\in G} gV$, i gV sono disgiunti, e $p|gV$ è continua, aperta e biiiettiva da gV ad U e quindi omeomorfismo. $\square$

I rivestimenti che si possono ottenere in questo modo sono detti regolari, o di Galois.

Esempio 4. Il gruppo $\{1, -1\}$ opera in modo propriamente discontinuo sulla sfera $\mathbb{S}^n$, come identità e mappa antipodale; la proiezione $p : \mathbb{S}^n \to \mathrm{P}_n\,\mathbb{R}$ è rivestimento a due fogli.

Esercizio 5. Sia $p : Y \to X$ rivestimento. Mostrare che se X è di Hausdorff allora anche Y è di Hausdorff. Mostrare che se X è compatto, allora Y è compatto se e solo se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che sia $\mathrm{Card}(p^{\leftarrow}(x)) \leq n$ per ogni $x \in X$.

6.4. **Restrizioni.** Si osservi che le restrizioni dei rivestimenti sono rivestimenti: se $p : Y \to X$ è rivestimento, e $B \subseteq X$, posto $A = p^{\leftarrow}(B)$, e $q = B|p|A$, $q : A \to B$ è rivestimento, come è immediato vedere. In generale una restrizione ad un sottoinsieme S del dominio non induce un rivestimento di S su $p(S)$; ad esempio la restrizione ad $S =]-1, 1[$ dell'avvolgente $p(t) = e^{2\pi i t}$ non è rivestimento di S su $p(S) = \mathbb{U}$: se lo fosse, essendo $\mathbb{U}$ connesso le fibre dovrebbero avere cardinale costante, ma $p^{\leftarrow}(1)$ contiene un solo elemento, lo 0, mentre le altre fibre hanno cardinalità due. Tuttavia:

. *Sia $p : Y \to X$ rivestimento. Se Y è localmente connesso, e C è una componente connessa di Y, allora $p(C)$ è una componente connessa di X e p induce un rivestimento di C su $p(C)$.*

Dimostrazione. Essendo C localmente connesso, C è aperto in Y, e quindi $p(C)$ è aperto in X, dato che chiaramente un rivestimento è mappa aperta. È evidente che anche X è localmente connesso (localmente, un rivestimento e la sua base sono omeomorfi, vedi poi; ma si prova facilmente subito); preso $x \in \mathrm{cl}_X(p(C))$, sia U aperto connesso contenente x al di sopra del quale ci sia una banalizzazione, $p^{\leftarrow}(U) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$; i V_λ sono quindi le componenti connesse di $p^{\leftarrow}(U)$, come sopra osservato, e se $V_\lambda \cap C$ è non vuoto, allora si ha $V_\lambda \subseteq C$, essendo C una componente connessa di Y. Se fosse $V_\lambda \cap C = \emptyset$ per ogni λ si avrebbe anche $U \cap p(C) = \emptyset$, contro l'ipotesi $x \in \mathrm{cl}_X(p(C))$. Ne segue $V_\lambda \subseteq C$ per qualche $\lambda \in \Lambda$, e ciò implica $U \subseteq p(C)$; ne segue che $p(C)$ è chiuso in X; essendo $p(C)$ connesso, esso è una componente connessa di X; inoltre, se $q = p(C)|p|C : C \to p(C)$, q è rivestimento: preso U come sopra, una banalizzazione di q sopra U è $q^{\leftarrow}(U) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda : V_\lambda \subseteq C} V_\lambda$. □

6.5. **Omeomorfismi locali.**

Definizione. Siano X, Y spazi topologici; $p : Y \to X$ è detto *omeomorfismo locale* a $b \in Y$ se esistono intorni aperti V di b in Y, U di $p(b)$ in X tali che p induca un omeomorfismo $p_{U,V}$ di V su U; p si dice omeomorfismo locale di Y in X se è omeomorfismo locale ad ogni $b \in Y$.

Un omeomorfismo locale è chiaramente continuo ed aperto come funzione di Y in X. Ovviamente i rivestimenti sono omeomorfismi locali, ma non viceversa. Ad esempio, $p :]-1, 1[\to \mathbb{U}$ dato da $p(t) = e^{2\pi i t}$ è omeomorfismo locale suriettivo (è restrizione dell'avvolgente ad un intervallo aperto lungo piú di un periodo), ma non è rivestimento, come sopra osservato. Tuttavia si ha

Proposizione. *Sia $p : Y \to X$ omeomorfismo locale suriettivo; si supponga Y separato. Sono equivalenti le seguenti condizioni:*
- (i) *p è rivestimento a fibre finite;*
- (ii) *la funzione $x \mapsto \mathrm{Card}(p^{\leftarrow}(x))$ è a valori finiti e localmente costante;*
- (iii) *p è perfetta.*

(perfetta vuol dire: continua, chiusa, ed a fibre compatte, vedi alla fine)

Dimostrazione. Che (i) implichi (ii) è immediato; vediamo che (ii) implica (iii). Bisogna solo mostrare che p è chiusa. Sia F chiuso in Y, sia $x \notin p(F)$, mostriamo che x non sta nella chiusura di $p(F)$. Supponiamo quindi $p^{\leftarrow}(x) \cap F = \emptyset$; sia $p^{\leftarrow}(x) = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Essendo Y separato, possiamo prendere intorni aperti W_j di y_j, per $j = 1, \ldots, m$ che siano a due a due disgiunti, e disgiunti da F; restringendoli ulteriormente possiamo anche supporre che su ciascuno di essi p induca un omeomorfismo $p_{U_j,W_j} : W_j \to U_j$, dove U_j è intorno aperto di x in X, al di sopra del quale la fibra di p ha cardinale costante, e quindi sempre n. Posto $U = \bigcap_{j=1}^n U_j$, U è intorno aperto di x in X, e p induce omeomorfismi di ciascun $V_j = p^{\leftarrow}(U) \cap W_j$ su U; inoltre $p^{\leftarrow}(U) = \bigcup_{j=1}^n V_j$, visto che $p^{\leftarrow}(\xi)$ ha esattamente n elementi per ogni $\xi \in U$, e ne ha esattamente uno in ogni V_j, per $j = 1, \ldots, n$. In particolare, $p^{\leftarrow}(U) \cap F = \emptyset$, e quindi $U \cap p(F) = \emptyset$; ma allora $x \notin \mathrm{cl}_X(p(F))$. (iii) implica (i): anzitutto le fibre sono discrete: se y fosse di accumulazione per $p^{\leftarrow}(x)$ in ogni intorno di y cadrebbero infiniti punti di $p^{\leftarrow}(x)$, e quindi p non sarebbe omeomorfismo locale ad y. Essendo compatte e discrete, le fibre sono finite, $p^{\leftarrow}(x) = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Ragionando esattamente come sopra si trovano W_j, intorni disgiunti di y_j in omeomorfismo con gli U_j, intorni di x; per trovare U prendiamo invece ora $U = X \setminus p(Y \setminus \bigcup_{j=1}^n W_j)$; chiaramente $p^{\leftarrow}(U) \cap (Y \setminus \bigcup_{j=1}^n W_j) = \emptyset$, in altre parole $p^{\leftarrow}(U) \subseteq \bigcup_{j=1}^n W_j$, e quindi, definendo ancora $V_j = p^{\leftarrow}(U) \cap W_j (= p^{-1}_{U_j,W_j}(U))$ si conclude. □

Corollario. *Se Y è compatto e di Hausdorff, X è di Hausdorff, e $p : Y \to X$ è omeomorfismo locale, allora p induce un rivestimento di Y su $p(Y)$.*

Dimostrazione. p è perfetta. □

Più generalmente si ha

. Teorema della pila dei dischi *Sia Y di Hausdorff, X di Hausdorff, $p : Y \to X$ continua e perfetta. Sia C l'insieme dei punti $y \in Y$ tali che p non è omeomorfismo locale ad y. Allora C è chiuso in Y, e p induce un rivestimento a fibre finite al di sopra dell'aperto $X \setminus p(C)$ (non necessariamente suriettivo).*

Dimostrazione. Che C sia chiuso viene dal fatto che il complementare è aperto, come è immediato vedere. Allora anche $p(C)$ è chiuso dato che p è mappa chiusa; e basta vedere che $p|(p^{\leftarrow}(X \setminus p(C))$ è perfetta come funzione di $p^{\leftarrow}(X \setminus p(C))$ su $X \setminus p(C)$, il che è facile. □

6.6. **Alcuni esercizi.** I seguenti esercizi sono tratti dal libro "Complex variables" di C.Berenstein e R.Gay:

Esercizio 6. Dire quali tra le seguenti funzioni sono rivestimenti:
(1) $\exp : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{1\}$.
(2) $\exp : \mathbb{C} \setminus 2\pi i\mathbb{Z} \to \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.
(3) $X = \{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : z = w^2\}$; $\mathrm{pr}_1 |X : X \to \mathbb{C}$.
(4) $X_1 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C} : z = w^2\}$, $\mathrm{pr}_1 |X_1 : X_1 \to \mathbb{C}^\times$.

Esercizio 7. Sia $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomio di grado $m \geq 1$. I punti critici sono gli zeri della derivata di p, i valori critici sono i valori che p assume nei punti critici. Detto V l'insieme dei valori critici, p induce un rivestimeno ad m fogli di $Y = \mathbb{C} \setminus p^{\leftarrow}(V)$ su $\mathbb{C} \setminus V$; dimostrarlo.

Esercizio 8. Mostrare che se $q : Z \to Y$ e $p : Y \to X$ sono rivestimenti, con p a fibre finite, allora $p \circ q : Z \to X$ è un rivestimento. Dimostrare poi che la funzione $\tan : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus \{\pm i\}$ è un rivestimento (suggerimento: $z \mapsto e^{iz}$ è un rivestimento da $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}^\times$ ...).

6.7. **Rialzamenti.** Se $p : Y \to X$ è continua, ed $f : Z \to X$ è continua, ogni $\tilde{f} : Z \to Y$ continua e tale che $p \circ \tilde{f} = f$ è detta sollevamento, o rialzamento, di f mediante p (o di f ad Y, quando si sottintende p). Un rialzamento locale attorno a, od a $z \in Z$, è un rialzamento di una restrizione $f|W$ di f ad un intorno W di z in Z. In definitiva, un rialzamento $\tilde{f}$ di f rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & {}^{\tilde{f}}\nearrow & \downarrow p \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Un rialzamento è in sostanza un morfismo di spazi sopra X, tranne che per il fatto che non necessariamente, in questa definizione, si suppone suriettiva p, e tantomeno f. Localmente, i rialzamenti con omeomorfismi locali sono sempre unici:

. Unicità locale del rialzamento *Se $p : Y \to X$ è omeomorfismo locale, due rialzamenti locali a $z \in Z$ di $f : Z \to X$ che coincidono in z coincidono su un intorno di z.*

Dimostrazione. Siano $\tilde{f}_1 : W_1 \to Y$, $\tilde{f}_2 : W_2 \to Y$ tali rialzamenti, con W_1, W_2 intorni di z in Z; si scelgano intorni aperti V di $y = \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)$ in X, U di $p(y) = f(z)$ in X tali che p induca un omeomorfismo di V su U; su $W = \tilde{f}_1^{\leftarrow}(V) \cap \tilde{f}_2^{\leftarrow}(V)$, che è intorno di z in Z, si ha $\tilde{f}_1|W = \tilde{f}_2|W = (p_{U,V})^{-1} \circ (f|W)$, denotando $p_{U,V}$ l'omeomorfismo che p induce tra V ed U. □

. *Se Y è di Hausdorff, oppure se p è rivestimento, ed $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \in C(Z, Y)$ sono rialzamenti di $f \in C(Z, X)$ mediante $p \in C(Y, X)$, allora l'insieme*

$$\{z \in Z : \tilde{f}_1(z) \neq \tilde{f}_2(z)\} \qquad \text{è aperto in } Z.$$

Dimostrazione. Classico ed elementare se Y è separato. Se Y riveste X, e per un $z \in Z$ si ha $\tilde{f}_1(z) \neq \tilde{f}_2(z)$, allora $\tilde{f}_1(z)$, $\tilde{f}_2(z)$ appartengono a distinti punti della fibra di p sopra $x = f(z)$; preso un intorno U di x equicoperto da p, se V_1 e V_2 sono i fogli sopra U che contengono rispettivamente $\tilde{f}_1(z)$ e $\tilde{f}_2(z)$, $W = \tilde{f}_1^{\leftarrow}(V_1) \cap \tilde{f}_2^{\leftarrow}(V_2)$ è un intorno di z in Z, su ogni punto del quale $\tilde{f}_1$ e $\tilde{f}_2$ differiscono. □

Concludendo:

Proposizione. *Sia $p : Y \to X$ omeomorfismo locale. Sia Z connesso. Se Y è separato, oppure se p è rivestimento, due rialzamenti della stessa $f \in C(Z, X)$ coincidono ovunque su Z, oppure non coincidono in alcun punto.*

Dimostrazione. Immediata da quanto appena visto. □

6.8. **Rialzamento dei cammini.** Sia $p : Y \to X$ spazio sopra X. Si dice che Y ha la proprietà del rialzamento dei cammini, o che p rialza i cammini, se per ogni $\alpha : [0, 1] \to X$ continua, ed ogni punto $y \in p^{\leftarrow}(\alpha(0))$ della fibra di p al di sopra dell'origine $\alpha(0)$ di α, esiste un cammino $\tilde{\alpha}_y : [0, 1] \to Y$ con origine y che rialza α, tale cioè che sia $p(\tilde{\alpha}_y(t)) = \alpha(t)$ per ogni $t \in [0, 1]$, con $\tilde{\alpha}_y(0) = y$. Si dice che p rialza i cammini con unicità se il cammino $\tilde{\alpha}_y$ della precedente definizione è unico. Fondamentale è il fatto seguente, che nei casi interessanti *caratterizza* i rivestimenti

Proposizione. *Ogni rivestimento rialza con unicità i cammini.*

Dimostrazione. L'unicità si deve al fatto che $[0, 1]$ è connesso. Quanto all'esistenza, sia $\alpha : [0, 1] \to X$ continua,e sia $y \in p^{\leftarrow}(\alpha(0))$; gli aperti equirivestiti sono una base di aperti per X; sia $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$ suddivisione di $[0, 1]$ tale che $\alpha([t_{k-1}, t_k]) \subseteq U_k$, dove U_k è equirivestito, per $k = 1, 2, \dots, m$. Si definisce induttivamente $\tilde{\alpha}_y$ ponendo, $\tilde{\alpha}_y(t) = p^{-1}_{U_1,V_1}(\alpha(t))$ per $t \in [t_0, t_1]$, essendo V_1 il foglio al di sopra di U_1 che contiene y; si prende poi il foglio V_2 al di sopra di U_2 che contiene $\alpha(t_1)$ e si prolunga $\tilde{\alpha}_y$ su $[t_1, t_2]$ ponendo ivi $\tilde{\alpha}_y(t) = p^{-1}_{U_2,V_2}(\alpha(t))$; proseguendo si definisce $\tilde{\alpha}_y$ su tutto $[0, 1]$. □

Esempio 1. La retta con due origini Presentiamo un esempio non di Hausdorff, in cui i cammini vengono rialzati senza unicità. Esso è la *retta con due origini*, L, che è anche un esempio di spazio localmente omeomorfo ad $\mathbb{R}^1$ che non è varietà. L'insieme L è $\mathbb{R} \cup \{0'\}$ dove $0'$ è un oggetto non di $\mathbb{R}$, i cui intorni sono della forma $U \setminus \{0\} \cup \{0'\}$, con U aperto usuale di $\mathbb{R}$ contenente 0. In altre parole, un sottoinsieme proprio di L è aperto se è un aperto usuale di $\mathbb{R}$, oppure se, contenendo $0'$, la sua intersezione con $\mathbb{R}$ è aperta nella topologia usuale di $\mathbb{R}$ e contiene un insieme della forma $U \setminus \{0\}$, con U aperto usuale di $\mathbb{R}$ che contiene 0. Si ha una funzione $p : L \to \mathbb{R}$ definita da $p(y) = y$ se $y \in \mathbb{R}$, e $p(0') = 0$, che chiaramente è omeomorfismo locale suriettivo, ed altrettanto chiaramente rialza i cammini; ma i cammini di $\mathbb{R}$ che passano per 0 hanno piú di un rialzamento, come subito si vede.

Esempio 2. Con la stessa tecnica, ogni punto di $\mathbb{R}$ può essere raddoppiato; si ha cioè uno spazio $\mathbb{R} \cup \mathbb{R}'$, unione disgiunta, dove $\mathbb{R}'$ è un insieme in biiezione $x \mapsto x'$ con $\mathbb{R}$, in cui gli aperti sono gli aperti usuali di $\mathbb{R}$, e quei sottoinsiemi di $\mathbb{R} \cup \mathbb{R}'$ che se contengono un $x' \in \mathbb{R}'$ allora contengono anche un insieme della forma $U \setminus \{x\}$, dove U è aperto usuale di $\mathbb{R}$ contenente x. La funzione $p : \mathbb{R} \cup \mathbb{R}' \to \mathbb{R}$ data da $p(x') = p(x) = x$ è omeomorfismo locale ed ha la fibra di cardinale costantemente due, ma non è rivestimento.

Esercizio 3. Sia $p : Y \to X$ omeomorfismo locale. Sia $\alpha : [0, 1] \to X$ cammino.

(i) Si mostri che se $\beta : [0, c] \to Y$ rialza $\alpha|[0, c]$, allora β può essere esteso ad un rialzamento definito su $[0, c'[$, con $c < c' \leq 1$.

Si supponga ora Y di Hausdorff.

(ii) Se $\beta : [0, c[\to Y$ rialza $\alpha|[0, c[$, β può essere esteso con continuità a $[0, c]$ se e solo se

$$\bigcap_{t<c} \mathrm{cl}_Y(\beta[t, c[) \neq \emptyset.$$

(iii) Se Y è di Hausdorff e connesso, e $p : Y \to [0, 1]$ è omeomorfismo locale, allora p è omeomorfismo.

Esercizio 4. Se $p_j : Y_j \to X_j$, $j = 1, \dots, n$ sono rivestimenti (omeomorfismi locali) allora $p_1 \times \cdots \times p_n : Y_1 \times \cdots \times Y_n \to X_1 \times \cdots \times X_n$ è rivestimento (omeomorfismo locale). Un prodotto infinito di omeomorfismi locali, o di rivestimenti, non è in generale omeomorfismo locale; ad esempio il prodotto p^ω di un'infinità numerabile di avvolgenti $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ certamente non è omeomorfismo locale, dato che $\mathbb{R}^\omega$ non è localmente compatto, come invece è il solenoide $(\mathbb{S}^1)^\omega$.

6.8.1. *Rialzamenti su intorni di compatti.* Presentiamo qui un argomento che è di grande interesse in varie circostanze, ma che è marginale per i nostri scopi. Diciamo che un sottospazio K di uno spazio topologico Z è *di Hausdorff in* Z se ogni coppia z_1, z_2 di punti distinti di K ha intorni disgiunti A_1, A_2 in Z; è di più che non richiedere che K sia di Hausdorff nella topologia indotta, come poi si vedrà. Sarà utile in seguito il

Lemma. *Sia $p : Y \to X$ omeomorfismo locale, e sia $f : Z \to X$ continua; sia $K \subseteq Z$ compatto, di Hausdorff in Z. Se $f_{|K}$ ha un rialzamento $\varphi : K \to Y$, tale rialzamento si estende ad un rialzamento su un aperto W di Z contenente K.*

Dimostrazione. Per ogni $x \in K$ si prendano aperti $U(x)$ e $V(x)$ di X ed Y contenenti $f(x)$ e $\varphi(x)$ rispettivamente e tali che p induca un omeomorfismo $p_{U(x),V(x)}$ di $V(x)$ su $U(x)$. Sia $W(x) = f^{\leftarrow}(U_x)$; allora $f_x = p^{-1}_{U(x),V(x)} \circ f_{|W(x)}$ rialza f sopra $W(x)$, e vale $\varphi(x)$ in x; dato che $f_{x|W(x)\cap K}$ e $\varphi_{|W(x)\cap K}$ sono entrambi rialzamenti di $f_{|W(x)\cap K}$ coincidenti in x, essi coincidono su un intorno $W'(x) \cap K$ di $x \in W(x) \cap K$; cambiando nome a $W(x)$, non è restrittivo supporre che sia $W(x) = W'(x)$. Si è dimostrato il fatto seguente: per ogni $x \in K$, esiste un aperto $W(x)$ di x in Z, contenente x, ed un rialzamento $f_x : W(x) \to Y$ di f sopra $W(x)$, tale che sia $f_{x|W(x)\cap K} = \varphi_{|W(x)\cap K}$. Dimostriamo ora: se F, G sono chiusi disgiunti di K, compatto e di Hausdorff in Z allora esistono aperti disgiunti A, B di Z tali che sia $F \subseteq A$ e $G \subseteq B$. Infatti $F \times G$ è prodotto di compatti in $Z \times Z$, e per l'ipotesi esiste un aperto Ω di $Z \times Z$ contenente $F \times G$ e disgiunto dalla diagonale di $Z \times Z$ (per ogni $(x, y) \in F \times G$ prendere intorni aperti $A_{(x,y)}, B_{(x,y)}$ di x, y in Z disgiunti; $\Omega = \bigcup_{(x,y)\in F\times G} A_{(x,y)} \times B_{(x,y)}$ è come richiesto). Ne segue (teorema di Wallace) che esistono aperti A, B di Z tali che $F \times G \subseteq A \times B \subseteq \Omega$; da $A \times B \subseteq \Omega$ segue che $A \times B$ non interseca la diagonale di $Z \times Z$ e quindi che $A \cap B = \emptyset$; A e B sono come richiesto. Dimostriamo ora il lemma, per induzione sul numero n di elementi del ricoprimento $W_1, \dots, W_n$. Se $n = 1$ la conclusione è raggiunta. Supponiamo poi $n = 2$. L'insieme

$$W = \{z \in W_1 \cap W_2 : \ f_1(z) = f_2(z)\}$$

è chiaramente aperto in Z (eventualmente vuoto) e contiene $K \cap W_1 \cap W_2$. Sia $F = K \setminus W_2$, $G = K \setminus W_1$; F, G sono chiusi di K, sono disgiunti e si ha $F \subseteq W_1$, $G \subseteq W_2$ (dato che $K \subseteq W_1 \cup W_2$). Come sopra mostrato esistono aperti disgiunti A, B di Z con $F \subseteq A$, $G \subseteq B$, e si può anche supporre che sia $A \subseteq W_1$, $B \subseteq W_2$. Ne segue che è $K \subseteq A \cup B \cup W$ (se $z \in K$ appartiene a $W_1 \cap W_2$ allora sta in W, altrimenti sta in A, o in B), e che la formula

$$g(z) = f_1(z) = f_2(z) \quad \text{se} \quad z \in W; \, g(z) = f_1(z) \quad \text{se} \quad z \in A; \, g(z) = f_2(z) \quad \text{se} \quad z \in B,$$

definisce un rialzamento g di f sopra l'aperto $A \cup B \cup W$ contenente K, che estende φ. Se $n \geq 2$, ammesso che il lemma valga per $n - 1$, si prende il compatto $L = K \setminus W_n$, coperto dagli $n - 1$ aperti $W_1, \dots, W_{n-1}$; per l'ipotesi induttiva si ha un rialzamento g_1 di f su un aperto W di Z contenente L, che estende $\varphi_{|L}$; e restringendo se occorre W, ma sempre con $L \subseteq W$, si può anche fare in modo che sia $g_1(z) = \varphi(z)$ per ogni $z \in K \cap W$. Si applica ora il caso $n = 2$ al ricoprimento W, W_n di K, con le funzioni g_1 ed f_n.

□

Osservazione. Senza l'ipotesi che K sia di Hausdorff in Z il lemma è in generale falso. Controesempio:

- Sia Y lo spazio unione disgiunta di due copie dell'intervallo $[0, 1]$, $Y = [0, 1] \times \{1, 2\}$ con la topologia indotta da quella di $\mathbb{R}^2$, e sia $Z = X = [0, 1] \cup \{0'\}$ l'intervallo $[0, 1]$ in cui il punto $\{0\}$ è stato raddoppiato; sia $p : Y \to X$ dato da $p(x, j) = x$ per $x \neq 0$, $p(0, 1) = 0$, $p(0, 2) = 0'$; è immediato vedere che p è omeomorfismo locale. Sia $f : X \to X$ l'identità di X. I rialzamenti locali sono le *sezioni locali* di p; sia $K = \{0, 0'\}$; K è compatto, e $\varphi : K \to Y$ definita da $\varphi(0) = (0, 1)$, $\varphi(0') = (0, 2)$ chiaramente rialza $f = 1_X$ sopra K, ma non ha un'estensione ad una sezione su un aperto contenente K.

Si noti che $K = \{0, 0'\}$ è discreto, e quindi di Hausdorff, nella topologia indotta, ma non è di Hausdorff in X.

6.9. **Rialzamento delle omotopie.**

Definizione. Sia $p : Y \to X$ continua; si dice che *p rialza le omotopie*, o che ha la proprietà di rialzamento delle omotopie, se per ogni spazio Z, ed ogni omotopia $H : Z \times I \to X$, se $\tilde{f}_0 : Z \to Y$ è continua e tale che $p \circ \tilde{f}_0(z) = H(z, 0)$, allora esiste $\tilde{H} : Z \times I \to Y$ che rialza H e tale che sia $\tilde{H}(z, 0) = \tilde{f}_0(z)$, per ogni $z \in Z$.

In altre parole, rialzamento delle omotopie significa: se si rialza la "base" $f_0(z) = H(z, 0)$ dell'omotopia, si deve poter rialzare l'intera omotopia. Si noti che la proprietà di rialzamento dei cammini è caso particolare di questa (prendere per Z uno spazio con un unico punto). Si dirà che p rialza con unicità le omotopie se $\tilde{H}$ è unica; ovviamente ciò equivale a dire che p rialza le omotopie, ed ha l'unicità del rialzamento dei cammini. Una *fibrazione di Hurewicz* è una funzione $p : Y \to X$ che abbia la proprietà di rialzamento delle omotopie; chiaramente è suriettiva.

Proposizione. *Un omeomorfismo locale che rialza con unicità i cammini rialza con unicità le omotopie (ed è quindi una fibrazione di Hurewicz). In particolare, i rivestimenti rialzano con unicità le omotopie.*

Dimostrazione. Se per ogni $z \in Z$ si indica con $\tilde{\alpha}_z : [0, 1] \to Y$ l'unico rialzamento con origine $\tilde{f}_0(z)$ del cammino $t \mapsto H(z, t)$, si vede che l'unica possibile definizione per $\tilde{H}$ è

$$\tilde{H}(z, t) = \tilde{\alpha}_z(t), \qquad (z, t) \in Z \times I.$$

Si tratta di vedere che $\tilde{H}$, così definita, è continua. Fissato $z \in Z$, si consideri l'insieme $I(z)$ dei $t \in [0, 1]$ per cui esiste un intorno aperto W_t di z in Z tale che in $W_t \times [0, t]$ la funzione $\tilde{H}$ sia continua. Chiaramente $0 \in I(z)$, che quindi non è vuoto. Sia $\bar{t} = \sup I(z)$; esistono intorni W' di z in z e J di $\bar{t}$ in $[0, 1]$, W' aperto, J chiuso, ed un rialzamento continuo $h : W' \times J \to Y$ di H sopra $W' \times J$, tale che $\tilde{H}(z, \bar{t}) = h(z, \bar{t})$. Per unicità del rialzamento dei cammini, si ha $h(z, s) = \tilde{H}(z, s)$ per ogni $s \in J$. Per le proprietà dell' estremo superiore, esiste $t_1 \in I(z) \cap J$. Essendo $\tilde{H}(z, t_1) = h(z, t_1)$, esiste un intorno aperto W di z in Z tale che sia $\tilde{H}(w, t_1) = h(w, t_1)$ per ogni $w \in W$ (unicità locale del rialzamento); si può supporre

$W \subseteq W_{t_1} \cap W'$. Si noti che allora si ha $h(w,t) = \tilde{H}(w,t)$ per ogni $t \in J$, sempre per unicità del rialzamento dei cammini. Ne segue che le funzioni $\tilde{H}_{|W\cap[0,t_1]}$ ed $h_{|W\times J}$ si incollano, dando luogo ad una funzione continua in $W \times [0, \max J]$ (gli insiemi $W \cap [0,t_1]$ e $W \times J$ sono chiusi nella topologia relativa di $W \times [0, \max J]$). Da ciò chiaramente segue che $\bar{t} = 1$, e che $\bar{t} \in I(z)$.

Osservazione. Una dimostrazione alternativa più semplice fa uso del lemma di rialzamento su un intorno di un compatto (6.8.1). Si ha che $\tilde{H}$ è continua sopra il compatto $\{z\} \times I$, per ogni fissato $z \in Z$; tale compatto è di Hausdorff in $Z \times I$ come subito si vede (se J_1 e J_2 sono intorni disgiunti di t_1 e t_2 in I, $Z \times J_1$ e $Z \times J_2$ sono intorni disgiunti di (z,t_1) e (z,t_2) in $Z \times I$) e quindi $\tilde{H}$ si estende ad un rialzamento continuo h_z di H su un aperto A di $Z \times I$ contenente $\{z\} \times I$ (vedi 6.6.1). Per il teorema di Wallace A contiene un aperto della forma $W_z \times I$, con W_z aperto di Z contenente z; e stringendo W_z se occorre, si può supporre che sia $h_z(x,0) = \tilde{f}_0(x) = \tilde{H}(x,0)$ per ogni $x \in W_z$ (unicità locale del rialzamento). Ne segue che $t \mapsto h_z(x,t)$ è un rialzamento con origine $\tilde{f}_0(x)$ del cammino $t \mapsto H(x,t)$, per ogni $x \in W_z$; per l'unicità si ha $h_z(x,t) = \tilde{H}(x,t)$ per ogni $(x,t) \in W_z \times I$; essendo h_z continua, tale è anche $\tilde{H}$.

□

6.10. **Lemma di monodromia.** Se $p : Y \to X$ è continua, con unicità del rialzamento dei cammini e delle omotopie fra essi, il morfismo di gruppoidi $p_* : \Pi_1 Y \to \Pi_1 X$ è iniettivo a livello di morfismi. In altre parole, se $b_1, b_2 \in Y$, $p_* : \mathrm{Mor}(b_1,b_2) \to \mathrm{Mor}(p(b_1),p(b_2))$ è iniettivo. Questo è uno dei modi di interpretare il

. Lemma di monodromia *Sia $p : Y \to X$ rivestimento (basta anche: fibrazione di Hurewicz con unicità del rialzamento dei cammini). Siano α, β cammini in X, e sia $[\alpha] = [\beta]$. Se $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ sono rialzamenti di α e β rispettivamente, con la stessa origine $b_1 \in Y$, allora $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ hanno la stessa estremità, e sono omotopi, cioè $[\tilde{\alpha}] = [\tilde{\beta}]$ in Y.*

Dimostrazione. Sia $h : I \times I \to X$ omotopia ad estremi fissi di α con β. Rialziamo la base come $\tilde{\alpha}$, con origine b_1 nella fibra sopra l'origina a_1 di α; l'omotopia si rialza ad un'omotopia $\tilde{h}$ con origine $\tilde{\alpha}$, cioè $\tilde{h}(t,0) = \tilde{\alpha}(t)$ per ogni $t \in I$. I lati del quadrato che sono cammini costanti si rialzano a cammini costanti, per l'unicità. In particolare, $\tilde{h}(0,\lambda) = b_1$ per ogni $\lambda \in I$. Ne segue che $t \mapsto \tilde{h}(t,1)$ è rialzamento di β con origine b_1 e pertanto coincide con $\tilde{\beta}$. Il cammino $\lambda \mapsto h(1,\lambda)$, costantemente $a_2 = \alpha(1) = \beta(1)$ si rialza ad un cammino costante, che è quindi costantemente $\tilde{\alpha}(1) = b_2$. Ma allora anche $\tilde{\beta}(1) = b_2$. □

Se α e β sono cammini di X, con $\alpha(1) = \beta(0)$, $\tilde{\alpha}$ è un rialzamento di α, e $\tilde{\beta}$ è il rialzamento di β che ha origine in $\tilde{\alpha}(1)$, allora $\tilde{\alpha}.\tilde{\beta}$ è il rialzamento di $\alpha.\beta$ con origine $\tilde{\alpha}(0)$: lo si riconosce subito con l'unicità del rialzamento. E se σ è il rialzamento di $\bar{\alpha}$, cammino inverso di α, con origine in $\tilde{\alpha}(1)$, allora $\sigma = \overline{(\tilde{\alpha})}$, come si vede sempre grazie all'unicità del rialzamento.

Dal lemme di monodromia segue subito

. *Se $p : Y \to X$ è rivestimento, e γ è cammino in Y con origine b ed estremo $c \neq b$ in punti distinti della fibra Y_a di Y sopra uno stesso $a \in X$, allora $p \circ \gamma$ è circuito basato ad a non banale in X, $[p \circ \gamma] \neq [\varepsilon_a]$.*

Dimostrazione. Se fosse $[p \circ \gamma] = [\varepsilon_a]$ il lemma di monodromia direbbe che γ, rialzamento di $p \circ \gamma$ con origine $\gamma(0) = b$, dovrebbe avere la stessa estremità di ε_b, rialzamento di ε_a con origine b; ma per ipotesi $\gamma(1) = c \neq b$. □

Si ha allora subito

. *Sia $p : Y \to X$ rivestimento. Sia $B \subseteq X$ connesso per archi e tale che ogni circuito di B è nullomotopo in X. Se $(B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ è la famiglia delle arco–componenti di $p^{\leftarrow}(B)$, allora p applica biiettivamente ogni B_λ su B. Se B è anche localmente connesso per archi, allora p ha $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ come banalizzazione sopra B.*

Dimostrazione. $p|B_\lambda$ è iniettiva: risultato precedente; $p|B_\lambda$ suriettiva: fissato $a_\lambda \in p(B_\lambda)$, e dato $x \in B$, sia α un cammino in B da a ad x; se $\tilde{\alpha}$ è il rialzamento di α con origine b si ha $p(\tilde{\alpha}(1)) = x$. Quindi $p|B_\lambda$ è suriettiva. Se poi B è localmente connesso per archi, tale è $p^{\leftarrow}(B)$ (restrizioni a piene antiimmagini di omeomorfismi locali sono ancora omeomorfismi locali); ne segue che le componenti connesse di $p^{\leftarrow}(B)$ sono aperte, e $p|B_\lambda$, biiettiva, continua, aperta, è omeomorfismo. □

Corollario. *I rivestimenti di uno spazio semplicemente connesso e locamente connesso per archi sono globalmente banali.*

Dimostrazione. Immediata. □

6.11. **I sottogruppi del gruppo fondamentale associati ad un rivestimento.**

. *Sia $p : (Y, b) \to (X, a)$ rivestimento. L'omomorfismo $p_* : \pi_1(Y, b) \to \pi_1(X, a)$ è iniettivo.*

Il sottogruppo $p_*(\pi_1(Y, b))$ è quindi isomorfo a $\pi_1(Y, b)$; esso si indica con $G(Y, b)$. Coincide con l'insieme delle classi di omotopia di circuiti di X basati ad a, il cui rialzamento con origine b è ancora circuito; se α è circuito basato ad a, e $[\alpha] \notin G(Y, b)$, il rialzamento di α con origine b è un cammino γ di origine b, con estremità in un altro punto c della fibra Y_a di Y sopra a. È facile vedere che in tal caso $G(Y, c)$ è coniugato in $\pi_1(X, a)$ di $G(Y, b)$

. *Sia $p : Y \to X$ rivestimento; sia $a \in X$, e sia b nella fibra Y_a di p sopra a. Se $c \in Y_a$ appartiene alla stessa arco–componente in Y di b, allora $G(Y, c)$ e $G(Y, b)$ sono coniugati in $\pi_1(X, a)$. Più precisamente, se γ è un cammino in Y di origine b ed estremità c si ha*

$$G(Y, c) = [p \circ \gamma]^{-1} G(Y, b) [p \circ \gamma].$$

Inoltre, tutti i coniugati di $G(Y, b)$ in $\pi_1(X, a)$ si ottengono in questo modo.

Dimostrazione. Si lascia come esercizio. □

Si osservi anche

. Monodromia, versione forte *Sia $p : (Y, b) \to (X, a)$ rivestimento. Siano α, β cammini di X con la stessa origine a e lo stesso estremo $\alpha(1) = \beta(1) \in X$. Siano $\tilde\alpha, \tilde\beta$ i rialzamenti di α, β con origine b. Si ha $\tilde\alpha(1) = \tilde\beta(1)$ se e solo se $[\alpha][\beta]^{-1} \in G(Y, b)$.*

Dimostrazione. Se $\tilde\alpha(1) = \tilde\beta(1)$, allora $\tilde\alpha.(\tilde\beta)^{-1}$ è circuito basato a b, rialzamento con origine b del circuito $\alpha.\beta^{-1}$; ed $\alpha.\beta^{-1}$ si rialza con origine b ad un circuito se e solo se $[\alpha.\beta^{-1}] \in G(Y, b)$. Se $[\alpha.\beta^{-1}] \in G(Y, b)$, detto γ il circuito cui esso si rialza con origine b, si ha $\gamma = \tilde\alpha.\tilde\sigma$, dove σ è il rialzamento di $\bar\beta$ con origine $\tilde\alpha(1)$; ne segue che $\bar\sigma$ e $\tilde\beta$ sono entrambi rialzamenti di β con origine b, e quindi coincidono, in particolare $\tilde\beta(1) = \bar\sigma(1) = \sigma(0) = \alpha(1)$. □

Diremo regolare, o di Galois, un rivestimento connesso per archi (e localmente connesso per archi) per cui $G(Y, b)$ sia invariante in $\pi_1(X, a)$. Si verifichi che la nozione non dipende dal punto base $a \in X$ fissato. In tal caso ovviamente $G(Y, b)$ è lo stesso per ogni punto $b \in Y_a$ della fibra, chiamiamolo $G(Y, a)$. Si noti

Esercizio 1. Un rivestimento $p : Y \to X$ connesso per archi è regolare se e solo se, fissato $a \in X$, i rialzamenti di un circuito di X basato ad a sono tutti circuiti, oppure nessuno è un circuito.

6.12. **Azione di $\pi_1(X, a)$ sulla fibra Y_a.** Sia $p : Y \to X$ rivestimento, e sia $a \in X$. C'è una naturale azione destra di $\pi_1(X, a)$ sulla fibra $Y_a = p^{\leftarrow}(a)$; per ogni $b \in Y_a$, ed ogni $[\alpha] \in \pi_1(X, a)$ sia $\tilde\alpha_b$ il rialzamento di α con origine b; si pone

$$b[\alpha] = \tilde\alpha_b(1)$$

chiaramente questo è un altro elemento di Y_a; esso dipende da $[\alpha]$ e non da α per il lemma di monodromia. Se $c = b[\alpha]$, e $[\beta] \in \pi_1(X, a)$ sappiamo che $\tilde\alpha_b.\tilde\beta_c = \widetilde{(\alpha.\beta)}_b$, e da ciò segue $b([\alpha][\beta]) = (b[\alpha])[\beta]$. Per ogni $b \in Y_a$ lo stabilizzatore è $G(Y, b)$, l'orbita è la parte di Y_a contenuta nell'arco–componente di Y che contiene b; se Y è connesso per archi l'azione è quindi transitiva. Si noti

. *Se $p : (Y, b) \to (X, a)$ è rivestimento connesso per archi la fibra Y_a è in biiezione con l'insieme delle classi laterali destre di $\pi_1(X, a)$ modulo $G(Y, b)$. In particolare, il numero di fogli del rivestimento coincide con l'indice di $G(Y, b)$ in $\pi_1(X, a)$.*

Come visto in 3.1, Esercizio 5, fissato $b \in Y_a$, e supposto Y connesso per archi, esiste un endomorfismo $\varphi \in \mathrm{End}_{\pi_1(X,a)}(Y_a)$ che applica b in c se e solo se $G(Y, b) \subseteq G(Y, c)$; e tale endomorfismo è automorfismo se e solo se $G(Y, b) = G(Y, c)$; e ciò a sua volta accade se e solo se si ha $c = b[\nu]$, con $[\nu] \in N(G(Y, b))$, normalizzante di $G(Y, b)$ in $\pi_1(X, a)$; inoltre $\mathrm{Aut}_{\pi_1(X,a)}(Y_a)$ è in questo modo isomorfo a $N(G(Y, b))/G(Y, b)$ (sempre 3.1, Esercizio 5).

6.13. **Criterio del rialzamento.** D'ora in poi gli spazi saranno per lo più connessi e localmente connessi per archi. In questa classe ricca di cammini il rialzamento dei cammini e delle omotopie è molto potente. Il gruppo fondamentale risolve ad esempio il problema del rialzamento.

. Criterio del Rialzamento *Tutti gli spazi connessi e localmente connessi per archi. Sia $p:(Y,b)\to(X,a)$ rivestimento, e sia $f:(Z,c)\to(X,a)$ continua. Esiste $g:(Z,c)\to(Y,b)$ continua che rialza f se e solo se si ha*

$$f_*(\pi_1(Z,c))\subseteq p_*(\pi_1(Y,b))(=G(Y,b)).$$

Dimostrazione. La necessità è immediata: se g esiste, si ha $f=p\circ g$ da cui $f_*=p_*\circ g_*$ e quindi

$$f_*(\pi_1(Z,c))\subseteq p_*(g_*(\pi_1(Z,c))\subseteq p_*(\pi_1(Y,b)).$$

Per la sufficienza, cerchiamo di definire g nel modo seguente: dato $z\in Z$ sia α cammino in Z da c a z; sia $\tilde\alpha$ il rialzamento di $f\circ\alpha$ mediante p, con origine b; si pone $g(z)=\tilde\alpha(1)$, estremità di $\tilde\alpha$. Verifichiamo che g è ben definita da questa procedura: sia β un altro cammino in Z di origine c ed estremità z. Vogliamo vedere che se $\tilde\beta$ è il rialzamento di $f\circ\beta$ con origine b, allora $\tilde\alpha(1)=\tilde\beta(1)$. La versione forte del lemma di monodromia mostra che ciò si ha se e solo se $[f\circ\alpha][f\circ\beta]^{-1}\in G(Y,b)$, e cioè se e solo se $f_*([\alpha][\beta]^{-1})\in G(Y,b)$, che segue subito dall'ipotesi. Resta da provare la continuità di g. Sia $z\in Z$ fissato; preso ad arbitrio un intorno V_1 di $g(z)$ in Y si prendano intorni V di $g(z)$ in Y e U di $p(g(z))=f(z)$ in X, con V aperto connesso per archi contenuto in V_1, e tale che p induca un omeomorfismo $p_{U,V}$ di V su U; sia W un intorno aperto connesso per archi di z in Z tale che $f(W)\subseteq U$. È immediato vedere che si ha $g(W)\subseteq V$; infatti, se α è un cammino in Z da c a z, fissato una volta per tutte, e σ è cammino in W da z a $w\in W$, $g(w)$ è l'estremità del rialzamento $\tilde\sigma$ di $f\circ\sigma$ con origine $g(z)$. Tale rialzamento è ovviamente $p_{U,V}^{-1}\circ f\circ\sigma$, ed è quindi tutto contenuto in V. □

6.14. **Omomorfismi di rivestimento.** Se $p:Y\to X$ e $q:Z\to X$ sono rivestimenti, tutti gli spazi essendo connessi e localmente connessi per archi, un morfismo $f:Z\to X$ (si scrive $f\in\mathrm{Hom}_X(Z,Y)$ e significa: funzione continua $f\in C(Z,Y)$ tale che sia $q=f\circ p$) esiste se e solo se fissato $a\in X$, e fissati punti $c\in Z_a$, $b\in Y_a$, il sottogruppo $G(Z,c)$ è contenuto in qualche coniugato del sottogruppo $G(Y,b)$: ciò è immediato, per il criterio del rialzamento. Si osservi che un endomorfismo di rivestimento che abbia un punto unito è necessariamente l'identità, per l'unicità del rialzamento. Ne segue che $f:(Z,c)\to(Y,b)$ è isomorfismo se e solo se $G(Z,c)=G(Y,b)$, e quindi

. *Tutti gli spazi connessi e localmente connessi per archi. Se Z ed Y sono rivestimenti di X, essi sono isomorfi se e solo se le associate classi coniugate di sottogruppi del gruppo fondamentale di X coincidono.*

Le classi di isomorfismo dei rivestimenti connessi di X (X connesso e locamente connesso per archi) sono quindi in biiezione con le classi coniugate di sottogruppi di $\pi_1(X)$. E si noti anche

Proposizione. *Tutti gli spazi connessi e localmente connessi per archi. Se $q:Z\to X$, $p:Y\to X$ sono rivestimenti, ed $f:Z\to Y$ è morfismo di rivestimenti, allora f è rivestimento.*

Dimostrazione. Fissiamo punti $a\in X$, $c\in Z_a$, $b\in Y_a$ cosicché si ha il diagramma commutativo di spazi puntati

$$\begin{tikzcd}
(Z,c) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & (Y,b) \arrow[d, "p"] \\
(X,a) \arrow[r, equal] & (X,a)
\end{tikzcd}$$

Verifichiamo che f è suriettiva: preso $y\in Y$, si considera un cammino γ in Y da b ad y; sia α il rialzamento con origine c entro b di $p\circ\gamma$; $f\circ\alpha$ è cammino in Y di origine b, che rialza $p\circ\gamma$ ($p\circ(f\circ\alpha)=(p\circ f)\circ\alpha=q\circ\alpha=p\circ\gamma$) e pertanto coincide con γ; ma allora $f(\alpha(1))=\gamma(1)=y$. Mostriamo poi che per ogni $y\in Y$ fissato esiste un aperto V al disopra del quale f è banale. Posto $x=p(y)$ si può trovare un aperto connesso per archi U di X contenente x e tale che al di sopra di esso siano banali sia p che q. Essendo $q=p\circ f$ si ha $q^{\leftarrow}(U)=f^{\leftarrow}(p^{\leftarrow}(U))$; sia V quella componente connessa di $p^{\leftarrow}(U)$ che contiene y; è evidente che $f^{\leftarrow}(V)$ è unione disgiunta di alcune delle componenti di $q^{\leftarrow}(U)$, e che f induce omeomorfismi di ciascuna di queste su V: basta usare 6.4. □

Si è indotti a definire una relazione di ordine tra le classi di isomorfismo dei rivestimenti connessi di X, dicendo che $Z\geq Y$ se $\mathrm{Hom}_X(Z,Y)$ non è vuoto. Tale relazione è però in generale soltanto un preordine, e non un ordine: può accadere che sia $Z \geq Y$ ed $Y \geq Z$ senza che Y e Z siano isomorfi; può insomma accadere che in $\pi_1(X,a)$ un sottogruppo $G(Y,b)$ contenga $G(Z,c)$ come sottogruppo, e che un coniugato di $G(Y,b)$ sia contenuto in $G(Z,c)$ senza che alcun coniugato di $G(Y,b)$ coincida con alcun coniugato di $G(Z,c)$: si veda [Massey, Chapter V, Notes].

6.15. **Endomorfismi ed automorfismi di rivestimento.** Sempre spazi connessi e localmente connessi per archi, e $p : Y \to X$ rivestimento. Fissati $a \in X$ e $b, c \in Y_a$, il criterio del rialzamento mostra che esiste un endomorfismo $\varphi \in \mathrm{End}_X(Y)$ del rivestimento Y che applica b su c, cioè tale che $\varphi(b) = c$, se e solo se $G(Y,b) \subseteq G(Y,c)$, e che tale endomorfismo è automorfismo s e solo se $G(Y,b) = G(Y,c)$, come sopra visto. Queste condizioni sono esattamente quelle richieste per endomorfismi ed automorfismi di Y_a come insieme su cui $\pi_1(X,a)$ opera; ed infatti

Proposizione. *Tutti gli spazi connessi e localmente connessi per archi; sia $p : Y \to X$ rivestimento. Fissato $a \in X$, l'applicazione*

$$\varphi \mapsto Y_a|\varphi|Y_a \quad \text{\emph{è un isomorfismo di} } \mathrm{End}_X(Y) \text{ \emph{su} } \mathrm{End}_{\pi_1(X,a)}(Y_a).$$

Inoltre, fissato $b \in Y_a$, per ogni $[\alpha] \in N(G(Y,b))$, normalizzante di $G(Y,b)$ in $\pi_1(X,a)$, esiste un unico automorfismo $\varphi_{[\alpha]} \in \mathrm{Aut}_X(Y)$ tale che sia $\varphi_{[\alpha]}(b) = b[\alpha]$; e l'applicazione $[\alpha] \mapsto \varphi_{[\alpha]}$ induce un isomorfismo di $N(G(Y,b))/G(Y,b)$ su $\mathrm{Aut}_X(Y)$.

Dimostrazione. Mostriamo che ogni endomorfismo di rivestimento induce una funzione $\pi_1(X,a)-$equivariante sulla fibra. Se $b \in Y_a$, ed $[\alpha] \in \pi_1(X,a)$, sia $\tilde{\alpha}_b$ il rialzamento di α con origine b; essendo $p \circ \varphi = p$, $\varphi \circ \tilde{\alpha}_b$ è anch'esso un rialzamento di α, quello con origine $\varphi(b)$; si ha insomma $\varphi \circ \tilde{\alpha}_b = \tilde{\alpha}_{\varphi(b)}$, da cui $\varphi \circ \tilde{\alpha}_b(1) = \tilde{\alpha}_{\varphi(b)}(1)$, che equivale a $\varphi(b[\alpha]) = (\varphi(b))[\alpha]$. Detto questo, il fatto che la restrizione sia isomorfismo di $\mathrm{End}_X(Y)$ su $\mathrm{End}_{\pi_1(X,a)}(Y_a)$ è conseguenza immediata del fatto che sia gli endomorfismi di rivestimento, sia quelli di Y_a come insieme su cui $\pi_1(X,a)$ opera sono individuati dalla loro azione su un unico punto $b \in Y_a$, ed esistono alle stesse condizioni morfismi dei due tipi che applicano $b \in Y_a$ in $c \in Y_a$. Se poi $[\alpha], [\beta] \in N(G(Y,b))$ si ha

$$\varphi_{[\alpha]} \circ \varphi_{[\beta]}(b) = \varphi_{[\alpha]}(\varphi_{[\beta]}(b)) = \varphi_{[\alpha]}(b[\beta]) = (\varphi_{[\alpha]}(b))[\beta] = (b[\alpha])[\beta] = b([\alpha][\beta]) = \varphi_{[\alpha][\beta]}(b),$$

per cui $\varphi_{[\alpha]} \circ \varphi_{[\beta]} = \varphi_{[\alpha][\beta]}$; ne segue che $[\alpha] \mapsto \varphi_{[\alpha]}$ è omomorfismo, chiaramente suriettivo, con nucleo $G(Y,b)$. □

Si noti che $\mathrm{Aut}_X(Y)$ opera a sinistra su Y, ed induce un'azione sinistra su Y_a; l'orbita di $b \in Y_a$ sotto l'azione di $\mathrm{Aut}_X(Y)$ consiste esattamente dei $c \in Y_a$ tali che $G(Y,c) = G(Y,b)$, e ciò accade se e solo se, dato un cammino γ in Y di origine b ed estremità c si ha $p \circ \gamma \in G(Y,b)$; in particolare l'azione è transitiva se e solo se $G(Y,b)$ è invariante in $\pi_1(X,a)$, cioè Y è regolare.

Corollario. *Tutti gli spazi connessi e localmente connessi per archi. Sia $p : Y \to X$ rivestimento. Allora Y è regolare se e solo se il gruppo degli automorfismi di rivestimento agisce transitivamente sulla fibra; e tale gruppo è isomorfo a $\pi_1(X,a)/G(Y,a)$.*

Se Y è semplicemente connesso, allora $\pi_1(X,a)$ è isomorfo ad $\mathrm{Aut}_X(Y)$.

Dimostrazione. Fatta sopra. □

Se G è un gruppo che opera in modo propriamente discontinuo sullo spazio connesso e localmente connesso per archi Y, $p : Y \to Y/G$ è rivestimento, e chiaramente G è identificabile con $\mathrm{Aut}_X(Y)$ (gli elementi di G sono automorfismi, e poiché operano transitivamente, sono tutti gli automorfismi). Ne segue che tale rivestimento è regolare. Reciprocamente, dato un rivestimento regolare, il gruppo $\mathrm{Aut}_X(Y)$ opera in modo propriamente discontinuo su Y, ed è immediato vedere che $Y/\mathrm{Aut}_X(Y)$ è identificabile con X. In generale, per ogni rivestimento $\mathrm{Aut}_X(Y)$ opera in modo propriamente discontinuo su Y, ma se il rivestimento non è regolare si ha solo, per passaggio al quoziente, un altro rivestimento $Z = Y/\mathrm{Aut}_X(Y)$, rivestito a sua volta da Y

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{q} & Z \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ X & = & X \end{array}$$

Si ha, prendendo punti base $a \in X$, $b \in Y_a$, $c = q(b) \in Z_a$, che $r_*(\pi_1(Z,c)) = N(G(Y,b))$, mentre $G(Z,c)$ coincide con $G(Y,b)$, e $q_*(\pi_1(Y,b)) = r_*^{-1}(G(Y,b))$. Nel preordine dei rivestimenti un rivestimento semplicemente connesso, se esiste, è chiaramente il massimo, ed è unico a meno di isomorfismi; è chiamato *rivestimento universale* di X.

6.16. **Costruzione di rivestimenti con un assegnato sottogruppo.** Esistono spazi che pur senza essere semplicemente connessi non hanno rivestimenti non banali. Classico è il seguente esempio.

Si parte dal sottospazio T di $\mathbb{R}^2$ consistente dell'unione di tutti i circoli di raggio $1/n$ centrati nei punti $(1/n, 0)$, per $n = 1, 2, 3, \dots$; si forma poi il cono C su tale spazio, con vertice in $(0, 0, 1)$, cioè si considera

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x(1-t)u\, y = (1-t)v\, z = t;\ t \in [0, 1],\ (u, v) \in T\}.$$

Chiaramente C è contrattile, essendo un cono; si prende poi $X = C \cup (-C)$, con la topologia indotta dalla euclidea di $\mathbb{R}^3$. Chiaramente X è compatto, connesso e localmente connesso per archi; è un po' piú arduo provare che non è semplicemente connesso, ma la cosa è fattibile (il gruppo fondamentale di X ha una struttura con "parole di lunghezza infinita modulo parole di lunghezza finita"); accettarlo. L'unico rivestimento connesso di X è banale; mostriamo cioè che se $p : Y \to X$ è rivestimento, ed Y è connesso, allora p è omeomorfismo. Consideriamo $p^{\leftarrow}(C)$; su esso p induce un rivestimento di C, ed essendo C semplicemente connesso e localmente connesso per archi, tale rivestimento è banale, isomorfo a $C \times \Lambda$, con Λ discreto. Analogamente per $-C$. Sia $b \in p^{\leftarrow}(0)$ un punto della fibra sopra $0 = (0, 0, 0)$; prese le componenti connesse A di $p^{\leftarrow}(C)$, B di $p^{\leftarrow}(-C)$ contenenti b, è facile vedere che $A \cup B$ è omeomorfo ad X mediante p; e chiaramente è connesso per archi.

Qualche condizione ulteriore, oltre alla locale connessione per archi deve quindi essere fornita se si vuole che un dato sottogruppo del gruppo fondamentale sia associato ad un rivestimento. Se $p : (Y, b) \to (X, a)$ è rivestimento, e $\mathcal{U}$ è il ricoprimento di X formato dagli aperti al di sopra dei quali p è banale, si noti che tutti i circuiti con il sostegno in qualche $U \in \mathcal{U}$ si rialzano a circuiti, qualsiasi sia l' origine a cui vengono rialzati. Ne segue che $G(Y, b)$ contiene tutte la classi di circuiti della forma $[\gamma][\alpha][\gamma]^{-1}$, dove γ è cammino in X con origine a, ed $[\alpha]$ è circuito con il sostegno in qualche $U \in \mathcal{U}$. Sia $\pi_1(\mathcal{U}, a)$ il sottogruppo di $\pi_1(X, a)$ generato dalle classi di circuiti come sopra descritto. Si noti che $\pi_1(\mathcal{U}, a)$ è sottogruppo normale di $\pi_1(X, a)$.

Teorema. *Sia X connesso e localmente connesso per archi. Sia a un punto di X, e sia H un sottogruppo di $\pi_1(X, a)$. Esiste allora un rivestimento connesso $p : (Y, b) \to (X, a)$ tale che sia $G(Y, b) = H$ se e solo se esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di X tale che sia $\pi_1(\mathcal{U}, a) \subseteq H$.*

Dimostrazione. La necessità è stata vista prima. Proviamo la sufficienza. Per ricostruire Y a partire da H punto di partenza è il lemma di monodromia in versione forte: se α e β sono cammini di X con origine a, i loro rialzamenti in Y con origine b terminano nello stesso punto se e solo se $[\alpha][\beta]^{-1} \in G(Y, b)$. Ne segue che i punti di Y sono l'insieme delle classi di omotopia di cammini di origine a, modulo la relazione di equivalenza $[\alpha] \asymp [\beta] \overset{\text{def}}{\iff} [\alpha][\beta]^{-1} \in H$. Lasciamo al lettore la verifica del fatto che effettivamente è un'equivalenza. Si noti che se $\langle\alpha\rangle = \langle\beta\rangle$, e $\gamma(0) = \alpha(1) = \beta(1)$, allora $\langle\alpha.\gamma\rangle = \langle\beta.\gamma\rangle$. Indichiamo con $\langle\alpha\rangle$ la classe di equivalenza di $[\alpha]$. Questi sono dunque i punti di Y; la proiezione è $p(\langle\alpha\rangle) = \alpha(1)$. Se $[\alpha]$ è classe di un cammino di origine a, per ogni aperto connesso per archi W di X poniamo

$$\langle\alpha, W\rangle = \{\langle\alpha.\gamma\rangle \in Y : \gamma(0) = \alpha(1),\ \gamma([0, 1]) \subseteq W\};$$

si noti che $p\,(\langle\alpha, W\rangle) = W$; inoltre, se $\langle\beta\rangle \in \langle\alpha, W\rangle$, si ha $\langle\beta, W\rangle = \langle\alpha, W\rangle$: infatti, se $\langle\beta\rangle = \langle\alpha.\gamma\rangle$ si ha anche $\langle\beta.\rho\rangle = \langle(\alpha.\gamma).\rho\rangle$ per ogni caammino ρ con il sostegno in W e con $\beta(1) = \gamma(1)$ come origine. Quindi $\langle\beta, W\rangle \subseteq \langle\alpha, W\rangle$; ma essendo $\langle\alpha\rangle = \langle\beta.\bar{\gamma}\rangle \in \langle\beta, W\rangle$ si ha anche $\langle\alpha, W\rangle \subseteq \langle\beta, W\rangle$. Ne segue che se W è aperto connesso per archi $\langle\alpha, W\rangle$ e $\langle\beta, W\rangle$ sono disgiunti, oppure coincidono.

Introduciamo su Y la topologia in cui gli insiemi $\langle\alpha, W\rangle$, al variare di $[\alpha]$ nelle classi di cammini con origine in a e di W nell'insieme degli aperti di X, formano una base di aperti. Tali insiemi fanno effettivamente una base di aperti: se $\langle\alpha\rangle \in \langle\beta, V\rangle \cap \langle\gamma, W\rangle$, allora $\langle\alpha\rangle = \langle\beta.\rho\rangle = \langle\gamma.\sigma\rangle$, con ρ, σ cammini con il sostegno in V, W rispettivamente; sia U la componente connessa di $V \cap W$ che contiene $\alpha(1)$; si ha allora $\langle\alpha, U\rangle \subseteq \langle\beta, V\rangle \cap \langle\gamma, W\rangle$. Mostriamo ora che

. *Se U è una arco–componente di uno degli aperti di $\mathcal{U}$, allora p è iniettiva su $\langle\alpha, U\rangle$.*

Dimostrazione. Siano ρ, σ cammini in U con origine $\alpha(1)$, con la stessa estremità $\rho(1) = \sigma(1)$. Allora $\langle\alpha.\rho\rangle = \langle\alpha.\sigma\rangle$; infatti $[\alpha.\rho][\alpha, \sigma]^{-1} = [\alpha][\rho][\sigma]^{-1}[\alpha] = [\alpha][\rho.\bar{\sigma}][\alpha]^{-1} \in \pi_1(\mathcal{U}, a) \subseteq H$. □

È ormai evidente che p è rivestimento: è chiaro che p è continua ed aperta, e che per ogni aperto connesso U contenuto in qualche membro di $\mathcal{U}$ l'aperto $p^{\leftarrow}(U)$ è unione disgiunta delle sue arco–componenti, su ciascuna delle quali p induce un omeomorfismo su U stesso. Si pone poi $b = \langle\varepsilon_a\rangle$. Resta da provare che $p_*(\pi_1(Y, b)) = H$, e che Y è connesso. Allo scopo forniamo un'espressione esplicita del rialzamento $\tilde{\alpha}$ di ogni cammino α con origine in b: essa è

$$\tilde{\alpha} : t \mapsto \langle\alpha_t\rangle \quad \text{dove } \alpha_t : [0, 1] \to X \text{ è definito da } \alpha_t(s) = \alpha(ts);$$

in pratica α_t è la restrizione di α all'intervallo $[0,t]$, riportata su $[0,1]$ con il consueto omeomorfismo affine crescente. Che $t \mapsto \langle\alpha_t\rangle$ sia continua è facile da vedere (si noti che $[\alpha_t] = [\alpha_{\bar t}][\alpha_{\bar t t}]$, se $\alpha_{\bar t t} : [0,1] \to X$ indica la restrizione di α all'intervallo di estremi $\bar t$ e t, orientata da $\bar t$ a t, e cioè $\alpha_{\bar t t}(s) = \alpha(\bar t + s(\bar t - t))$, $s \in [0,1]$; fissato un intorno aperto connesso W di $\alpha(\bar t) = \langle\alpha_{\bar t}\rangle$, esiste $\delta_W > 0$ tale che se $|t - \bar t| \le \delta_W$, $t \in [0,1]$, si ha $\alpha(t) \in W$; ne segue $\langle\alpha_t\rangle \in \langle\alpha_{\bar t}, W\rangle$ se $|t - \bar t| \le \delta_W$, $t \in [0,1]$). Inoltre $\alpha_0 = \varepsilon_0$, per cui l'origine di $t \mapsto \langle\alpha_t\rangle$ è b. L'estremità è $\tilde\alpha(1) = \langle\alpha_1\rangle$, ma $\alpha_1 = \alpha$; ne segue $\tilde\alpha(1) = b$ se e solo se $\langle\alpha\rangle = \langle\varepsilon_a\rangle$, equivalentemente $[\alpha] \in H$. □

Sotto quali condizioni X (connesso e localmente connesso per archi) ha un rivestimento semplicemente connesso? Occorre e basta che gli aperti connessi per archi U tali che l'inclusione canonica $i : U \to X$ induce un omomorfismo banale $i_* : \pi_1(U) \to \pi_1(X)$ formino un ricoprimento di X. Tali spazi sono detti *semilocalmente semplicemente connessi.* Il piú facile esempio di spazio che non è semilocalmente semplicemente connesso è lo spazio C citato all'inizio della sezione, unione numerabile dei circoli di centro $(1/n, 0)$ e raggio $1/n$, con $n = 1, 2, 3, \dots$; nessun intorno di 0 ha gruppo fondamentale banale, neanche in C (di fatto, per ogni intorno U di 0 connesso per archi $i_*(\pi_1(U,0))$ è isomorfo a $\pi_1(C,0)$). Se X ha un rivestimento semplicemente connesso X ha anche un rivestimento per ogni classe coniugata di sottogruppi di $\pi_1(X)$.

6.17. **Esercizi.**

Esercizio 2. Tutti gli spazi connessi e localmente connessi per archi. Sia $p : Y \to X$ rivestimento, con Y semplicemente connesso, e sia $G = \mathrm{Aut}(Y|X)$ il gruppo degli automorfismi di rivestimento. Sia $f : X \to X$ continua:

(i) Esistono funzioni $\tilde f : Y \to Y$ che rialzano f, tali cioè che sia $p \circ \tilde f = f \circ p$; e nota una di tali $\tilde f$, tutte le altre sono date dalla formula $\varphi \circ \tilde f$, al variare di $\varphi \in G$.

(ii) Mostrare che se $\tilde f$ rialza f, e $\varphi \in G$, allora anche $\tilde f \circ \varphi$ rialza f; di conseguenza, per ogni $\varphi \in G$ esiste un unico $\rho(\varphi) \in G$ tale che sia $\tilde f \circ \varphi = \rho(\varphi) \circ \tilde f$.

(iii) Fissato un rialzamento $\tilde f$ di f una volta per tutte, si scelgano punti $x_0, x_1 \in X$, $y_0, y_1 \in Y$ in modo che

$$\begin{array}{ccc} (Y, y_0) & \xrightarrow{\tilde f} & (Y, y_1) \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ (X, x_0) & \xrightarrow[f]{} & (X, x_1) \end{array}$$

sia diagramma di spazi puntati. Restano individuati isomorfismi

$$\eta_0 : \pi_1(X, x_0) \to G, \quad \eta_1 : \pi_1(X, x_1) \to G$$

secondo lo schema solito. Descrivere la funzione $\rho : G \to G$ data al numero precedente con gli elementi ora dati.

(iv) Caso particolare $X = \mathbb{S}^1$: cos'è ρ in termini di $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$?

Esercizio 3. Sia $n \ge 2$ intero. Mostrare che ogni funzione continua $h : \mathrm{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{P}(\mathbb{R}^n)$ si rialza ad una funzione continua $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$. Mostrare che se h_* è isomorfismo di gruppi fondamentali, allora g è dispari.

Esercizio 4. Sia $p : (Y, b) \to (X, a)$ rivestimento semplicmente connesso dello spazio X, connesso e localmente connesso per archi. Sulla fibra $Y_a = p^{\leftarrow}(a)$ ci sono allora due azioni di $\pi_1(X, a)$: l'azione destra con il rialzamento di cammini, e quella sinistra come gruppo degli automorfismi di rivestimento. Mostrare che le due azioni coincidono se e solo se $\pi_1(X, a)$ è commutativo.

6.18. **Applicazione del criterio del rialzamento.** Come applicazione del criterio del rialzamento, dimostriamo il seguente risultato:

. *Sia $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^2$ funzione continua, con $n \ge 2$. Esiste allora una coppia di punti antipodali $a, -a \in \mathbb{S}^n$ tali che sia $f(a) = f(-a)$.*

Dimostrazione. Se cosí non fosse, si potrebbe definire una funzione continua $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^1$ ponendo $g(x) = (f(x) - f(-x))/|f(x) - f(-x)|$; si noti che g è dispari, $g(-x) = -g(x)$. Mostreremo che una tale funzione non può esistere. Infatti essa induce una funzione continua $h : \mathrm{P}\,\mathbb{R}^n \to \mathrm{P}(\mathbb{R}^1)(= \mathbb{S}^1)$. Allora, $h_* : \pi_1(\mathrm{P}\,\mathbb{R}^n) \to \pi_1(\mathrm{P}(\mathbb{R}^1))$ deve essere banale, dato che $\pi_1(\mathrm{P}\,\mathbb{R}^n)$ è ciclico di ordine 2 mentre $\pi_1(\mathrm{P}(\mathbb{R}^1))$

è ciclico infinito. Il criterio del rialzamento mostra che esiste $\tilde{h} : \mathrm{P}\,\mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^1$ che rialza h, tale cioè che $p \circ \tilde{h} = h$, se $p : \mathbb{S}^1 \to \mathrm{P}\,\mathbb{R}^1$ è la proiezione canonica. Se $q : \mathbb{S}^n \to \mathrm{P}\,\mathbb{R}^n$ è l'altra proiezione canonica, si ha $p \circ \tilde{h} \circ q = h \circ q$, ed $h \circ q = p \circ g$; ne segue che si ha $\tilde{h} \circ q(x) = g(x)$ per ogni $x \in x$, oppure $\tilde{h} \circ q(x) = -g(x)$ per ogni $x \in SS^n$. Per connessione, solo una delle due eventualità si presenta; si ha cioè $g(x) = \tilde{h}(q(x))$ oppure $g(x) = -\tilde{h}(q(x))$ per ogni $x \in \mathbb{S}^n$, e poiché q è pari, g deve essere pari, contraddizione. □

Osservazione. Il teorema di Borsuk–Ulam, non dimostrabile con sole tecniche di gruppo fondamentale, implica che se $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ è continua e dispari, allora g non è nullomotopa, in particolare è suriettiva.

6.19. **Rivestimenti di un gruppo topologico.**

Proposizione. *Sia G gruppo topologico connesso e localmente connesso per archi, e sia $p : \Gamma \to G$ rivestimento di G. Sia $e \in p^{-1}(1)$ elemento della fibra dell'elemento neutro di G. Esiste allora un'unica moltiplicazione su Γ che rende Γ gruppo topologico, con e come elemento neutro, e tale che p sia omomorfismo di gruppi.*

Dimostrazione. Sia $\mu : G \times G \to G$ la moltiplicazione di G; sappiamo che $p \times p : \Gamma \times \Gamma \to G \times G$ è rivestimento; ed esiste $\nu : \Gamma \times \Gamma \to \Gamma$ che rialza $\mu \circ (p \times p)$ con valore e in (e, e) se e solo se $[p(\alpha(t))p(\beta(t)] \in G(\Gamma, e)$ per ogni coppia di circuiti α, β in Γ basati ad e. Ora, sia $[p(\alpha(t))]$ che $[p(\beta(t))]$ stanno in $G(\Gamma, e)$; e ricordando che il prodotto puntuale $p(\alpha(t))p(\beta(t))$ ha la stessa classe di omotopia di $[p(\alpha(t))]\ [p(\beta(t)]$, ed essendo $G(\Gamma, e)$ sottogruppo, si conclude che ν esiste e che inoltre si ha $\nu(e, e) = e$; da quest'ultima relazione si ha che $x \mapsto \nu(e, x)$ ed $x \mapsto \nu(x, e)$, che sono entrambi rialzamenti della funzione $x \mapsto p(x)$, endomorfismi del rivestimento, coincidono con e per $x = e$, e quindi sono l'identità su Γ, per l'unicità; in altre parole, e è elemento neutro per ν. Allo stesso modo si mostra che la funzione $x \mapsto x^{-1}$ si rialza a $\iota : \Gamma \to \Gamma$, in modo che e resti unito nel rialzamento; si ha poi $\nu(x, \iota(x)) = \nu(\iota(x), x) = e$, dato che costanti si rialzano a costanti. L'associatività di ν si prova con l'unicità del rialzamento applicata alle funzioni $(x, y, z) \mapsto \mu(\mu(p(x), p(y)), p(z))$ e $\mu(p(x), \mu(p(y), p(z)))$ di $\Gamma \times \Gamma \times \Gamma$ in G.

□

6.20. **Gruppo fondamentale di $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.** Il gruppo fondamentale $\pi_1(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}), 1)$ è ovviamente $\mathbb{Z}$, con la classe di omotopia di $t \mapsto e^{2\pi i t}$ come generatore. Il gruppo fondamentale $\pi_1(\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}), 1)$ è invece ciclico di ordine 2, ed ha per generatore ogni rotazione di 2π attorno ad un asse, cioè ad esempio il circuito

$$t \mapsto \begin{bmatrix} \cos(2\pi t) & -\sin(2\pi t) & 0 \\ -\sin(2\pi t) & \cos(2\pi t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

infatti l'omomorfismo suriettivo dalla sfera dei quaternioni $\mathbb{S}^3$ su $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ descritto in ?? è chiaramente il rivestimento universale di $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, essendo $\mathbb{S}^3$ semplicemente connesso; il circuito sopra scritto si rialza su $\mathbb{S}^3$ ad un cammino che congiunge 1 con -1, il rialzamento essendo infatti $p(t) = \cos(\pi t) + \sin(\pi t)k$, dove $k = (0, 0, 0, 1)$. Ciò ha interessanti conseguenze che saranno discusse poi. Per ora determiniamo il gruppo fondamentale di $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ con $n \geq 4$. Tale gruppo opera sulla sfera $\mathbb{S}^{n-1}$; ed $\mathrm{SO}_{n-1}(\mathbb{R})$ può essere identificato con il sottogruppo dei $T \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ che hanno il polo nord $\nu = (0, \ldots, 0, 1)$ come punto unito. Si pone poi $A = \mathbb{S}_{n-1} - \{-\nu\}$, $B = \mathbb{S}_{n-1} - \{\nu\}$, nonché:

$$U = \{T \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R});\ T(\nu) \in A\}; \qquad V = \{T \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R});\ T(\nu) \in B\}$$

È chiaro che U e V sono aperti in $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ e che la loro unione è $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ (e si può anche osservare che V è esattamente il complementare di $\mathrm{SO}_{n-1}(\mathbb{R})$ in $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, nell'identificazione prima fatta). Mostriamo che c'è un omeomorfismo da $A \times \mathrm{SO}_{n-1}(\mathbb{R})$ ad U, definito nel modo seguente: per ogni $u \in A$ sia $S_u : R^n \to \mathbb{R}^n$ l'elemento di $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ definito come l'identità se $u = \nu$, altrimenti come l'elemento che è la rotazione nello spazio 2$-$dimensionale $E(u)$ generato da (ν, u) che associa ν ad u, e che è l'identità sul supplementare ortogonale di $E(u)$. Se $u = (u_1, \ldots, u_n)$ si dimostra facilmente che S_u ha matrice che ha $\delta_{jk} - u_j u_k/(1+u_n)$ come elemento di posto (j, k) se $j, k < n$, ha $u_1, \ldots, u_m$ come ultima colonna, ed ha $-u_1, \ldots, -u_{n-1}, u_m$ come ultima riga (vedi poi). In ogni caso $u \mapsto S_u$ è continua da A ad $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. Ne segue che la funzione $(u, T) \mapsto S_u T$ è un omeomorfismo da $A \times \mathrm{SO}_{n-1}(\mathbb{R})$ ad U: infatti è continua ed ha $G \mapsto (G(\nu), S_{G(\nu)^{-1}} G)$ come inversa; tale funzione induce un omeomorfismo da $(A \cap B) \times \mathrm{SO}_{n-1}(\mathbb{R})$ su $U \cap V$. Ne segue, essendo $A \cap B$ semplicemente connesso (è omeomorfo ad $\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$, ed $n - 1 \geq 3$) che l'inclusione canonica di $U \cap V$ in U induce un isomorfismo $j_1 : \pi_1(U \cap V) \to \pi_1(U)$. Analogo discorso è valido per V: sia ρ l'elemento di $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ definito da $\rho(x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-2}, -x_{n-1}, -x_n)$; si osservi che si ha $\rho(\nu) = -\nu$ e che $\rho^2 = 1_n$ (sono queste le uniche cose che ci servono in ρ). Si ha allora un omeomorfismo di $B \times \mathrm{SO}_{n-1}(\mathbb{R})$ in V definito da $(u,T) \mapsto \rho S_{\rho(u)} T$ (ha per inversa $S \mapsto S^{-1}_{\rho(S(u))}\rho S$), che induce un omeomorfismo di $(A \cap B) \times \mathrm{SO}_{n-1}(\mathbb{R})$ su $U \cap V$, ed ancora mostra che l'omomorfismo di gruppi $j_2 : \pi_1(U \cap V) \to \pi_1(V)$ è un isomorfismo. Si dimostra allora che nel diagramma di Seifert–Van Kampen tutti i morfismi sono isomorfismi, in particolare $k_1 : \pi_1(U) \to \pi_1(\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}))$, morfismo associato all'inclusione canonica di U in $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ è un isomorfismo. Ma l'inclusione canonica di $\pi_1(\mathrm{SO}_{n-1}(\mathbb{R})$ in U induce chiaramente in isomorfismo di gruppo fondamentali. Si è dimostrato

. *Se $n \geq 4$, l'inclusione di $\mathrm{SO}_{n-1}(\mathbb{R})$ in $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ induce un isomorfismo di gruppi fondamentali; di conseguenza, $\pi_1(\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}))$ è ciclico di ordine 2 per $n \geq 3$.*

Mostriamo ora che la matrice di S_u è come sopra detto. Una base ortonormale per $E(u)$ ha come primo vettore $\vec{\nu} = e_n$, e come secondo

$$v = \frac{u - (u|e_n)e_n}{|(u - (u|e_n)e_n)|} = \frac{(u_1, \dots, u_{n-1}, 0)}{|(u_1, \dots, u_{n-1}, 0)|} = \frac{(u_1, \dots, u_{n-1}, 0)}{\sqrt{1-u_n^2}}.$$

Si ha $u = u_n e_n + \sqrt{1-u_n^2}\,v$, e quindi $S_u(v) = -\sqrt{1-u_n^2}\,e_n + u_n v$. Ogni e_j, con $j = 1, \dots, n-1$ si decompone in $(e_j|v)v$, componente secondo $E(u)$, e la sua ortogonale $e_j - (e_j|v)v$; si ha quindi:

$$\begin{aligned} S_u(e_j) =& e_j - (e_j|v)v + (e_j|v)S_u(v) = e_j - (e_j|v)v + (e_j|v)(u_n v - \sqrt{1-u_n^2}\,e_n) = \\ & e_j + (e_j|v)(u_n - 1)v - (e_j|v)\sqrt{1-u_n^2}\,e_n. \end{aligned}$$

Si noti che $(e_j|v) = u_j/\sqrt{1-u_n^2}$ e quindi $(e_j|v)(u_n - 1) = -u_j\sqrt{1-u_n^2}/(1+u_n)$ e che inoltre si ha $v = \sum_{k=1}^{n-1} u_k e_k/\sqrt{1-u_n^2}$; ne segue che è

$$S_u(e_j) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\delta_{jk} - \frac{u_j u_k}{1+u_n}\right)e_k - u_j e_n,$$

e la conclusione è raggiunta.

6.21. **Gruppo fondamentale di $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$ e di $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$.** In analogia a quanto fatto al numero precedente, ma in modo anche più semplice, si dimostra che

Proposizione. *Per ogni $n \geq 1$ il gruppo $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$ è semplicemente connesso. Il gruppo fondamentale di $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ è quindi isomorfo a $\mathbb{Z}$.*

Ricordiamo che $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ è omeomorfo (ed isomorfo come gruppo) a $\mathbb{S}^3$ e quindi è semplicemente connesso. Si deve poi descrivere un omeomorfismo di $A \times \mathrm{SU}_{n-1}(\mathbb{C})$ su $U = \{T \in \mathrm{SU}_n(\mathbb{C}); T(e_n) \neq -e_n\}$; ora la rotazione che a e_n associa $u \in S$ (S sfera dei versori di $\mathbb{C}^n$) si calcola come prima, con la differenza che il prodotto scalare essendo hermitiano si deve scrivere $\sqrt{1-|u_n|^2}$ anziché $\sqrt{1-u_n^2}$; inoltre $(e_j|v) = \bar{u}_j$ e non u_j, ed $S_u(v) = -\sqrt{1-|u_n|^2}\,e_n + \bar{u}_n v$. Si trova una matrice che ha $\delta_{jk} - u_j\bar{u}_k/(1+\bar{u}_n)$ come elementi per $j,k < n$, ha u come ultima colonna, ed ha

$$\left(-\frac{1+u_n}{1+\bar{u}_n}u_1 \quad \cdots\cdots - \frac{1+u_n}{1+\bar{u}_n}u_{n-1} \quad u_n\right)$$

come ultima riga.

7. Appendice di topologia generale

7.1. **Funzioni perfette e funzioni proprie.**

Definizione. Diciamo *perfetta* una funzione continua $f : X \to Y$ tra spazi topologici che sia continua, chiusa, ed a fibre compatte. Una funzione continua $f : X \to Y$ tra spazi topologici si dice *propria* se l'antiimmagine $f^{\leftarrow}(K)$ è compatta, per ogni compatto K di Y.

Proposizione. *Ogni funzione perfetta è propria.*

Dimostrazione. Sia K compatto di Y, sia $(F_\alpha)_{\lambda\in\Lambda}$ famiglia di chiusi di X tali che sia $f^{\leftarrow}(K) \cap \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda\right) = \emptyset$; mostriamo che esiste un sottoinsieme finito A di Λ tale che $f^{\leftarrow}(K) \cap \left(\bigcap_{\lambda\in A} F_\lambda\right) = \emptyset$, il che dimostra le compattezza di $f^{\leftarrow}(K)$. Se così non fosse, si avrebbe $f\left(K\left(\bigcap_{\lambda\in A} F_\lambda\right)\right) \neq \emptyset$, per ogni sottoinsieme finito A di Λ; ma allora $K \cap f\left(\bigcap_{\lambda\in A} F_\lambda\right) \neq \emptyset$ per ogni sottoinsieme finito A di Λ, e quindi, essendo gli $f\left(\bigcap_{\lambda\in A} F_\lambda\right)$ chiusi in Y, e K compatto, esisterebbe un $y \in K$ che sta anche in $f\left(\bigcap_{\lambda\in A} F_\lambda\right)$, per ogni sottoinsieme finito A di Λ. Ma allora $f^{\leftarrow}(y) \cap \left(\bigcap_{\lambda\in A} F_\lambda\right) \neq \emptyset$, per ogni sottoinsieme finito A di Λ, e pertanto, essendo $f^{\leftarrow}(y)$ compatto, si ha $f^{\leftarrow}(y) \cap \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda\right) \neq \emptyset$. $\square$

Non necessariamente una funzione propria è perfetta.

Esempio 1. Sia S insieme di cardinalità piú che numerabile; muniamolo della topologia in cui tutti i punti sono isolati, salvo un punto $a \in S$ i cui intorni sono i conumerabili di S contenenti a. Sia Y tale spazio; X sia S con la topologia discreta, ed $f : X \to Y$ sia l'identità di S. Si vede subito che in Y un sottoinsieme è compatto se e solo se è finito; ne segue che f è propria, ma chiaramente non è chiusa, e quindi non è perfetta.

Ciò che si riesce a provare è

. *Se $f : X \to Y$ è propria, Y è di Haudorff, ed F è chiuso in X, allora $f(F) \cap K$ è chiuso in K, per ogni compatto K di Y. Se Y, separato, è metrizzabile, oppure localmente compatto, allora le funzioni proprie sono perfette (in generale, basta che Y sia $k-$spazio, si veda [Kelley] o [Dugundji]).*

La dimostrazione si lascia come esercizio; nel caso metrizzabile, ricordare che una successione convergente con il suo limite forma un compatto.

Esercizio 2. Sia D aperto connesso limitato di $\mathbb{R}^n$, e sia $\varphi : \bar{D} \to \mathbb{R}^n$ funzione continua tale che φ è omeomorfismo locale in ogni punto di D. Inoltre φ si estenda ad una funzione continua $\varphi : \bar{D} \to \mathbb{R}^n$ in modo tale che $\varphi_{|\,\mathrm{fr}(D)}$ è iniettiva, e $\varphi(\mathrm{fr}(D)) = \mathrm{fr}(\varphi(D))$. Allora φ è omeomorfismo di D su $\varphi(D)$ (e di $\bar{D}$ su $\varphi(\bar{D}) = \overline{\varphi(D)}$).

Esercizio 3. Sia X spazio compatto e di Hausdorff connesso, e sia $f : X \to X$ omeomorfismo locale. Mostrare che allora f è suriettivo. Se poi X è anche localmente connesso per archi, ed il gruppo fondamentale $\pi_1(X, a)$ è finito, allora f è un omeomorfismo. In particolare ciò accade se X è varietà differenziale connessa, ed $f : X \to X$ è di classe C^1 con differenziale mai singolare.

Qui ci saranno esercizi e complementi

8. Introduzione all'omologia singolare

8.1. Sia p intero, $p \geq 1$; $I^p = [0,1]^p$ è il $p-$*cubo standard*; se $p = 0$, I^0 si identifica con il singolo $\{0\}$.

Definizione. Sia X spazio topologico. Un $p-$cubo singolare di X è un' applicazione continua

$$c : I^p \to X$$

(L' aggettivo singolare è dovuto al fatto che a c non si richiede di essere omeomorfismo e quindi l'immagine di c è di solito molto diversa da un cubo).

Uno $0-$cubo è identificabile (ed effettivamente identificato) con un punto dello spazio X. Un $1-$cubo è ad ogni effetto un *cammino* in X. Un $2-$cubo è una funzione dal quadrato I^2 nello spazio X, pensabile come una subsuperficie parametrica compatta di X, eccetera. Il $p-$cubo standard he $2p$ *facce*, $(p-1)-$cubi singolari del $p-$cubo standard:

Definizione. Sia p intero, $p \geq 1$; sia j intero, $1 \leq j \leq p$, $\alpha = 0$ oppure $\alpha = 1$. La (j, α)-esima faccia del p-cubo standard I^p è

$$\epsilon^p_{j,\alpha} : I^{p-1} \to I^p$$

definita da $\epsilon^p_{j,\alpha}(\xi_1, \ldots, \xi_{p-1}) = (\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \alpha, \xi_j, \ldots, \xi_{p-1})$. Corrispondentemente, la $(j, \alpha)-$esima faccia del $p-$cubo singolare $c : I^p \to X$ è il $(p-1)-$cubo $c \circ \epsilon^p_{j,\alpha}$.

La faccia $\varepsilon^p_{j,0}$ è chiamata anche faccia *frontale* $j-esima$, quella con $\alpha = 1$ *retrofaccia* $j-$esima. Ad esempio, un $1-$ cubo singolare $c : I \to X$, cammino da $c(0)$ a $c(1)$, ha due facce: la frontale è lo $0-$cubo origine $c(0)$, la retrofaccia lo $0-$cubo estremità $c(1)$. Un $2-$cubo singolare $c : I^2 \to X$ ha 4 facce che ora descriviamo. Le $2-$facce sono ottenute: la frontale restringendo c alla base del quadrato; la retrofaccia restringendo c alla sommità. Per le $1-$facce, la frontale è la restrizione al lato sinistro, la retrofaccia al lato destro.

Vogliamo ora definire un *bordo* per ogni $p-$cubo singolare. Tale bordo deve grosso modo potersi pensare come la "frontiera" del cubo singolare; i vari pezzi devono avere dei segni, che sono suggeriti dalla formula di Stokes. In ogni caso il bordo di un $p-$cubo singolare non è un $(p-1)-$cubo singolare, ma una $(p-1)-$*catena*, combinazione lineare formale di $(p-1)-$cubi singolari.

8.2.

Definizione. Sia X spazio topologico, $p \geq 0$ intero. Una $p-$*catena singolare, a coefficienti interi*, è una combinazione lineare formale finita

$$\sum_{r=1}^{N} \lambda_r c_r \qquad (\lambda_r \in \mathbb{Z})$$

di $p-$cubi singolari,

Le $p-$catene singolari sono dunque gli elementi dello $\mathbb{Z}-$modulo (=gruppo abeliano) libero che ha per base i $p-$cubi singolari; indichiamo tale gruppo abeliano con il simbolo $Q_p(X; \mathbb{Z})$, o semplicemente $Q_p(X)$. Le $0-$catene singolari sono gli elementi del gruppo abeliano libero $Q_0(X)$ generato da X stesso (ma $Q_0(X)$ non ha alcuna topologia, è solo un gruppo). Una $1-$catena singolare è pensabile come un insieme finito di cammini $c_1, \ldots, c_N$, ciascuno contato con una molteplicità $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$. Per completare, si pone $Q_p(X) = 0$ per $p < 0$. Si definisce poi un omomorfismo

$$\partial^p : Q_p(X) \to Q_{p-1}(X)$$

detto *bordo*, nel modo seguente: esso è nullo se $p \leq 0$; altrimenti $\partial^p : Q_p(X) \to Q_{p-1}(X)$ viene definito sui p-cubi singolari con la formula:

$$\partial^p(c) = \sum_{(j,\alpha) \in \mathbf{p} \times \{0,1\}} (-1)^{j+\alpha} c \circ \epsilon^p_{j,\alpha} = \sum_{j \in \mathbf{p}} (-1)^{j+1} \left(c \circ \varepsilon^p_{j,1} - c \circ \varepsilon^p_{j,0} \right) = \sum_{j \in \mathbf{p}} (-1)^j \left(\partial^p_{j,0} c - \partial^p_{j,1} c \right)$$

dove $\epsilon^p_{j,\alpha}$ è l'operatore *faccia* (j, α)-*esima* prima definito; si è anche posto $\partial^p_{j\alpha}(c) = c \circ \circ \varepsilon^p_{j,\alpha}$. Per linearità l'operatore bordo viene poi esteso alle catene.

8.3. Verifichiamo ora che $(Q_\bullet X, \partial)$ è un *complesso di catene*:

Teorema. *$\partial^{p-1} \circ \partial^p = 0$, per ogni p intero.*

Proviamo anzitutto per un $2-$cubo $c : I^2 \to X$; si ha

$$\partial^2 c = (-1)^{1+1}\,(c(1,\cdot) - c(0,\cdot)) + (-1)^{2+1}\,(c(\cdot,1) - c(\cdot,0)) = c(\cdot,0) + c(1,\cdot) - c(0,\cdot) - c(\cdot,1).$$

Applicando ora ∂^1 si ottiene la $0-$catena:

$$(c(1,0) - c(0,0)) + (c(1,1) - c(1,0)) - (c(0,1) - c(0,0)) - (c(1,1) - c(0,1)) = 0.$$

Vediamo ora il caso generale.

Dimostrazione. Si prova prima la formula: se $p \geq 2$, $1 \leq j \leq k \leq p-1$, $\alpha, \beta \in \{0,1\}$ si ha

$$\epsilon^p_{j,\alpha} \circ \epsilon^{p-1}_{k,\beta} = \epsilon^p_{k+1,\beta} \circ \epsilon^{p-1}_{j,\alpha} \quad \text{cioè} \quad \partial^{p-1}_{k,\beta} \circ \partial^p_{j,\alpha} = \partial^{p-1}_{j,\alpha} \circ \partial^p_{k+1,\beta}$$

per cui:

$$\partial_{p-1}(\partial_p(c) = \partial_{p-1}\left(\sum_{(j,\alpha)\in \mathbf{p}\times\{0,1\}} (-1)^{j+\alpha}\partial^p_{j,\alpha} c\right)$$

$$= \sum_{(j,\alpha)\in \mathbf{p}\times\{0,1\}} (-1)^{j+\alpha}\left(\sum_{(k,\beta)\in (\mathbf{p-1})\times\{0,1\}} (-1)^{k+\beta}\partial^{p-1}_{k,\beta} \circ \partial^p_{j,\alpha} c\right)$$

scrivendo quest'ultima come un'unica somma, e spaccandola poi nella somma dei termini con $j \leq k$ e gli altri, si ottiene per $\partial_{p-1}(\partial_p(c))$:

$$\sum\left\{(-1)^{j+k+\alpha+\beta}\partial^{p-1}_{k,\beta} \circ \partial^p_{j,\alpha} c : j \leq k, 1 \leq j \leq p, 1 \leq k \leq p-1, \alpha, \beta \in \{0,1\}\right\} +$$
$$+ \sum\left\{(-1)^{j+k+\alpha+\beta}\partial^{p-1}_{k,\beta} \circ \partial^p_{j,\alpha} c : j > k, 1 \leq j \leq p, 1 \leq k \leq p-1, \alpha, \beta \in \{0,1\}\right\}$$

Nella prima somma si ha $\partial^{p-1}_{k,\beta} \circ \partial^p_{j,\alpha} = \partial^{p-1}_{j,\alpha} \circ \partial^p_{k+1,\beta}$. Posto in tale somma $k+1 = r$,$j = s$, r varia tra 2 e p, s tra 1 e $p-1$ (dovendo essere $s = j \leq k$, con $k \in \mathbf{p-1}$) per cui la prima somma diviene

$$-\sum\left\{(-1)^{r+s+\alpha+\beta}\partial^{p-1}_{s,\alpha} \circ \partial^p_{r,\beta} c : 2 \leq r \leq p, 1 \leq s \leq p-1, \alpha, \beta \in \{0,1\}\right\}$$

somma che si cancella esattamente con la seconda sopra scritta, visto che in essa j, dovendo essere strettamente maggiore di k, varia tra 2 e p. □

8.4. Da quanto visto, $(Q_\bullet X, \partial)$ è un complesso (di *catene*, visto che ∂ ha grado -1). Per avere la "giusta" omologia dobbiamo però eliminare i cubi *degeneri*, quelli che solo apparentemente sono oggetti della giusta dimensione; un *p*-cubo $c : I^p \to X$ si dice degenere se esiste k, con $1 \leq k \leq p$, tale che $c \circ \hat{\pi}_k = c$, dove $\hat{\pi}_k : I^p \to I^p$, definita da $\hat{\pi}_k(t_1, \ldots, t_p) = (t_1, \ldots, t_{k-1}, 0, t_{k+1}, \ldots, t_p)$ è la proiezione sulla faccia $(k,0)$-esima (tale definizione presuppone $p \geq 1$, uno 0-cubo non è mai degenere, per definizione). Una catena è detta degenere se è combinazione lineare di cubi tutti degeneri; il sottogruppo additivo di Q_pX costituito dalle catene degeneri si indica con D_pX; si vede subito che:

Proposizione. *$\partial_p(D_pX) \subseteq D_{p-1}X$; quindi $(D_\bullet X, \partial)$ è un sottocomplesso di $(Q_\bullet X, \partial)$.*

Dimostrazione. Se $c \circ \hat{\pi}_k = c$, tutte le facce di c diverse dalla k-esima sono degeneri; la faccia $(k,0)$-esima di c coincide con la faccia $(k,1)$-esima e si cancella con essa. □

Il complesso quoziente $(C_pX)_{p\in\mathbb{Z}}$,dove $C_pX = Q_pX/D_pX$, per ogni $p \in \mathbb{Z}$, è detto *complesso delle catene cubiche singolari non degeneri, a coefficienti interi*. Tale complesso ha un'omologia, che è detta *omologia singolare (cubica), a coefficienti interi* di X,

$$H_p(X,\mathbb{Z}) = Z_p(X,\mathbb{Z})/B_p(X,\mathbb{Z});$$

$Z_p(X,\mathbb{Z}) = \text{Ker}\ \partial_p$ è lo spazio dei *p-cicli*, $B_p(X,\mathbb{Z}) = \partial_{p+1}(C_{p+1}(X,\mathbb{Z}))$ è quello dei *p-bordi*.

Come già detto una 1-catena $c = \sum_{r=1}^N \lambda_r c_r$ può essere pensata come una N-pla di cammini, ciascun cammino c_r contato con una *molteplicità* λ_r; il bordo ∂c è $\partial c = \sum_{r=1}^N \lambda_r(c_r(1) - c_r(0))$; e questa espressione è nulla in C_0X, cioè c è un 1-ciclo, se e solo se raccogliendo in essa i punti che vi figurano il loro coefficiente risulta nullo: in altre parole, per ogni $x \in X$ che sia origine od estremità di uno dei cammini c_r si ha $\sum\{\lambda_r : c_r(1) = x\} = \sum\{\lambda_r : c_r(0) = x\}$ che può essere interpretata così : c è ciclo se e solo se la somma delle molteplicità dei cammini che concorrono in un nodo x di c è pari alla somma delle molteplicità di quelli che ne escono (ricordare i principi di Kirchoff sulle correnti!). Calcoliamo $H_\bullet(\{*\})$, dove $\{*\}$ è lo spazio formato da un singolo punto $*$. Per $p > 0$ si ha $Q_p\{*\} = D_p\{*\}$, quindi $H_p\{*\} = 0$ per $p > 0$; esiste poi un unico 0-cubo non singolare, e poichè $\partial_1(Q_1X) = 0$, si ha $Q_0X = C_0X \cong \mathbb{Z}$; quindi $H_0X \cong \mathbb{Z}$. Se non avessimo eliminato i cubi singolari, essendo $Q_pX \cong \mathbb{Z}$ e $\partial_p = 0$ per ogni $p > 0$ si sarebbe ottenuto $H_pX \cong \mathbb{Z}$ per $p \geq 0$, chiaramente non la "giusta " omologia. A titolo di esercizio, e per cominciare ad acquisire sensibilità sull'omologia singolare dimostriamo:

Lemma. *Se X è connesso per archi (e non vuoto!) allora H_0X è isomorfo a $\mathbb{Z}$; più precisamente, se X è connesso per archi l'*aumentazione *$\varepsilon : C_0X \to \mathbb{Z}$ definita da $\varepsilon\left(\sum_{r=1}^N \lambda_r x_r\right) = \sum_{r=1}^N \lambda_r$ ha come nucleo esattamente B_0X, e quindi induce un isomorfismo di H_0X su $\mathbb{Z}$ (si osservi che è $C_0X = Z_0X$)*

Dimostrazione. Se $c = \sum_{r=1}^N \lambda_r c_r$ è una 1-catena, certamente $\varepsilon(\partial c) = \varepsilon\left(\sum_{r=1}^N \lambda_r(c_r(1) - c_r(0))\right) = \sum_{r=1}^N \lambda_r - \sum_{r=1}^N \lambda_r = 0$ (e ciò anche se X non è connesso per archi), per cui $\mathrm{Ker}(\varepsilon) \supseteq B_0X$; se lo spazio contiene un solo punto non c'è altro da dire; se poi $\sum_{r=1}^N \lambda_r = 0$, con i λ_r interi, dati $x_1, \ldots, x_r \in X$ si prende ad arbitrio $a \in X$ e per ogni r un cammino non costante c_r di origine a ed estremità x_r (tale cammino di certo esiste se X ha più di un punto); la 1-catena $\sum_{r=1}^N \lambda_r c_r$ ha per bordo $\sum_{r=1}^N \lambda_r(c_r(1) - c_r(0)) = \sum_{r=1}^N \lambda_r c_r(1) - \left(\sum_{r=1}^N \lambda_r\right) a = \sum_{r=1}^N \lambda_r x_r$; ciò prova che è $\mathrm{Ker}(\varepsilon) \subseteq B_0X$ □

8.5. **Funtorialità.** Se $f : X \to Y$ è continua, si ha $f \circ c \in Q_pY$ per ogni $c \in Q_pX$; inoltre $f \circ c \in D_pY$ se $c \in D_pX$; posto $f_{*p}(c) = f \circ c$ per linearità resta definito un omomorfismo $f_{\#p} : Q_pX \to Q_pY$ che induce un omomorfismo, ancora indicato $f_{\#p}$ di C_pX in C_pY. E' immediato vedere che $\partial(f(c)) = f(\partial c)$, e cioè che $f_\# : C_\bullet X \to C_\bullet Y$ è un morfismo di complessi (di grado 0). Se $g : Y \to Z$ è un'altra funzione continua si vede immediatamente che $(g \circ f)\# = g_\# \circ f_\#$ cioè in tal modo si ha un funtore covariante dalla categoria degli spazi topologici a quella dei complessi di catene singolari. La condizione $\partial_Y \circ f_\# = f_\# \circ \partial_X$ implica che è $f_{\#p}(B_pX) \subseteq B_pY$, e quindi viene indotto un morfismo $f_{*p} : H_pX \to H_pY$. Si è alfine definito il funtore covariante *omologia singolare*, dalla categoria degli spazi topologici a quella dei gruppi abeliani graduati, $X \to H_\bullet X$, $f \to f_*$. Si noti che l'aumentazione è esattamente l'omomorfismo indotto a livello 0 tra $C_0X = H_0X$ e $C_0(\{*\}) = H_0(\{*\}) = \mathbb{Z}$, dove $(\{*\})$ è lo spazio formato da un solo punto.

Si osservi anche:

Proposizione. *Se uno spazio X è unione disgiunta di una famiglia $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ di suoi aperti, e per ogni $\lambda \in \Lambda$ $i_\lambda : U_\lambda \to X$ è l'inclusione canonica, si hanno isomorfismi*

$$\oplus_\Lambda i_{\#\lambda} : \bigoplus_\Lambda C_\bullet U_\lambda \to C_\bullet X \qquad \oplus_\Lambda\, i_{*\lambda} : \bigoplus_\Lambda H_\bullet U_\lambda \to H_\bullet X.$$

Dimostrazione. Immediata: basta osservare che l'immagine di un cubo, essendo connessa, è contenuta in qualche U_λ. □

Se $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ è la famiglia delle arco-componenti di X la stessa argomentazione prova che si hanno ancora isomorfismi

$$\oplus_\Lambda i_{\#\lambda} : \bigoplus_\Lambda C_\bullet X_\lambda \to C_\bullet X \qquad \oplus_\Lambda\, i_{*\lambda} : \bigoplus_\Lambda H_\bullet X_\lambda \to H_\bullet X,$$

indotti dalle inclusioni canoniche $i_\lambda : X_\lambda \to X$.

8.6. **Relazione tra π_1 ed H_1.** Siano c_1, c_2 sono cammini nello spazio topologico X che individuano lo stesso elemento di Π_1X, cioè c_1, c_2 hanno la stessa origine e lo stesso estremo, ed inoltre c'è fra essi un'omotopia $h : [0,1] \times [0,1] \to X$ ad estremi fissi. Pensando ad h come ad un $2-$cubo si ha $\partial^2 h = c_1 - c_2 +$ (cubi degeneri). Ne segue che si può definire una funzione dal gruppoide dei cammini di X a C_1X/B_1X, con la posizione $[c] \mapsto c + B_1X$. Tale funzione è morfismo:

Lemma. *Se c_1, c_2 sono cammini in X con $c_1(1) = c_2(0)$, esiste un $2-$cubo singolare $h : I^p \to X$ tale che $c_1.c_2 = c_1 + c_2 - \partial^1 h +$* (cubo degenere).

Dimostrazione. Definiamo h continua sulla frontiera di $[0,1] \times [0,1]$ ponendo:

$$\begin{aligned} h(x_1, 0) &= c_1.c_2(x_1) \qquad h(1, x_2) = c_2(1) \\ h(0, x_2) &= c_1(x_2) \qquad h(x_1, 1) = c_2(x_1) \quad \text{se}\, x_1, x_2 \in [0,1] \end{aligned}$$

Poichè $(((c_1.c_2)(\varepsilon_{c_2(1)}).c_2^{-1})c_1^{-1}$ è nullomòtopo in X, esiste $h : [0,1] \times [0,1] \to X$ che prolunga con continuità la funzione appena definita sul bordo di $[0,1] \times [0,1]$; in ogni caso è facile dare un'espressione esplicita per h, ponendo

$$h(x_1, x_2) = \begin{cases} c_1(2x_1 + x_2), & \text{se } 2x_1 + x_2 \leq 1 \\ c_2((2x_1 + x_2 - 1)/(1 + x_2)), & \text{se } 2x_1 + x_2 \geq 1 \end{cases}$$

poichè $\partial_1 h = \varepsilon_{c_2(1)} - c_1 - c_2 + c_1.c_2$, la conclusione è raggiunta. □

Per ogni fissato $a \in X$ si ha quindi un morfismo $hw : \pi_1(X,a) \to H_1X$; essendo H_1X abeliano, il nucleo di hw contiene il derivato di $\pi_1(X,a)$; il teorema di Hurewicz asserisce che tale nucleo è esattamente il derivato.

. Teorema di Hurewicz *Sia X spazio topologico connesso per archi; allora hw induce un isomorfismo Hw dell'abelianizzato del gruppo fondamentale $\pi_1(X,a)$ sul primo gruppo di omologia singolare a coefficienti interi H_1X.*

Dimostrazione. Per brevità, sia A l'abelianizzato di $\pi_1(X,a)$; definiamo ora un omomorfismo $\rho : Z_1X \to A$; mostreremo che il nucleo di ρ contiene B_1X, e che l'omomorfismo indotto sul quoziente $H_1X = Z_1X/B_1X$ inverte hw. Scegliamo una volta per tutte, per ogni $x \in X$, un arco c_x di origine a ed estremità x; per $x = a$ si prende per c_x il cammino costante ε_a. Ad ogni 1−cubo singolare associamo l'immagine in A dell'elemento $[c_{c(0)}.c.(c_{c(1)})^{-1}] \in \pi_1(X,a)$; estendiamo poi per linearità al gruppo abeliano libero C_1X tale funzione, ottenendo un omomorfismo $\rho : C_1X \to A$. Sia $u : I^2 \to X$ un 2−cubo non degenere. Si ha $\partial^1 u = u_{2,0} + u_{1,1} - u_{2,1} - u_{1,0}$; ponendo, per semplicità di scrittura, $c_{j,k} = c_{u(j,k)}$, per $j,k = 0,1$, si ha:

$$\begin{aligned}\rho(\partial^1 u) &= [c_{0,0}.u_{2,0}.c_{1,0}^{-1}][c_{1,0}.u_{1,1}.c_{1,1}^{-1}][c_{0,1}.u_{0,1}.c_{1,1}^{-1}]^{-1}[c_{0,0}.u_{0,1}.c_{0,1}^{-1}]^{-1} \\ &= [c_{0,0}.u_{2,0}.u_{1,1}.c_{1,1}^{-1}][c_{1,1}.u_{2,1}^{-1}.u_{0,1}^{-1}.c_{0,0}^{-1}] = [c_{0,0}.(u_{2,0}.u_{1,1}.u_{2,1}^{-1}.u_{0,1}^{-1}).c_{0,0}^{-1}].\end{aligned}$$

Poichè u è continua su tutto I^2, $[c_{0,0}.(u_{2,0}.u_{1,1}.u_{2,1}^{-1}.u_{0,1}^{-1}).c_{0,0}^{-1}]$ è l'elemento neutro di $\pi_1(X,a)$, e quindi si applica sullo zero di A. Ne segue che il nucleo di ρ contiene B_1X. Sia ora $c = \sum_{k=1}^N \lambda_k c_k$ un 1−ciclo di X, con $c_1, \ldots, c_N$ 1−cubi, e sia $c_k(0) = a(k)$, $c_k(1) = b(k)$. Proviamo che $Hw(\rho(c)) \equiv c \mod B_1X$. Infatti $\rho(c)$ è in A l'immagine dell'elemento $\prod_{k=1}^N [c_{a(k)}.c_k.(c_{b(k)})^{-1}]^{\lambda_k}$; trasformando tale elemento con hw si ottiene $\sum_{k=1}^N \lambda_k(c_{a(k)} + c_k - c_{b(k)}) \mod B_1X$. Proviamo che è $\sum_{k=1}^N \lambda_k(c_{b(k)} - c_{a(k)}) = 0$. Infatti è $0 = \partial^1 c = \sum_{k=1}^N \lambda_k(b(k) - a(k))$, perchè c è ciclo. Se $\{a(1), \ldots, a(N), b(1), \ldots, b(N)\} = \{x_1, \ldots, x_p\}$, con $x_j \neq x_k$ se $j \neq k$, allora è $0 = \sum_{k=1}^N \lambda_k(b(k) - a(k)) = \sum_{j=1}^p (\sum_{\{b(k)=x_j\}} \lambda_k - \sum_{\{a(k)=x_j\}} \lambda_k) x_j$, da cui $\sum_{j=1}^p (\sum_{\{b(k)=x_j\}} \lambda_k - \sum_{\{a(k)=x_j\}} \lambda_k) = 0$, per $j = 1, \ldots, p$. Ma è anche $\sum_{k=1}^N \lambda_k(c_{b(k)} - c_{a(k)}) = -\sum_{j=1}^p (\sum_{\{b(k)=x_j\}} \lambda_k - \sum_{\{a(k)=x_j\}} \lambda_k) c_{x_j}$; pertanto tale somma è nulla, come voluto. Che poi $\rho(hw([c]))$ sia congruo a $[c]$ modulo il derivato di $\pi_1(X,a)$ è immediato. □

8.7. **Invarianza per omotopia.** Funzioni $f, g : X \to Y$ fra loro omotope inducono lo stesso omomorfismo in omologia:

. Teorema di invarianza per omotopia *Se X,Y sono spazi topologici ed $h : I \times X \to Y$ è un'omotopia dalla funzione $f(x) = h(0,x)$ alla funzione $g(x) = h(1,x)$, allora $f_* = g_* : H_\bullet X \to H_\bullet Y$; infatti la funzione $k_p : Q_pX \to Q_{p+1}Y$ definita da $k(c)(t_1, \ldots, t_{p+1}) = h(t_1, c(t_2, \ldots, t_{p+1}))$ sui cubi, e prolungata per linearità è un'omotopia algebrica tra $f_\#$ e $g_\#$, cioè si ha:*

$$g_\# - f_\# = \partial_Y \circ k + k \circ \partial_X$$

Dimostrazione. Si ha $\partial_Y(k(c)) = \partial_{1,1}^{p+1}(k(c)) - \partial_{1,0}^{p+1}(k(c)) + \sum_{(j,\alpha) \in \{2,p\} \times \{0,1\}} (-1)^{j+\alpha} \partial_{j,\alpha}^{p+1}(k(c))$. Ora $\partial_{1,1}(k(c)) = g \circ c$, mentre $\partial_{1,0}(k(c)) = f \circ c$; se $2 \leq j \leq p$ si ha $\partial_{j,\alpha}^{p+1}(k(c)) = k(\partial_{j-1,\alpha}^p(c))$. Si ottiene subito $\partial_Y(k(c)) = g \circ c - f \circ c - k \circ \partial_X(c)$, come voluto. □

Corollario. *Se X è contrattile, si ha $H_pX = 0$ per $p \neq 0$, ed $H_0X \cong \mathbb{Z}$.*

8.8. **Omologia ridotta.** Invece del complesso di catene

$$0 \longleftarrow C_0(X) \xleftarrow{\partial_1} C_1(X) \xleftarrow{\partial_2} C_2(X) \xleftarrow{\partial_3} \cdots$$

si usa spesso il complesso *aumentato*:

$$\cdots 0 \longleftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{\varepsilon} C_0(X) \xleftarrow{\partial_1} C_1(X) \xleftarrow{\partial_2} C_2(X) \xleftarrow{\partial_3} \cdots$$

la cui omologia si chiama *omologia ridotta*, si indica con $\tilde{H}_p(X)$, e coincide con l'omologia singolare per ogni p, tranne $p = 0$; si ha $\tilde{H}_0(X) = 0$ se X è connesso per archi, altrimenti $\tilde{H}_0(X) = 0$ è isomorfo ad un gruppo abeliano libero su un numero di generatori pari al numero delle componenti connesse di X diminuito di 1.

8.9. **Teorema delle catene $\mathcal{U}-$piccole.** Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di X (basta che gli interni degli elementi di $\mathcal{U}$ coprano X; si dice un tal caso che $\mathcal{U}$ è una *tettoia* per X). Con il simbolo $Q_p(X,\mathcal{U})$ indichiamo il sottogruppo di Q_pX generato da quei cubi singolari la cui immagine è interamente contenuta in qualche elemento $U \in \mathcal{U}$. Si vede subito che $\partial_p(Q_p(X,\mathcal{U})) \subseteq Q_{p-1}(X,\mathcal{U})$; e posto $D_p(X,\mathcal{U}) = Q_p(X,\mathcal{U}) \cap D_pX$ si ha anche $\partial_p(D_p(X,\mathcal{U})) \subseteq D_{p-1}(X,\mathcal{U})$; si può allora definire il complesso $C_p(X,\mathcal{U}) = Q_p(X,\mathcal{U})/D_p(X,\mathcal{U})$, che si inietta naturalmente entro C_pX ed induce un omomorfismo $j_p^{\mathcal{U}} : H_p(X,\mathcal{U}) \to H_pX$.

. Teorema delle catene $\mathcal{U}$-piccole *Per ogni p, $j_p^{\mathcal{U}}$ è un isomorfismo.*

In altre parole per ogni ciclo $z \in Z_pX$ esiste un ciclo $w \in Z_p(X,\mathcal{U})$ omologo a z. La dimostrazione si basa su un'idea molto semplice: ogni $p-$cubo viene suddiviso in 2^p cubi, poi in $(2^2)^p$ cubi, ecc. in $(2^d)^p$ cubi, finchè i singoli cubi che compongono il ciclo diventano $\mathcal{U}-$piccoli; l'idea è ovvia, ma una dimostrazione precisa richiede verifiche non difficili ma fastidiose.

Dimostrazione del teorema sulle catene $\mathcal{U}-$piccole

8.9.1. *Operatore di suddivisione.* Sulle $0-$catene, l'operatore di suddivisione è l'identità. Sugli $1-$cubi, associa ad ogni $1-$cubo singolare $c : I \to X$ la somma dei cubi singolari che si ottengono dividendo l'intervallo in due parti uguali, facendovi la restrizione di c sui due pezzi, riparametrizzati poi su $I = [0, 1]$; si ha cioè

$$\mathrm{sd}(c) = c_0 + c_1 \qquad c_0(t) = c(t/2); \quad c_1(t) = c((t + 1)/2).$$

L'operatore si estende poi per linearità a $Q_1(X)$; è chiaro che suddividendo un $1-$cubo degenere si ottiene una somma di due $1-$cubi degeneri, cioè $\mathrm{sd}(D_1(X)) \subseteq D_1(X)$. In generale si ha, per un $p-$cubo:

$$\mathrm{sd}(c) = \sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^{\mathrm{p}}} c_\varepsilon \qquad \text{dove} \quad c_\varepsilon(t) = c((t + \varepsilon)/2) \quad t \in [0, 1]^p.$$

Si intuisce che facendo il bordo di $\mathrm{sd}(c)$ i pezzi di bordo dei cubi interni si cancellano l'un l'altro e rimane solo la suddivisione del bordo, cioè

$$\partial(\mathrm{sd}(c)) = \mathrm{sd}(\partial c),$$

in altre parole, sd è un endomorfismo del complesso $Q_\bullet(X)$ (ed anche $C_\bullet(X)$) in se stesso; infatti

$$\partial(\mathrm{sd}(c)) = \partial\left(\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^{\mathrm{p}}} c_\varepsilon\right) = \sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^{\mathrm{p}}} \partial c_\varepsilon = \sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^{\mathrm{p}}}\left(\sum_{j=1}^{p}(-1)^j \left(\partial_{j,0}c_\varepsilon - \partial_{j,1}^{p}c_\varepsilon\right)\right)$$

e scambiando le sommatorie,

$$\sum_{j=1}^{p}(-1)^j\left(\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^{\mathrm{p}}}(\partial_{j,0}c_\varepsilon - \partial_{j,1}c_\varepsilon)\right).$$

Tenendo fissato $j \in \{1, \ldots, p\}$ consideriamo i termini della somma che si hanno per $\varepsilon_1 = 0$ e $\varepsilon_j = 1$; si hanno i quattro termini

$$c((t_1 + \varepsilon_1)/2, \ldots, (t_{j-1} + \varepsilon_{j-1})/2, 0, (t_{j+1} + \varepsilon_{j+1})/2, \ldots, (t_p + \varepsilon_p)/2) -$$
$$c((t_1 + \varepsilon_1)/2, \ldots, (t_{j-1} + \varepsilon_{j-1})/2, 1/2, (t_{j+1} + \varepsilon_{j+1})/2, \ldots, (t_p + \varepsilon_p)/2) +$$

(corrispondenti a $\varepsilon_j = 0$), ed i termini:

$$c((t_1 + \varepsilon_1)/2, \ldots, (t_{j-1} + \varepsilon_{j-1})/2, 1/2, (t_{j+1} + \varepsilon_{j+1})/2, \ldots, (t_p + \varepsilon_p)/2) -$$
$$c((t_1 + \varepsilon_1)/2, \ldots, (t_{j-1} + \varepsilon_{j-1})/2, 1, (t_{j+1} + \varepsilon_{j+1})/2, \ldots, (t_p + \varepsilon_p)/2) =$$

(corrispondenti a $\varepsilon_j = 1$); resta quindi:

$$c((t_1 + \varepsilon_1)/2, \ldots, (t_{j-1} + \varepsilon_{j-1})/2, 0, (t_{j+1} + \varepsilon_{j+1})/2, \ldots, (t_p + \varepsilon_p)/2) -$$

$$c((t_1+\varepsilon_1)/2,\dots,(t_{j-1}+\varepsilon_{j-1})/2,1,(t_{j+1}+\varepsilon_{j+1})/2,\dots,(t_p+\varepsilon_p)/2)=$$
$$(\partial_{j,0}c)_{\varepsilon(j)}-(\partial_{j,1}c)_{\varepsilon(j)},$$

dove $\varepsilon(j)$ è la $(p-1)-$pla restrizione di ε agli indici diversi da j. La conclusione è ormai facile.

8.9.2. *Omotopia fra l'identità e l'operatore di suddivisione.* Mostriamo che nel complesso $C_\bullet(X)$ l'operatore sd è omotopo all'identità. Si considera la funzione continua $\alpha:[0,1]\to[0,1]$ definita da $\alpha(t)=2t$ per $0\le t\le 1/2$, ed $\alpha(t)=1$ per $1/2\le t\le 1$; si definisce poi $\alpha_p: I^p\to I^p$ ponendo $\alpha_p(t_1,\dots,t_p)=(\alpha(t_1,\dots,a(t_p))$. Si definisce ora $a: C_p(X)\to C_p(X)$ ponendo sui cubi $a(c)=c\circ\alpha_p$ ed estendendo per linearità; è immediato che a è morfismo di complessi, cioè che $\partial^p\circ a=a\circ\partial^p$. Ora a è algebricamente omotopo all'identità; se $c\in C_p(X)$, il $(p+1)-$cubo $k_p(c): I^{p+1}\to X$ è definito ponendo

$$k_p(c)(t_1,\dots,t_{p+1})=c((1-t_1)\alpha(t_1)+t_1t_2,\dots,(1-t_1)\alpha(t_{p+1})+t_1t_{p+1});$$

si noti che si ha

$$\partial^{p+1}(k_p(c))=c-c\circ\alpha_p+\sum_{j=2}^{p+1}(-1)^j(\partial_{j,0}k_p(c)-\partial_{j,1}k_p(c))=c-a(c)-k_{p-1}(\partial^p c),$$

di modo che k è effettivamente un'omotopia tra l'identità ed a; si ha cioè

$$\partial\circ k+k\circ\partial=\mathrm{id}_{C_\bullet(X)}-a;$$

componendo a sinistra con sd, osservato che $\mathrm{sd}\circ\partial=\partial\circ\mathrm{sd}$ (dato che sd è morfismo di complessi) si ha, posto $h=\mathrm{sd}\circ k$:

$$\partial\circ h+h\circ\partial=\mathrm{sd}-\mathrm{sd}\circ a,$$

ma $\mathrm{sd}\circ a=\mathrm{id}_{C_\bullet(X)}$, come è immediato vedere:

$$\mathrm{sd}\circ a(c)=\mathrm{sd}\left(\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^p}c_\varepsilon\right)=c_{(0,\dots,0)}+\text{cubi degeneri}=c+\text{cubi degeneri}.$$

Ovviamente, iterando l'operatore di suddivisione si ottiene un operatore sd^m sempre omotopo all'identità. I cubi diventano sempre più fini; fissato $\mathcal{U}$, tettoia per X, per ogni cubo, e quindi anche per ogni catena, c'è un naturale m a partire dal quale $\mathrm{sd}^m c$ è $\mathcal{U}-$piccolo. Si noti che sia l'operatore di suddivisione che l'operatore a mappano $C_p(X,\mathcal{U})$ in se stesso, e così quindi fanno anche le omotopie k tra l'identità ed sd^m.

Vediamo ora che

. *L'inclusione canonica* $j_\mathcal{U}: C_\bullet(X,\mathcal{U})\to C_\bullet(X)$ *induce un isomorfismo in omologia.*

Dimostrazione. Iniettività: sia $z\in Z_p(X,\mathcal{U})$ nullo in H_pX, esista cioè una $(p+1)-$catena $c\in C_{p+1}(X)$ con $\partial c=z$; esiste $m\ge 1$ tale che $\mathrm{sd}^m c$ sia $\mathcal{U}-$piccola; se k è l'omotopia di sd^m con l'identità si ha $z-\mathrm{sd}^m z=\partial k(z)+k(\partial z)=\partial k(z)$, da cui

$$z=\mathrm{sd}^m z+\partial k(z)=\mathrm{sd}^m(\partial c)+\partial k(z)=\partial(\mathrm{sd}^m c)+\partial k(z)=\partial(\mathrm{sd}^m c+k(z));$$

ma k mappa $C_p(X,\mathcal{U})$ in $C_{p+1}(X,\mathcal{U})$; ne segue che $z\in B_p(X,\mathcal{U})$, cioè , la classe di z è nulla anche in $H_p(X,\mathcal{U})$.

Suriettività: sia $z\in Z_p(X)$, e sia $m\ge 1$ tale che $\mathrm{sd}^m z$ sia $\mathcal{U}-$piccolo; ne segue $z-\mathrm{sd}^m z=\partial k(z)$ come sopra, quindi z è congruo modulo $B_p(X)$ al $p-$ciclo $\mathcal{U}-$piccolo $\mathrm{sd}^m z$. □

8.10. **Successione di Mayer–Vietoris.** La successione di Mayer-Vietoris per l'omologia è uno strumento analogo al teorema di Seifert–Van Kampen per il gruppo fondamentale, ma è alquanto più duttile di questo, avendo ipotesi assai meno esigenti.

Teorema. (SUCCESSIONE DI MAYER-VIETORIS PER L'OMOLOGIA SINGOLARE) *Sia X spazio topologico, e siano U,V sottoinsiemi di X tali che sia $X=\mathrm{int}_X(U)\cup\mathrm{int}_X(V)$. Siano $i:U\to X, j:V\to X$, $k:U\cap V\to U$, $l:U\cap V\to V$ le inclusioni canoniche. Esiste allora una successione esatta corta di complessi:*

$$0\longrightarrow C_\bullet U\cap V\xrightarrow{(k_\#,-l_\#)}C_\bullet U\oplus C_\bullet V\xrightarrow{i_\#+j_\#}C_\bullet(X,\{U,V\})\longrightarrow 0$$

che dà la successione esatta lunga:

$$\cdots\leftarrow H_{p-1}U\cap V\xleftarrow{\kappa_{*p}}H_pX\xleftarrow{i_*+j_*}H_pU\oplus H_pV\xleftarrow{(k_*,-l_*)}H_pU\cap V\leftarrow\cdots$$

Dimostrazione. L'esattezza della sequenza di complessi è banale, e fornisce la corrispondente successione esatta lunga in omologia; ed $H_p(X;\{U,V\})$ può essere sostituito da H_pX per il teorema delle catene $\mathcal{U}-$piccole. □

Osservazione. Nella successione di Mayer–Vietoris si possono naturalmente sostituire le omologie ridotte alle omologie. È anche importante osservare la funtorialità della successione di Mayer–Vietoris: se Y è un altro spazio topologico, Y è coperto dagli interni dei suoi sottoinsiemi W, Z, ed $f : X \to Y$ è una funzione continua con $f(U) \subseteq W$, $f(V) \subseteq Z$, allora tutti i rettangoli:

$$\begin{array}{ccc} H_{p-1}U \cap V & \xleftarrow{\kappa_{*p}^{X,U,V}} & H_pX \\ {\scriptstyle f_{*p-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{*p}} \\ H_{p-1}W \cap Z & \xleftarrow{\kappa_{*p}^{Y,W,Z}} & H_pY \end{array}$$

sono commutativi. Vale anche la pena di osservare che nella successione si poteva prendere $(k_\#, l_\#)$ come morfismo di $C_p(U \cap V)$ in $C_p(U) \oplus C_p(V)$, pur di prendere poi $i_\# - j_\#$ da $C_p(U) \oplus C_p(V)$ a $C_p(X, \{U,V\})$.

8.11. **Omologia delle sfere.** Data la sfera $n-$dimensionale $\mathbb{S}^n$, con $n \geq 1$, sia $U = \mathbb{S}^n \setminus \{-\nu\}$, $V = \mathbb{S}^n \setminus \{\nu\}$, dove al solito ν è il polo nord. Sia U che V sono contrattili essendo copie di $\mathbb{R}^n$; ed $U \cap V$ ha la sfera $\mathbb{S}^{n-1}$ come retratto di deformazione forte, per cui l'inclusione come equatore $i : \mathbb{S}^{n-1} \to U \cap V (\subseteq \mathbb{S}^n)$ induce un isomorfismo in omologia tra $H_p(\mathbb{S}^{n-1})$ ed $H_p(U \cap V)$, Si ha la sequenza esatta lunga:

$$0 \longleftarrow \tilde{H}_0(\mathbb{S}^n) \xleftarrow{i_*+j_*} \tilde{H}_0(U) \oplus \tilde{H}_0(V) \xleftarrow{(k_*,-l_*)} \tilde{H}_0(\mathbb{S}^{n-1}) \xleftarrow{\kappa_*} \tilde{H}_1(\mathbb{S}^n) \longleftarrow \cdots$$
$$\cdots \longleftarrow \tilde{H}_p(\mathbb{S}^n) \xleftarrow{i_*+j_*} \tilde{H}_p(U) \oplus \tilde{H}_p(V) \xleftarrow{(k_*,-l_*)} \tilde{H}_p(\mathbb{S}^{n-1}) \xleftarrow{\kappa_*} \tilde{H}_{p+1}(\mathbb{S}^n) \longleftarrow \cdots$$

Da qui si trae subito, per induzione su $n \geq 0$:

Proposizione. *Per ogni n naturale e p intero si ha*

$$\tilde{H}_p(\mathbb{S}^n) = 0 \quad \textit{se } p \neq n; \quad \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \approx \mathbb{Z}.$$

Dimostrazione. Se $n = 0$, $\mathbb{S}^0 = \{1, -1\}$, ed il risultato è immediato; si noti che un generatore di $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^0)$ è ad esempio la classe della $0-$catena $1 - (-1)$. Se $n = 1$ nella successione di Mayer–Vietoris tutti i termini $\tilde{H}_p(U) \oplus \tilde{H}_p(V)$ sono nulli. Ne segue che $\tilde{H}_p(\mathbb{S}^n)$ è isomorfo, via κ_*, a $\tilde{H}_{p-1}(\mathbb{S}^0)$, e si conclude; allo stesso modo per ogni p, in generale si ha che:

$$\tilde{H}_{p-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \xleftarrow{\kappa_{*p}} \tilde{H}_p(\mathbb{S}^n)$$

è un isomorfismo, qualunque sia p; e si conclude. □

Si può generalizzare la precedente indagine nel seguente modo: dato uno spazio X, la sua *sospensione* è lo spazio $\Sigma X = X \times]0,1[\cup \{v_0, v_1\}$, quoziente dello spazio ottenuto da $X \times [0,1]$ identificando con v_0 tutti i punti del tipo $(x, 0)$, con v_1 tutti i punti del tipo $(x, 1)$. Si prende ora $U = \Sigma X \setminus \{v_0\}$, $V = \Sigma X \setminus \{v_1\}$. Si nota che U e V sono contrattili ($\{v_1\}$ è retratto di deformazione forte di U, una retrazione essendo $((x,t),\lambda) \mapsto (x, (1-\lambda)t + \lambda 1)$ se $t < 1$; v_1 resta fermo; analogamente V ha $\{v_0\}$ come retratto di deformazione forte). Ne segue che i κ_* sono isomorfismi:

$$\tilde{H}_{p-1}(X) \xleftarrow{\kappa_{*p}} \tilde{H}_p(\Sigma X)$$

La sospensione è un funtore covariante: ogni $f : X \to Y$ continua ha una sospensione $\Sigma f : \Sigma X \to \Sigma Y$ definita da $\Sigma f(x,t) = (f(x), t)$, e $\Sigma f(v_{0,1}) = v_{0,1}$ (e si ha $\Sigma(g \circ f) = \Sigma g \circ \Sigma f$). È evidente che $\Sigma \mathbb{S}^{n-1}$ è omeomorfo a $\mathbb{S}^n$: un omeomorfismo che rispetta i meridiani è $(x,t) \mapsto (\sqrt{1-(2t-1)^2}x, 2t-1)$ per $0 < t < 1$, $v_0 \mapsto -\nu$, $v_1 \mapsto \nu$.

Osservazione. Attenzione a non confondere la sospensione qui definita con la *sospensione ridotta*, usata in omotopia, che è effettivamente diversa.

8.12. **Grado di una funzione $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$.** Ogni funzione continua $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ induce un endomorfismo di gruppi $f_* : \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) \to \tilde{H}_n(\mathbb{S}^n)$; tali gruppi essendo isomorfi a $\mathbb{Z}$, un loro endomorfismo non può che essere la moltiplicazione per un ben preciso intero $m \in \mathbb{Z}$, chiamato *grado* di f, $\deg(f)$. Dato che $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ si ha $\deg(g \circ f) = \deg g \deg f$. Se f e g sono omotope allora $f_* = g_*$; funzioni omotope hanno quindi lo stesso grado. Mostriamo ora che il grado della funzione $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (-x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ (riflessione rispetto all'iperpiano $x_1 = 0$) è -1. La cosa si vede per induzione su n: è banale per $n = 0$, e per gli altri n basta osservare che la funzione data è la sospensione della funzione $x_1 \mapsto -x_1$ di $\mathbb{S}^0$ in se stesso. Ne segue che ogni riflessione rispetto ad un iperpiano ha grado -1; la mappa antipodale è la composizione di $n+1$ riflessioni, una per ogni iperpiano coordinato, quindi la mappa antipodale nella sfera $n-$ dimensionale ha grado $(-1)^{n+1}$. Un campo di versori tangenti su $\mathbb{S}^n$ è ovviamente una funzione $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ tale che sia $(f(x)|x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{S}^n$. Siamo in grado ora di dire quando tali campi esistono:

. Pettinabilità delle sfere *Esiste su $\mathbb{S}^n$ un campo continuo di versori tangenti se e solo se n è dispari.*

Dimostrazione. Si è esplicitamente scritto un campo di versori tangenti ad $\mathbb{S}^n$ quando $n+1$ è pari. Se un tale campo esiste, ad esso sono omotopi sia l'identità che la mappa antipodale (dato che nessuna delle due è mai antipodale ad un campo tangente); per transitività, identità e mappa antipodale sono fra loro omotope, quindi hanno lo stesso grado, 1. □

Esercizio 4. Sia n pari. Si mostri che se $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ è continua, allora esiste $x \in \mathbb{S}^n$ tale che sia $f(x) = x$, oppure $f(x) = -x$. Dedurne che se n è pari ogni funzione continua $g : \mathrm{P}\,\mathbb{R}^n \to \mathrm{P}\,\mathbb{R}^n$ ha un punto unito.

Esercizio 5. Si mostri che il grado di $f : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ e di $\Sigma f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ sono uguali.

Esercizio 6. Se si ha uno spazio connesso per archi con gruppo fondamentale abeliano, si ha che $\pi_1(X,a)$ è isomorfo ad $H_1(X)$ qualunque sia $a \in X$, e dati $\pi_1(X,a)$ e $\pi_1(X,b)$ essi sono canonicamente isomorfi, per ogni $a,b \in X$; una funzione continua $f : X \to X$ induce quindi un ben definito endomorfismo $f_* : \pi_1 X \to \pi_1 X$, anche se f sposta i punti base.

In particolare $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$ ed il grado di $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ è quindi anche l'intero corrispondente all'omomorfismo $\pi_1 f : \pi_1(\mathbb{S}^1) \to \pi_1(\mathbb{S}^1)$. Ora, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ data da $p(x) = e^{2\pi i x}$ è rivestimento universale di $\mathbb{S}^1$, ed $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ ha un rialzamento $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (cioè g è tale che $p \circ g = f \circ p$. Mostrare che $g(x+1) - g(x)$ è costante al variare di x in $\mathbb{R}$, che è un intero, e che tale intero coincide con $\deg f$. Mostratre poi che il grado della funzione $z \mapsto z^k$ è k, per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

8.13. **Varie considerazioni sul grado topologico.** Ogni funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua e propria, tale cioè che $f^{\leftarrow}(K)$ sia compatto per ogni compatto K di $\mathbb{R}^n$, può essere pensata come una funzione di $\mathbb{S}^n$ in sé (le funzioni proprie sono esattamente quelle che hanno limite infinito all'infinito, che si estendono cioè alla compattificazione $\alpha\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty_n\}$ con ∞_n unito; tale compattificazione si identifica con $\mathbb{S}^n$ via proiezione stereografica), ed hanno pertanto un grado. Ogni funzione affine $x \mapsto a + Ax$, con $A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ è un omeomorfismo, e quindi è propria. Essendo $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ formato da due componenti connesse, quella delle matrici a determinante postivo $\mathrm{Gl}_n^+(\mathbb{R}^n)$, e quelle a determinante negativo, esiste un'omotopia $(t,x) \mapsto (1-t)b + A(t)$, $(t, \infty_n) \mapsto \infty_n$, dove $t \mapsto A(t)$ è un arco continuo che congiunge A con l'identità se $\det(A) > 0$ o con una simmetria rispetto ad un iperpiano se $\det(A) < 0$. In ogni caso la funzione ha grado $\operatorname{sgn}\det(A)$.

Ricordiamo le equazioni della proiezione stereografica $\sigma : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$:

$$\sigma(x,\zeta) = \frac{x}{1-\zeta},\ \sigma(\nu) = \infty; \quad \sigma^{-1}(x) = \left(\frac{2x}{1+|x|^2}, \frac{|x|^2-1}{|x|^2+1}\right),\ \sigma^{-1}(\infty) = \nu.$$

Coniugando mediante σ, σ^{-1} gli omeomorfismi della sfera diventano omeomorfismi di $\alpha\mathbb{R}^n$ e viceversa; si noti che le simmetrie di $\mathbb{S}^n$ rispetto alle prime n coordinate di $\mathbb{R}^{n+1}$ sono esattamente le simmetria nelle corrispondenti coordinate di $\mathbb{R}^n$; la simmetria rispetto all'ultima coordinata, $(x,\zeta) \mapsto (x,-\zeta)$ diventa invece l'inversione rispetto alla sfera unitaria di $\mathbb{R}^n$, descritta dalla formula:

$$\iota(x) = \frac{x}{|x|^2} \quad \text{se } x \neq 0;\ \iota(0) = \infty,\ \iota(\infty) = 0.$$

Tale mappa ha quindi grado -1

Identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$, i polinomi sono funzioni proprie. Se $m > 0$ è intero, la funzione $z \mapsto z^m$, estesa alla sfera $\mathbb{S}^2$, è omotopa alla sospensione alla sfera $2-$dimensionale della stessa funzione $z \mapsto z^m$ su $\mathbb{S}^1 = \mathbb{U}$, ed ha quindi grado m (un'omotopia di $z \mapsto z^m$ con la sospensione è ad esempio $h(t,z) = ((1-t)|z|^m + t|z|)(z/|z|)^m$ se $z \neq 0, \infty$, $h((t,0) = 0$, $h(t,\infty) = \infty$). Se $p(z) = a_m z^m + \cdots + a_1 z + a_0$, con $a_m \neq 0$, è polinomio di grado m, esso ha grado m come funzione di $\mathbb{S}^2$ in sé: infatti $(\lambda, z) \mapsto a_m z^m + (1-\lambda)(a_{m-1}z^{m-1} + \cdots + a_0)$, $(\lambda,\infty) \mapsto \infty$ è un'omotopia con la funzione $z \mapsto a_m z^m$, che ha grado m.

La funzione $z \mapsto 1/z$ ha grado 1: infatti essa è la composizione dell'inversione e del coniugio $z \mapsto \bar{z}$, e sulla sfera di Riemann diventa la mappa antipodale, che ha qui grado 1. Ne segue che $z \mapsto z^m$ ha grado $|m|$, per ogni intero $m \in \mathbb{Z}$.

8.14. **Omologia del bouquet.** Siano $(X, a), (Y, b)$ spazi puntati; nella categoria degli spazi puntati il loro *coprodotto* è lo spazio ottenuto dal coprodotto non puntato $X \coprod Y$ identificando fra loro i punti a e b: è il *bouquet* dei due spazi X, Y e si indica con $X \vee Y$ (omettendo se non necessaria l'indicazione del punto base $c = a = b$). Supponiamo che a in X e b in Y abbiano intorni A e B che hanno rispettivamente $\{a\}$ e $\{b\}$ come retratti di deformazione forte; supponiamo inoltre che $\{a\}$ sia chiuso in X e che $\{b\}$ sia chiuso in Y. Allora $\tilde{H}_\bullet(X \vee Y)$ è naturalmente isomorfo a $\tilde{H}_\bullet(X) \oplus \tilde{H}_\bullet(Y)$, le immersioni di $\tilde{H}_\bullet(X)$ e $\tilde{H}_\bullet(Y)$ in $\tilde{H}_\bullet(X \vee Y)$ essendo esattamente i_* e j_*, con $i : X \to X \vee Y$, $j : Y \to X \vee Y$ immersioni canoniche. Infatti, serviamoci della successione di Mayer–Vietoris con $U = X \cup B$ e $V = Y \cup A$; $U \cap V \approx A \vee B$ è contrattile, e la successione (ridotta) di Mayer–Vietoris si spezza in una successione di isomorfismi:

$$0 \longleftarrow \tilde{H}_m(X \vee Y) \xleftarrow{i_{U*}+i_{V*}} \tilde{H}_m(U) \oplus \tilde{H}_m(V) \longleftarrow 0$$

Chiaramente poi U si retrae per deformazione su X, e V su Y (è qui che serve l'ipotesi che $\{a\}$ e $\{b\}$ siano chiusi in X,Y rispettivamente); ne segue che le inclusioni canoniche di X in U e di Y in V sono isomorfismi in omologia; pertanto

$$0 \longleftarrow \tilde{H}_m(X \vee Y) \xleftarrow{i_*+j_*} \tilde{H}_m(X) \oplus \tilde{H}_m(Y) \longleftarrow 0$$

sono, per ogni $m \in \mathbb{Z}$, isomorfismi.

Ci sono anche le proiezioni canoniche $p : X \vee Y \to X$, $q : X \vee Y \to Y$, che identificano ad un punto Y ed X rispettivamente. Essendo $p \circ i = 1_X$ e $q \circ j = 1_Y$, mentre $p \circ j$ e $q \circ i$ sono costanti, si mostri che si ha $i_* \circ p_* + j_* \circ q_* = 1_{\tilde{H}_\bullet(X \vee Y)}$.

Osservazione. Si ha $H_k(X \vee Y) \approx H_k(X) \oplus H_k(Y)$ per $k > 0$; si ha invece che $H_0(X \vee Y)$ non è isomorfo a $H_0(X) \oplus H_0(Y)$, almeno non via $i_* + j_*$, salvo casi banali. Per il coprodotto nella categoria degli spazi non puntati si ha invece che $H_k(X \coprod Y)$ è isomorfo a $H_k(X) \oplus H_k(Y)$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

8.15. **Calcolo di alcune omologie.** Dall'isomorfismo di Hurewicz sappiamo che un generatore di $H_1(\mathbb{S}^1)$ (o di $H_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, o di $H_1(B \setminus \{0\})$) è la classe di omologia del ciclo $t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. Usando tecniche simili a quelle usate per determinare il gruppo fondamentale di tali spazi si ha

- Toro: $H_1 \approx \mathbb{Z}^2$, $H_2 \approx \mathbb{Z}$, $H_k = 0$ per $k > 2$.
- Bottiglia di Klein $H_1 \approx \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, $H_2 = 0$, $H_k = 0$ per $k > 2$.
- Piano Proiettivo $H_1 \approx \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $H_2 = 0$, $H_k = 0$ per $k > 2$.

8.16. **Omologia relativa.** Sia X spazio topologico, e sia $A \subseteq X$ sottospazio di X. All'inclusione canonica $i : A \to X$ è associata la funzione di complessi $f_{\#p} : C_p(A) \to C_p(X)$; $C_p(A)$ è il gruppo delle $p-$catene di A, combinazioni lineari di cubi singolari non degeneri a valori in A. Il quoziente $C_p(X, A) = C_p(X)/C_p(A)$ può essere identificato con il sottogruppo di $C_p(X)$ generato da quei $p-$cubi non degeneri $c : I^p \to X$ per cui $c(I^p)$ non è contenuto in A; resta indotto un bordo, ancora indicato con $\partial_p : C_p(X, A) \to C_{p-1}(X, A)$, che permette di definire il complesso quoziente $C_\bullet(X, A)$. Il gruppo $Z_p(X, A)$ dei $p-$cicli in $C_p(X, A)$ può pensarsi costituito dalle $p-$catene (modulo $C_p(A)$) il cui bordo sta in $C_{p-1}(A)$. I $p-$bordi relativi sono $B_p(X, A) = \partial_{p+1}(C_{p+1}(X, A)) + C_p(A)$; si ha ovviamente $B_p(X, A) \subseteq Z_p(X, A)$ e per definizione $H_p(X, A) = Z_p(X, A)/B_p(X, A)$. Si ha una successione esatta corta di complessi:

$$0 \longrightarrow C_\bullet(A) \xrightarrow{i_\#} C_\bullet(X) \xrightarrow{j_\#} C_\bullet(X, A) \longrightarrow 0$$

alla quale corrisponde la successione esatta lunga:

$$\cdots \xleftarrow{\partial_{*p}} H_p(X, A) \xleftarrow{j_{*p}} H_p(X) \xleftarrow{i_{*p}} H_p(A) \xleftarrow{\partial_{*(p+1)}} H_{p+1}(X, A) \xleftarrow{j_{*(p+1)}} \cdots$$

Questa costruzione è funtoriale: se $f : (X, A) \to (Y, B)$ è mappa di coppie (cioè una funzione continua da X ad Y con $f(A) \subseteq B$ essa induce un morfismo di catene $f_\# : C_\bullet(X, A) \to C_\bullet(Y, B)$ ed un morfismo in omologia $f_{*p} : H_p(X, A) \to H_p(Y, B)$, per ogni $p \in \mathbb{Z}$ tale che sia commutativo il diagramma a righe esatte:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \xleftarrow{\partial_{*p}} & H_p(X,A) & \xleftarrow{j_{*p}} & H_p(X) & \xleftarrow{i_{*p}} & H_p(A) & \xleftarrow{\partial_{*(p+1)}} & H_{p+1}(X,A) & \xleftarrow{j_{*(p+1)}} & \cdots \\
 & & {\scriptstyle f_*}\downarrow & & {\scriptstyle f_*}\downarrow & & {\scriptstyle f_*}\downarrow & & {\scriptstyle f_*}\downarrow & & \\
\cdots & \xleftarrow{\partial_{*p}} & H_p(Y,B) & \xleftarrow{j_{*p}} & H_p(Y) & \xleftarrow{i_{*p}} & H_p(B) & \xleftarrow{\partial_{*(p+1)}} & H_{p+1}(X,B) & \xleftarrow{j_{*(p+1)}} & \cdots
\end{array}$$

tale morfismo f_* è invariante per omotopie di coppie. Si Si noti che $H_0(X,A)=0$ se X è connesso per archi ed A non è vuoto: ogni punto di X è estremità di un cammino che parte da un $a\in A$ ed arriva ad x, e quindi è un bordo modulo $C_0(A)$; si dimostra subito anche che $\partial_{*1}: H_1(X,A)\to H_0(A)$ mappa $H_1(X,A)$ in $\tilde H_0(A)=\mathrm{Ker}(\varepsilon)$ (se $z=\sum_{r=1}^N \lambda_r c_r$ è un $1-$ciclo modulo A, il suo bordo è $\partial_1 z=\sum_{r=1}^N \lambda_r(c_r(1)-c_r(0))$, che si può supporre $0-$catena di A, e quindi con tutti i $c_r(0)$ e $c_r(1)$ in A; è allora ovvio che l'aumentazione annulla questa $0-$catena. Tutto ciò dice che se A non è vuoto anche la successione con le omologie ridotte è esatta, e si pone, per definizione, $\tilde H_n(X,A)=H_n(X,A)$, per ogni $n\in\mathbb{Z}$ (se $A\neq\emptyset$).

Esempio 7. Consideriamo la coppia $(\mathbb{B}_n,\mathbb{S}^{n-1})$, dove $\mathbb{B}_n$ è la palla unitaria $n-$dimensionale. L'omologia ridotta di $\mathbb{B}_n$ è sempre nulla, quella di $\mathbb{S}^{n-1}$ è sempre nulla salvo che in grado $n-1$, dove vale $\mathbb{Z}$. L'unico segmento non banale della successione lunga di coppia è

$$0 \longleftarrow \tilde H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \xleftarrow{\partial_*} H_n(\mathbb{B}_n,\mathbb{S}^{n-1}) \longleftarrow 0$$

Esempio 8. Consideriamo la coppia $(\mathbb{S}^n,\mathbb{S}^n\setminus\{a\})$, dove a è un punto di $\mathbb{S}^n$. Adesso si ha $\tilde H_k(\mathbb{S}^n\setminus\{a\})=0$ per ogni $k\in\mathbb{Z}$, dato che $\mathbb{S}^n\setminus\{a\}\approx\mathbb{R}^n$ è contrattile. La successione esatta di coppia si spezza in segmenti:

$$0 \longleftarrow \tilde H_k(\mathbb{S}^n) \longleftarrow \tilde H_k(\mathbb{S}^n,\mathbb{S}^n\setminus\{a\}) \longleftarrow 0$$

di cui l'unico non banale è quello con $k=n$.

Esercizio 9. Sia $A\subseteq X$ un retratto di X, esista cioè una funzione continua $r: X\to A$ che è l'dentità su A; se $i: A\to X$ è l'inclusione canonica si ha quindi che $1_A=r\circ i$ e quindi $r_\#\circ i_\#=1_{C_\bullet(A)}$, ed anche $r_*\circ i_*=1_{H_\bullet(A)}$. Quindi $r_\#: C_\bullet(X)\to C_\bullet(A)$ spezza la sequenza esatta corta $0\to C_\bullet(A)\to C_\bullet(X)\to C_\bullet(X,A)\to 0$, in altre parole si ha un isomorfismo $C_\bullet(X)\overset{(r_\#,j_\#)}{\longrightarrow} C_\bullet(A)\oplus C_\bullet(X,A)$ a livello di catene, ed un isomorfismo $H_\bullet(X)\overset{(r_*,j_*)}{\longrightarrow} H_\bullet(A)\oplus H_\bullet(X,A)$ a livello di omologie.

Per ogni spazio X, ed ogni $a\in X$ fissato, $A=\{a\}$ è un retratto di X; per ogni k si ha l'isomorfismo $H_\bullet(X)\overset{(r_*,j_*)}{\to} H_\bullet(\{a\})\oplus H_\bullet(X,\{a\})$; ma $H_k(\{a\})=0$ se $k\neq 0$, per cui $H_\bullet(X,\{a\})=H_k(X)$, mentre $H_0(X)$ è isomorfo, via (r_{0*},j_{0*}), a $\mathbb{Z}\oplus H_0(X,\{a\})$; ovviamente r_{0*} è esattamente l'aumentazione; l'omologia $H_\bullet(X,\{a\})$ è identificabile con l'omologia ridotta.

8.17. **Escissione.** Usando il teorema delle catene $\mathcal{U}-$piccole si dimostra il seguente:

. Teorema di escissione *Sia (X,A) coppia di spazi, e sia C sottoinsieme di A la cui chiusura sia contenuta nell'interno di A ($\mathrm{cl}_X(C)\subseteq \mathrm{int}_X(A)$), l'inclusione canonica $(X\setminus C, A\setminus C)\to(X,A)$ induce un isomorfismo in omologia.*

Il nome dice che si può tagliar via, ex-cidere, l'insieme C, nelle ipotesi poste: se $C\subseteq A$ non va a toccare la frontiera di A, allora può essere eliminato senza alterare l'omologia relativa.

Dimostrazione. Se consideriamo $\mathcal{U}=\{X\setminus C, A\}$, esso è un tettoia di X, cioè gli interni di tali due insiemi coprono X. L'omologia può quindi essere calcolata con catene $\mathcal{U}-$piccole. *da finire*

□

Esempio 10. (Omologia Locale) Se X è spazio topologico, ed a è un punto di X, che supponiamo tale che $\{a\}$ sia chiuso, l'omologia $H_\bullet(X,X\setminus\{a\})$ è detta omologia locale ad a: infatti essa dipende esclusivamente dagli intorni di a, avendosi per escissione

$$H_\bullet(U,U\setminus\{a\}) \overset{\text{exc}}{\approx} H_\bullet(X,X\setminus\{a\}),$$

(la chiusura di $X\setminus U$ certamente non contiene a, ed è contenuta quindi in $X\setminus\{a\}$, che è aperto per l'ipotesi fatta su $\{a\}$). Spazi localmente omeomorfi (e T_1) hanno quindi gruppi di omologia locale isomorfi. L'omologia locale di $\mathbb{R}^n$: essendo $\mathbb{R}^n$ contrattile, la successione ridotta di omologia della coppia $(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{a\})$ si spezza in isomorfismi:

$$0 \longleftarrow \tilde H_{k-1}(\mathbb{R}^n\setminus\{a\}) \xleftarrow{\partial_*} H_k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{a\}) \longleftarrow 0$$

Dato che $\mathbb{R}^n\setminus\{a\}$ è omotopicamente equivalente ad $\mathbb{S}^{n-1}$ si ha $H_k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{a\})=0$ per $k\neq n$, mentre è $H_n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{a\})\approx\mathbb{Z}$. Corollario:

. Invarianza del numero dimensionale *Se $m\neq n$, $\mathbb{R}^m$ ed $\mathbb{R}^n$ non sono omeomorfi.*

Esistono dimostrazioni di tale corollario che non usano la teoria dell'omologia, naturalmente; ma nessuna è semplice. Sia ora $X \subseteq \mathbb{R}^n$; se a è interno ad X chiaramente si ha $H_\bullet(X, X \smallsetminus \{a\}) \approx H_\bullet(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \smallsetminus \{a\})$; se $a \in X$, ma a non è interno, varie situazioni si possono presentare. Ad esempio, se X è convesso con l'interno non vuoto, ed $a \in X \cap \mathrm{fr}(X)$, allora $H_\bullet(X, X \smallsetminus \{a\}) = 0$: fissato $b \in \mathrm{int}(X)$, $(x,t) \mapsto (1-t)x + tb$ è un'omotopia della coppia $(X, X \smallsetminus \{a\})$ con la coppia (b, b) (si ricordi che se b è interno al convesso X ogni punto del segmento $[b, x[$ è interno ad X, per ogni $x \in X$). Da ciò deriva che un omeomorfismo locale di un convesso in se stesso deve trasformare punti frontiera in punti frontiera.

Le sfere sono localmente omeomorfe agli spazi $\mathbb{R}^n$, e quindi hanno ovviamente gli stessi gruppi di omologia locale, $H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n \smallsetminus \{a\}) \approx \mathbb{Z}$.

Esercizio 11. Lo spazio X sia l'unione di m semirette uscenti dall'origine in $\mathbb{R}^2$. Calcolare l'omologia $H_\bullet(X, X \smallsetminus \{a\})$ al variare di $a \in X$.

8.18. **Successione di omologia di una terna.** Sia X spazio e siano $B \subseteq A \subseteq X$ sottospazi. L'inclusione della coppia (A, B) nella coppia (X, B) porge il morfismo di catene $C_\bullet(A, B) \to C_\bullet(X, B)$, chiaramente iniettivo, e con conucleo $C_\bullet(X, B)/C_\bullet(A, B)$ isomorfo a $C_\bullet(X, A)$. Si ha insomma la sequenza esatta corta di complessi

$$0 \longrightarrow C_\bullet(A, B) \longrightarrow C_\bullet(X, B) \longrightarrow C_\bullet(X, A) \longrightarrow 0$$

che fornisce la sequenza esatta lunga della terna:

$$\cdots \leftarrow H_{k-1}(A, B) \xleftarrow{\partial_*} H_k(X, A) \longleftarrow H_k(X, B) \longleftarrow H_k(A, B) \xleftarrow{\partial_*} H_{k+1}(X, A) \leftarrow \dots$$

8.19. **Omologia di prodotti con sfere.** Vediamo di utilizzare la sequenza esatta della terna per trovare l'omologia di $\mathbb{S}^n \times X$, prodotto della sfera $\mathbb{S}^n$ per uno spazio X. Il problema generale di trovare l'omologia di un prodotto note le omologie dei fattori non è banale: l'omologia $H_\bullet(X \times Y)$ è collegata al prodotto tensoriale $H_\bullet(X) \otimes H_\bullet(Y)$, nel senso che, in modo naturale, si hanno sequenze esatte:

$$0 \to \bigoplus_{k=0}^m H_{m-k}(X) \otimes H_k(Y) \longrightarrow H_m(X \times Y) \longrightarrow \bigoplus_{k=0}^m \mathrm{Tor}(H_{m-k}(X), H_k(Y)) \longrightarrow 0$$

(teorema di Eilenberg–Zilber) ma noi ci occuperemo solo di questo caso particolare semplice in cui un fattore è una sfera.

Consideriamo la terna $(\mathbb{B}_n \times X, \mathbb{S}^{n-1} \times X, U \times X)$, dove $U = \mathbb{S}^{n-1} \smallsetminus \{x_n > -1/2\}$. La successione esatta della terna è

$$(*) \qquad \begin{aligned} &\cdots \leftarrow H_{k-1}(\mathbb{S}^{n-1} \times X, U \times X) \longleftarrow \\ \longleftarrow H_k(\mathbb{B}_n \times X, \mathbb{S}^{n-1} \times X) \longleftarrow H_k(\mathbb{B}_n \times X, U \times X) \longleftarrow &H_k(\mathbb{S}^{n-1} \times X, U \times X) \longleftarrow \\ &\longleftarrow H_{k+1}(\mathbb{B}_n \times X, \mathbb{S}^{n-1} \times X) \leftarrow \dots \end{aligned}$$

La coppia $(\mathbb{B}_n \times X, U \times X)$ si retrae per deformazione su $(\text{polo nord} \times X, \text{polo nord} \times X)$ e la sua omologia è quindi nulla. Si hanno quindi isomorfismi

$$0 \longleftarrow H_{k-1}(\mathbb{S}^{n-1} \times X, U \times X) \longleftarrow H_k(\mathbb{B}_n \times X, \mathbb{S}^n \times X) \longleftarrow 0$$

Per escissione si ha ora un isomorfismo $H_{k-1}(\mathbb{S}^{n-1} \times X, U \times X) \approx H_{k-1}((\mathbb{S}^{n-1} \smallsetminus W) \times X, (U \smallsetminus W) \times X)$, dove $W = \{x \in \mathbb{S}^n : x_n \geq 1/2\}$; ed è anche chiaro che se $n \geq 2$ si ha una retrazione per deformazione della coppia $(\mathbb{S}^{n-1} \smallsetminus W) \times X, (U \smallsetminus W) \times X)$ sulla coppia $(\mathbb{B}_{n-1} \times X, \mathbb{S}^{n-2} \times X)$. In definitiva si hanno isomorfismi naturali ($n \geq 2$):

$$0 \longleftarrow H_{k-1}(\mathbb{B}_{n-1} \times X, \mathbb{S}^{n-2} \times X) \longleftarrow H_k(\mathbb{B}_n \times X, \mathbb{S}^{n-1} \times X) \longleftarrow 0$$

Se $n = 1$ la successione $*$ diventa

$$(**) \qquad \begin{aligned} &\cdots \leftarrow H_{k-1}(\{-1,1\} \times X, \{1\} \times X) \\ \longleftarrow H_k(I \times X, \{-1,1\} \times X) \longleftarrow H_k(I \times X, \{1\} \times X) \longleftarrow &H_k(\{-1,1\} \times X, \{1\} \times X) \\ &\longleftarrow H_{k+1}(I \times X, \{-1,1\} \times X) \leftarrow \dots \end{aligned}$$

Per escissione a primo membro si ha ancora $H_{k-1}(\{-1,1\} \times X, \{1\} \times X) \approx H_{k-1}(\{-1\} \times X, \emptyset) = H_{k-1}(X)$. Si è in definitiva mostrato che si ha un isomorfismo naturale

$$H_k(\mathbb{B}_n \times X, \mathbb{S}^{n-1} \times X) \xrightarrow{\text{iso}} H_{k-n}(X)$$

Scriviamo ora l'omologia della terna $(\mathbb{B}_{n+1} \times X, \mathbb{S}^n \times X, \{a\} \times X)$, dove a è un punto di $\mathbb{S}^n$; è chiaro che è $H_k(\mathbb{B}_{n+1} \times X, \{a\} \times X) \approx H_k(\{a\} \times X, \{a\} \times X) = 0$, per cui tale sequenza è ancora una successione di isomorfismi:

$$0 \longleftarrow H_k(\mathbb{S}^n \times X, \{a\} \times X) \longleftarrow H_{k+1}(\mathbb{B}_{n+1} \times X, \mathbb{S}^n \times X) \longleftarrow 0$$

e combinando con il precedente isomorfismo si ottiene un isomorfismo naturale

$$H_k(\mathbb{S}^n \times X, \{a\} \times X) \overset{\text{iso}}{\to} H_{k-n}(X).$$

Proposizione. *Sia X spazio topologico, e sia $n \geq 1$ intero. Sia $q : \mathbb{S}^n \times X \to X$ la seconda proiezione. Esistono isomorfismi naturali*

$$H_k(\mathbb{S}^n \times X) \xrightarrow{(\rho, q_*)} H_{k-n}(X) \oplus H_k(X)$$

Dimostrazione. Fissato $a \in \mathbb{S}^n$ la seconda proiezione q è identificabile con una retrazione, e pertanto, come visto in ??, $H_k(\mathbb{S}^n \times X)$ si spezza in una somma diretta $H_k(\mathbb{S}^n \times X, \{a\} \times X) \oplus H_k(\{a\} \times X)$; per quanto appena visto si ha $H_k(\mathbb{S}^n \times X, \{a\} \times X) \approx H_{k-n}(X)$, e chiaramente $H_k(\{a\} \times X) = H_k(X)$. $\square$

Siamo così in grado di calcolare l'omologia di ogni prodotto di sfere. Si noti in particolare che si ha $H_n(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n) \approx H_0(\mathbb{S}^n) \oplus H_n(\mathbb{S}^n) \approx \mathbb{Z}^2$.

Facciamo un'ulteriore osservazione. Dati due spazi topologici X ed Y, fissato $a \in X$ a $b \in Y$ si hanno le immersioni

$$i : X \to X \times Y,\ j : Y \to X \times Y \quad \text{date da} \quad i(x) = (x, b),\ j(y) = (a, y),$$

e se $p : X \times Y \to X$, $q : X \times Y \to Y$ sono rispettivamente la prima e seconda proiezione si ha $p \circ i = 1_X$, $q \circ j = 1_Y$ (mentre $p \circ j$ e $q \circ i$ sono costanti); ne viene che se si considera il diagramma

$$H_\bullet(X) \oplus H_\bullet(Y) \xrightarrow{(i_*, j_*)} H_\bullet(X \times Y) \xrightarrow{(p_*, q_*)} H_\bullet(X) \oplus H_\bullet(Y)$$

la composizione $(p_*, q_*) \circ (i_*, j_*)$ è l'identit'a di $H_\bullet(X) \oplus H_\bullet(Y)$; ne segue che (i_*, j_*) è iniettivo e che $H_\bullet(X \times Y)$ si spezza nella somma diretta dell'immagine di questo e del nucleo di (p_*, q_*). Preso $X = Y = \mathbb{S}^n$, a livello n si ha da precedente diagramma

$$H_n(\mathbb{S}^n) \oplus H_n(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{(i_*, j_*)} H_\bullet(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n) \xrightarrow{(p_*, q_*)} H_\bullet(\mathbb{S}^n) \oplus H_\bullet(\mathbb{S}^n)$$

e poiché $H_n(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n) \approx \mathbb{Z}^2$ non ha addendi diretti propri isomorfi a $\mathbb{Z}^2$. Nel diagramma precedente sia (i_*, j_*) che (p_*, q_*) sono isomorfismi: un generatore di $H_n(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n)$ si ottiene semplicemente con una coppia di generatori di $\mathbb{S}^n$. Ne viene che ad una funzione continua $\mu : \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ è associato un *bigrado*, nel senso che esiste una coppia ordinata di interi $(d_1, d_2) \in \mathbb{Z}^2$ tali che l'omomorfismpo $\mu_* : H_n(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n) \to H_n(\mathbb{S}^n)$ sia descritto da $\mu_*([z_1], [z_2]) = d_1[z_1] + d_2[z_2]$, per ogni coppia di classi di omologia di $n-$cicli $([z_1], [z_2]) \in H_n(\mathbb{S}^n) \oplus H_n(\mathbb{S}^n)$; d_1 è il grado della funzione $x \mapsto \mu(x, b)$, qualunque sia $b \in \mathbb{S}^n$ (si noti che due scelte diverse di b danno luogo a funzioni omotope, essendo $\mathbb{S}^n$ connesso per archi), analogamente d_2 è il grado della funzione $x \mapsto \mu(a, x)$. Se la legge di composizione μ ammette un elemento neutro $e \in \mathbb{S}^n$, anche soltanto a meno di omotopia, allora essa ha bigrado $(1, 1)$. Si può fare la composizione $\mu \circ (f, g)$ di due funzioni continue $f, g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$; il grado della composizione è allora chiaramente $d_1 \deg f + d_2 \deg g$, se (d_1, d_2) è il bigrado di μ. Su $\mathbb{S}^1$ e su $\mathbb{S}^3$ esistono strutture di gruppo; le funzioni $z \mapsto z^k$ hanno, in entrambi tali gruppi, grado k.

9. Coomologia singolare

9.1. **Definizione.** Se (K, ∂) è un complesso di catene formato da gruppi abeliani

$$\dots \longleftarrow K_{n-1} \xleftarrow{\partial_n} K_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} K_{n+1} \longleftarrow \dots$$

applicando ad esso il funtore $\mathrm{Hom}(-, G)$, dove G è un fissato gruppo abeliano, si ottiene un complesso di cocatene $(\mathrm{Hom}(K; G), \delta)$:

$$\dots \longrightarrow \mathrm{Hom}(K_{n-1}, G) \xrightarrow{\delta_{n-1}} \mathrm{Hom}(K_n; G) \xrightarrow{\delta_n} \mathrm{Hom}(K_{n+1}; G) \longrightarrow \dots$$

dove naturalmente $\delta_n(\varphi) = \varphi \circ \partial_{n+1}$. Questo complesso ha una coomologia che sarà indicata con $H^\bullet(\mathrm{Hom}(K; G))$. Si ha ora un omomorfismo naturale

$$\alpha : H^n(\mathrm{Hom}(K; G)) \to \mathrm{Hom}(H_n(K); G)$$

legato all'applicazione bi–additiva naturale

$$\langle -, - \rangle : \mathrm{Hom}(K_n; G) \times K_n \to G \qquad \langle \varphi, x \rangle = \varphi(x)$$

che induce un' applicazione bi–additiva tra le rispettive classi di coomologia ed omologia

$$\langle -,- \rangle : H^n(\mathrm{Hom}(K;G)) \times H_n K \to G,$$

come è facile vedere. Ebbene

. TEOREMA UNIVERSALE DEI COEFFICIENTI PER LA COOMOLOGIA. *Nelle ipotesi precedenti, se K è formato da gruppi abeliani liberi si ha una sequenza esatta*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(H_{n-1}K;G) \xrightarrow{\beta} H^n(\mathrm{Hom}(K;G)) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Hom}(H_n(K);G) \longrightarrow 0.$$

Dimostrazione. Vedere [M]. □

Ricordiamo che $\mathrm{Ext}(A;G) = 0$ se G è iniettivo (ovvero divisibile). La coomologia singolare a coefficienti in G di uno spazio topologico X si ottiene come sopra detto dall'omologia singolare applicando il funtore $\mathrm{Hom}(-;G)$ all'omologia singolare a coefficienti interi. Essendo $\mathbb{R}$ divisibile la coomologia singolare a coefficienti reali coincide con $\mathrm{Hom}(H_n X;\mathbb{R})$ per ogni n; il teorema di de Rham può quindi enunciarsi anche dicendo che la coomologia di de Rham è , per una varietà differenziale, isomorfa alla coomologia singolare a coefficienti reali.

9.2. **Teorema universale dei coefficienti per l'omologia.** Il prodotto tensoriale $G \otimes C_p X$, essendo $C_p X$ abeliano libero, può essere pensato come l'insieme degli elementi della forma

$$g_1 \otimes c_1 + \cdots + g_N \otimes c_N,$$

$p-$catene a coefficienti in G, dove i $c_1, \ldots, c_N$ sono $p-$cubi. In altre parole, usando il funtore covariante $G \otimes (-)$ si trasforma il complesso $(C_p X, \partial_p)$ nel complesso $(G \otimes C_p X, 1_G \otimes \partial_p)$. L'omologia di questo, per definizione, è l'omologia a coefficienti in G. In generale, dato un complesso (K, ∂) di catene, ed un gruppo abeliano G, si può fare il complesso $(G \otimes K, 1_G \otimes \partial)$, la cui omologia sarà indicata con $H_\bullet(G \otimes K)$; si ha un omomorfismo naturale

$$\alpha : G \otimes H_n K \to H_n(G \otimes K)$$

definito da $g \otimes [z] = [g \otimes z]$ per ogni classe di omologia $[z]$ di un ciclo $z \in Z_n K$; si prova facilmente che tale definizione è buona.

Si ha il seguente risultato algebrico di carattere generale

. TEOREMA UNIVERSALE DEI COEFFICIENTI PER L'OMOLOGIA. *Nelle ipotesi precedenti, se K è formato di gruppi abeliani liberi si ha una sequenza esatta*

$$0 \longrightarrow G \otimes H_n K \xrightarrow{\alpha} H_n(G \otimes K) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Tor}(G, H_{n-1}K) \longrightarrow 0.$$

Dimostrazione. Vedere [M] □

Si sa che $\mathrm{Tor}(A, B) = 0$ se uno dei due gruppi abeliani A, B è senza torsione. Poichè $\mathbb{R}$ è senza torsione, $H_p(X, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R} \otimes H_p(X, \mathbb{Z})$, per ogni spazio topologico X.