PROPAGANDA D'ISTRUZIONE

BIBLIOTECA DEL POPOLO
Centesimi 50 il volume

Ing. ANTONIO MARINO

SEZIONI CONICHE

Con 43 figure

Ogni volumetto consta di 64 pagine di fitta composizione e contiene un completo trattatello elementare di scienza pratica, di cognizioni utili ed indispensabili, dettato in forma popolare, succinta, chiara, alla portata d'ogni intelligenza. ....

CASA EDITRICE SONZOGNO — MILANO

Via Pasquirolo, 14.

OGNI VOLUME 50 CENTESIMI

VOLUME 637

INDICE

Generalità . . . . Pag. 3
Ellisse . . . . » 4
Iperbole . . . . » 33
Parabola . . . . » 46

Milano. — Stab. Grafico Matarelli, via Passarella, 13-15.
c-20-o

SEZIONI CONICHE

GENERALITÀ.

Si consideri un circolo ed un punto O fuori di esso; si supponga una retta passante per O o per un punto qualunque della circonferenza; se noi facciamo rotare la retta attorno ad O mantenendosi sempre a contatto con la circonferenza, a rotazione compiuta avremo due coni opposti al vertice, con le generatrici una prolungamento dell'altra. Un piano qualunque che passi per il punto O, vertice del cono, e taglia la superficie del solido, incontra questo secondo due rette ed il piano di base secondo un'altra retta, formando così un triangolo. Se il piano secante non passa per il vertice ma è parallelo alla base, ed il cono che si considera è retto, la sezione sua col piano secante è un cerchio. Si chiama *asse* del cono quella retta che passa per il vertice del cono e per il centro della sua base.

Se questa retta è perpendicolare alla base essa diventa l'*altezza* del solido, ed il solido si dirà *retto;* in caso contrario si dirà *obliquo*.

Se un piano passa per il vertice e per l'asse del cono, senza che questo sia perpendicolare alla base, l'intersezione di siffatto piano con la superficie conica si chiama *sezione principale*.

ELLISSE.

L'*ellisse* è quella curva generata quale intersezione della superficie conica con un piano perpendicolare alla sezione principale. L'ellisse ha pure per nome: *sezione conica, curva conica.*

Osservazione. — Una retta non incontra la conica in più di due punti; e si dirà *secante;* se la incontra in un sol punto, la si dirà *tangente.*

Teorema. — *L'ellisse, cioè la curva sezione d'un piano perpendicolare alla sezione principale con la superficie conica, è tale che ha costante la somma delle congiungenti due suoi punti fissi interni con un punto qualunque della curva conica.*

Infatti si immagini la sezione principale individuata dalle generatrici $C\,O\,D$; ad essa perpendicolare la sezione conica $A\,M\,B$.

Nel triangolo $O\,A\,B$ inscrivo un circolo che risulterà tangente ai lati OA, OB, AB rispettivamente nei punti E, H, F; un altro circolo si inscriverà nella figura aperta $C\,A\,B\,D$, in modo che risulti tangente ai lati CA, AB, AD nei punti C, F', D.

Fatto ciò si faccia rotare il sistema così ottenuto attorno all'asse del cono; e poichè si è detto che la sezione principale $C\,O\,D$ passa per l'asse del cono, i due circoli si trasformeranno in due sfere e le rette tangenti ai circoli lo resteranno alle sfere.

Se M è un punto qualsiasi della curva ellisse, unito con O rappresenterà una generatrice del cono, e la retta OM, diventerà tangente alle due sfere suddette nei due punti P ed R. Inoltre i punti E ed H punti di tangenza con il cerchio EFH, resteranno punti di tangenza delle generatrici EO, OH con la sfera generata dalla rotazione del circolo suddetto; così EPH si troveranno su una curva, i cui punti saranno tutti i luoghi di tangenza delle generatrici uscenti da O e tangenti alla sfera suddetta.

Analogamente C, R, D sono punti di tangenza delle stesse generatrici avanti considerate con la sfera generata dal circolo $C F^1 D$.

Premesso ciò veniamo alla dimostrazione.

Si congiunga M con i punti F ed F^1 della conica. Poichè

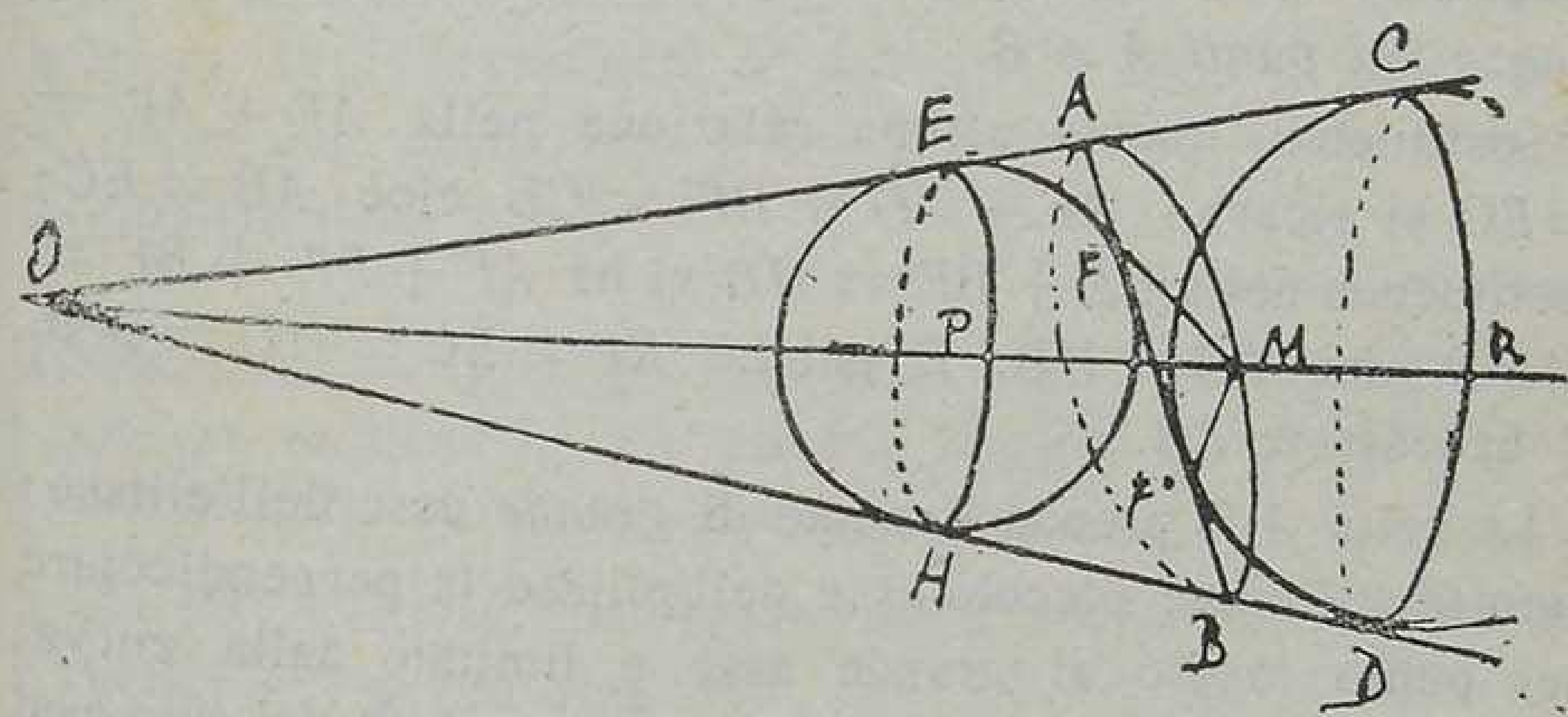

Fig. 1.

M è esterno alla sfera minore, sarà $PM = FM$ perchè tangenti da M alla stessa sfera; e per la medesima ragione $MR = MF'$; sommando le due eguaglianze si ha $PM + MR = MF + MF' = PR$. Ma $OC = OD = OR$ perchè tangenti da O alla stessa sfera; $OE = OH = OP$ per la stessa ragione, ed allora anche le differenze di tali tangenti saranno eguali fra di loro; cioè $EC = HD = PR$; cioè sono costanti tutti i segmenti così individuati e compresi fra le due sfere, ma $MF + MF' = PR$ dunque $MF + MF' = cost.$ c. d. d. I segmenti MF ed MF' si dicono *raggi vettori*.

Veniamo ad individuare il valore della costante

Poichè A e B sono punti esterni alle circonferenze; si ha: $EA = AF$ $AC = AF'$ e sommando $EA + AC = AF + AF'$ cioè $EC = AF + AF'$

D'altro canto $HB = BF$ $DB = BF'$ e sommando $HB + BD = BF + BF'$ cioè $HD = BF + BF'$. Osservando che $HD = EC$ per ciò che si dimostrò innanzi; si ha $AF + AF' = BF + BF'$; ma dalla figura si ha $AF' = AF + FF'$ come $BF = BF' + FF'$ e sostituendo nella ultima eguaglianza $AF + AF + FF' = BF' + BF' + FF'$ ossia riducendo: $2AF = 2\,BF'$ ossia $AF = BF'$; il che dimostra una importante proprietà: *cioè i punti fissi F ed F' stanno ad eguale distanza dai punti A e B.*

Sostituendo questa ultima relazione nella $AF + AF' = EC$ si ricava: $AF + FF' + BF' = CE$ cioè $AB = EC$; sostituendo nella $BF + BF' = HD$ si ha $AF + FF' + BF' = HD$ cioè $AB = HD$. E poichè $RP = EC = HD =$ cost. si ha cost. $= AB$.

La retta $A\,B$ prende il nome di *grande asse* dell'ellisse; mentre ha nome *piccolo asse* dell'ellisse la perpendicolare nel punto medio al grande asse e limitato dalla curva. Sono *vertici* della curva le quattro intersezioni dei due assi con la curva. Il punto medio incontro dei due assi, si chiama *centro* dell'ellisse; sono *fuochi* di essa curva i punti F ed F'. Il grande asse lo si indica con $2\,a$; il piccolo asse con $2\,b$; la distanza fra i fuochi si chiama *eccentricità* e si indica con $2\,c$. Si comprende che i vertici essendo simmetrici, come pure i fuochi rispetto al centro dell'ellisse; sarà a la distanza dal centro ad uno dei vertici del grande asse; b la distanza dal centro ad uno dei vertici del piccolo asse, e c le semi eccentricità, distanza dal centro ad un fuoco.

In particolare; se la eccentricità si riduce sempre più la conica diventa a mano a mano più rotonda; per $2\,c = 0$ e $a = b$ la ellisse si riduce al cerchio di raggio a.

Proprietà. — Dal teorema su dimostrato si osserva che $AA' = 2a = MF + MF'$.

Se adesso considero l'asse minore BB', poichè è eguale a $2b$; avrò nel triangolo rettangolo BoF che $Bo = b$ $oF = c$ $BF + BF' = 2a$ e poichè $BF = BF'$ $2BF = 2a$ da cui $BF = a$. Allora il triangolo rettangolo ci dà la relazione $a^2 = b^2 + c^2$. Poichè $BF = BF'$ e $BA = BA'$ si ha che l'asse minore BB' è un asse di simmetria della curva.

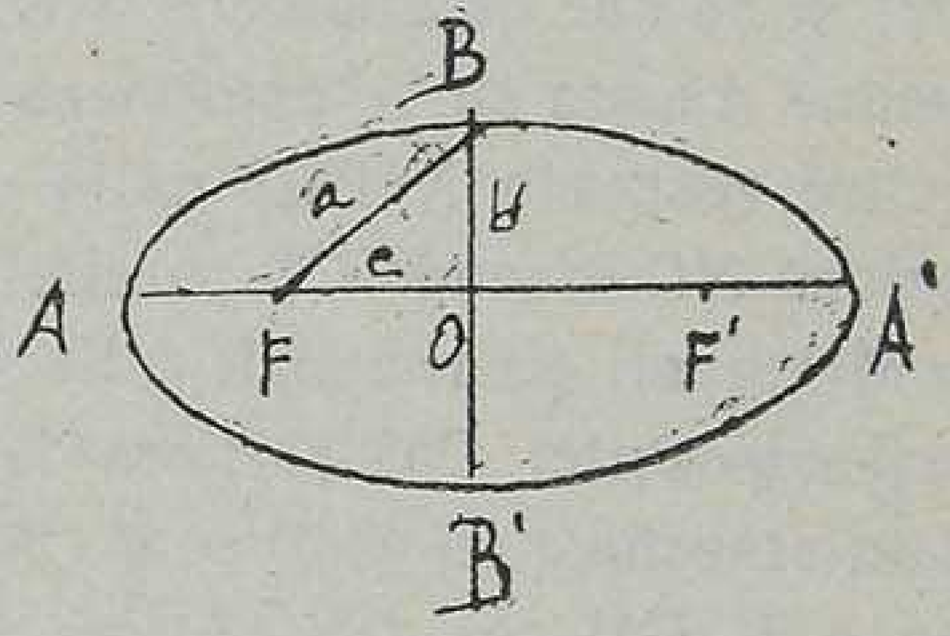

Fig. 2.

Teorema. — *L'ellisse ammette due assi di simmetria che si tagliano in un punto; centro di simmetria, e centro della curva medesima.*

Sia FF' l'ellisse, individuata per i suoi fuochi; A ed A' i vertici sul grand'asse. I punti C e D siano due punti determinati quali intersezioni di raggi vettori eguali $FC = F'D$ $FD = F'C$; allora la retta CD risulta parallela al grande asse. Unisco C e D con A ed A'; la figura $CDA'A$ è un trapezio isoscile, ed ha le diagonali tagliantesi in M. La retta BM, passante per il punto medio O di AA' e per M dovrebbe essere il piccolo asse. Dimostriamo ciò ed avremo dimostrato che C e D sono egualmente distanti da BB', cioè questo è un asse di simmetria.

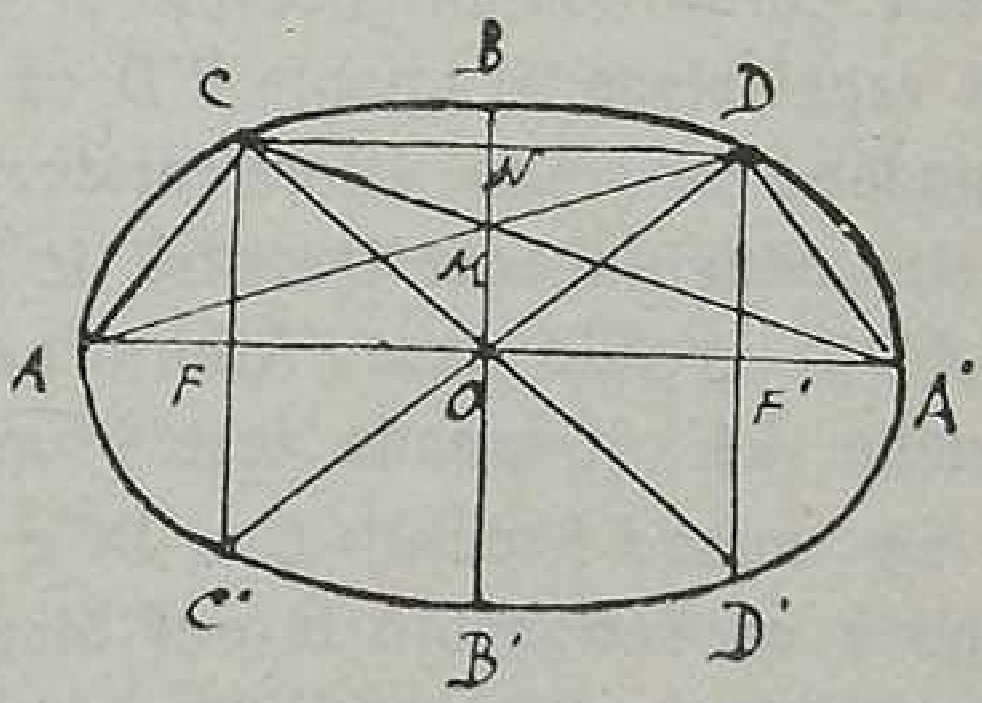

Fig. 3.

Infatti se facciamo rotare la figura $CNOA$ attorno ad ON, si ha che essendo $OA = OA'$, restando O fisso nella rotazione A cade su A'; restando M fisso, AM cadrà su $A'M$; inoltre restando N fisso nella rotazione, CN piglierà la direzione ND essendo CD parallela ad AA', ed essendo $CM = MD$ quali parti eguali delle diagonali $AD = A'C$ del trapezio isoscile, CM piglierà la direzione MD ed il punto C intersezione di CM con CN, coinciderà con D intersezione di DM con DN. Allora la CD sarà una retta divisa per metà dalla BB' nel posto N; risulta inoltre a questa perpendicolare, ossia C e D distano egualmente da B e B'; e poichè i punti C e D sono arbitrarî, e coppie simili si possono sempre scegliere ferma restando la deduzione fatta, si osserva che la proprietà vale per tutti i punti dell'ellisse e BB' è un asse di simmetria della curva.

Se adesso si abbassano le perpendicolari CC', DD' all'asse maggiore; poichè C' e D' sono punti intersezione dei cerchi di centri F ed F' e di raggi eguali ai raggi vettori $CF' = FD$ $CF = F'D$; le rette CC', DD' risulteranno delle corde comuni a cerchi di cui i centri sono i fuochi e di raggi rispettivamente $F'D$ ed FD; $F'C$ ed FC. Le corde suddette saranno allora divise per metà e normalmente dalla congiungente i centri, la quale è la retta FF', cioè AA', il grande asse. Allora avremo così dimostrato che anche AA', il grande asse è un asse di simmetria.

Se unisco i punti C e D' e D con C' ottengo $CDD'C'$ che è un rettangolo le cui diagonali CD', DC' si tagliano rispettivamente per metà e fra di loro sono eguali. Intanto osservo che le rette BB' ed AA', che uniscono i punti medî del rettangolo si tagliano in O; punto ove devono incontrarsi e tagliarsi le diagonali; quindi diremo che la curva ha un punto di simmetria, determinato dallo incontro dei due assi di simmetria, e che abbiamo chiamato centro della curva. Le rette come CD' e $D'C'$ sono rette passanti per il centro e sono incontrate a metà. Si è inoltre visto che le corde come la CD parallele ad un asse, sono tagliate dall'altro asse per metà.

Veniamo alla costruzione dell'ellisse per punti.

Supponiamo conosciuto il valore $2a$ e quello $2c$, b sarà dato dalla relazione $a^2 = b^2 + c^2$. Si tracci un segmento $= 2a$ e si divida per metà in O, vi si innalzi una perpendicolare BB' e si scelga $OB = OB' = b$; si prenda poi $OF = OF' = c$. I punti A, A', B e B' sono punti dell'ellisse. Determiniamo adesso altri punti della curva. Si prenda ad esempio il punto R e con raggio AR centro in F' si descriva un arco di cerchio che si farà intersecare con un altro arco di centro F e di raggio $A'R$. Si hanno due punti 1 e 2 che appartengono all'ellisse, perchè $1F' + 1F = AR + A'R = 2a$. Lo stesso per il punto 2. Se adesso con gli stessi raggi AR ed $A'R$ si fanno centri in F ed F' si hanno altri 2 punti come i precedenti. Così ogni punto come R dà 4 punti della ellisse. Del resto per la simmetria della curva, su dimostrata; basta avere un punto per avere gli altri tre. Infatti se è noto il punto 1: si può da esso abbassare la normale all'asse maggiore prendendo su essa il punto 2, simmetrico al punto 1. Poi congiunti 1 e 2 con il centro O si prolunghino tali rette di segmenti eguali ad $O\,1$ e si hanno gli altri punti domandati.

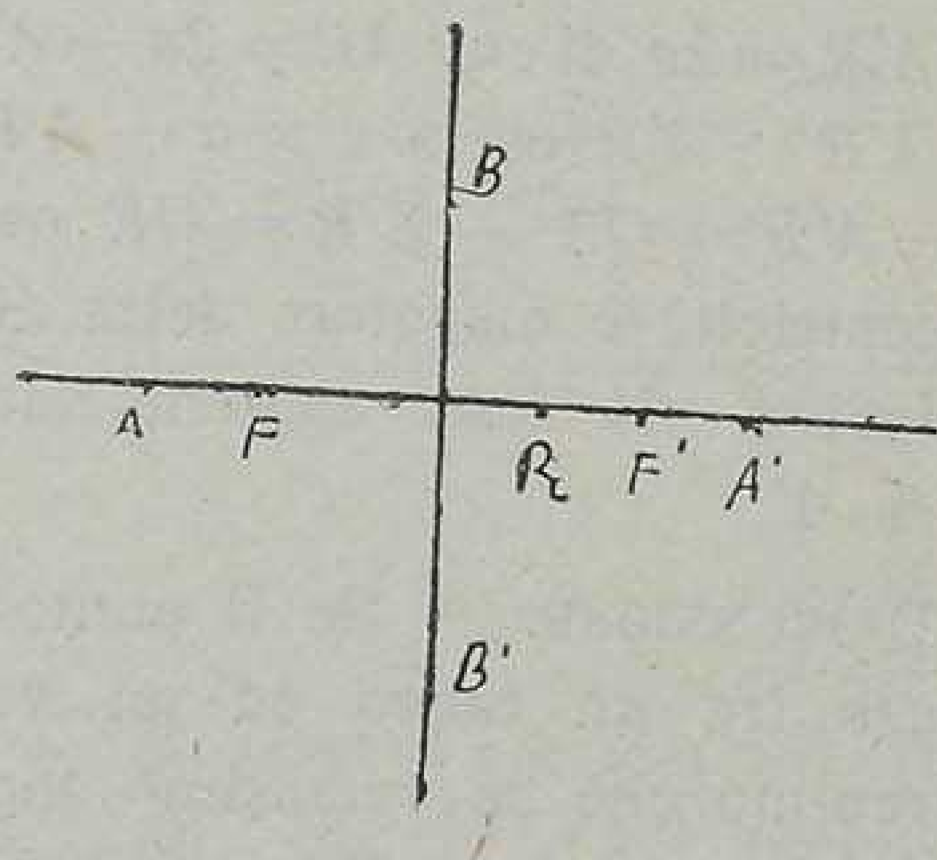

Fig. 4.

Così con una lunga successione di punti così determinati si può ottenere, congiungendoli, la curva richiesta.

Osservazione. — I punti trovati nel modo suddetto sono sempre possibili solo quando le circonferenze di centro i fuochi si intersecano. Vediamo quando ciò si avvera. È necessario che la congiungente i centri sia minore della somma dei raggi e maggiore della loro differenza. In quanto alla prima considerazione; la congiungente i centri è la eccentricità $2c < 2a$ somma dei raggi; per la seconda asserzione, facciamo le considerazione seguente. Se è dato R che ci fornisce i 4 punti già trovati dalla curva, dovrebbe essere $FF' > AR - A'R$.; cioè $2c > AR - A'R$ ma $AR + A'R = 2a$ di cui $AR = 2a - A'R$ e sostituendo $2c > 2a - A'R - A'R$ ossia $c > a - A'R$. Dalla figura si ha che $a - A'R = OA' - A'R = OR$ ossia $c > OR$ cioè la semi-eccentricità è maggiore della differenza dei raggi vettori e quindi a più forte ragione sarà la eccentricità $2c > OR$ c.d.d.

Discussione. — Se il punto R diventa il punto S compreso fra un fuoco ed un vertice, per es. fra F ed A, avremmo che se volessimo anche qui ritenere vera la 2ª proprietà, si dovrebbe ottenere $2c > SA' - AS$; ma $SA' + AS = 2a$ da cui $AS' = 2a - AS$ e sostituendo $2c > 2a - AS - AS$ ossia $c > a - AS$. Ma $a - AS = OS$ ed allora si dovrebbe avere $c > OS$; però si osserva che il punto S cade fra F ed A, cioè è più distante di F da O ed allora la relazione $c > OS$ non può ammettersi; mentre sussiste però la relazione $2c < AS' + AS$ cioè $2c < 2a$.

Se adesso il punto che si considera è il fuoco, per es. F, si vede che i cerchi che si vogliono tracciare non danno punti di intersecazione, ma sono tangenti nei fuochi, essendo uno dentro l'altro.

I punti dunque compresi fra i fuochi ed i vertici non danno punti delle curve. Si osserva inoltre che le distanze generiche $1F' + 1F = 2a$ cambiano in modo tale che crescendo una di esse diminuisce l'altra di quantità eguale, dando sempre $2a$ per somma. Allora il minimo raggio vettore sarà AF ed il massimo $A'F$. Si avrà inoltre un'eguaglianza cioè $1F = 1F'$ e ciò quando 1 cada su B o B'.

Teorema. — *Preso un punto esterno all'ellisse, il grande asse $2a$ è maggiore della differenza delle congiungenti il punto con i fuochi ed è minore della somma delle congiungenti stesse.*

Infatti sia O il punto esterno che unisce con i fuochi; allora dalle proprietà dei triangoli, $OP + OF' > PF'$ ed aggiungendo PF; si ha $OP + PF + OF' > PF' + PF$ ma $PF' + PF = 2a$ e $OP + PF = OF$ si ha $OF + OF' > 2a$. che

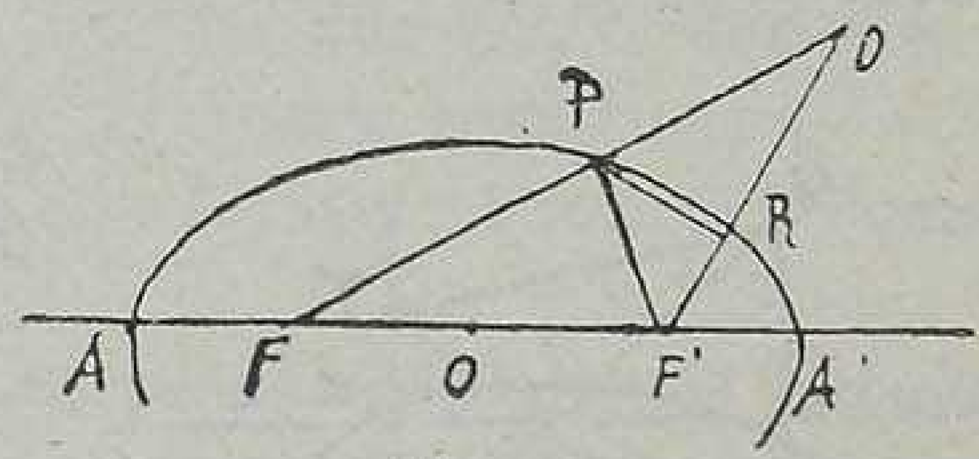

Fig. 5.

dimostra la seconda parte. — Si osservi ora che sul triangolo OFF' si ha $FF' > OF - OF'$ ma $2a > FF'$ dunque a maggior ragione $2a > OF - OF'$, che dimostra la 1^a proprietà.

Teorema. — *Preso un punto interno all'ellisse, il grande asse $2a$ è maggiore della somma delle congiungenti i fuochi col punto; ed è pure maggiore della loro differenza.*

Infatti il punto O si unisca con i fuochi, e prolungo OF in P. Nel triangolo OPF' si ha $OF' < OP + PF'$ e sommandovi OF'. si ha $OF' + OF < < OP + PF' + OF$. Ma $OP + PF' + OF = 2a$ quindi $2a > OF + OF'$; che dimostra lo 1^a proprietà.

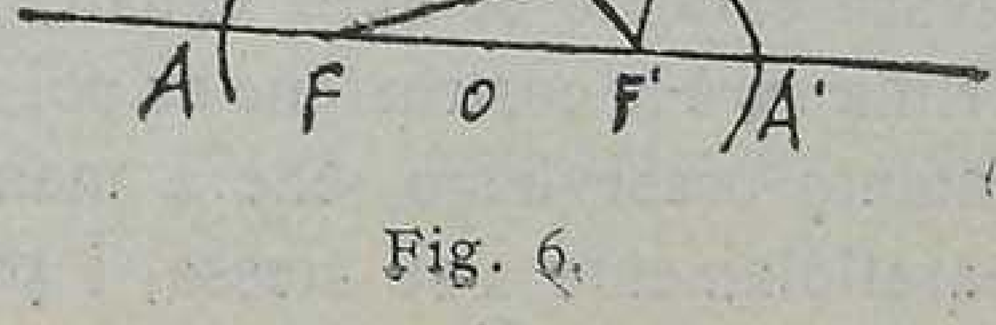

Fig. 6.

Anche qui si ha nel triangolo OFF' che $OF - OF' < 2c$ ma $2a > 2c$ dunque anche $2a > OF - OF'$. chc dimostra ia 2^a proprietà.

Teorema. — *La tangente ad un punto qualunque della ellisse fa angoli eguali con i raggi vettori congiungenti il punto di tangenza con i fuochi.*

Sia SR una corda all'ellisse che taglia la curva nei punti V e Z; dai fuochi innalzo le normali alla corda che cadono in S ed R e sul loro prolungamento prendo $RT =$ $= F'R$ $US = SF$; congiungo i fuochi con T ed U. La figura $UTFF'$ è un trapezio isoscile, perchè i lati UF e TF' paralleli, i punti U e F; F' e T egualmente distanti coppia a coppia dalla SR: inoltre SR è un asse di simmetria del trapezio.

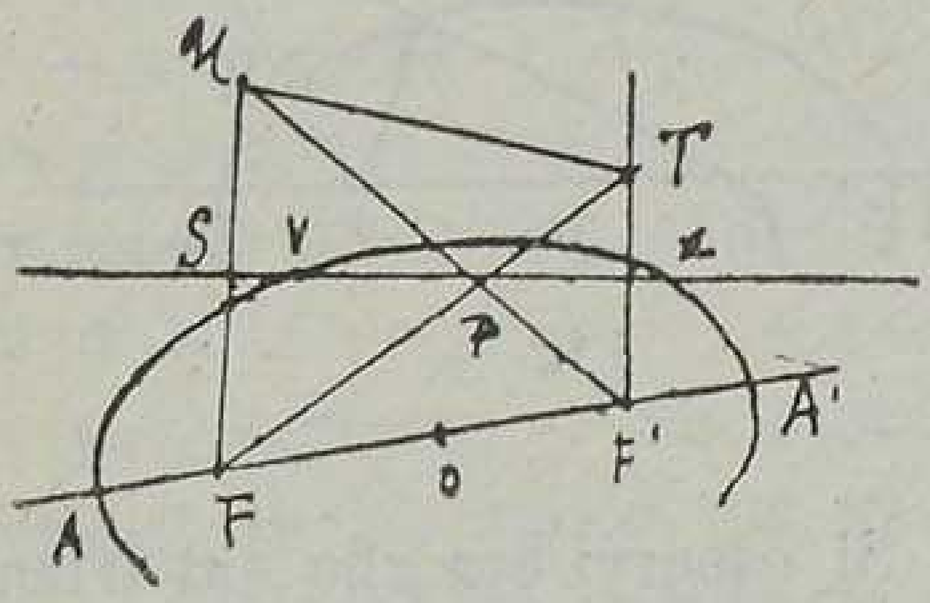

Fig. 7.

Per la eguaglianza dei triangoli TPR ed RPF', aventi gli angoli TRP, $F'RP$ eguali perchè retti; PR in comune, $TR = RF'$ per costruzione, sarà l'angolo $TPR =$ all'angolo $F'PR$. Ma gli angoti TPR ed FPS sono eguali perchè opposti al vertice, sarà l'angolo RPF' eguale all'angolo SPF.

Se la corda SR si sposta parallelamente a sè stessa, e per ogni sua nuova posizione avremo sempre vera la proprietà su dimostrata; cioè gli angoli che le congiungenti i nuovi punti come P, formano con i fuochi e la corda stessa saranno sempre eguali, perchè sempre identica alla prima sarà la costruzione da noi fatta per queste nuove corde. Intanto osserviamo, che a mano a mano la corda si sposta parallelamente a se stessa, i punti di contatto V e Z, allineati con P, si renderanno sempre più vicini, comprendendo sempre fra loro il punto P. Ne viene di conseguenza che nello spostamento, si arriverà al punto che la corda SR diventa la tangente SR alla curva; i punti V, P, Z coincideranno in uno solo, P, e resteranno sempre immutate le proprietà degli angoli; cioè i raggi vettori congiungenti il punto di tangenza ai fuochi formano con la tangente angoli eguali.

Osservazione. — Se la tangente è parallela all'asse maggiore, il trapezio si trasforma in un rettangolo; il punto di tangenza diventa uno dei due vertici dell'asse minore; ed in particolare, se in questa condizione $b = c$, gli angoli che la tangente fa con i raggi vettori del punto di contatto sono di 45°.

Se la tangente diventa perpendicolare all'asse maggiore, essa passerà per uno dei vertici di questo; e la figura piana trapezio si trasforma in una serie di rette sovrapposte all'asse maggiore; gli angoli formati dalla tangente coi raggi vettori sono entrambi eguali a 90°.

Luoghi geometrici dell'ellisse.

Dal T. della tangente, sappiamo che $SPF = F'PR$. Unendo R con O; si hanno due triangoli SFF' e RFO che sono simili; cioè $SF' : RO = FF' : FO$ ed osservando che $FF' = = 2OF = 2c$ sostituendo si ha $SF' = 2 . RO$. Ma $SF' = = PF' + PS$ e si sa che $PS = PF$ dunque $SF' = PF' + + PF = 2a$. Quindi $2a = 2 . RO$ da cui $RO = a$. Ma R è il piede della normale condotta da un fuoco alla tangente in un punto P generico, quindi la distanza $PO = a$ è fissa per tutti i punti come R; cioè se noi tracciamo un centro di cerchio O e di raggio semi asse maggiore, il cerchio così descritto è luogo geometrico di tutti i piedi delle perpendicolari alle tangenti alla curva, innalzate dai fuochi. Simile cerchio chiamasi *podaria*.

Inoltre si è visto che $SF' = 2a$; cioè i punti come S sono distanti sempre da F' della lunghezza dell'asse maggiore; allora se con centro F' si descrive un cerchio di raggio $2a$; i punti di questo cerchio formeranno un luogo geometrico; quello cioè in cui si incentrano tutte le normali alle tangenti condotte a quelle dall'altro fuoco. Un simile cerchio si dirà *cerchio direttore* dell'ellisse per il fuoco F'.

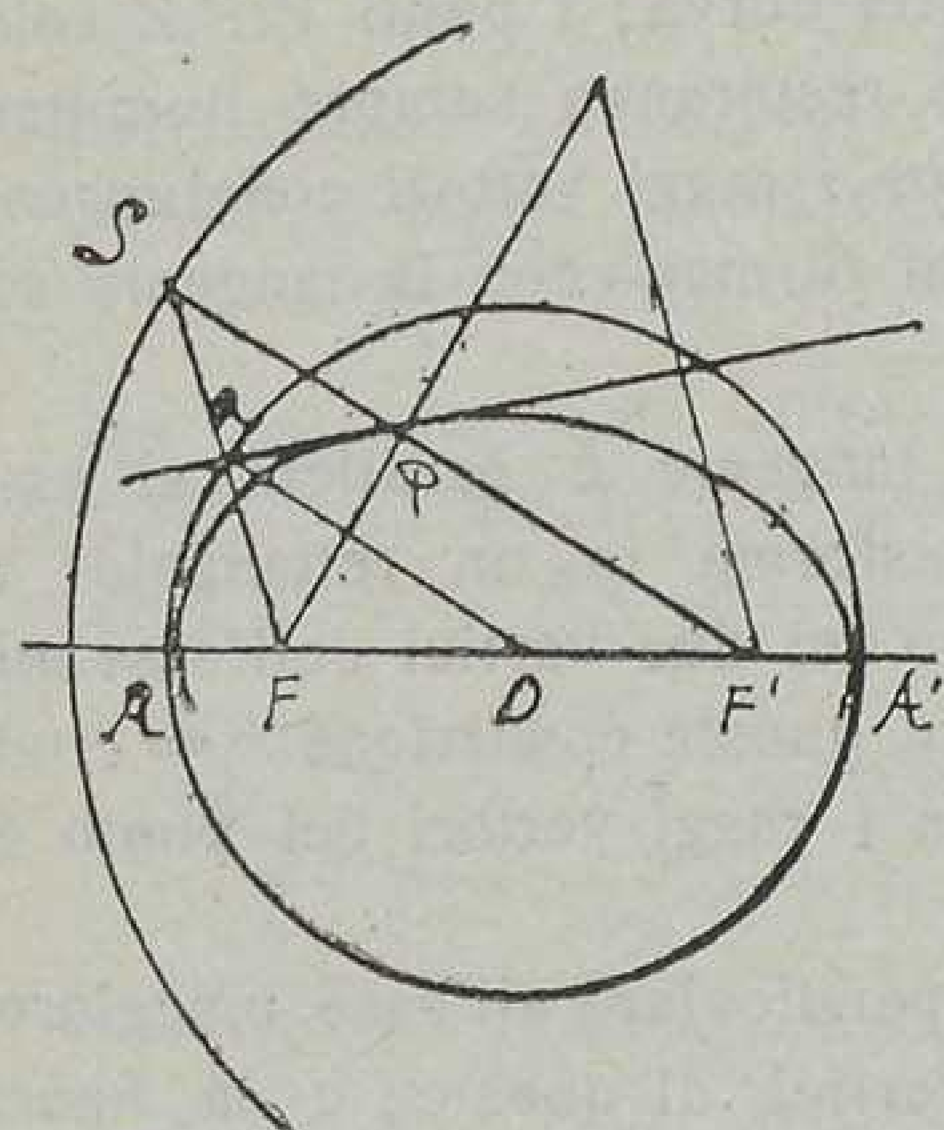

Fig. 8.

E poichè si comprende che anche per F posso condurre il cerchio direttore; dirò che l'ellisse ha due cerchi direttori.

Osserviamo che $SR = RF$; cioè la normale condotta da un fuoco ad una tangente qualunque incontra questa in un punto della podarìa, ed il prolungamento della normale, incontra la congiungente il punto tangente con l'altro fuoco in un punto che appartiene al cerchio direttore di questo secondo fuoco.

Le suddette proprietà ci facilitano la ricerca dell'ellisse con un altro metodo; il quale ci dà oltre i punti della curva anche le tangenti a questi punti.

Infatti: Noto $2a$ e $2c$, rappresentato su una retta $2a = AA'$; $2c = FF'$ e preso il punto medio O; si tracci il cerchio di raggio OA; si ottiene la podaria. Centro in F' e raggio $2a$ si tracci il cerchio direttore di fuoco F'. Per F si faccia uscire una retta qualunque, FT la quale incontra il cerchio direttore in T; allora si divida FT per metà in S e si abbassi la perpendicolare SU alla FT per S; tale retta si intersica con la TF nel punto U, che appartiene alla curva; la US è la tangente in U. Lo stesso per altre rette uscenti dal fuoco F e dal fuoco F', considerando però per questo fuoco il cerchio direttore di F.

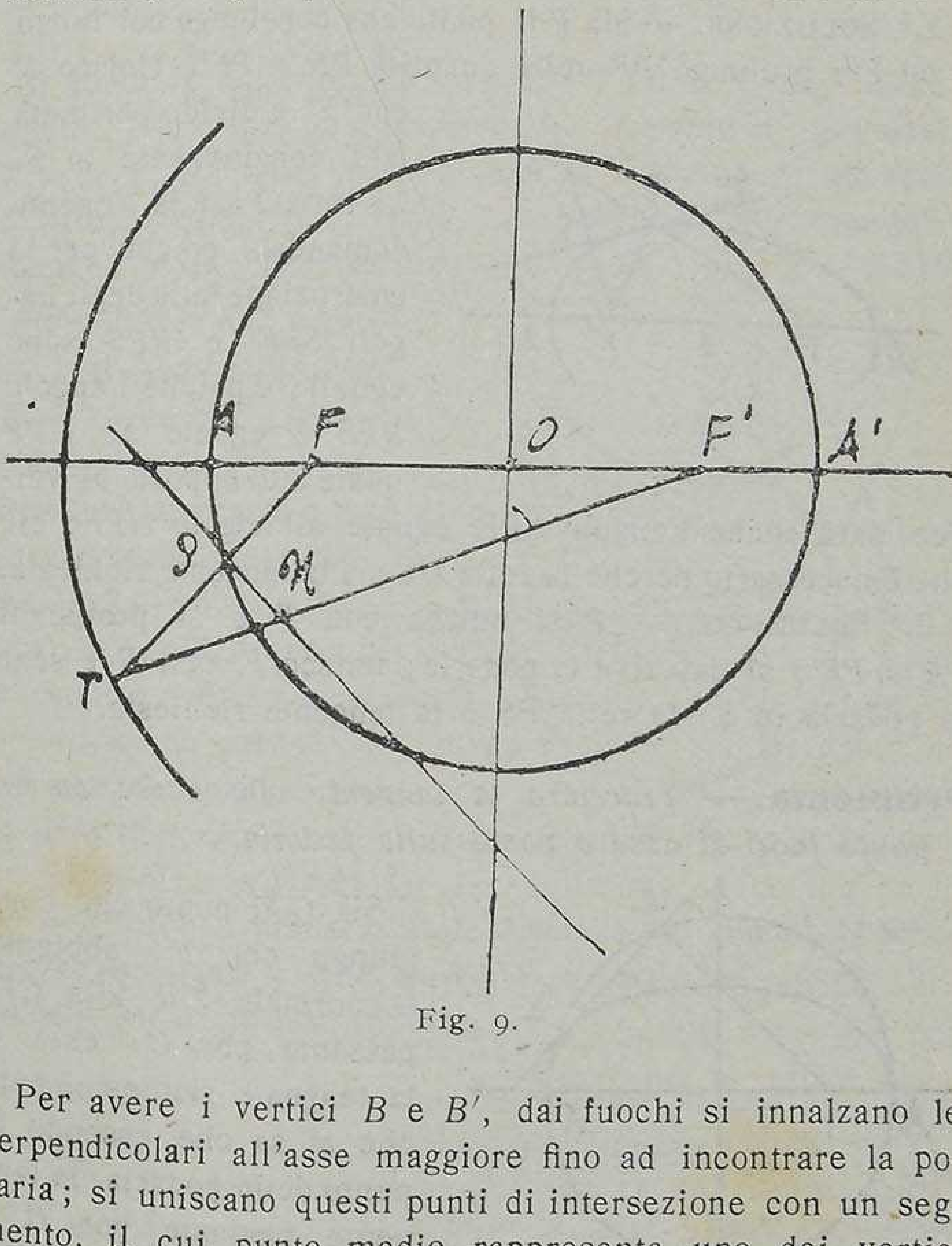

Fig. 9.

Per avere i vertici B e B', dai fuochi si innalzano le perpendicolari all'asse maggiore fino ad incontrare la podaria; si uniscano questi punti di intersezione con un segmento, il cui punto medio rappresenta uno dei vertici della curva, corrispondente all'asse minore.

Poichè si sa che la curva ha due assi ed un centro di simmetria, sappiamo che un punto generico, dopo che sia individuato, individua altri tre punti simili.

Problema. — *Costruire la tangente od un ellisse da un punto su di essa.*

1.ª Soluzione. — Sia P il punto che congiungo col fuoco F ed F'; prolungo PF della quantità $PR = PF'$. Unisco R con F' e divido per metà tale congiungente in S. La retta PS è la tangente domandata, poichè per la costruzione fatta dagli angoli SPF' e RPS sono eguali; e poichè l'angolo RPS è eguale ad UPF quale suo opposto al vertice, sarà anche l'angolo SPF' eguale all'angolo UPF; ciò che è necessario perchè la retta US sia la tangente richiesta.

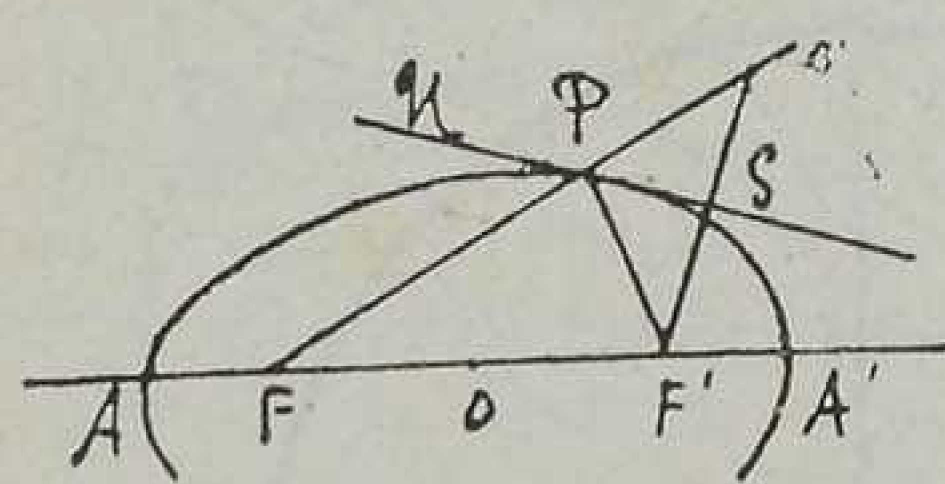

Fig. 10.

2.ª Soluzione. — P si unisca con F e si prolunghi $PR = PF'$; si descriva la podaria; unisco F' con R e sego la podaria in S; la retta PS è la tangente richiesta.

Problema. — *Tracciare la tangente alla curva da un punto fuori di essa e posto sulla podaria.*

Sia C il punto che congiungo con F', abbiamo la normale CR alla CF' passante per C; essa è la tangente richiesta, perchè si sa che essendo C punto della podaria, la tangente passante per C è normale al segmento che unisce C col fuoco F'.

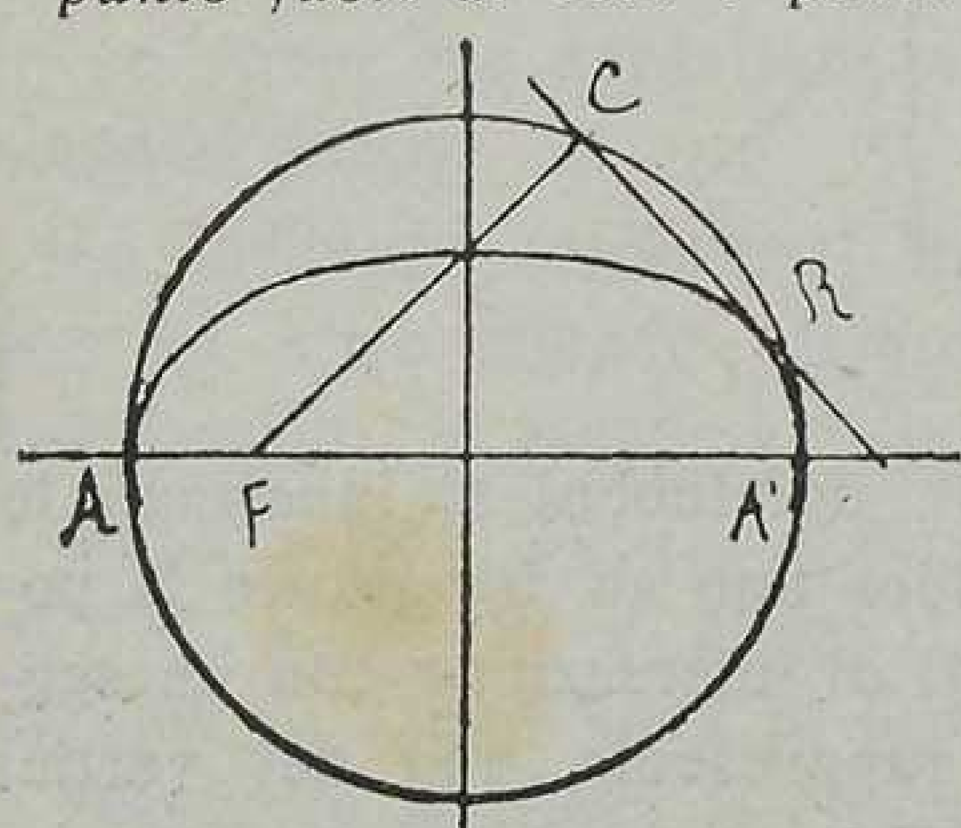

Fig. 11.

Teorema. — *Il prodotto delle distanze di una tangente qualunque ai fuochi è costante.*

Si abbia la tangente TU; e siano T ed U i piedi delle normali alla tangente condotte dai fuochi; i segmenti $TF = d_1$ e $UF' = d_2$ siano quindi le distanze. Si abbassi FS normale alla UF'. Dalla considerazione dei triangoli rettangoli FSF'; FSR si ha: $\overline{FS}^2 = FF'^2 - (UF' - US)^2$ e $\overline{FS}^2 = \overline{FR}^2 - \overline{RS}^2$ e poichè $\overline{FF'} = 2c$ $UF' = d_2$ $US = TF = d_1$ $RS = = RU + US = d_2 + d_1$ $FR = 2a$; sostituendo ed eguagliando i primi membri: $4c^2 - (d_2 - d_1)^2 = = 4a^2 - (d_1 + d_2)^2$ da cui riducendo $4c^2 - 4a^2 = = -4d_1 d_2$ da cui $a^2 - - c^2 = d_1 d_2$; ma si sa che $a^2 = b^2 + c^2$ da cui $a^2 - c^2 = b^2$; quindi $d_1 d_2 = b^2$ cioè il prodotto delle distanze dai fuochi di una tangente qualsiasi è una quantità costante ed eguale al quadrato del semi asse minore.

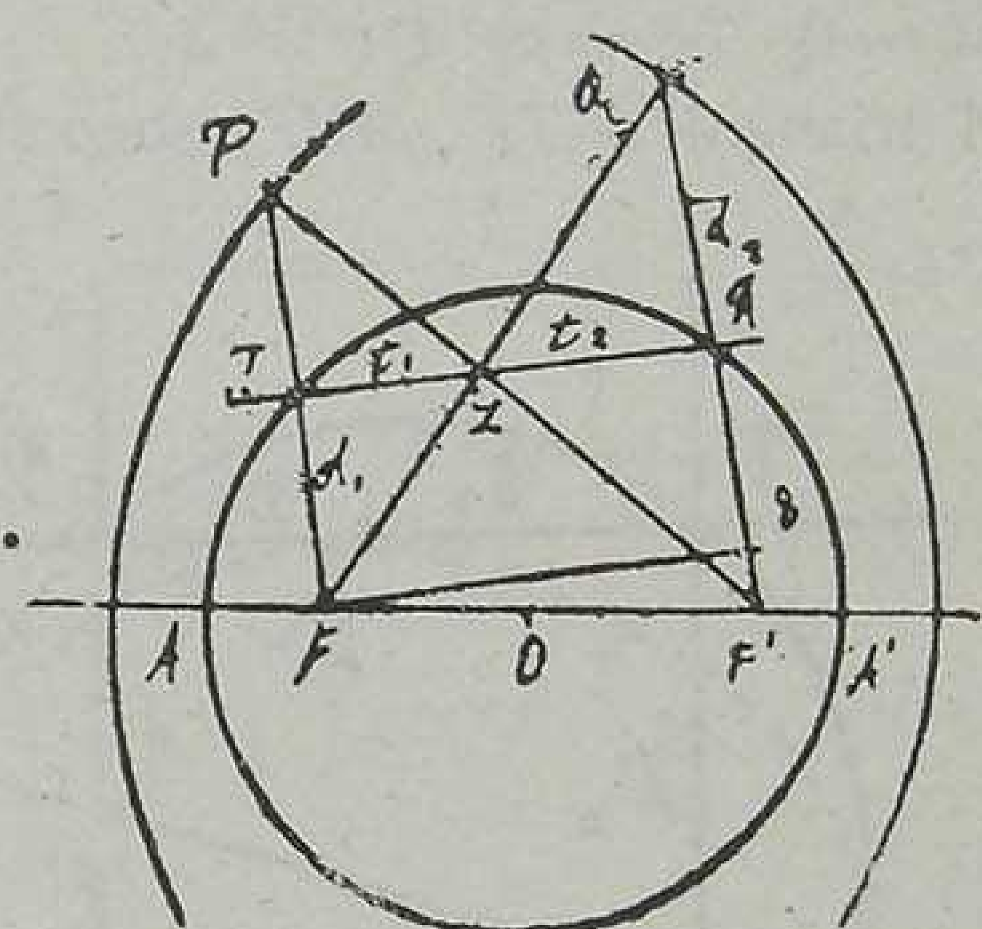

Fig. 12.

Osservazione. — Se la tangente è tale in uno dei vertici, per es. in A; allora è normale all'asse maggiore; la distanza d_1 diventa AF, cioè $a - c = AF = d_1$ e la $d_2 = = AF' = a + c$; il prodotto $d_1 d_2$ darà $(a - c)(a + c) = = a^2 - c^2 = b^2$; cioè anche qui resta dimostrato il teorema. Se la tangente è invece normale all'asse minore, cioè passa per uno dei suoi vertici, le distanze $d_1 = d_2 = b$ ed

*

il loro prodotto è sempre eguale al quadrato del semi asse minore. Cioè la proprietà è verificata anche per questo caso.

Teorema. — *Le normali ad una tangente condotta dai fuochi (distanze) sono direttamente proporzionali ai segmenti di tangente presi fra i piedi delle normali e il punto di contatto.*

Sia TU la tangente all'ellisse in M; chiamo $UM = t_1$ $TM = t_2$ $TF = d_2$ $UF' = d_1$.

I triangoli MTF, MUF' sono simili perchè hanno eguali

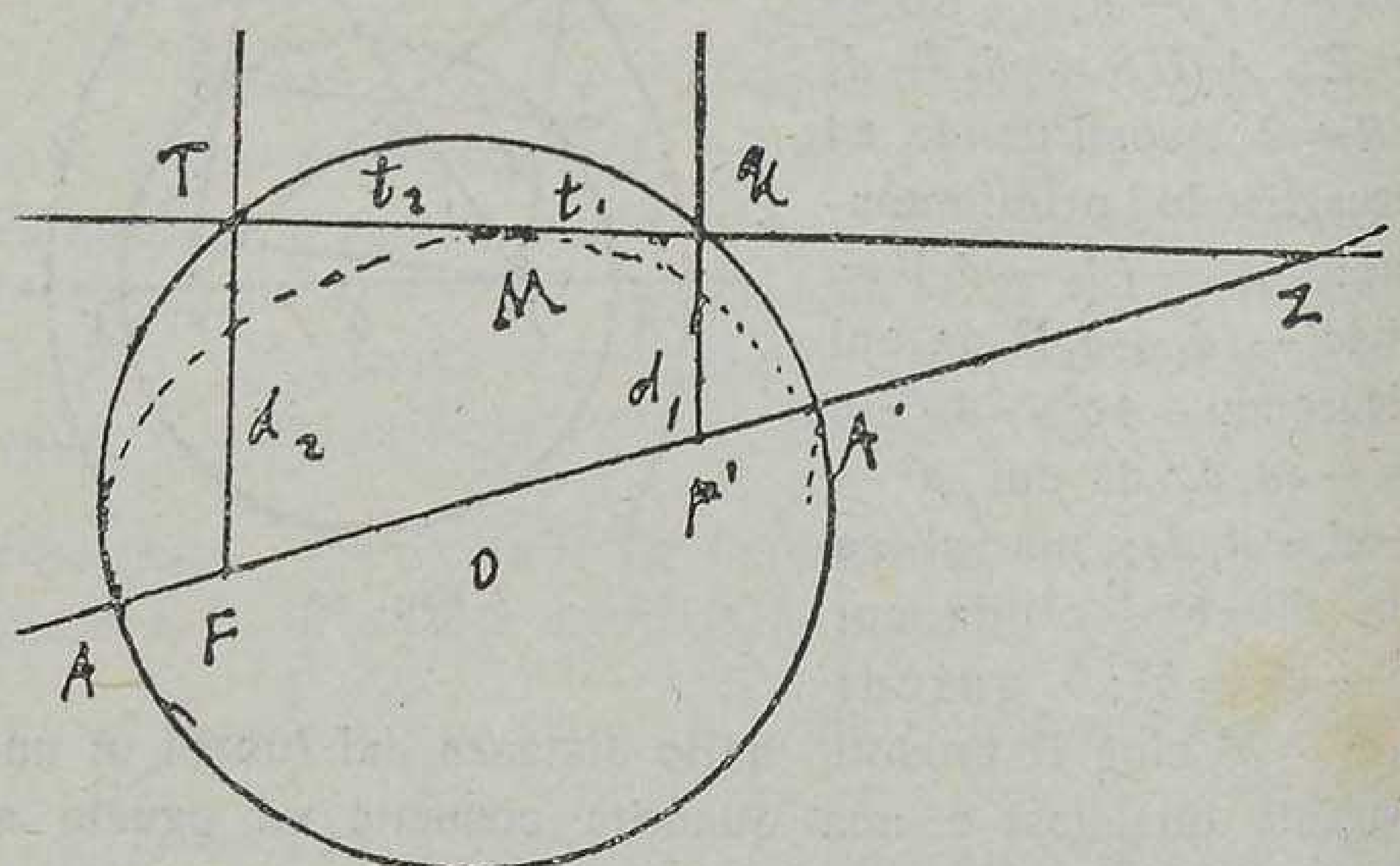

Fig. 13.

gli angoli TMF e UMF' per la proprietà della tangente; gli angoli in T ed in U eguali perchè retti. Allora dunque i due triangoli avanti considerati sono simili e ci danno la proporzione:

$$\frac{TM}{M'U} = \frac{TF}{UF'} \text{ ossia } \frac{t_1}{t_2} = \frac{d_1}{d_2} \; . \; c \; . \; d \; . \; d.$$

Proprietà dedotte dal T. *della tangente.*

Prolungo la tangente TU fino al suo incontro in Z con l'asse maggiore; allora dei due triangoli simili ZTF, ZUF' si ha $TZ : ZF = TU : FF'$ e poichè $FF' = 2c$. TU chiamandola t; si ha $TZ : ZF = t : 2c$ da cui si ricava $t = \frac{TZ}{ZF} \cdot 2c$.

In questa relazione ponendo $\frac{TZ}{ZF} = 1$ cioè $TZ = ZF$ si lhe $t = 2c$; questa relazione $TZ = ZF$ si deve interpetrare na senso che il punto Z si allontana all'infinito; cioè la tangente si rende parallela all'asse maggiore, e già sap-

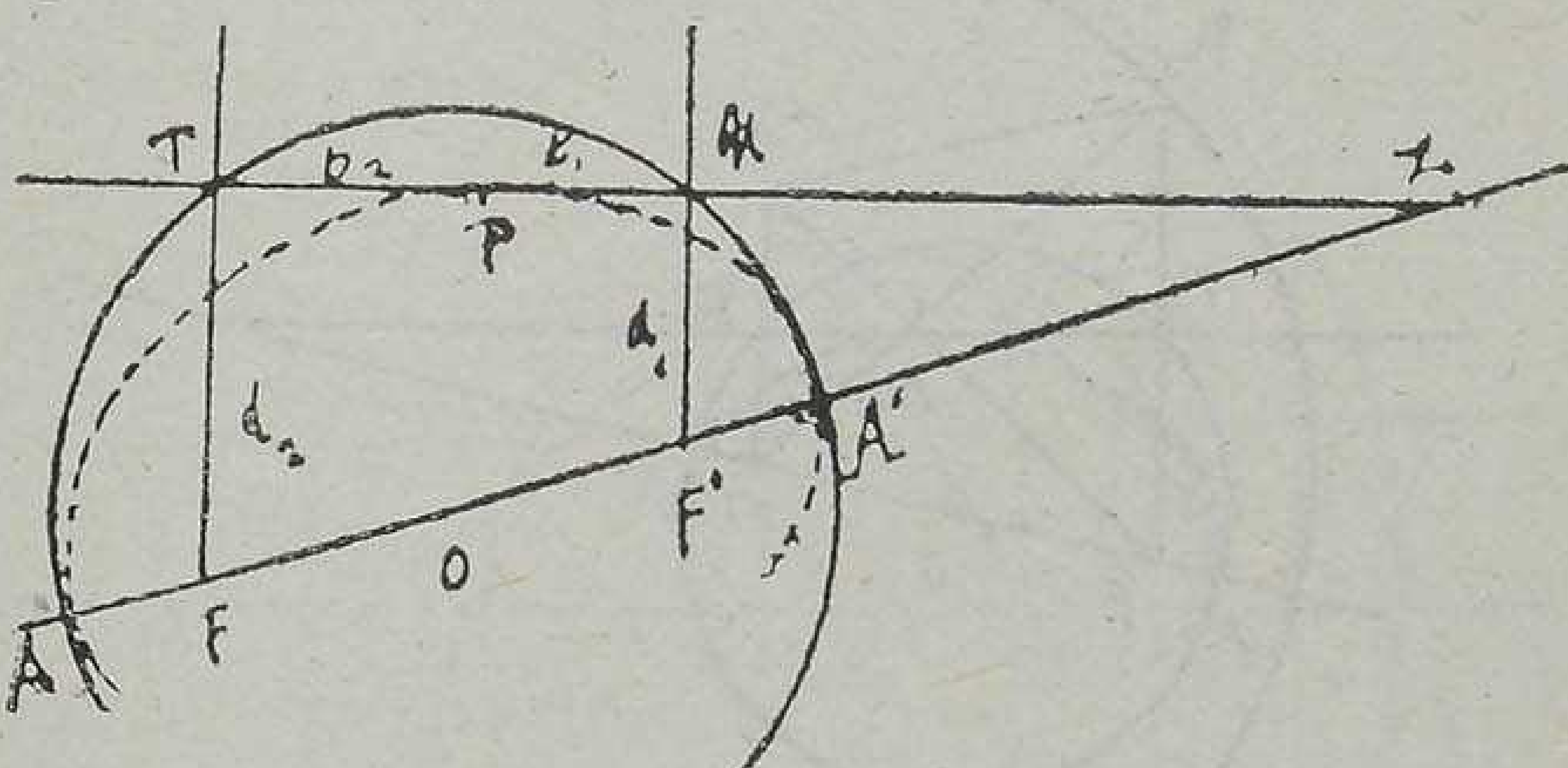

Fig. 14.

piamo che $t = 2c$, come si conferma con la dimostrazione precedente.

Se si pone $\frac{TZ}{ZF} = c$ allora $t = 2c^2$; cioè la lunghezza della tangente compresa fra le normali od essa dai fuochi è il valore della diagonale del quadrato fatto con la semi eccentricità.

Per $\frac{TZ}{ZF} = 2c$ $t = 4c^2$ cioè è la metà della diagonale del quadrato costruita sulla eccentricità.

Per $\frac{TZ}{ZF} = O$ cioè per $t = o$ si deve interpetrare la tangente passanfe per A o A' e che si rende nulla la distanza focale, cioè i due fuochi coincidono col centro della curva e questa poichè nella relazione $a^2 = b^2 + c^2$ si ha $a^2 = b^2$ si riduce al cerchio di raggio c. Esiste però la tangente, la quale non si annulla perchè la considerazione su esposta vale per il solo segmento della tangente compreso fra i piedi delle normali a lei dirette dai fuochi.

Abbiamo così visto che il segmento t della tangente varia

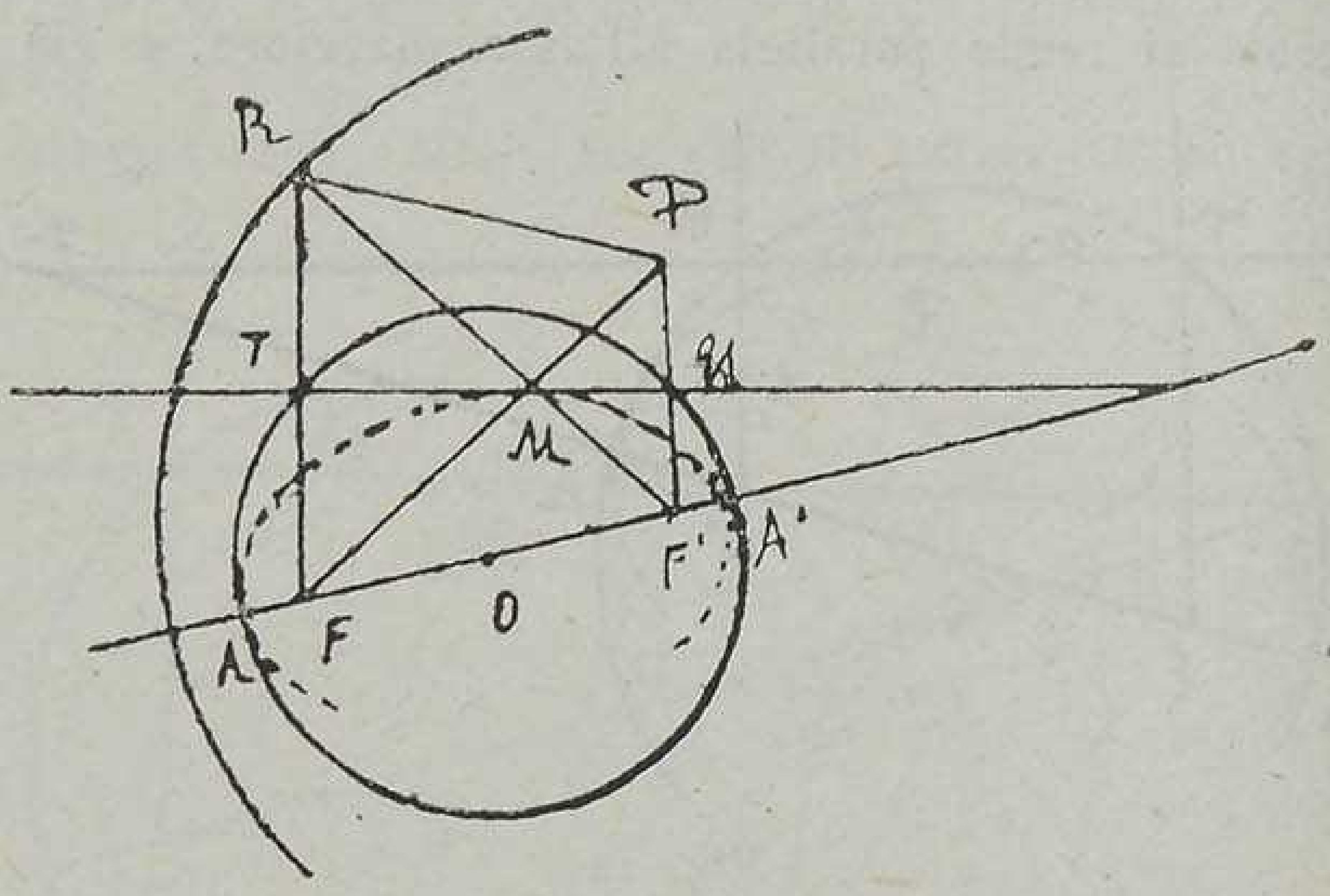

Fig. 15.

da $t = o$ a $t = 2c$ a cui corrispondono rispettivamente la tangente normale e parallela all'asse maggiore dell'ellisse.

Nuove proprietà. — Sappiamo che la figura $FRF'P$ è un trapezio isoscile, ed allora $RP = FF' = 2c$. Intanto il punto R si trova sul cerchio direttore descritto da F'; ed il punto P sul cerchio direttore descritto da F. Se immagino che il segmento RF si muova attorno attorno all'ellisse in modo però che tutti i punti come R cadano sempre sopra il cerchio direttore di fuoco F', tutti i punti come P cadono sempre sull'altro cerchio direttore, e che la congiungente PR si mantenga sempre eguale a $2c$, ne viene che la retta RF ed $F'P$ rotano sempre attorno ai fuochi; i loro punti medî non si allontanano dalla podaria ma percorrono tutti i punti di questa. I punti di incontro delle diagonali dei trapezi così costituiti godono sempre delle proprietà dimostrate per la tangente e formano i punti della curva ellisse.

Questa proprietà ci è quindi d'ausilio nella determina-

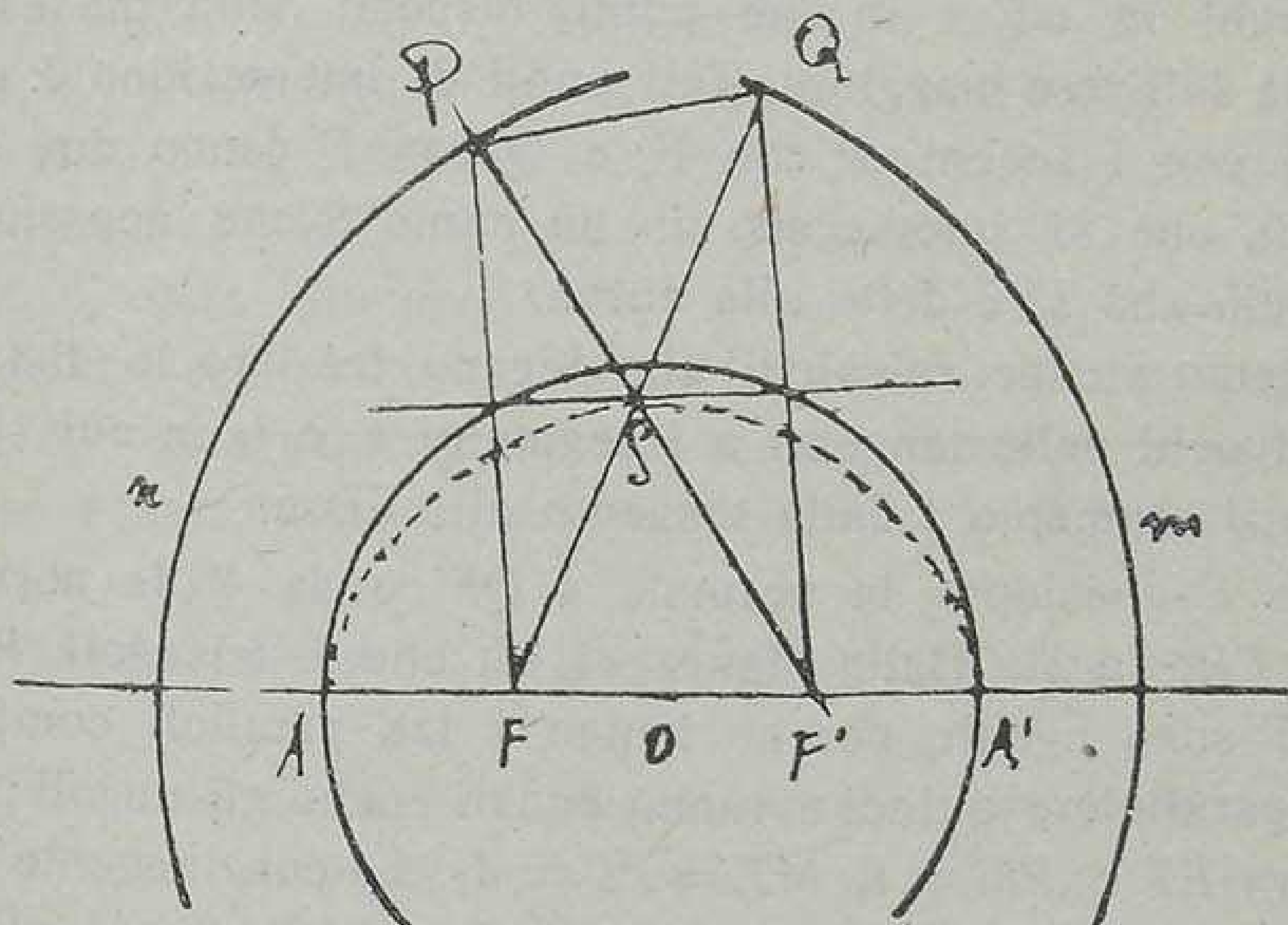

Fig. 16.

zione della ellisse, conoscendo l'asse maggiore, e la eccentricità.

Infatti: 1.° Dati $AA' = 2a$, $FF' = 2c$ si descrivano i due cerchi direttori m n di raggio $2a$ e di centri F ed F'. Si prenda su n un punto P e con centro in esso e raggio $2c$, si tagli il cerchio m in un punto Q; sarà $PQ = 2c$. Unisco P e Q con i fuochi; la figura $PFQF'$ è un trapezio isoscile perchè i punti P e Q sono sui cerchi direttori e quindi valgono le considerazioni precedentemente fatte; allora se si dividono i segmenti PF e QF' per metà; i punti di divisione cadranno sulla podaria; e l'incontro delle diagonali della figura ci dà un punto dell'ellisse; risulta ancora per esso individuata la tangente. Ciò è vero per il teorema della tangente. Scelti altri punti come P sia su n o su m, e fatte le analoghe costruzioni, si hanno quanti altri punti si vogliono della ellisse.

2.° Noti i fuochi, m, n e la podaria; si tirino dai fuochi due rette qualunque parallele fra loro; esse incontreranno i cerchi m ed n in due punti, disposti dalla medesima banda dell'asse maggiore. Tali punti di intersezione P e Q, uniti con i fuochi, P con F' e Q con F danno due segmenti che si intersecano in un punto S che appartiene, per ciò che si è detto alla curva.

Diamo alcune relazioni che legano fra loro le distanze dai fuochi delle tangenti e i segmenti t_1 e t_2 in cui si divide il segmento t della tangente all'ellisse.

Da F considero la normale a QF' e da M la normale alla FR, in T. Dalla figura si ha che i triangoli PMF, FMT sono eguali, perchè hanno i lati paralleli compresi fra parallele e quindi avranno eguali anche gli angoli; sarà allora $FT = PM = t_1$ $MT = PF = d_1$. La congiungente MF' taglia la FR in V. I triangoli MVT e RVF' hanno gli angoli eguali, perchè $MVT = RVF'$ quali opposti al vertice; gli angoli in T ed in R eguali perchè retti; gli angoli TMV e $RF'V$ eguali perchè alterni interni rispetto alle parallele MT e QF' ed alla trasversale MF'; quindi i due triangoli MVT ed RVF' sono simili ed avranno i lati proporzionali.

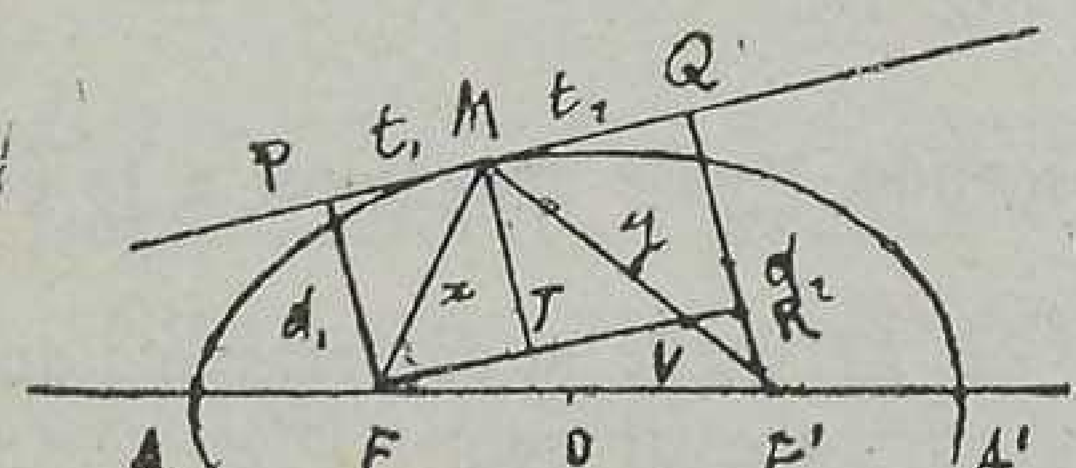

Fig. 17.

Intanto noi conosciamo le relazioni $\frac{t_1}{t_2} = \frac{d_1}{d_2}$ (a) $d_1 d_2 =$ $= b^2$ (b) $x + y = 2a$ (c).

L'ispezione della figura ci dà, chiamando x ed y i raggi vettori: $\left.\begin{array}{l} x^2 = t_1^2 + d_1^2 \\ y^2 = t_2^2 + d_2^2 \end{array}\right\}$ (d) inoltre $RF = PQ = t_1 + t_2$ e poichè dal triangolo rettangolo FRF' si ha $\overline{FR}^2 = \overline{FF'}^2 -$ $- \overline{RF'}^2$, sostituendo i valori noti $(t_1 + t_2)^2 = 4c^2 - (d_2 - d_1)^2$. Sviluppando; si ha $t_1^2 + t_2^2 + 2t_1 t_2 = 4c^2 - d_2^2 - d_1^2 +$ $+ 2d_1 d_2$. Dalle equazioni (d) si ricava $t_1^2 = x^2 - d_1^2$ e $t_2^2 = y^2 - d_2^2$ le quali espressioni sostituite nella precedente, danno: $x^2 - d_1^2 + y^2 - d_2^2 + 2t_1 t_2 = 4c_2 - d_1^2 - d_2^2 +$ $+ 2d_1 d_2$ ossia riducendo: $x^2 + y^2 = 4c^2 + 2d_1 d_2 - 2t_1 t_2$.

Se adesso sommiamo le (d) si ricava: $x^2 + y^2 = t_1^2 + t_2^2 +$ $d_1^2 + d_2^2$ ed eguagliando i due secondi membri di queste ultime equazioni, si ricava: $t_1^2 + t_2^2 + d_1^2 + d_2^2 = 4c^2 +$ $+ 2d_1 d_2 - 2t_1 t_2$ (A).

Cerchiamo adesso di ottenere altra relazione che leghi t e d.

Dalla relazione $x + y = 2a$ elevando a quadrato si ricava $x^2 + y^2 = 4a^2 - 2xy$ e sommando le (d) si ha $x^2 + y^2 =$ $= t_1^2 + t_2^2 + d_1^2 + d_2^2$.

Eguagliando i secondi membri; si ha $4a^2 - 2xy = t_1^2 +$ $+ t_2^2 + d_1^2 + d_2^2$.

Ora si osservi che dalla similitudine dei triangoli PFM, $MF'Q$ si ricava $x : y = d_1 : d_2$ e poichè la (b) ci dice che $d_1 = \frac{b_2}{d_2}$ sostituendo; si ha $\frac{x}{y} = \frac{b^2}{d_2^2}$. L'altra relazione (c) ci dà $x = 2a - y$ che sostituita nel rapporto suddetto ci dà: $\frac{2a - y}{y} = \frac{b^2}{d_2^2}$ da cui: $2a\, d_2^2 = d_2^2 y + b^2 y$ che risolta rispetto ad y dice che $y = \frac{2a\, d_2^2}{b^2 + d_2^2}$. Sostituendo tale valore nella $x = 2a - y$; si ricava: $x = 2a - \frac{2a\, d_2^2}{b^3 + d_2^2}$ ossia

$x = \frac{2ab^2 + 2ad_2^2 - 2ad_2^2}{b^2 + d_2^2}$ che si riduce all'altra $x = \frac{2ab^2}{b^2 + d_2^2}$. Sono noti così x ed y, *valori dei raggi vettori del punto di tangenza in funzione dei semi assi e delle distanze dai fuochi della tangente passante per il punto considerato.* Formiamo adesso il prodotto dei raggi vettori, cioè $xy = \frac{2ab^2}{b^2 + d_2^2} \times \frac{2ad_2^2}{b^2 + d_2^2} = \frac{4a^2b^2d_2^2}{(b^2 + d_2^2)^2}$. Questo valore lo sostituiremo nella relazione avanti trovata:

$4a^2 - 2xy = t_1^2 + t_2^2 + d_1^2 + d_2^2$ e si ricava:

$$t_1^2 + t_2^2 + d_1^2 + d_2^2 = 4a^2 - \frac{8a^2b^2d_2^2}{(b^2 + d_2^2)^2} \quad (B)$$

Nelle espressioni *(A)* e *(B)* i primi membri sono eguali, lo saranno quindi i secondi $4c^2 + 2d_1d_2 - 2t_1t_2 = 4a^2 - \frac{8a^2b^2d^2_2}{(b^2 + d_2^2)^2}$. E poichè dalla $\frac{t_1}{t_2} = \frac{d_1}{d_2}$ si ricava $t_1 = t_2 \frac{d_1}{d_2}$ e siccome $d_1 = \frac{b^2}{d_2}$ sostituendo $t_1 = t_2 \cdot \frac{b^2}{d_2^2}$. Ponendo questo valore nella equazione precedente; si ha:

$$4c^2 + 2b^2 - 2t_2^2\frac{b^2}{d_2^2} = 4a^2 - \frac{8a^2b^2d_2^2}{(b^2 + d_2^2)^2}$$

ed isolando t^2; si ha:

$$-2t_2^2\frac{b^2}{d_2^2} = 4a^2 - 4c^2 - 2b^2 - \frac{8a^2b^2d_2^2}{(b^2 + d_2^2)^2}$$

e poichè $a^2 = b^2 + c^2$; sostituendo

$$-2t_2^2\frac{b^2}{d_2^2} = 4b^2 + 4c^2 - 4c^2 - 2b^2 - \frac{8a^2b^2d_2^2}{(b^2 + d_2^2)^2}$$

e riducendo: $-2t_2^2\frac{b^2}{d_2^2} = 2b^2 - \frac{8a^2b^2d_2^2}{(b^2 + d_2^2)^2}$

dividendo per $(-2b^2)$; si ha: $\frac{t_2^2}{d_2^2} = -1 + \frac{4a^2d_2^2}{(b^2 + d_2^2)^2}$

da cui si ricava: $t_2^2 = \frac{4a^2d_2^4}{(b^2 + d_2^2)^2} - d_2^2$ (I) ed analogamente $t_1^2 = \frac{4\,a^2\,d_1^4}{(b^2 + d_1^2)^2} - d_1^2$ (II).

Facciamo alcune applicazioni di queste formule.

Suppongo che la tangente sia parallela all'asse maggiore; allora essa passerà per uno dei vertici dell'ellisse in corrispondenza dell'asse minore; si ha quindi che $d_1 = d_2 = b$ $t_1 = t_2 = c$. Vediamo se ciò è verificato dalle formule e supposto ad esempio che $d_1 = d_2 = b$ dovranno avere i valori di $t_1 = t_2 = c$. Infatti sostituendo nella I; si ha: $t_2^2 = \frac{4\,.\,a^2\,.\,b^4}{(b^2 + b^2)^2} - b^2$ cioè $t_2^2 = \frac{4\,a^2\,b^4}{4\,b^4} - b^2$ ossia $t_2^2 = a^2 - b^2 = c^2$ da cui $t_2 = \pm c$. Il doppio segno lo intendiamo così: preso il centro O dell'ellisse come origine nel contare le distanze c, si assuma ad esempio per positivo il senso che dal centro dell'ellisse porta a destra di esso; per negativo il senso contrario.

Analogamente operando sulla II si ha: $t_1^2 = \frac{4\,a^2\,b^4}{(b^2 + b^2)^2} - b^2$ cioè $t_1^2 = a^2 - b^2 = c^2$ $t_1 = \mp c$ cioè valore reciproco del primo c. d. d.

Supponiamo adesso che la tangente sia perpendicolare all'asse maggiore, cioè passerà per uno dei suoi estremi; si è visto allora che $t_1 = t_2 = O$ e $d_1 = a - c$ $d_2 = a + c$; oppure $d_1 = a + c$ $d_2 = a - c$ se la tangente riesce tale all'ellisse nei vertici A', a sinistra del centro.

Allora applicando nella I il valore $t_2 = O$; si ricava: $d_3^2 = \frac{4\,a^2\,d_2^4}{(b^2 + d_2^2)^2}$ che dividendo per d_2^2 si riduce $1 = \frac{4\,a^2\,d_2^2}{(b^2 + d_2^2)^2}$ da cui $(b^2 + d_2^2)^2 = 4a^2\,d_2^2$. Sviluppando la parentisi; si ha: $b^4 + d_2^4 + 2b^2\,d_2^2 = 4\,a^2\,d_2^2$ ed ordinando in d_2; si ha: $d_2^4 + 2d^2\,(b^2 - 2a^2) + b^4 = \vartheta$. Osservo che $b^2 = a^2 - c^2$ ed allora nella espressione $b^2 - 2a^2$; si ha $a^2 - c^2 - 2\,a^2 = -a^2 - c^2 = -(a^2 + c^2)$; sostituendo nella biquadratica, $d_2^4 - 2d_2^2(a^2 + c^2) + (a^2 - c^2)^2$. Facendo la posizione $d_2^2 = z$ sostituendo si ha:

$$z^2 - 2z\,(a^2 + c^2) + (a^2 - c^2)^2 \quad \text{da cui si ricava}$$

$$z = \frac{2\,(a^2 + c^2 \pm \sqrt{(a^2 + c^2)\,(4^1 - 4)^2\,(a^2 - c^2)^2}}{2}$$

ossia $z = \dfrac{2\,(a^2 + c^2) \pm \sqrt{16^2\,a^2c^2}}{2}$ ossia $z = a^2 + c^2 \pm 4ac$

ossia $z_1 = (a + c)^2$ e $z_2 = (a - c)^2$ e poichè $d_2^2 = z$ noi avremo due valori per $d_2 = \pm\sqrt{z}$ cioè ponendo $z = z_1$ si avrebbe: $d_2 = \pm(a + c)$ e per $z = z_2$ $d_2 = \pm(a - c)$ cioè si hanno adesso 4 valori per d_2. Osserviamo che per il secondo valore $d_2 = \pm(a - c)$ se pigliamo il negativo $d_2 = -(a - c) = c - a$ esso non può avere valore perchè $c < a$ e $.c - a < O$.

Se sviluppiamo le II ponendovi $t_1. = O$ avremmo $d_1 = \pm(a - c)$ $d_1 = \pm(a + c)$ cioè le radici d_1 e d_2 sono simmetriche, come già si sapeva.

Teorema sulla normale alla tangente dell'ellisse.

La normale alla tangente dell'ellisse è bisettrice dell'angolo formato dai raggi vettori uscenti dal punto di tangenza.

Infatti essendo $TPS = 90^0$ ed $UPS = 90^0$ ed essendo $TPF = UPF'$ perchè tali formati della tangente coi raggi vettori, sarà $TPS - TPF = = UPS - UPF'$ cioè $FPS = F'PS$. c . d . d.

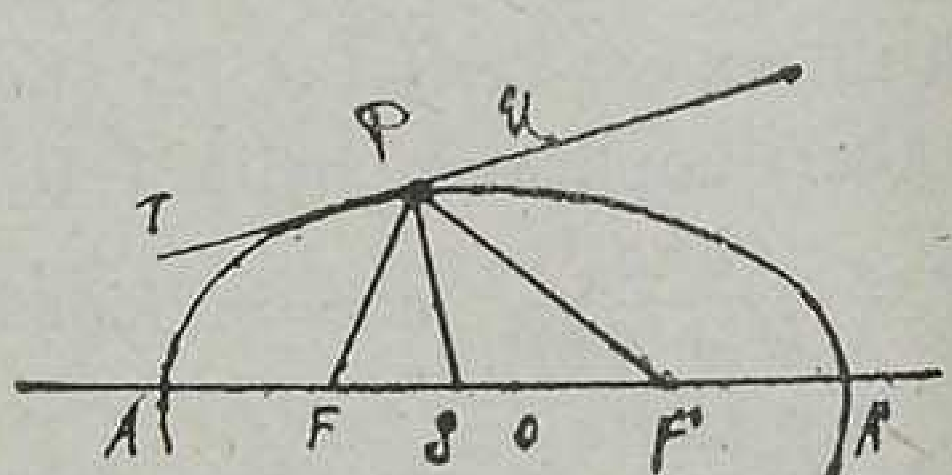

Fig. 18.

Se la tangente è parallela all'asse maggiore, gli angoli restano sempre eguali e la normale assume il valore di b; si ha la proprietà $a^2 = b^2 + c^2$. Se la tangente è normale all'asse maggiore, i raggi vettori e la normale alla tangente coincidono e l'angolo fra essi si riduce a zero.

La proprietà della normale ci facilita il problema di condurre una tangente all'ellisse da un suo punto. Infatti se P è il punto dato, si unirà con i fuochi e si biseca l'angolo dei raggi vettori, mediante la PS.

Si conduce quindi per P la normale PT, che sarà la tangente voluta.

Teorema. — *Da un punto esterno alla curva, considerando le tangenti a questa e le congiungenti il punto con i fuochi, gli angoli da tali segmenti compresi, sono eguali.*

Sia O un punto esterno alla curva da cui partono le due

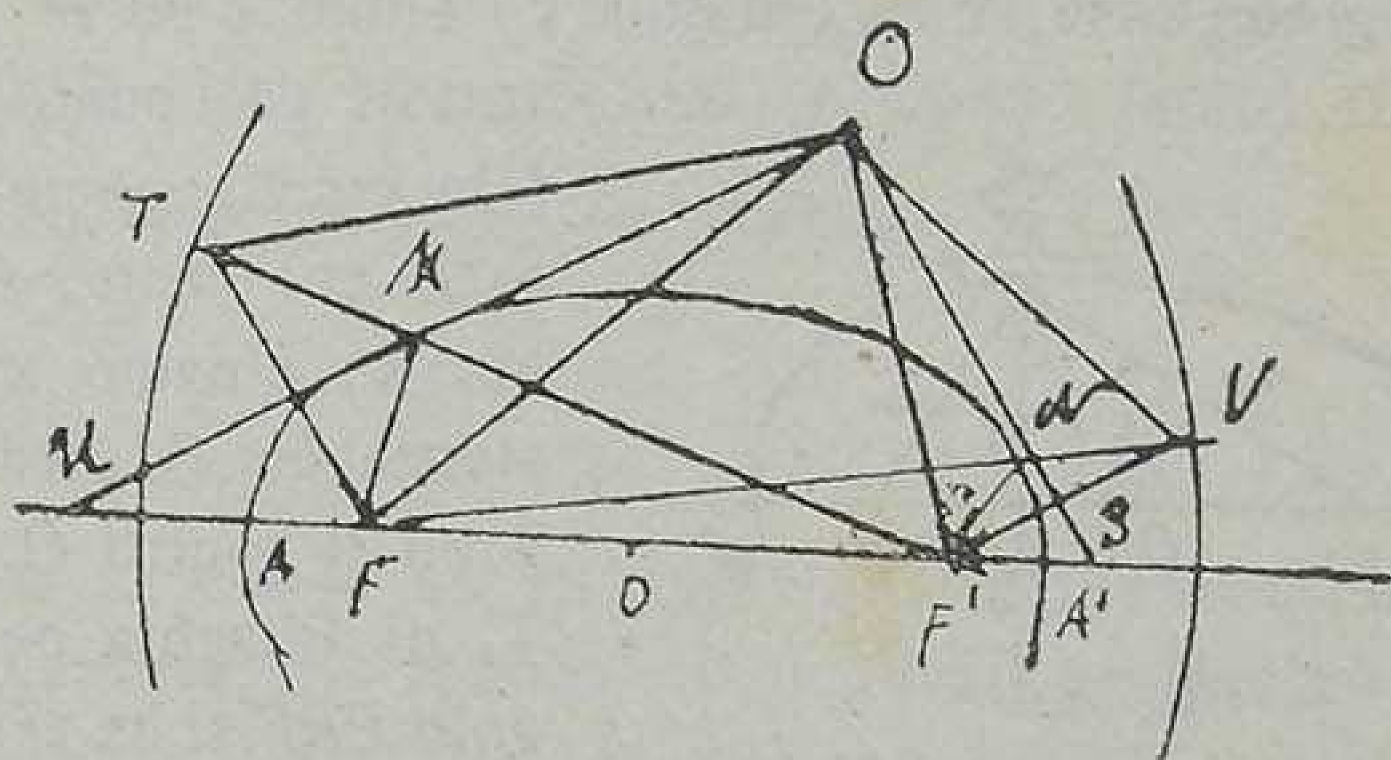

Fig. 19.

tangenti a questa OU ed OS, nei punti M ed N. Congiungo questi con i fuochi, dai quali considero le normali alle tangenti e prolungo di segmenti eguali a quelli compresi fra i fuochi ed i loro piedi sulla tangente. Si hanno i punti T e V che sappiamo sui cerchi direttori rispettivamente di fuochi F' ed F. Allora l'angolo TOM eguale ad MOF; $F'ON = NOV$ perchè il punto O dista egualmente da T ed F, da F' e V. Inoltre il triangolo $OVF =$

$OF'T$ perchè $F'T = 2a$ $FV = 2a$ essendo T e V sui cerchi direttori, poi si è detto $OT = OF$ $OV = OF'$; ed allora avendo i lati eguali, saranno pure tali gli angoli; cioè l'angolo TOF' eguale all'angolo VOF. Ma osserviamo che $TOF' = TOF + FOF'$ e $VOF = VOF' + FOF'$ cioè essendo eguali i primi membri lo saranno i secondi; cioè $TOF + FOF' = FOF' + VOF'$ ossia riducendo $TOF = VOF'$. Ma $TOF = 2MOF$ e $VOF' = 2NOF'$ quindi $2MOF = 2NOF$ cioè $MOF = NOF'$.; cioè sono eguali gli angoli formati dalle tangenti e dalle congiungenti i fuochi di un punto esterno alla curva.

Proprietà sui raggi vettori.

Si abbia un punto P sulla curva da cui abbasso la normale al grand'asse, che chiamo y; siano r ed r_1 i raggi vettori del punto P; sia f la congiungente il punto P col centro O della curva; chiamo x la distanza fra il piede della y ed il centro O. Per il T. di Pitagora nel triangolo PRF si ha $y^2 = r_1^2 - + (c+x)^2$ e poichè PRF' è pure un triangolo rettangolo; si ha $y^2 = r^2 - (c-x)^2$.

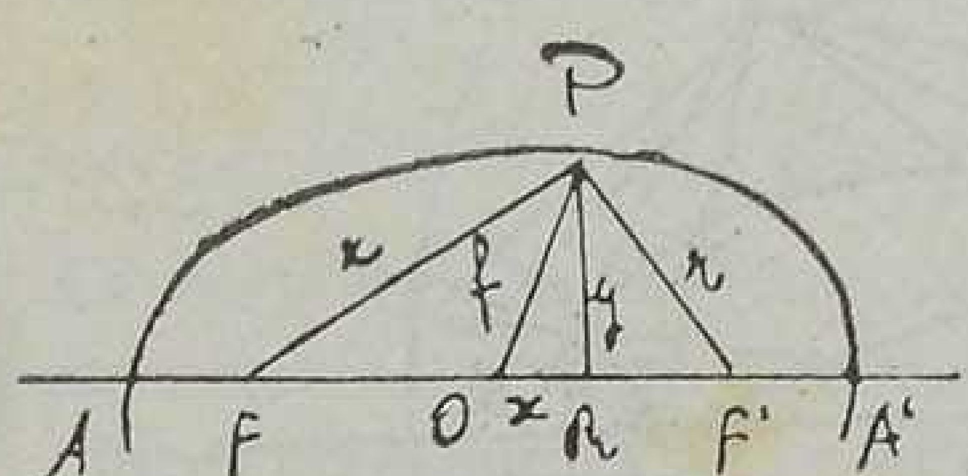

Fig. 20.

Eguagliando le due equazioni e sviluppando i quadrati; si ha: $r_1^2 - c^2 - x^2 - 2cx = r^2 - c^2 - z^2 + 2cx$ ed ordinando a riducendo: $r^2 - r_1^2 = -4cx$. E tenendo presente che $r + r_1 = 2a$ da cui $r_1 = 2a - r$ e sostituendo nella relazione precedente: $r^2 - (2a - r)^2 = -4cx$ da cui, sviluppando $r^2 - 4a^2 - r^2 + 4ar = -4cx$ ossia $4ar = -4cx + 4a^2$ e dividendo per $4a$ $r = a - \frac{cx}{a}$.

Sostituendo in $r_1 = 2a - r$ si ha $r_1 = 2a - \left(a - \frac{c\,x}{a}\right)$

ossia: $r_1 = a + \frac{c\,x}{a}$.

Cioè i raggi vettori di un punto qualunque dell'ellisse sono eguali al semi asse maggiore più o meno la quarta proporzionale fra la semi eccentricità, il semi asse maggiore e la distanza fra il centro della curva e il piede della normale al grand'asse abbassata dal punto in esame.

Dalle formule date si osserva che r si rende eguale ad r_1 quando $\frac{c\,x}{a}$ va a zero; intanto ciò è solo possibile quando $x = o$ perchè $c \ddagger o$ ed $a \ddagger o$. L'essere $x = o$ vuol dire che la normale dal punto P cade nel centro della ellisse, cioè la normale è il semi asse minore, cioè P è un estremo di esso; ed allora sappiamo che i raggi vettori sono eguali fra loro ed eguali ad a, come infatti risulta dalle relazioni date ponendo in entrambi $\frac{e\,x}{a} = o$.

Teorema. — *Equazione degli assi dell'ellisse.*

Siccome si sa che in un triangolo qualunque il quadrato di un lato è eguale alla somma dei quadrati degli altri due, diminuita od aumentata del doppio prodotto di uno di essi per la proiezione su di esso del terzo lato, e ciò a seconda che l'angolo opposto al primo lato è ottuso o acuto; così dalla considerazione del triangolo FPR, detto f il segmento OP; si ha:

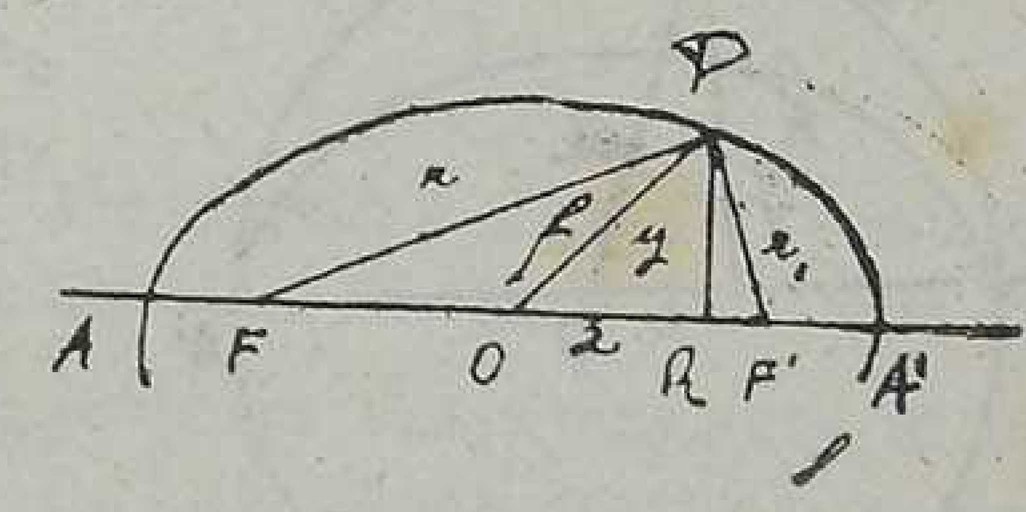

Fig. 21.

$r^2 = c^2 + f^2 + 2c\,x$ da cui $f^2 = r^2 - c^2 - 2c\,x$, Inoltre dalla figura si ricava $x^2 = f^2 - y^2$ ove sostituendovi il valore di f^2 si ricava: $x^2 = r^2 - c^2 - 2cx - y^2$.

Tenendo presente dal teorema precedente che $x = a + \frac{cx}{a}$ sostituendo si ha: $x^2 = \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2 - c^2 - 2cx - y^2$ ossia sviluppando $x^2 = a^2 + \frac{c^2 x^2}{a^2} + 2cx - c^2 - 2cx - y^2$ e riducendo $x^2 = a^2 + \frac{c^2 x^2}{a^2} - c^2 - y^2$. Rendendo intera l'equazione: $a^2 x^2 = a^4 + c^2 x^2 - a^2 c^2 - a^2 y^2$ ed ordinando: $x^2 (a^2 - c^2) + a^2 y^2 = a^2 (a^2 - c^2)$; conoscendo che $a^2 - - c^2 = b^2$; si ha $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ che è l'equazione detta degli assi dall'ellisse.

Come si osserva i valori di x ed y, cioè della oscissa ed ordinata di un punto qualunque P entrano al quadrato. La curva risulta riferibile ai due assi coordinati uscenti da O, centro della curva ed origine degli assi stessi.

Teorema. — *Se da un punto qualunque della podaria, si abbassa la normale al grande asse dell'ellisse, il segmento normale sta al segmento di essa normale compreso P della curva, in un rapporto costante.*

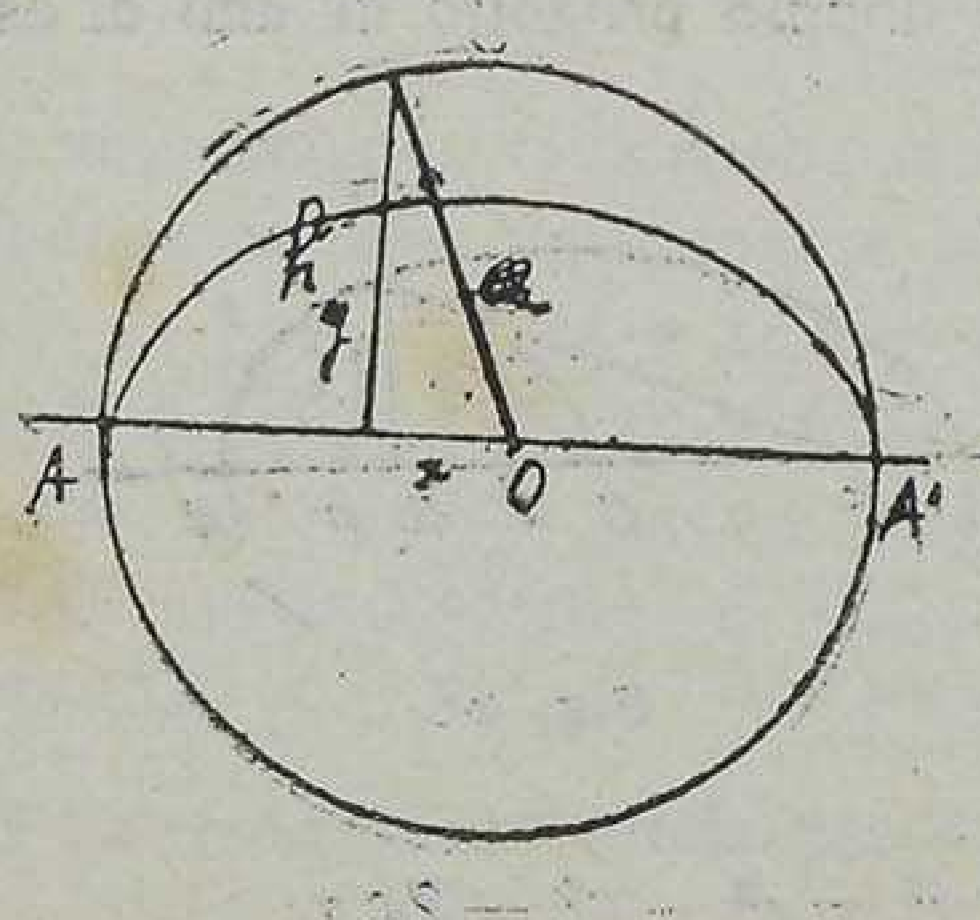

Fig. 22.

Dalla figura si ha $h^2 = a^2 - x^2$ e poichè $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$, dividendo per a^2; si ha

$$y^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2 = b^2$$

ed isolando y^2 si ricava:

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x_2.$$

Dividendo questa espressione con la prima; si ottiene: $\dfrac{y^2}{h^2} = \dfrac{b^2 - \dfrac{b^2x^2}{a^2}}{a^2 - x^2}$ ossia riducendo

$$\frac{y^2}{h^2} = \frac{\dfrac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2}}{a^2 - x^2} = \frac{\dfrac{b^2 (a^2 - x^2)}{a^2}}{a^2 - x^2} = \frac{b^2 (a^2 - x^2)}{a^2 (a^2 - x^2)} = \frac{b^2}{a^2}$$

ed estraendo la radice quadrata ed assumendo per essa il segno più; si ha $\dfrac{y}{h} = \dfrac{b}{a}$: considerando la reciproca; si ha $\dfrac{h}{y} = \dfrac{a}{b}$.

Cioè preso un punto P qualunque, e considerando la sua ordinata y e il segmento h compresa fra tale ordinata e l'incontro del suo prolungamento colla podaria, facendo in seguito il rapporto fra h ed y, notiamo che esso è costante ed eguale ad $\dfrac{a}{b}$. Tale rapporto può assumere il valore 1, cioè $\dfrac{a}{b} = 1$ $\dfrac{h}{y} = 1$ ossia $a = b$ $h = y$ e ciò è vero quando l'ellisse si riduce con la eccentricità eguale a zero, cioè diventa un cerchio ed il punto P è uno dei vertici degli assi.

Per $\dfrac{a}{b} = o$ cioè $\dfrac{h}{y} = o$ è tale quando $y = o$ cioè il punto P cade negli estremi A ed A' del grande asse. Quando P è uno dei vertici B o B' allora $y = b$ ed h deve essere a infatti sostituendo $\dfrac{h}{b} = \dfrac{a}{b}$ cioè $hb = ab$ da cui $h = a$ *c.d.d.*

Teorema. — *L'area dell'ellisse è data dal prodotto del rapporto π per il prodotto dei due semi assi della curva.*

Infatti si supponga scomporre l'asse maggiore in un numero grandissimo di parti tutte eguali fra loro, e sia m la lunghezza unitaria di tali segmenti. Dai punti di divisione si inalzino delle perpendicolari. Si otterranno così dei trapezî; e sia s la superficie dei trapezî compresi nell'ellisse ed S quelli compresi nella podaria. Osservando che i trapezî di area s ed S hanno la stessa altezza m, staranno fra loro come la semi somma delle basi; ora intendendo per semi somma i segmenti h ed y, tanto più veri al valore che rappresentano quanto più piccola è la dimensione del

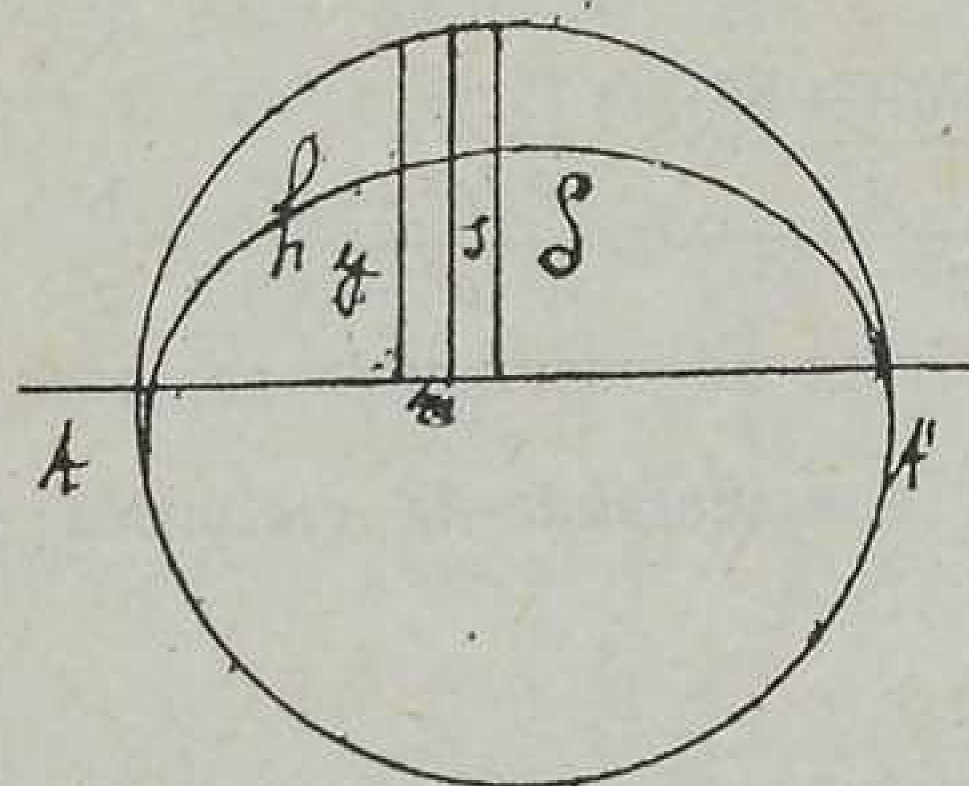

Fig. 23.

segmento m, si avrà $\frac{S}{s} = \frac{h}{y}$. Ma dal T. precedentemente dimostrato sappiamo che $\frac{h}{y} = \frac{a}{b}$ quindi $\frac{S}{s} = \frac{a}{b}$.

Considerando tutti gli infiniti trapezî inscritti sia nella ellisse che nella podaria; per avere la superficie della curva e della podaria dovremmo sommare tutte le espressioni simili alla $\frac{S}{s}$, le quali danno però sempre lo stesso rapporto; cioè $\frac{S + S_1 + S_2 + \ldots\ldots + S_n}{s + s_1\, s_2 + \ldots\ldots + s_n} = \frac{a}{b}$.

Ma il numeratore ci dà la metà dell'area della podaria ed il denominatore la metà dell'area dell'ellisse. che chiamiamo A; quindi essendo

$$S + S_1 + \ldots\ldots + S_n = \frac{\pi a^2}{2} \text{ ed } s + s_1 + s_2 + \ldots\ldots + s_n = \frac{A}{2}$$

sostituendo e sviluppando: si ha

$$\frac{\pi a^2}{2} = \frac{A}{2} \cdot \frac{a}{b} \text{ cioè } \pi a^2 = A \frac{a}{b}$$

da cui moltiplicando per $\frac{b}{a}$; si ottiene l'area della ellisse; $A = \pi a b$. c.d.d.

IPERBOLE

Se la superficie conica si sega con un piano parallelo alla sezione principale, l'incontro di tale piano con la superficie conica ci dà due curve che formano la iperbole.

Teorema. — *La differenza fra le congiungenti un punto qualunque della curva con due punti fissi di questa è costante.*

Infatti siano OA od OA' le sezioni fatte sul cono con un piano normale a quello che ci ha dato la curva; O è il vertice del cono a due falde; si congiungano i punti A ed A' e nel piano $AA'O$ si considerino due cerchi s ed S che risultino tangenti alla AA', OA ed OA' nei punti F,1 e 3; e nei punti F', 2 e 4. Si dia una rotazione ai cerchi

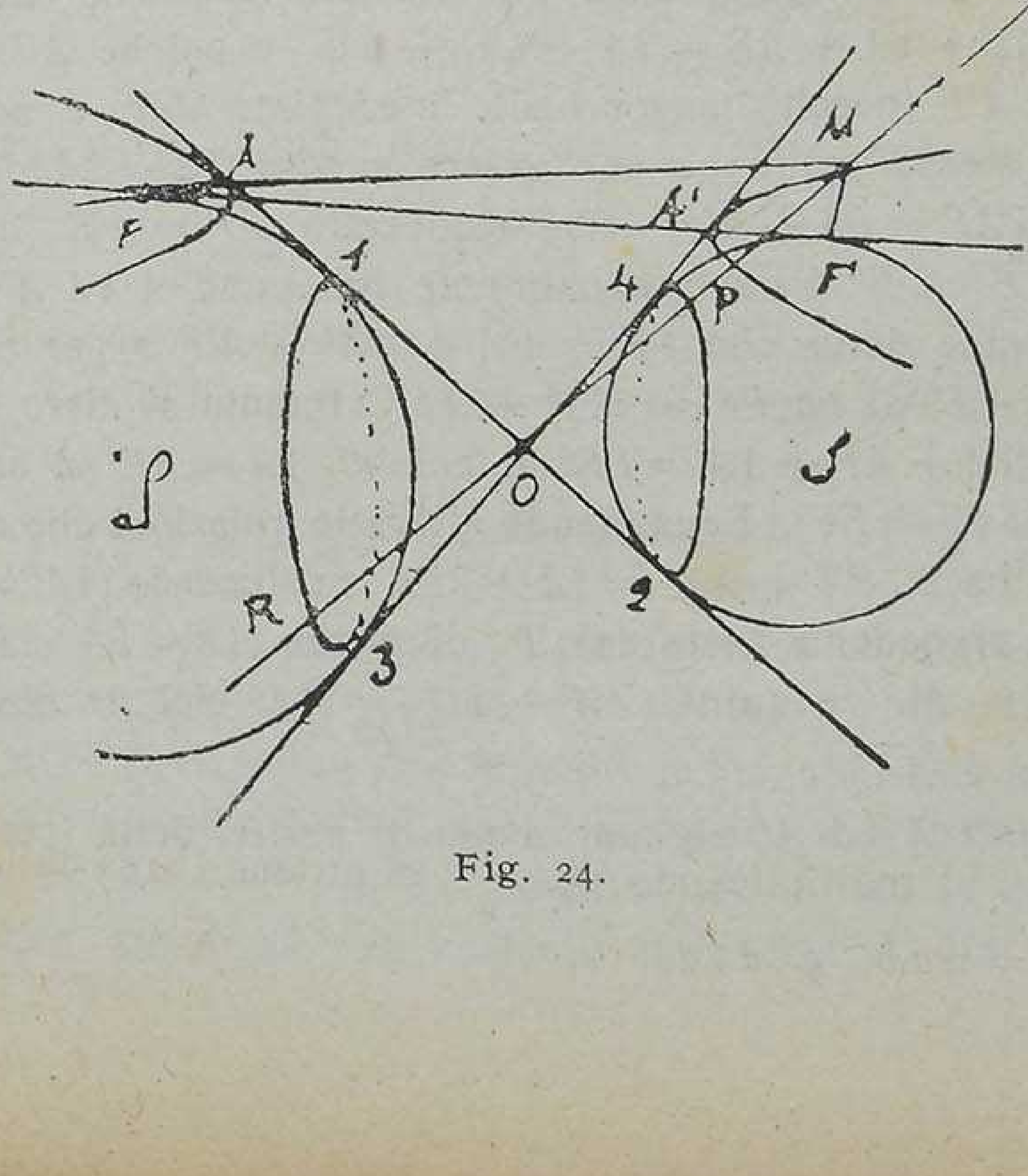

Fig. 24.

suddetti, sì che questi diventino sfere tangenti sempre ad A ed A' ed abbiano le circonferenze 1-2, 2-4 luoghi di tutti i punti come 1-2-3 e 4, cioè le due circonferenze sono i luoghi di tangenza di tutte le generatrici del cono con le due sfere suddette. Adesso scelto un punto esterno M, sulla curva, lo congiungo con F ed F' e con il centro O; e la MO prolungata risulta tangente alle due sfere s ed S nei punti P ed R. Osservo che M essendo esterno alla sfera S, sarà $MF = MR$ ed essendo esterno alla s, sarà $MF' = MP$; sottraendo membro a membro queste due relazioni; si ha $MF - MF' = MR - MP = PR$. Ma si noti che la 12, la 34, la PR sono tangenti alle due sfere uscenti dello stesso punto O e quindi eguali, fra loro non solo ma costituiscono quantità costanti; quindi $MF - MF' =$ costante $c.d.d.$

Vediamo adesso il valore della costante.

Dalla figura si ha: $12 + 1A = A2 = AF'$ poi $34 + 4A' = 3A' = A'F$. Dalla figura inoltre risulta $FA + A2 = FA + AF' = FF'$ analogamente $F'A' + 3A' = F'A' + A'F = FF'$ Quindi dalle uguaglianze ora trovate possiamo trascrivere $12 + 1A + AF = 34 + 4A' + A'F'$ e poichè $AF = A1$ $4A' = A'F'$ perchè tangenti alla medesima sfera e uscenti dallo stesso punto; e per essere ancora $12 = 34$; si ha $12 + 2AF = 34 + A'F'$ cioè riducendo $AF = A'F'$ cioè i punti F ed F' distano egualmente dai punti A ed A'. Intanto si è detto che $FF' = FA + AA' + A'F$ e per essere $AF = A'F'$ si ha $FF' = 2FA + AA'$. Intanto si disse come pure $12 + AF + 1A = FF'$ e poichè $1A = AF$ si ottiene $12 + 2AF = FF'$. Eguagliando allora le relazioni che danno FF' si ha $2 . FA + AA' = 12 + 2FA$ e riducendo $AA' = 12$. Ma la precedente parte del T. dice che $12 = 34 = PR = MF - MF'$ e quindi $MF - MF' = AA'$ cioè la costante cercata è $\overline{AA'}$ $c.d.d.$

I punti A ed A' pigliano nome di *vertici* della iperbole, e la retta AA' quello di *asse traverso*, indicandolo con $2a$. Chiamansi *fuochi* della iperbole i punti F ed F' ed *eccentricità* la distanza FF', essa è misurata da $2c$. In questa curva si ha $c > a$ mentre nella ellisse $a > c$. Sono *raggi vettori* i segmenti come MF ed MF'.

Costruzione della iperbole.

Costruire la iperbole data la distanza focale od eccentricità e la distanza $2a$. Fissata la eccentricità la si divida

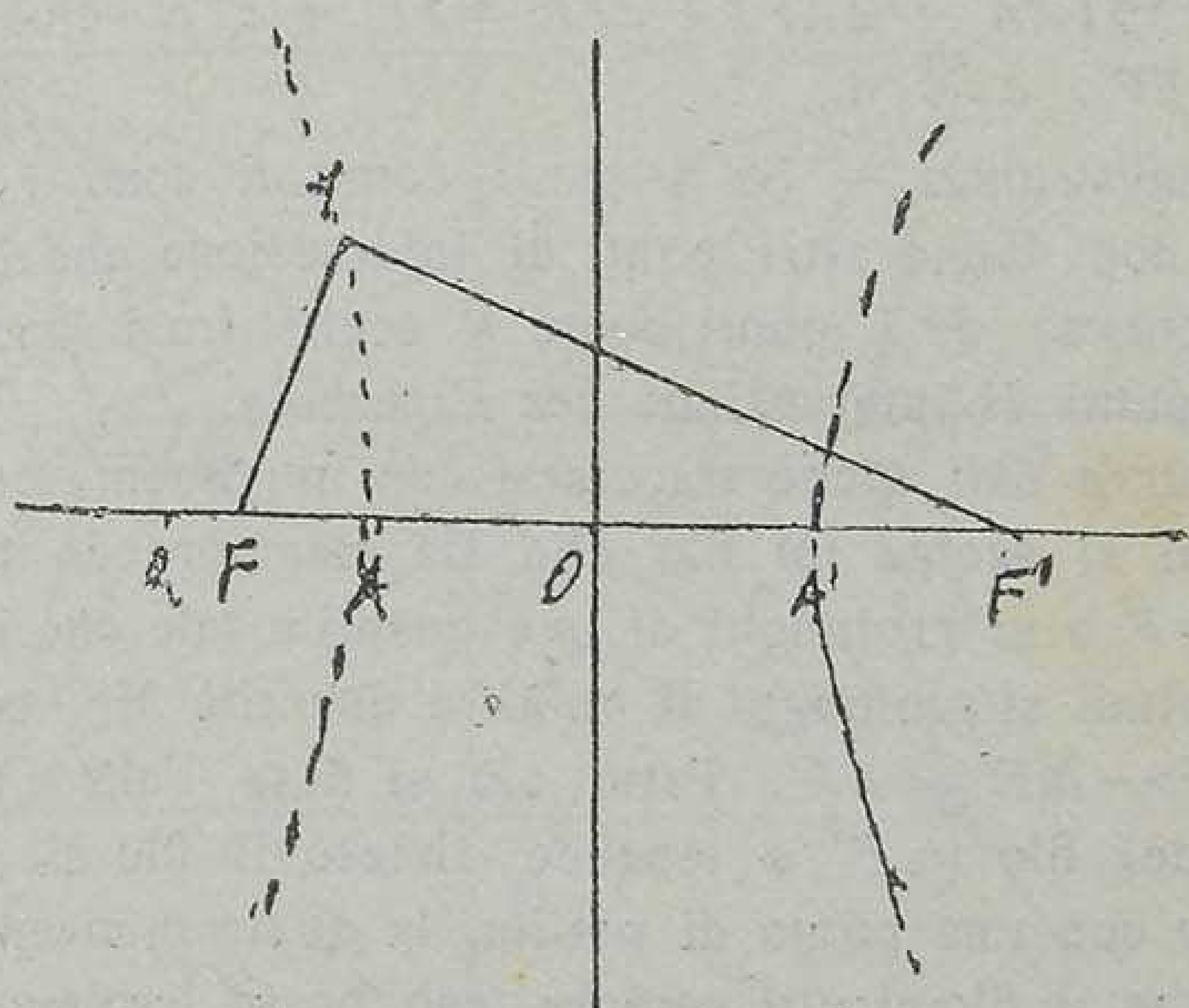

Fig. 25.

in due in O e da parte opposta si segnino i punti A e A' tali che $OA = OA' = a$. Preso un punto R al di là di F con raggio RA' e centro in F' si descriva un arco di cerchio. Preso AR e con centro in F si descriva un altro arco che incontra il primo in due punti 1 e 2 che appartengono alla curva, perchè $1F' = A'R$ $1F = AR$ e quindi $1F' - 1F = A'R - AR'$, cioè i raggi vettori $1F'$ ed $1F$ sottratti fra loro danno AA', la costante richiesta. Allora infiniti altri punti al di là di F danno una doppia infinità di punti per il ramo sinistro della iperbole; analogamente si potrà operare a destra di F'. Però osserviamo che si hanno punti della curva solo quando la distanza dei centri è maggiore della differenza dei raggi, oppure è minore della somma dei raggi. Infatti: per la prima asserzione, la distanza focale $2c$ è maggiore della differenza dei raggi $2a$; e ciò nella iperbole è vero; per la seconda osservazione osserviamo che $A'R = AA' + AF + FR$ ed $AR = AF + FR$ e sommando le due eguaglianze $AR + A'R = AA' + 2AF + 2FR = (AA' + 2AF) + 2FR = FF' + 2FR$ cioè $AR + A'R > FF'$. c.d.d.

Osservazione. — Se i punti come R sono i fuochi, questi non dànno altri punti di intersezione che i vertici della curva; ed i punti come R scelti fra i fuochi non danno punti di intersezione per l'iperbole.

La curva può anche tracciarsi con movimento continuo. Infatti si scelga un filo che sia maggiore di AA' e si fissi in F e si prolunghi di una quantità tale che si abbia MF, quindi si prolunghi di un'altra quantità MF' tale però che $MF - MF' = AA'$. Fatto ciò si fissa l'altro estremo libero del filo in F' e tenendo disteso il filo si ponga a contatto con una punta di matita, la quale muovendosi in modo che il filo risulti sempre teso, possa lasciare traccia sulla carta del suo cammino. Ripetendo l'operazione a destra di F e di F', sopra e sotto la retta FF' avremo segnato tutta la curva.

Teorema. — *L'iperbole ha due assi di simmetria ed un centro di simmetria, intersezione degli assi.*

Si abbiano i punti $MNPQ$ quali intersezioni di archi di centri F ed F' e raggi $F'M$, $F'N$, FP, FQ; MF, FN, $F'P$ $F'Q$. Allora i punti $MNPQ$ essendo punti ciascuno appartenente a due cerchi, la congiungente essi cerchi risulterà perpendicolare ai punti medî delle corde MN e PQ in C e C'. I triangoli FPQ ed $F'MN$ sono eguali perchè hanno le due coppie di lati $F'M$, $F'N$; FP, FQ tutti eguali fra loro perchè si è scelto $FP = F'M$. Inoltre $MN = PQ$ perchè corde di archi eguali, e quindi CC' è un asse di simmetria.

I punti $PMNQ$ che si trovano sulle corde normali ad

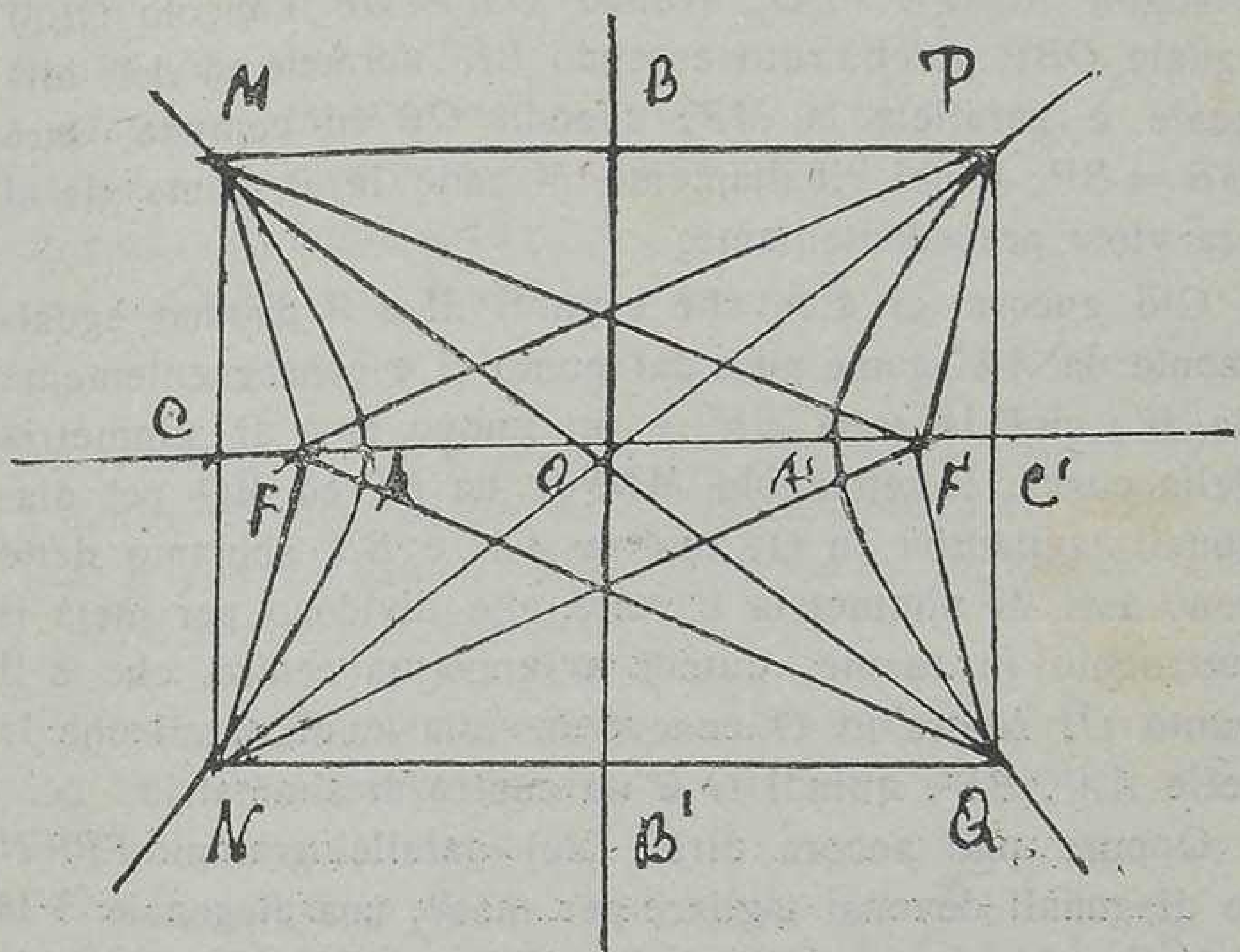

Fig. 26.

AA', si potranno unire fra loro con delle congiungenti MP, NQ e la figura $MNPQ$ risultante è un rettangolo, perchè la normalità delle corde MN e PQ rispetto la AA' ha l'eguale distanza dei punti $MNPQ$ ai piedi delle suddette normali, dànno per le MP ed NQ delle rette parallele fra loro, parallela alla AA' e normali alle corde MN e PQ.

Si ribalti allora il rettangolo attorno alla BB' passante per O punto medio di AA' a cui è anche normale. Sarà quindi $OC = OC'$ perchè $FC = F'C$ ed allora nel ribaltamento C cadrà su C'; CN su $C'Q$ perchè in C ed in C' si hanno due rette; inoltre nei triangoli MCO ed $OC'P$ essendo $OC = OC'$ $C'P = CM$ e gli angoli in C e C' eguali perchè retti, sarà $OM = OP$ e l'angolo MOC eguale all'angolo POC' ed allora nel ribaltamento la OM piglierà la direzione OP, ed M cade in P. Ancora si ha che nei triangoli MBO e PBO, avendo $OM = OP$ l'angolo OBM eguale OBP perchè retti essendo BB' normale ad AA' alla quale è parallela la MP; avendo OB in comune, sarà $MB = BP$; e nel ribaltamento M cade in P, come già si era visto precedentemente.

Ciò ancora ci dice che i punti M e P distano egualmente da AA' come pure dal punto B e conseguentemente da B'; cioè la retta BB' è un nuovo asse di simmetria della curva. Il rettangolo $MNPQ$, ha NP ed MQ per diagonali tagliantisi in O; inoltre AA' e BB' abbiamo detto sono assi di simmetria e rette che dividono per metà il rettangolo in esame, quindi avranno un centro, che è il punto O. Allora in O concorrono sia le diagonali che le rette AA', BB', quindi O è un centro di simmetria.

Oppure può ancora dirsi: sul parallelogrammo $FPF'N$ le diagonali devonsi tagliare per metà; una diagonale è la AA' il cui punto medio è O; l'altra è PN, che sega la AA' in O; quindi anche O è un punto di simmetria.

L'asse BB' si chiama *asse non trasverso*.

Osservazione. — Se col centro in A e raggio eguale a c si sega questo asse non trasverso, si avranno due punti T ed U; la distanza TU la indichiamo con $2b$; sarà cioè $OT = OU = b$. E poichè $OA = a$ ed il triangolo TOA è rettangolo in O; si può scrivere $c^2 = a^2 + b^2$.

Se si osserva nell'ellisse si aveva $a^2 = b^2 + c^2$ e dalla iperbole si ricava

$$a^2 = c^2 - b^2;$$

cioè le due relazioni cambiano per il valore dell'asse non trasverso, cioè da $+b^2\, a - b^2$.

Questa relazione può esserci d'ausilio per trovare le proprietà della iperbole giovandoci di quelle dell'ellisse.

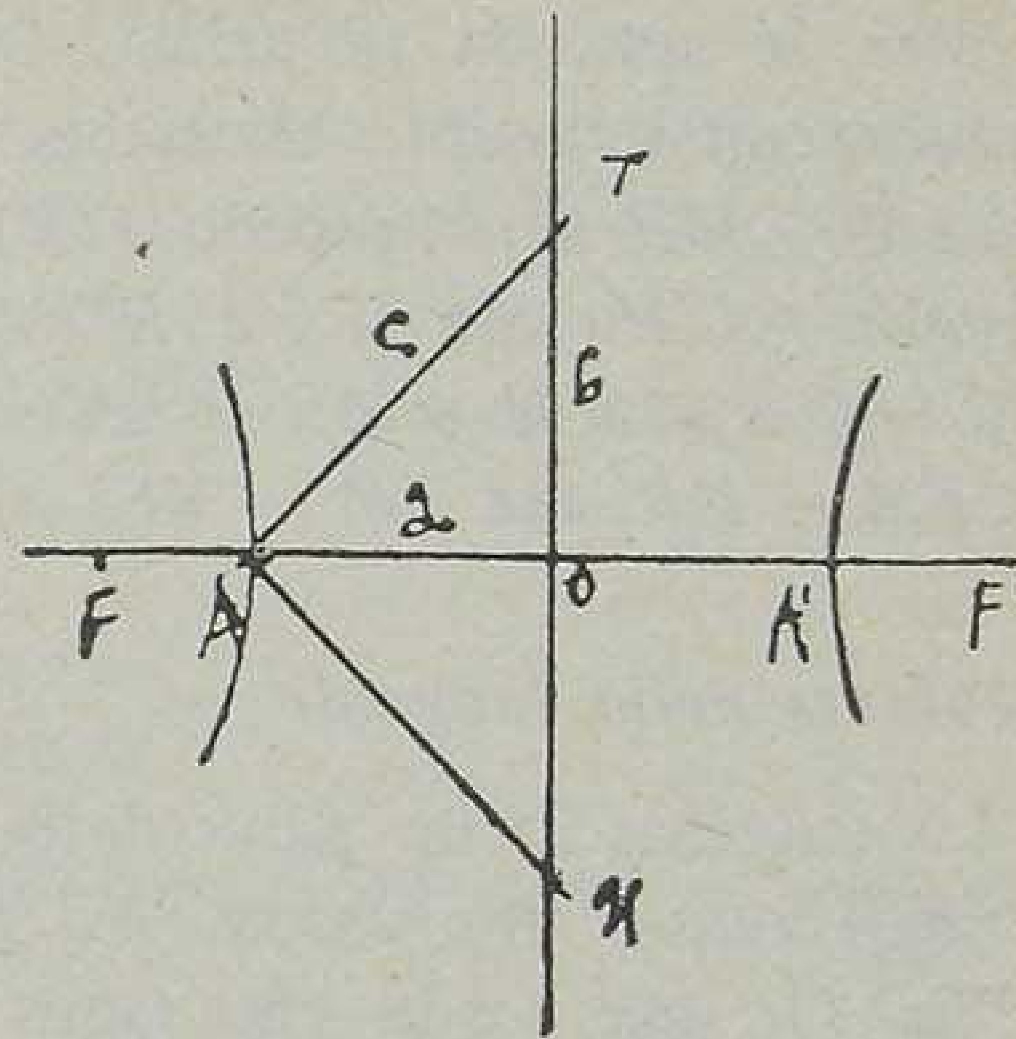

Fig. 27.

Notiamo intanto che se $2a = 2b$ l'iperbole si chiama *equilatera* e la sua relazione si riduce a $c^2 = 2a^2$.

Teorema. — *La differenza fra le distanze di un punto dentro la curva ai fuochi è maggiore dell'asse trasverso: se il punto è esterno alla curva quella differenza è minore dell'asse trasverso.*

Infatti sia P il punto che congiungo con F ed F', e sego con la PF la curva in M. Dalla figura si ricava $PF = PM + MF$ e sottraendo PF' si ottiene: $PF - PF' = PM + MF - PF'$. Al secondo membro aggiungendo e sottraendo MF'; si ricava: $PF - PF' = PM + MF - PF' + MF - MF'$ e poichè $MF - MF' = 2a$ sostituendo $PF - PF' = PM + MF - PF' + 2a$ cioè $PF - PF' > 2a$ c.d.d.

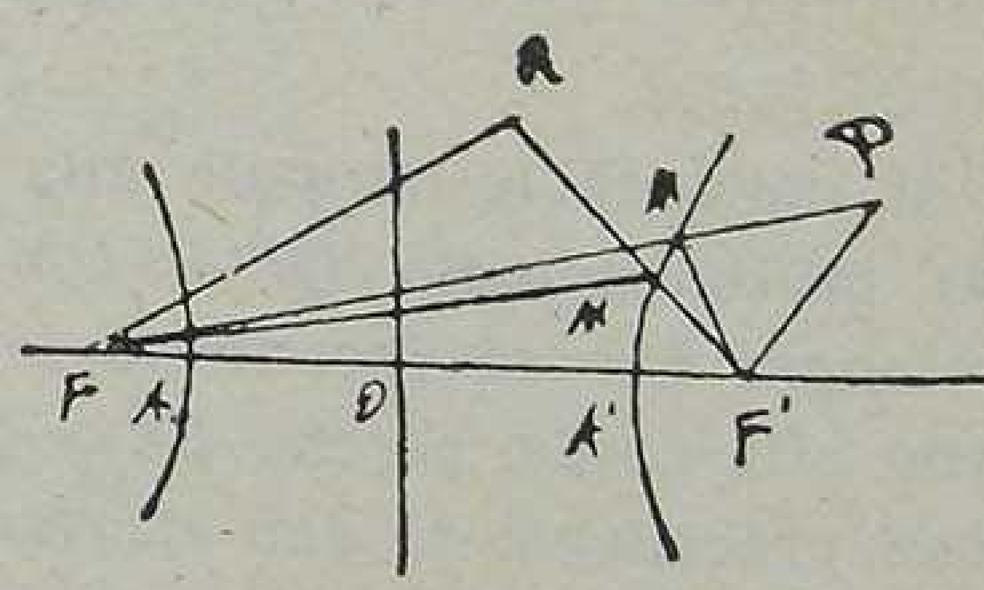

Fig. 28.

Per la seconda proprietà. Sia R il punto esterno, che unisco con i fuochi; allora nel triangolo FMR si ha $FR < < FM + MR$ e sottraendo $F'R$; si ha $FR - F'R < FM + + MR - F'R$. Ma si ha $RF' = RM + MF'$ e sostituendo $FR - F'R < FM + MR - RM - MF'$ cioè $FR - F'R < < FM - MF'$ ma $FM - MF' = 2a$ quindi $FR - F'R < 2a$.

Teorema della tangente.

La tangente in un punto della curva fa angoli eguali con i raggi vettori che escono dal punto di tangenza.

Sia TR una corda che tagli la curva in T ed S; e da

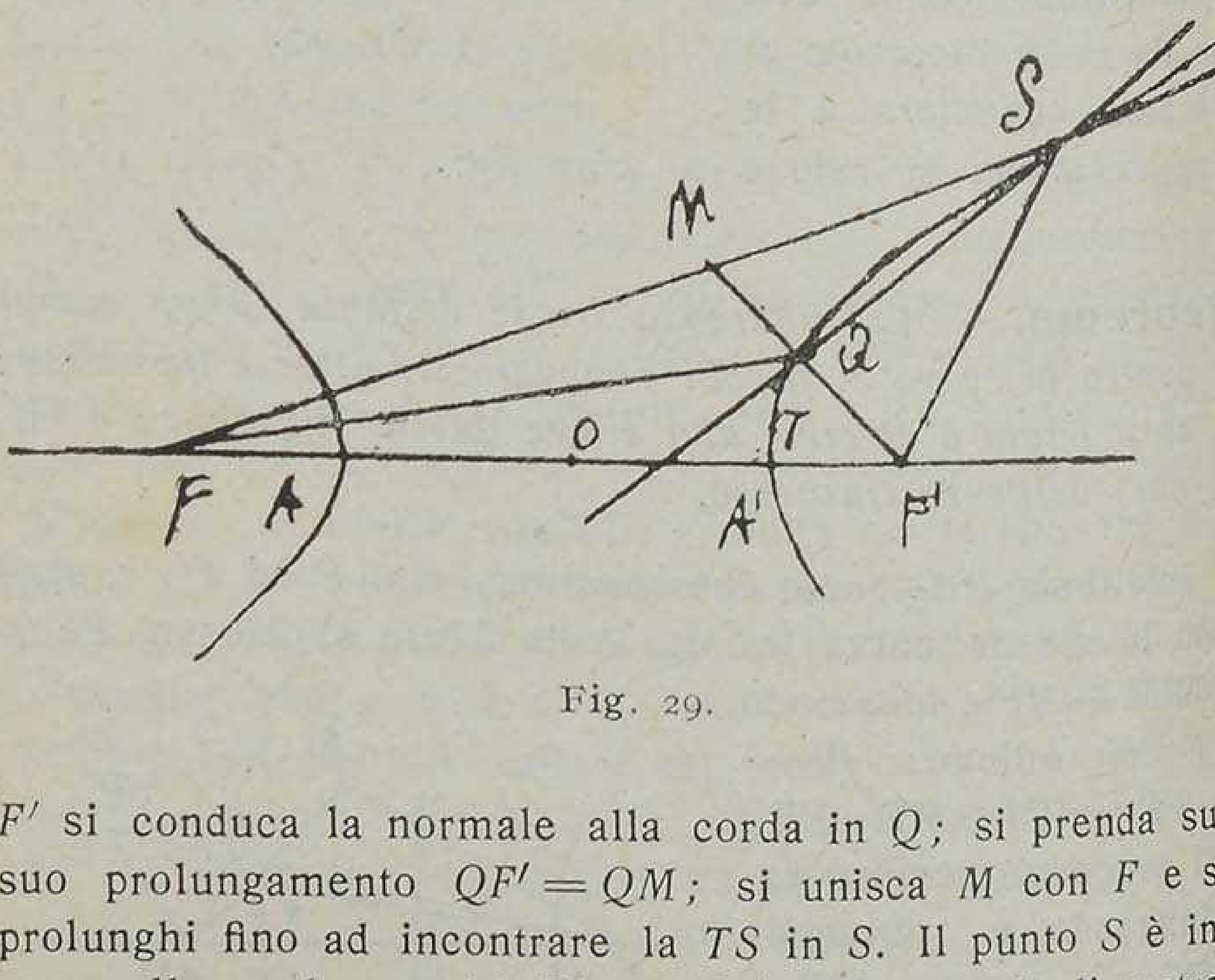

Fig. 29.

F' si conduca la normale alla corda in Q; si prenda sul suo prolungamento $QF' = QM$; si unisca M con F e si prolunghi fino ad incontrare la TS in S. Il punto S è in- erno alla corda, perchè $FS = MS + FM$ e per la dimostrazione precedente si può ricavare $FS - F'S > 2a$.

Osserviamo allora che SQM ed SOF' sono triangoli eguali perchè SQ è in comune, gli angoli in Q retti per costruzione, e $F'Q = QM$ pure per costruzione, allora l'angolo FSQ eguale all'angolo $F'SQ$.

Se adesso la corda TS gira attorno a T restando sempre invariate le relazioni suddette, si arriverà ad ottenere che la corda TS diventa la tangente in T alla curva e resterà sempre l'angolo FSQ eguale $F'SQ$ che saranno divenuti FTR e $F'TR$. *c . d . d.*

Luoghi geometrici della iperbole.

Sia MN la tangente t all'iperbole ed MF' la normale

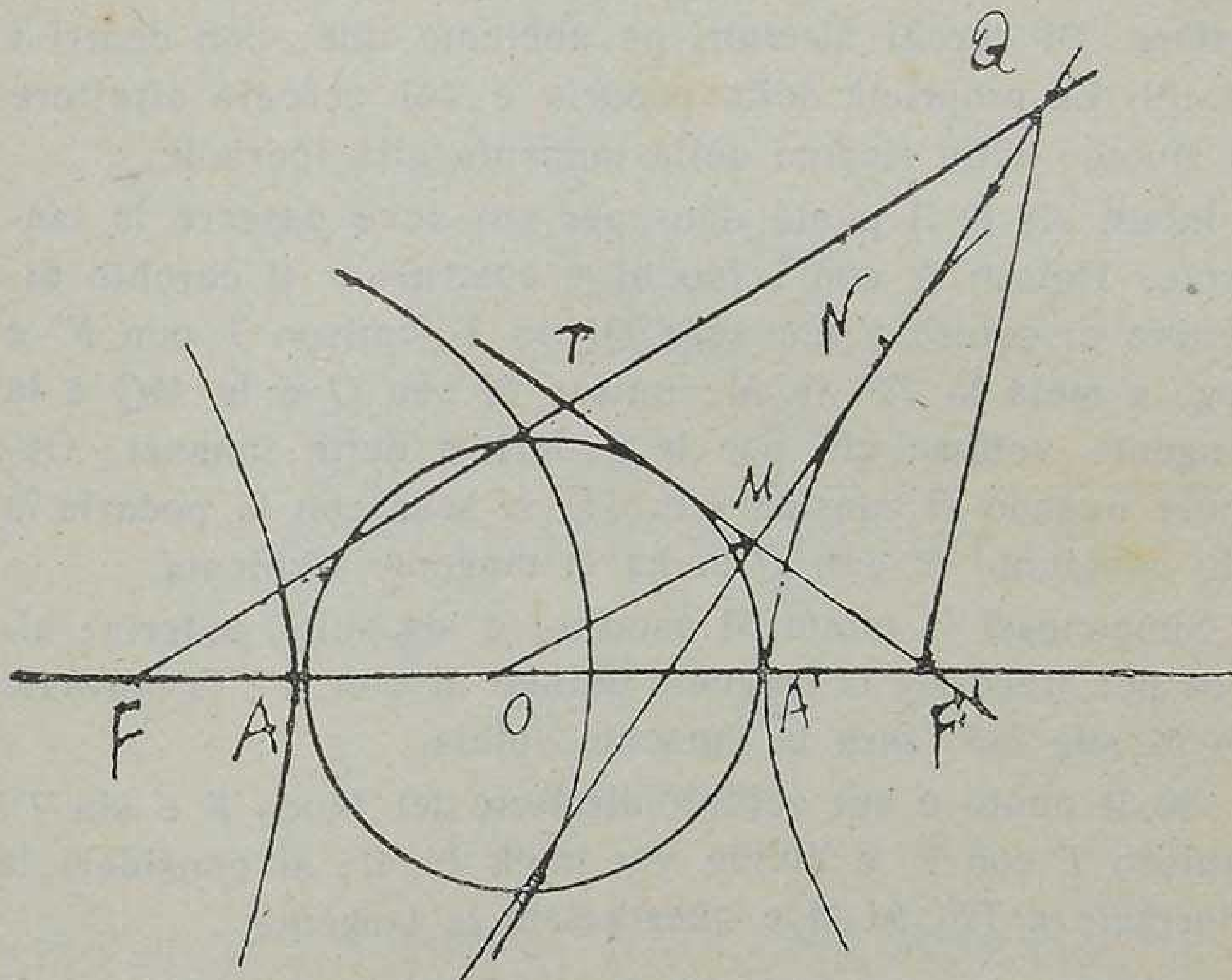

Fig. 30.

alla t; si sa che $TF' = 2MF$- Per la similitudine dei triangoli $F'TF$ ed $F'MO$ essendo O il centro della FF' si ha: $TF : OM = FF' : OF'$. Ma $FF' = 2c$ $OF' = c$ $TF = QF -$ $- QT = QF - QF'$ ossia $TF = 2a$ e sostituendo nel rapporto: $2a : OM = 2c : c$ da cui $OM = \frac{2a\,c}{2c} = a$. Quindi tutti i piedi delle normali alle tangenti condotte dai fuochi stanno sulla circonferenza descritta dal centro dell'iperbole ed avente a per raggio. Tale cerchio chiamasi *podaria*.

Inoltre siccome $FT = 2a$, diremo che tutti i punti di incontro delle congiungenti un fuoco con un punto di contatto di una tangente con la normale condotta dall'altro fuoco alla tangente stessa; stanno su una circonferenza descritta da un fuoco con raggio $2a$, e chiamasi *cerchio direttore*. Di cerchi direttori ne abbiamo due, con centri i fuochi. La proprietà della podaria e del cerchio direttore ci aiutano nella ricerca della tangente alla iperbole.

Infatti sia Q il punto dato per cui deve passare la tangente. Unisco Q con i fuochi e costruisco il cerchio direttore di centro F che sega QF in T; unisco T con F' e sego a metà la TF' in M; unisco M con Q e la MQ è la tangente voluta; ciò per le proprietà dette innanzi. Oppure quando si considera la TF' si sega con la podaria in M; congiunto M con Q si ha la tangente richiesta.

Suppongasi il punto M esterno, e sia sulla podaria; allora per tracciare la tangente unisco M con F'; la normale in M alla MF' sarà la tangente voluta.

Se il punto è sul cerchio direttore del fuoco F e sia T; unisco T con F' e divido per metà in M; si consideri la normale a TF' in M e questa sarà la tangente.

CONSIDERAZIONE. — Se la tangente lo è ai vertici, allora essa è normale ad AA'. Se dal fuoco F' conduciamo la tangente alla podaria, questa retta sarà pure tangente al cerchio direttore di centro F; ed allora la MN passerà per O e la FQ sarà parallela alla MN, ed il punto di contatto sarà all'infinito; cioè la MN è tangente alla curva all'infinito e similmente se ne avrà un'altra simmetrica alla prima; tali due tangenti si chiamano *asintoti*. Queste tangenti sono accessorie alla costruzione della curva perchè ne determinano l'andamento.

Teorema. — *Il prodotto delle distanze che una tangente ha dai fuochi è eguale ad una costante.*

Siano d_1 e d_2 le due distanze focali alla tangente MN;

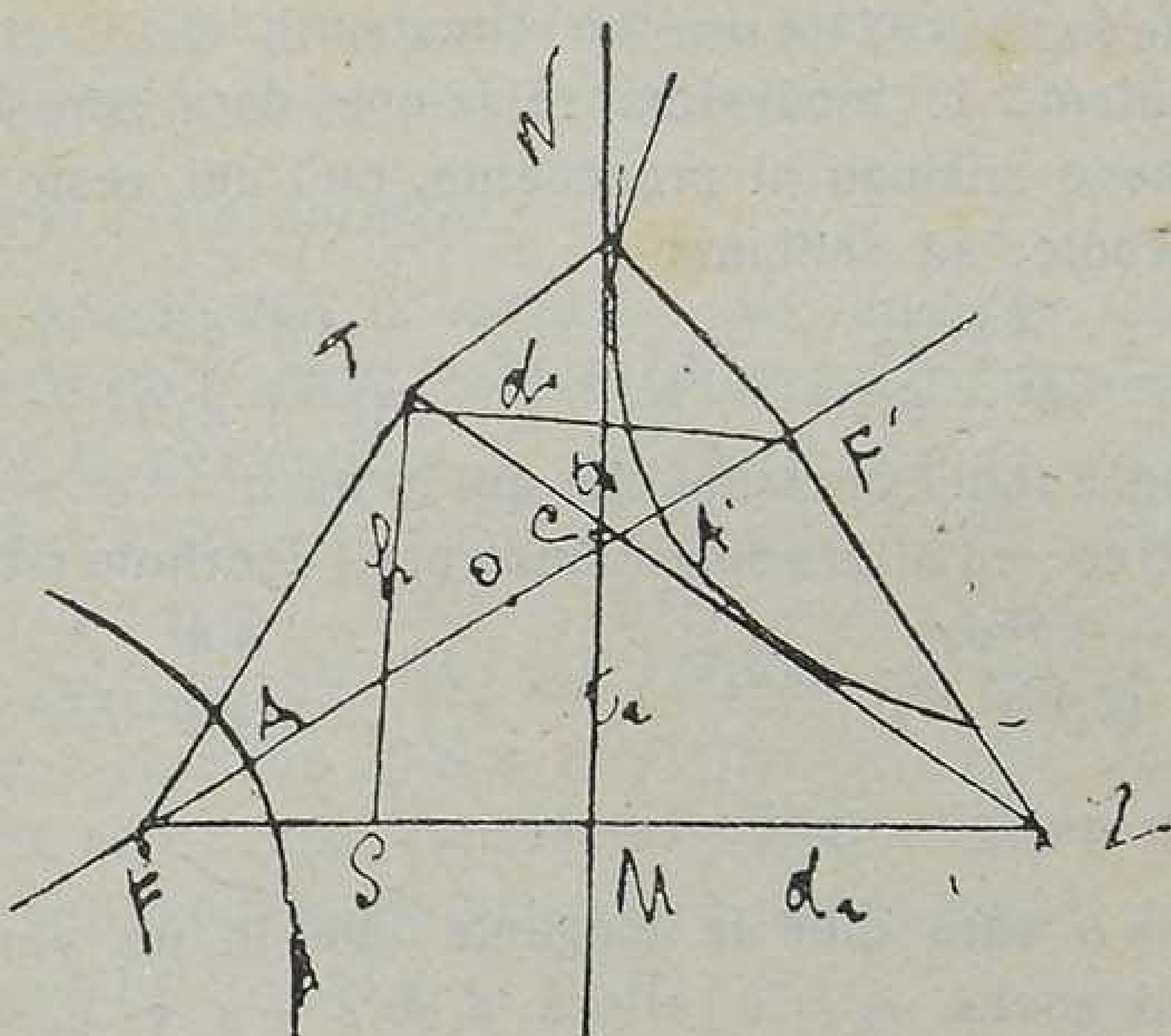

Fig. 31.

e si costruisca il trapezio $TF'ZF$. Dalla figura si ricava: $\overline{TS}^2 = \overline{TF}^2 - \overline{FS}^2$ cioè $(t_1 + t_2) = 4a^2 - (d_2 - d_1)^2$.

D'altro canto $TZ = TC + CZ = CF' + CF = 2a$ e poichè $\overline{TS}^2 = \overline{TZ}^2 - \overline{SZ}^2$; sostituendo: $(t_1 + t_2)^2 = 4c^2 - (d_1 + d^2)$. Eguagliando allora le due espressioni di $(t_1 + t_2)^2$; si ricava: $4a^2 - (d_2 - d_1)^2 = 4c^2 - (d_1 + d_2)^2$ ossia riducendo $4a^2 - 4c^2 = -4d_1 d_2$ ossia $c^2 - a^2 = d_1 d_2$. Ma nell'iperbole $a^2 = c^2 - b^2$ da cui $c^2 - a^2 = b^2$ e sostituendo $b^2 = d_1 d_2$. c . d . d.

Si ha inoltre che il valore del prodotto delle distanze è eguale a b^2.

Come si è fatto per l'ellisse, possiamo dare delle relazioni che legano fra loro le distanze focali di una tangente, coi segmenti in cui quella è divisa dalle normali a lei dirette dai fuochi.

Quindi dati t_1 e t_8 oppure d_1 e d_2 possiamo delle 4 grandezze $t_1 t_2 d_1 d_2$ trovare le due rimanenti.

Applichiamo la medesima relazione data per l'ellisse, che in modo analogo al precedente, può del resto trovarsi per l'iperbole, ed abbiamo

$$t_1^2 = \frac{4\,a^2\,d_n^4}{(b^2 + d_1^2)^2} - d_1^2 \text{ e } i_2^2 = \frac{4\,a^2\,d_2^4}{(b^2 + d_2^2)^2} - d_2^2$$

però bisogna tener presente che qui si ha $a^2 = c^2 - b^2$; cioè b^2 è negativo; ed allora sostituendo per l'iperbole riterremo:

$$l_1^2 = \frac{4\,a^2\,d_1^4}{(d_1^2 + b^2)^2} - d_1^2 \qquad t_2^2 = \frac{4\,a^2\,d_2^4}{(d_2^2 - b^2)^2} - d_2^2$$

Facciamo qualche applicazione.

Se $t_1 = o$ sarà cioè la tangente tale in un vertice per es. A' ed anche $t_2 = o$ allora $d_1 = c - a$ e $d_2 = c + a$; vediamo se ciò lo conferma la formula. Facendo la sostituzione di $t_1 = o$ la prima dà:

$$\vartheta = \frac{4\,a^2\,d_1^4}{(d_1^2 - b^2)^2} - d_1^2 \text{ ossia } d_1^2 = \frac{4\,a^2\,d_1^4}{(d_1^2 - b^2)^2}$$

cioè dividendo per c_1^2 e sviluppando; si ha $(d_1^2 - b^2) = = 4 a_2\, d_1^2$ ossia:

$d_1^4 + b^4 - 2 b^2 d_1^2 = o$ cioè $d_1^4 - 2 d_1^2 (b^2 + 2a^2) + b^4 = \vartheta$ e poichè $c^2 = a^2 + b^2$ da cui $b^2 = c^2 - a^2$ sostituendo nella parentisi si avrebbe $b^2 + 2a^2 = c^2 - a^2 + 2a^2 = c^2 + a^2$ e $b^4 = (c^2 - a^2)^2$; sostituendo nella biquadratica $d_1^4 - - 2 d_1^2 (c^2 + a^2) + (c^2 - a^2) = o$.

Ponendo $d_1^2 = z$ si ha $z^2 - 2z(c^2 + a^2) + (c^2 - a^2)^2 = o$

da cui $z = \dfrac{2(c^2 + a^2) \pm \sqrt{4(c^2 + a^2)^2 - 4(c^2 - a^2)^2}}{2} =$

$= \dfrac{2(c^2 + a^2) \pm \sqrt{16\,a^2 c^2}}{2}$ ossia $z_1 = (c^2 + a^2) + 2ac$

$z_2 = (c^2 + a^2) - 2ac$ ossia $z_1 = (a + c)^2$ e $z_2 = (c - a)^2$. Ricordando che $d_1^2 = z^2$ si ha $d_1 = \pm \sqrt{z_1}$ $d_1^1 = \mp \sqrt{z_2}$ ossia $d_1 = \pm (a + c)$ $d_1^1 = \mp (c - a)$. Se avessimo posto $t_2 = o$ avremmo trovato per d_2^2 i valori simmetrici di d_1. Quindi anche le formule ci danno i risultati ottenuti per altre considerazioni.

Teorema della normale.

Gli angoli che la normale alla tangente forma con un raggio vettore ed il prolungamento dell'altro sono eguali.

Sia t la tangente in P; unisco P con i fuochi e conduco per tal punto la normale alla tangente che incontra la AA' in N. Gli angoli SPN e TPN sono eguali perchè retti; inoltre gli angoli TPQ ed FPS eguali perchè opposti al vertice, e siccome $FPS = SPF'$ perchè angoli formati dalla tangente con i raggi vettori, sarà $TPQ = SPF'$. Allora dagli angoli retti sottraendo questi due ultimi angoli eguali, resta $F'PN = NPQ$. c.d.d.

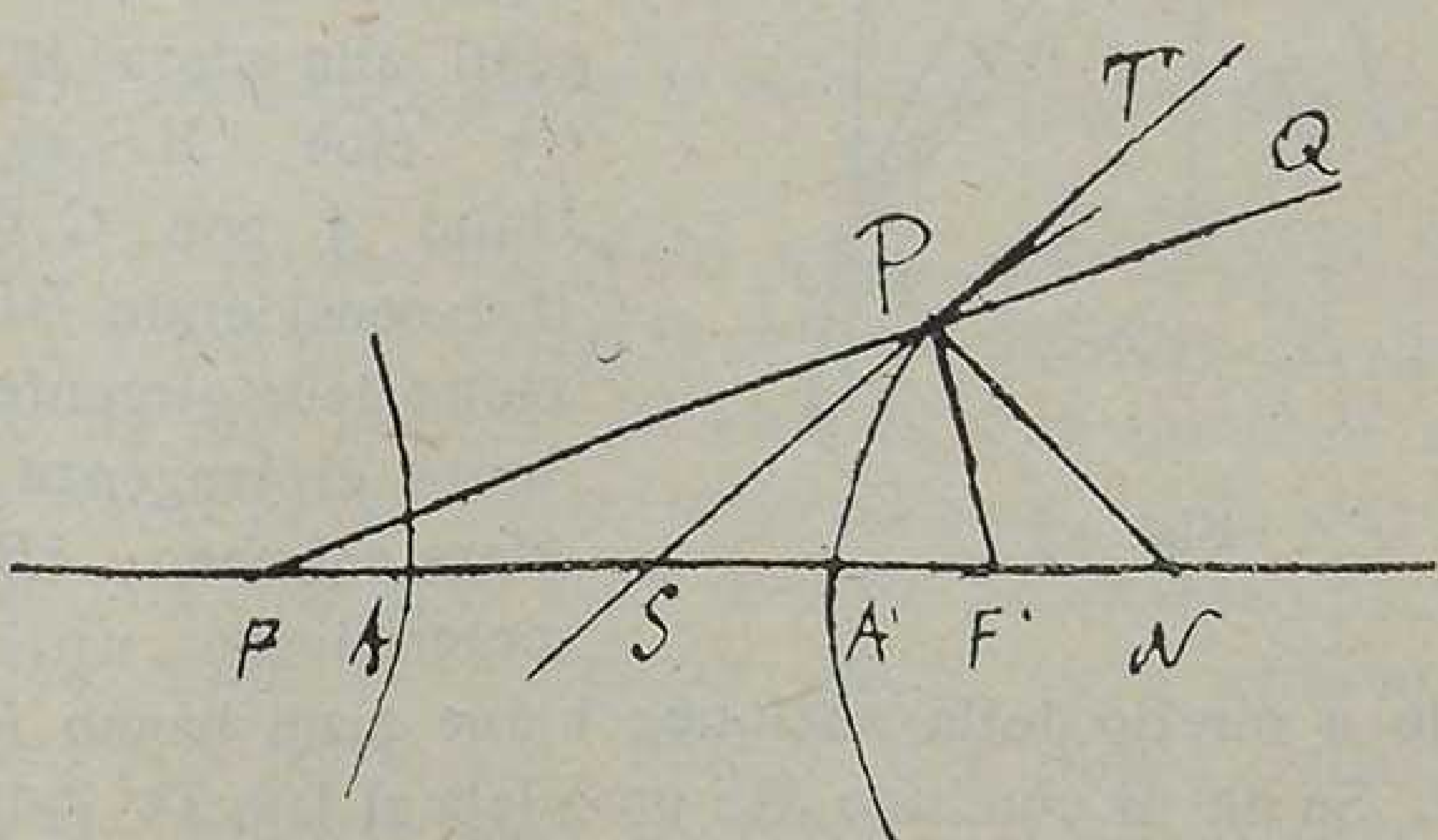

Fig. 32.

PARABOLA.

Teorema. — Se si fa una sezione in un cono retto parallelamente ad un lato di questo e normalmente al piano passante per il lato e l'asse del solido si ha una curva, la quale gode della proprietà che *un suo qualunque punto dista egualmente da un punto fisso nel piano della curva e da una retta esterna alla curva e normale al suo asse.*

Infatti: Sia VTU il cono ed MNA la sezione fatta come si disse. Si inscriva nel cono una sfera la quale avrà per suo luogo di tangenza col cono una circonferenza BCD e sarà tangente in F alla sezione. Un punto M qualunque della curva, esterno alla sfera è capace di far condurre due segmenti MF ed MV tangenti alla sfera in F e C; cioè $MF = MC$. Unito A con C fino in B e considerato BD diametro della circonferenza luogo di tangenza della sfera col cono; AB e DB determinano un piano normale a quello della sezione; i due piani hanno RS per traccia. Se da M conduco MS parallela al lato TV del cono; poichè MS gira sul piano MVT incontrerà la AB; e poichè

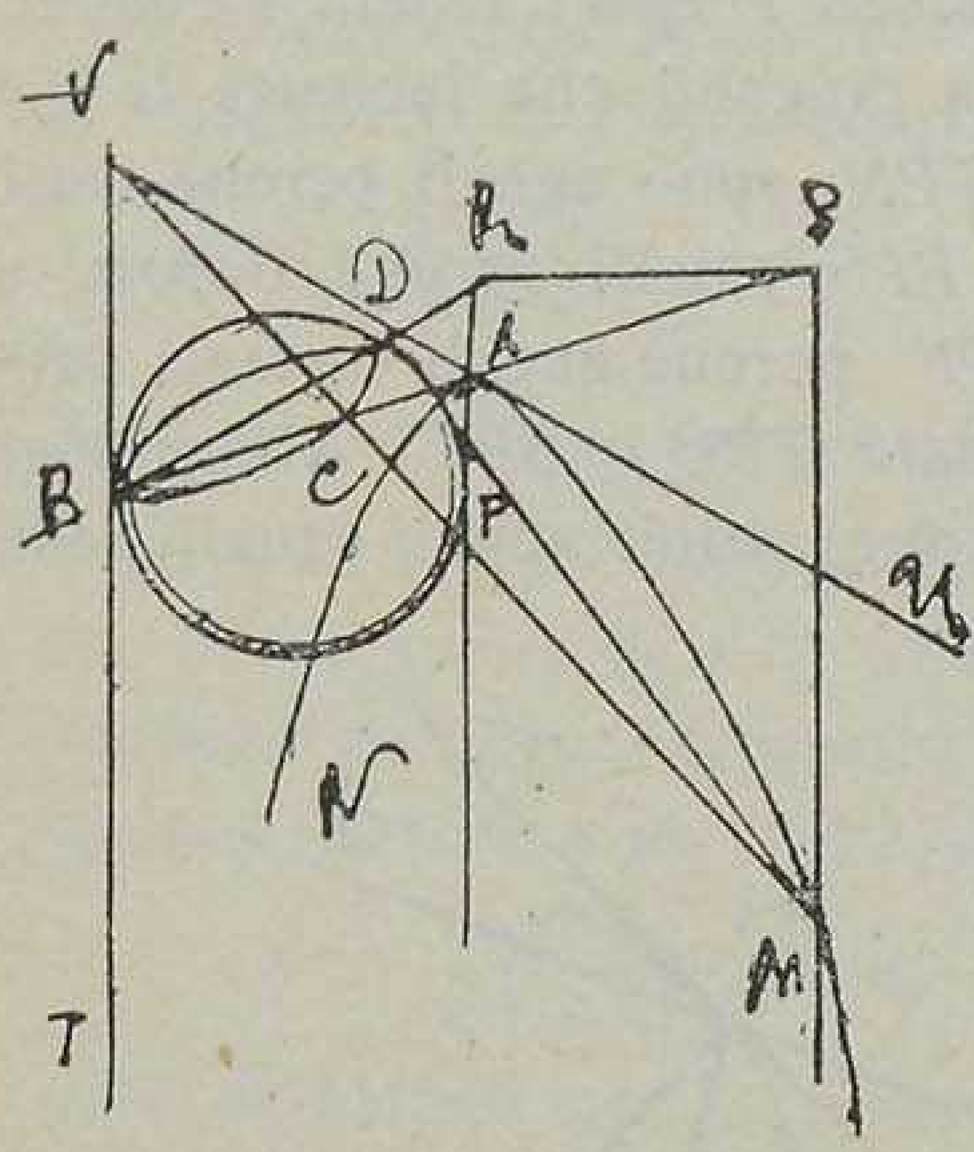

Fig. 33.

la AB giace nel piano ABD incontrerà la RS; quindi S è determinato.

I triangoli dello stesso piano, VBC e CSM sono simili; cioè $VB : VC = MS : MC$ ma V è esterno alla sfera, M lo è pure, quindi si sa che $MF = MC$ e $BV = VC$ sarà allora $MS = MC = MF$ cioè M dista lo stesso da F e da S. *c.d.d.*

Inoltre si osservi che il triangolo VBD è isoscile avendo $VB = VD$, tangenti comuni alla stessa sfera da un medesimo punto; e poichè il triangolo ARD è simile al predetto; sarà pure $AR = AD$. Ma A è esterno alla sfera, e da esso partono le due tangenti AF ed AD, cioe $AF = AD$; si ha $AR = AF$; cioè A dista egualmente da F e dal punto R incontro fra la AF e la RS normale a questa.

Osservazioni. — La curva così determinata ha nome *parabola*, F è il suo fuoco; RF il *parametro*; la retta RF è l'*asse*; la retta RS è la *direttrice*; A il *vertice*; i segmenti come MF sono i *raggi vettori*. Dunque diremo che ogni punto della parabola dista egualmente dal fuoco e dalla direttrice. Inoltre si sa che il vertice divide per metà il parametro.

Costruzione della parabola.

Le proprietà viste danno il modo di individuare la curva per punti.

Infatti si prenda un punto qualunque oltre il fuoco e sia P. Centro in F e raggio AP si descriva un cerchio, tagliato da MP, normali all'asse in due punti M e T; e poichè $AV = VF$ ed AS normale all'asse, si ha che la MS normale alla direttrice dista di AP. M intanto dista dalla direttrice come da F poichè giace sulla circonferenza di centro F e raggio FM; quindi M è punto della curva. Intanto per la costruzione il punto T è simmetrico ad M e gode della stessa proprietà; ciò ci fa osservare che la *curva è simmetrica rispetto all'asse.*

Osserviamo che se P è fra V ed Fcome B, centro in F e raggio AB si ha un cerchio incontrato dalla normale all'asse condotta per B e quindi si hanno sempre due punti. Se il punto è F; la normale sarebbe il diametro del cerchio di raggio AF. e dà sempre due punti. Se il punto è V non si ha altro punto che V (come si doveva ottenere) e la tangente in V; i punti fra V ed A non danno punti della parabola, perchè ad esempio $AZ < ZF$ e quindi il cerchio di raggio AZ non incontra la normale all'asse condotta per Z. Diremo allora che solo danno punti della parabola i punti scelti da V a destra.

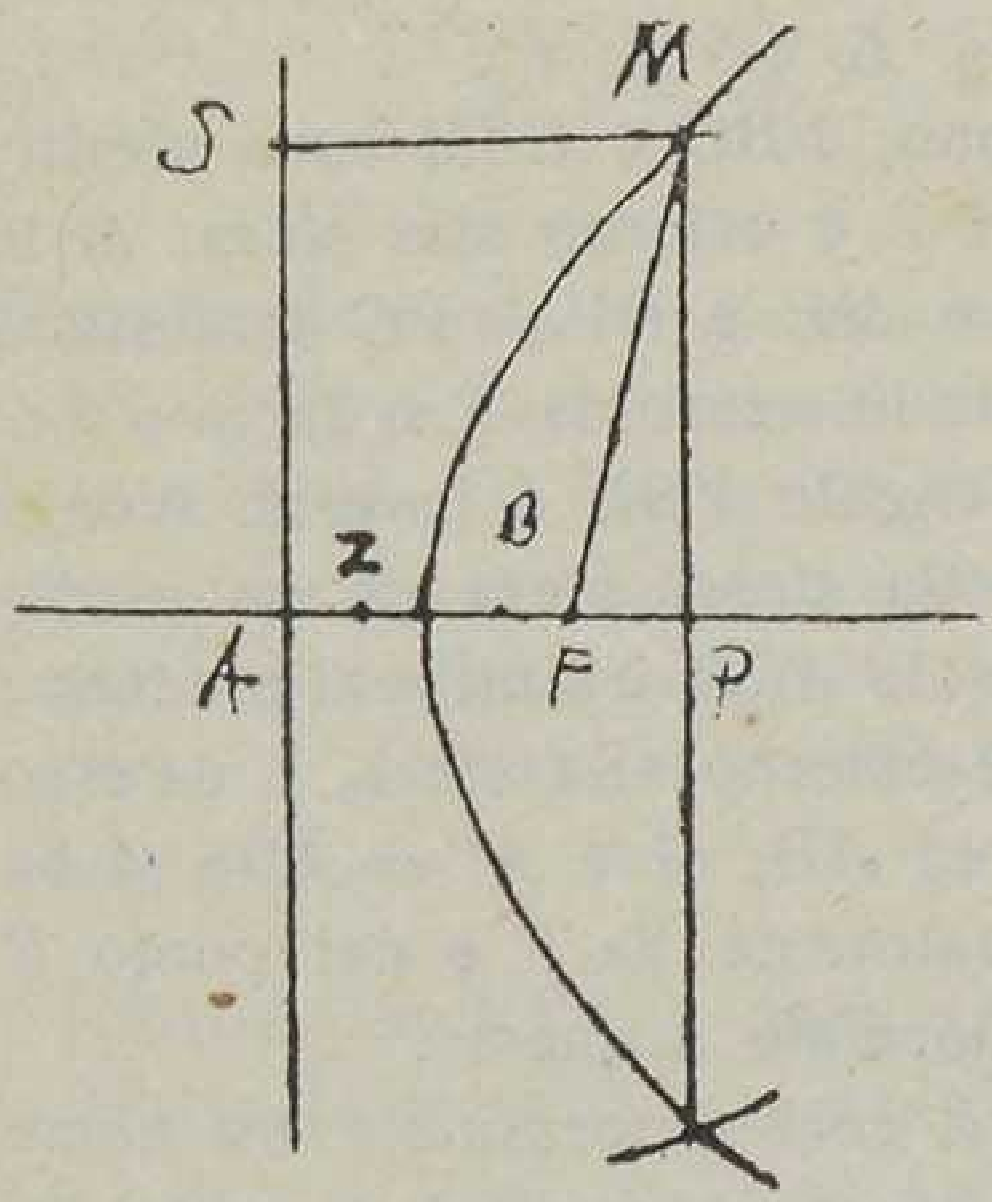

Fig. 34.

Infiniti punti così ottenuti individuano l'andamento della curva.

La parabola si può anche costruire praticamente così:

Dato il parametro, il suo punto medio è il vertice. Per uno degli estremi del parametro si innalzi la perpendicolare e vi si adagi il lato corto di una squadra. Si prenda un filo inestensibile che sia lungo 1 volta il parametro. Questo filo si fissi con un capo con l'estremo della

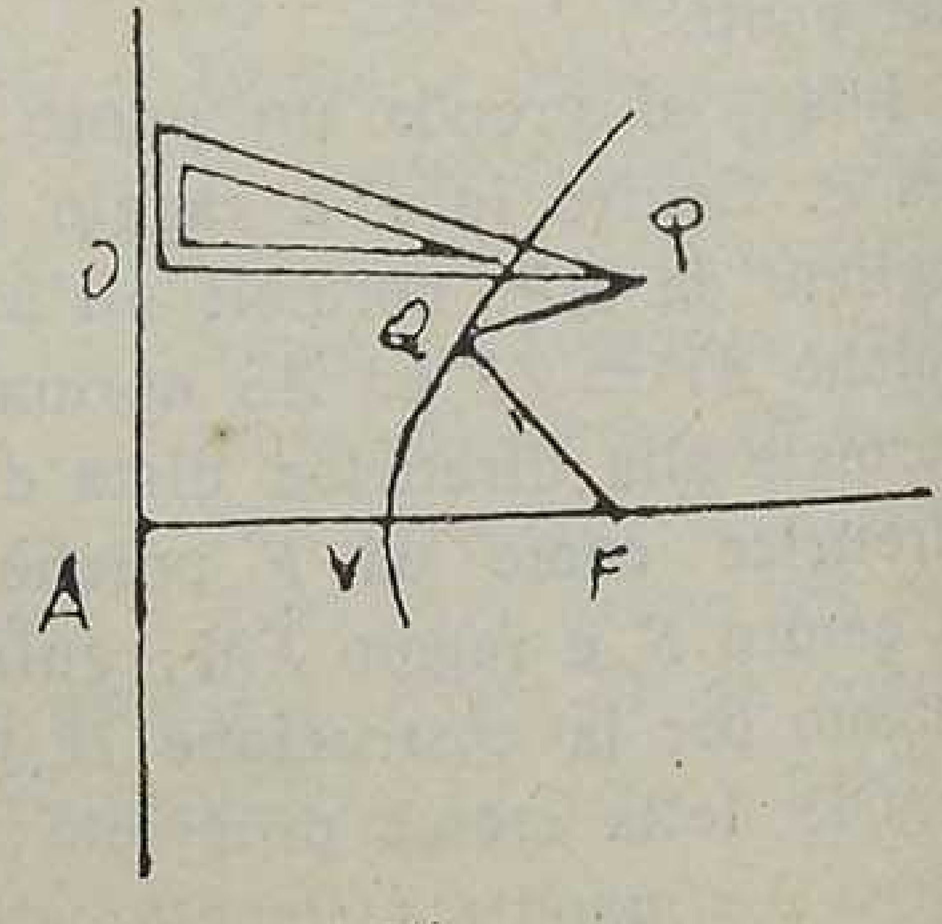

Fig. 35.

squadra che tocca la normale al parametro e con l'altro il fuoco. Allora si faccia scorrere la squadra su quella perpendicolare e con una punta di matita si obblighi il filo a restare sempre a contatto col bordo della squadra; la traccia della matita muovendosi la squadra, ci dà una curva, la quale si rende simmetrica alla retta parametro, ed individua la parabola. Ciò è vero perchè se la matita è in Q; si ha $OP = PQ + QO = 2p$ ed ancora $PQ + QF = 2p$ ed eguagliando $PQ + QO = PQ + QF$ cioè $QO = QF$; cioè Q è un punto della parabola.

Teorema. — *Se un punto è esterno alla parabola dista più del fuoco che dalla direttrice; il contrario se è interno alla curva.*

Sia P il punto dato, e conduco PR normale alla direttrice. Nel triangolo PMF ha $PF > MF - PM$ e poichè $MF = MR$ sostituendo: $PF > MR - PM$ cioè $PF > RP$. *c. d. d.*

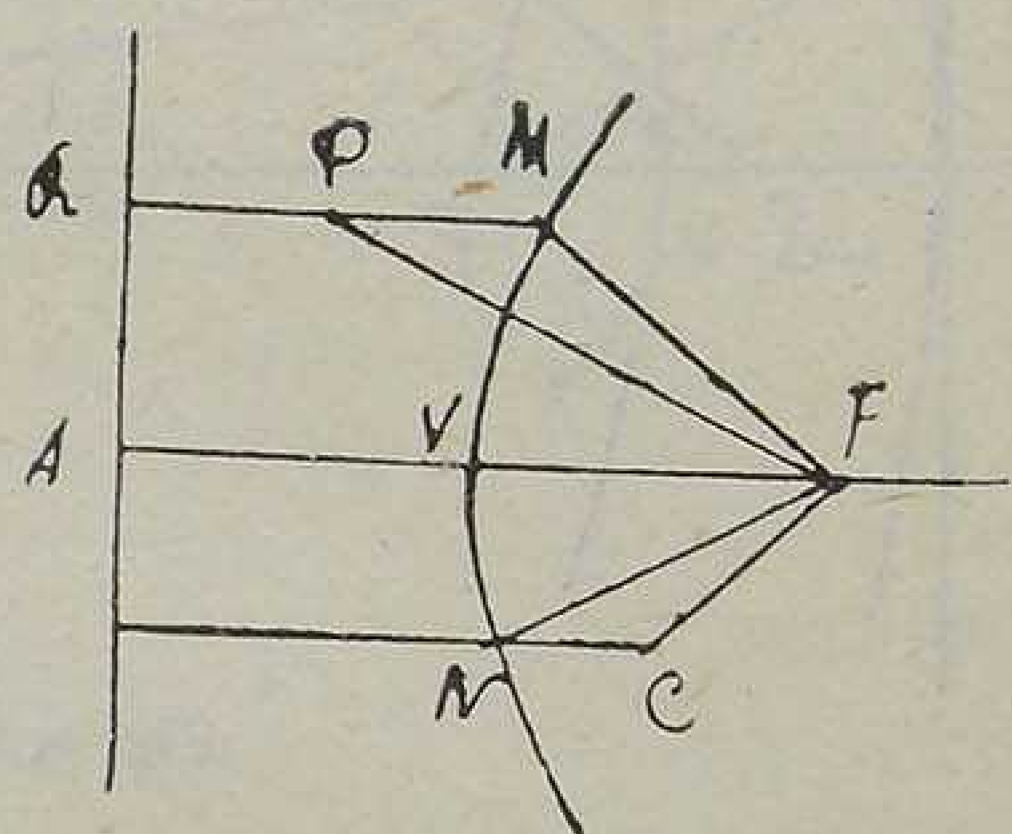

Fig. 36.

Inoltre se il punto è interno e sia C; sia CT normale alla direttrice; si ha nel triangolo NCF che $CF < NC + NF$ e poichè $NF = NT$ si ha sostituendo $CF < NC + NT$ cioè $CF < CT$ *c. d. d.*

Derivazione della parabola dall'ellisse.

Siano F ed F' i fuochi dell'ellisse e sia $FR = 2a$ cioè l'arco RA appartiene al cerchio direttore dell'ellisse di fuoco F'. La RF è normale alla tangente dell'ellisse.

Se immaginiamo che F' si allontani indefinitamente, il cerchio direttore assume un raggio sempre più grande e la curva si rende sempre più vicina alla retta; siccome inoltre noi facciamo in modo che essa passa sempre per A, osserviamo che F' all'infinito ci dà un cerchio direttore che si confonde con la normale alla AF' nel punto A, cioè con la *direttrice* della parabola. Allora il segmento RF mantenendosi sempre normale alla tangente in S all'ellisse, poichè la tangente risulta tale (con la considerazione di F' all'infinito), alla ellisse in V si ha che la RF assume la

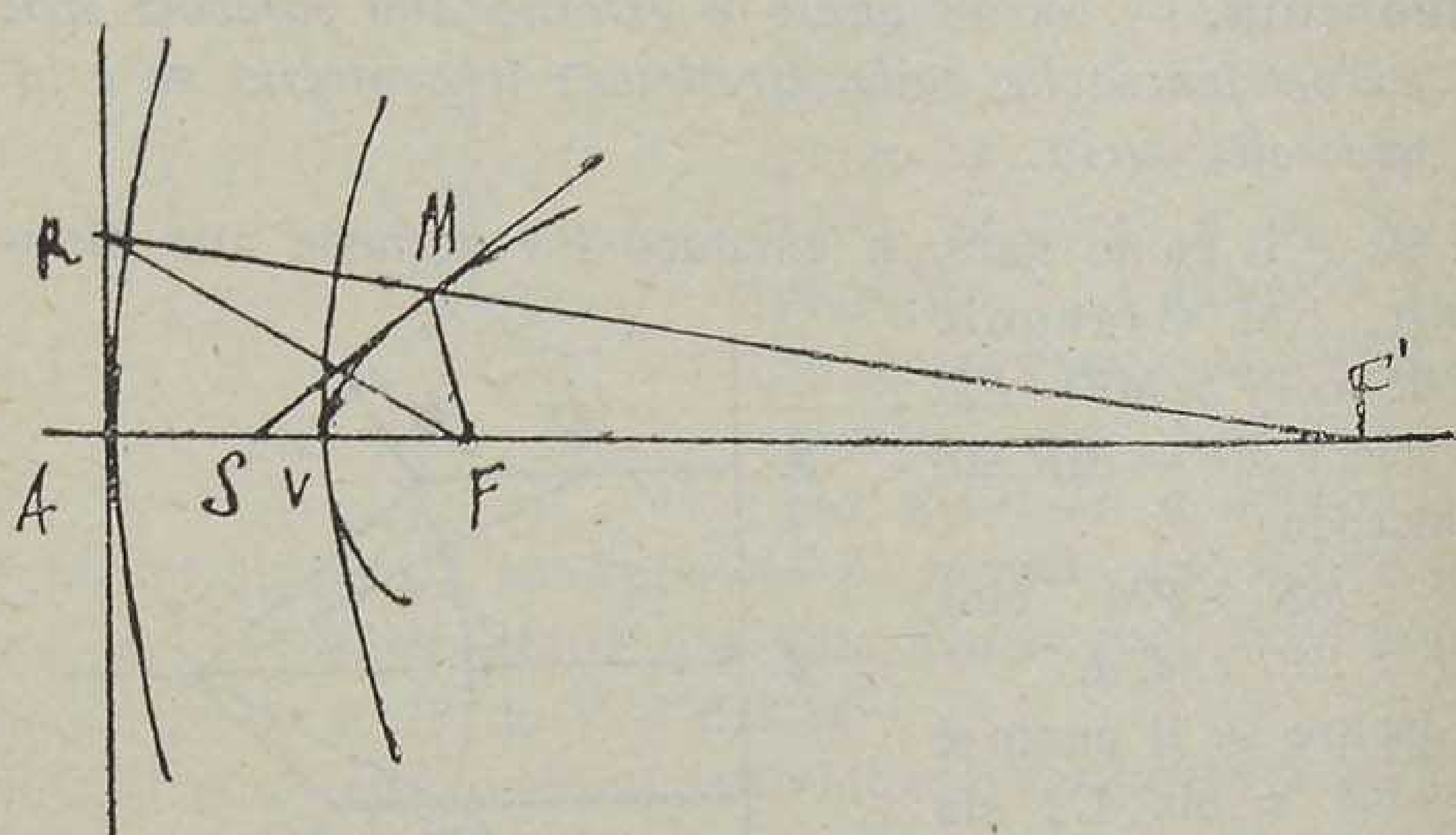

Fig. 37.

direzione AF restando sempre normale alla tangente in V. Inoltre il punto S essendo medio di RF, diventerà il punto V medio di AF; cioè V è il vertice della parabola. La curva ellisse aumentando la sua eccentricità, diventerà sempre più grande e la curva assume la forma dell'arco di parabola.

Intanto la RF' con F' all'infinito diventa parallela alla AF (vedi fig. 42). Ed allora i triangoli RAF ed SVF sono simili; cioè si può scrivere $RF : SF = AF : VF$. Ma $AF = 2VF$ quindi

$RF = 2SF$ cioè S che è il piede della perpendicolare alla tangente condotta da F sta sulla normale in V alla AF; allora diremo *che i piedi delle normali alle tangenti condotte dal fuoco stanno tutti su una retta che è la normale al parametro nel vertice della parabola.*

Intanto per la proprietà dell'ellisse, la tangente fa angoli eguali con i raggi vettori del punto di contatto; quindi dovrebbero essere i raggi MF ed MF', ma F' è all'infinito;

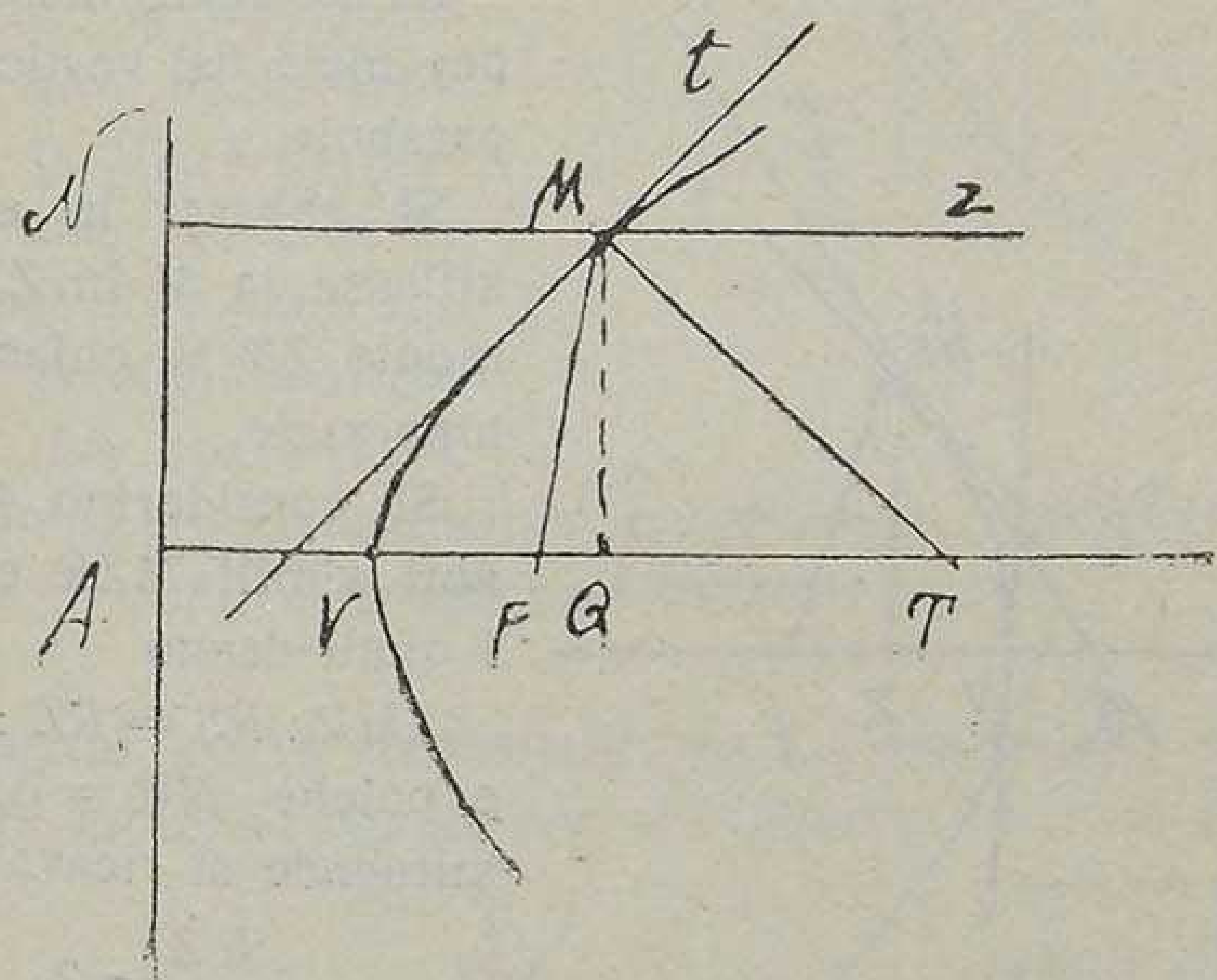

Fig. 38.

e restando fuse le proprietà dell'ellisse allontanandosi F', avremo che *la tangente fa sempre angoli eguali col raggio MF e la parallela all'asse condotta da M* (vedi fig. 42).

PROPRIETÀ. — Consideriamo i triangoli MFS ed SFU; essi hanno SF in comune, gli angoli in S eguali perchè retti; inoltre se si considerano i triangoli eguali MSR ed MSF si ha l'angolo MRS eguale ad MFS; e poichè l'angolo MRS eguale SFU perchè alterni interni rispetto alle parallele RM ed UF e alla trasversale RF, ne viene che

MFS eguale ad *SFU*. Allora i due triangoli *MSF* ed *USF* hanno un lato e due angoli eguali e quindi sono eguali; cioè $UF = MF$. Diremo quindi che data una tangente, il suo punto di contatto con la parabola e quello d'intersezione dell'asse distano egualmente dal fuoco.

Teorema sulla sotto tangente.

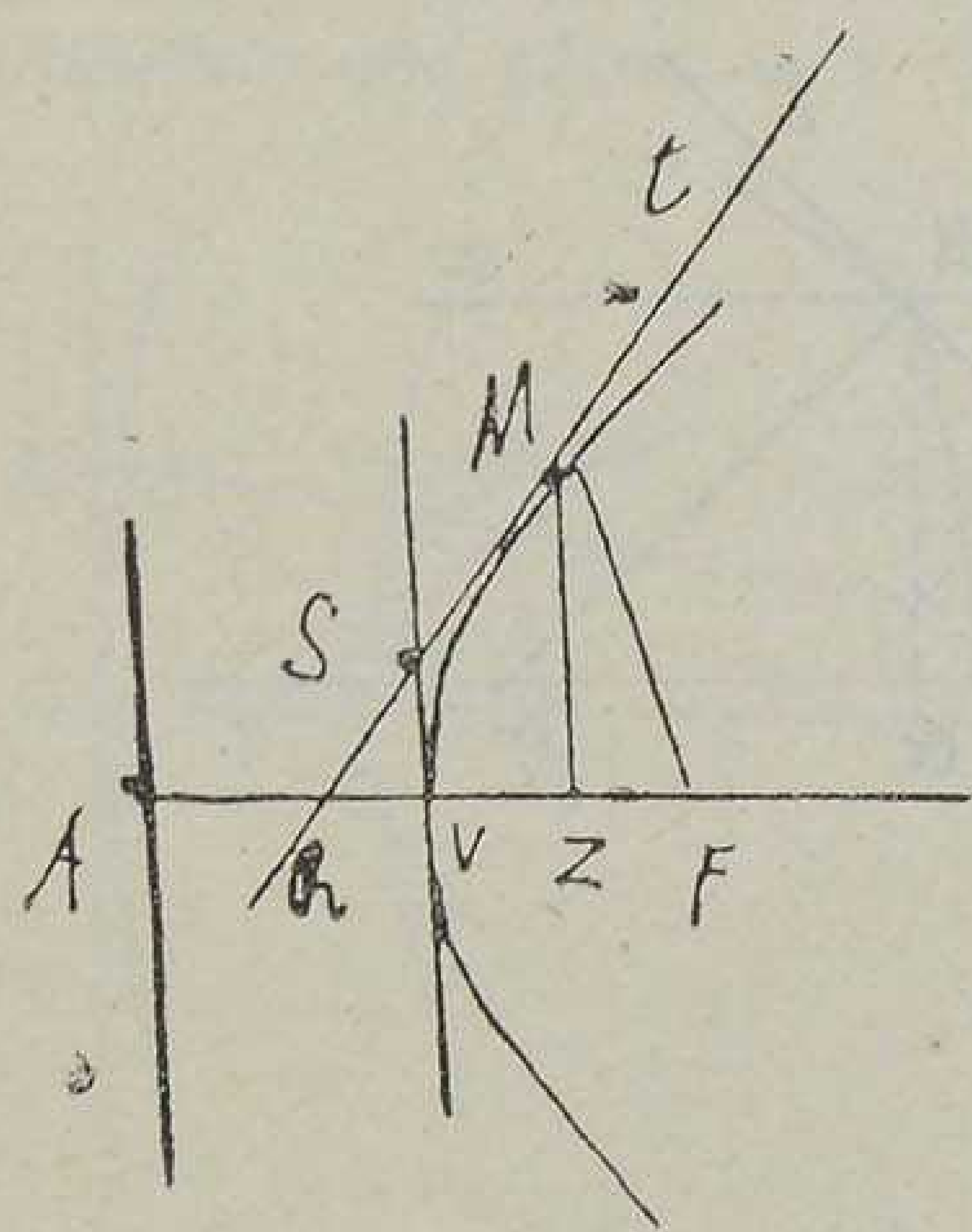

Fig. 39.

La sottotangente è divisa per metà dal vertice della parabola.

Si abbassi la normale all'asse da *M* in *Z* il segmento *ZR* si chiama sottonormale.

Si considerino i triangoli simili *MZR* ed *SVR* i quali danno

$$MR : RS = RZ : RV$$

e poichè $MR = 2RS$ sostituendo si ricava

$$\frac{RZ}{RV} = 2$$

da cui $RZ = 2 . RV$

cioè *R* e *Z* distano egualmente dal punto *V*. *c. d. d.*

Costruzione della parabola per tangenti.

Dato il parametro, cioè noto il fuoco ed il vertice, si consideri la normale in *A*, che è la direttrice.

Si prenda su essa normale un punto qualunque *R* e si unisca con *F*; divido il segmento per metà ed innalzo da *S* la normale alla *RF* che sega la parallela all'asse condotta da R nel punto M che è il punto di tangenza e la SM è la tangente.

Per il punto simmetrico, si abbassi la normale da M all'asse in P e si prolunghi di un segmento $PZ = MP$. Z è un altro punto della curva la UZ è la tangente alla curva in Z. Così per altri punti come R presi sulla direttrice. La curva sarà tanto più precisata quanto maggiore è il numero delle coppie di punti e di tangenti ottenute.

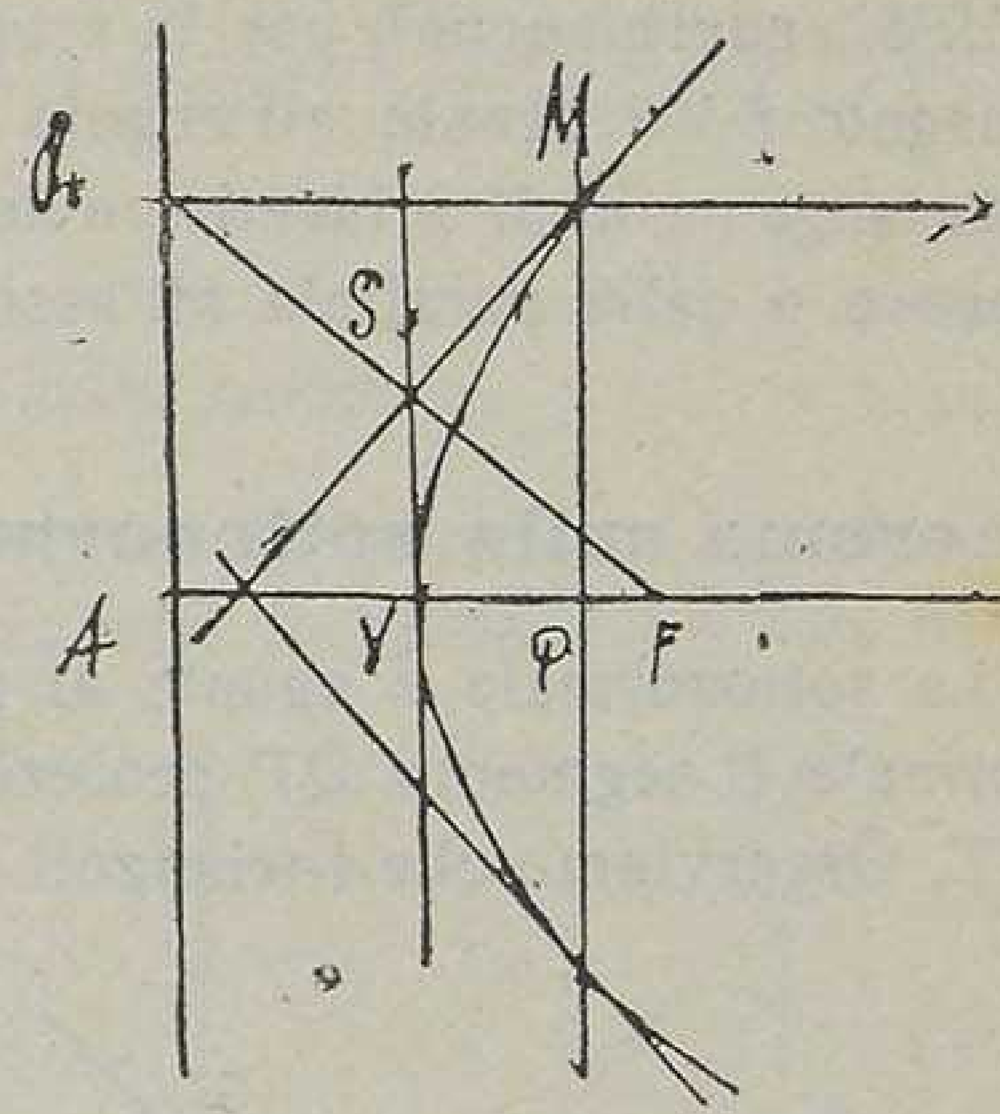

Fig. 40.

Teorema sulla normale. — *La normale ad una tangente fa angoli eguali con il raggio vettore del punto di contatto e la parallela all'asse condotta da questo punto.*

Infatti sia t la tangente ed MP la sua normale. Osserviamo che gli angoli UMP e PMS sono eguali perchè retti, e se da essi sottragghiamo gli angoli UMF

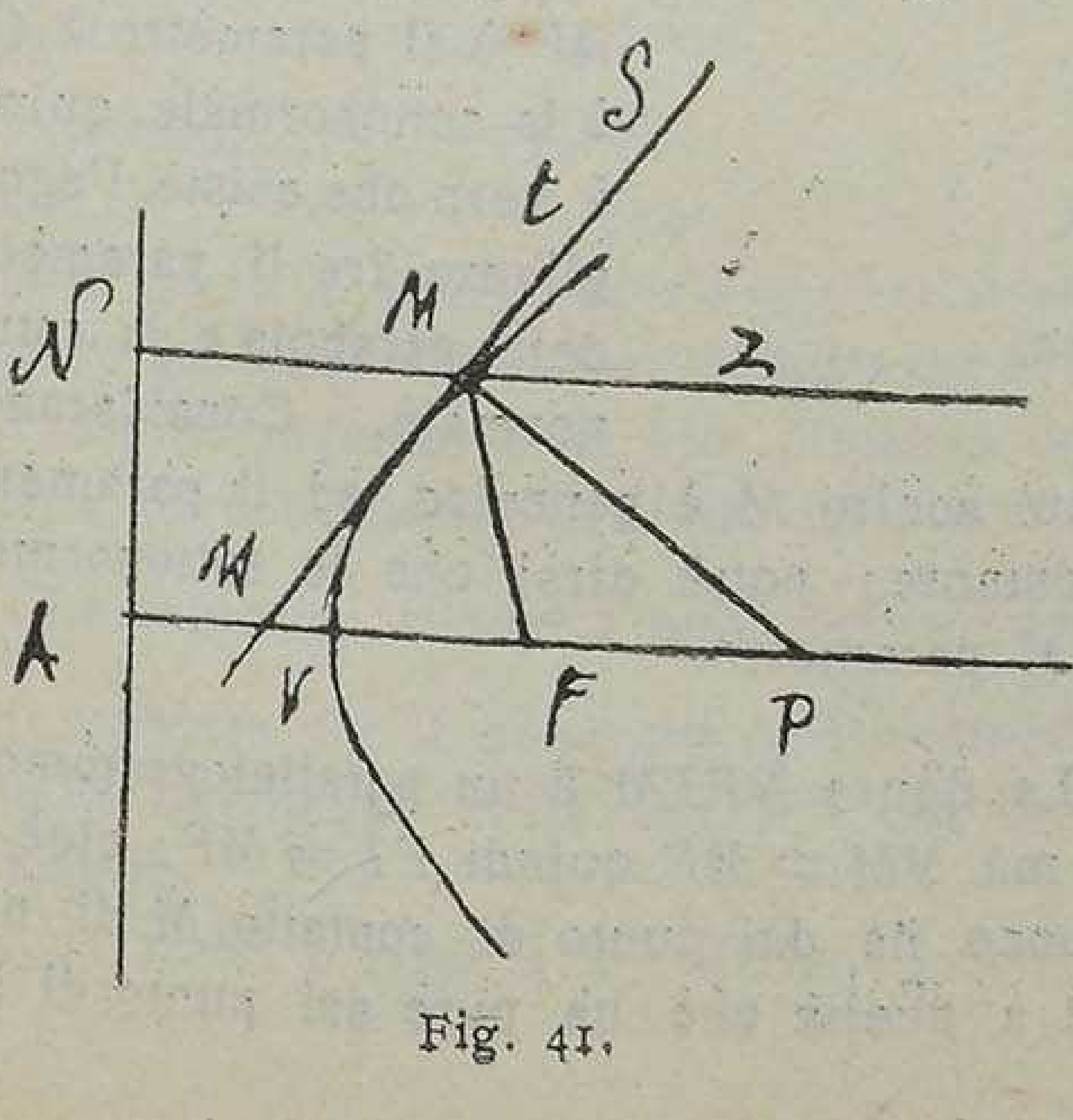

Fig. 41.

e SMZ perchè eguali per la proprietà della tangente, resta l'angolo FMP eguale all'angolo PMZ; cioè la normale MP alla tangente in M è bisettrice dell'angolo formato dal raggio vettore e dalla parallela all'asse del punto di tangenza.

Teorema sulla sottonormale. (Vedi fig. 38).

La sottonormale è eguale al parametro. Chiamasi sottonormale il segmento QT proiezione sull'asse della normale MT. Osserviamo che i triangoli NAF ed MQT sono eguali, perchè gli angoli NAF ed MQT sono retti; NA ed MQ eguali perchè normali alle parallele NZ ed AT; inoltre NF ed MT sono entrambe normali alla UM e quindi $NF = MT$. Allora i due triangoli NAF ed MQT sono eguali od $AF = QT$. Ma AF è il parametro e QT è la sottonormale, quindi è vero che esiste l'eguaglianza fra il parametro della parabola e la sottonormale. Considerando inoltre che il punto scelto M è generico, ed il parametro è una quantità costante; potrà dirsi che le sottonormali sono tutte eguali al parametro.

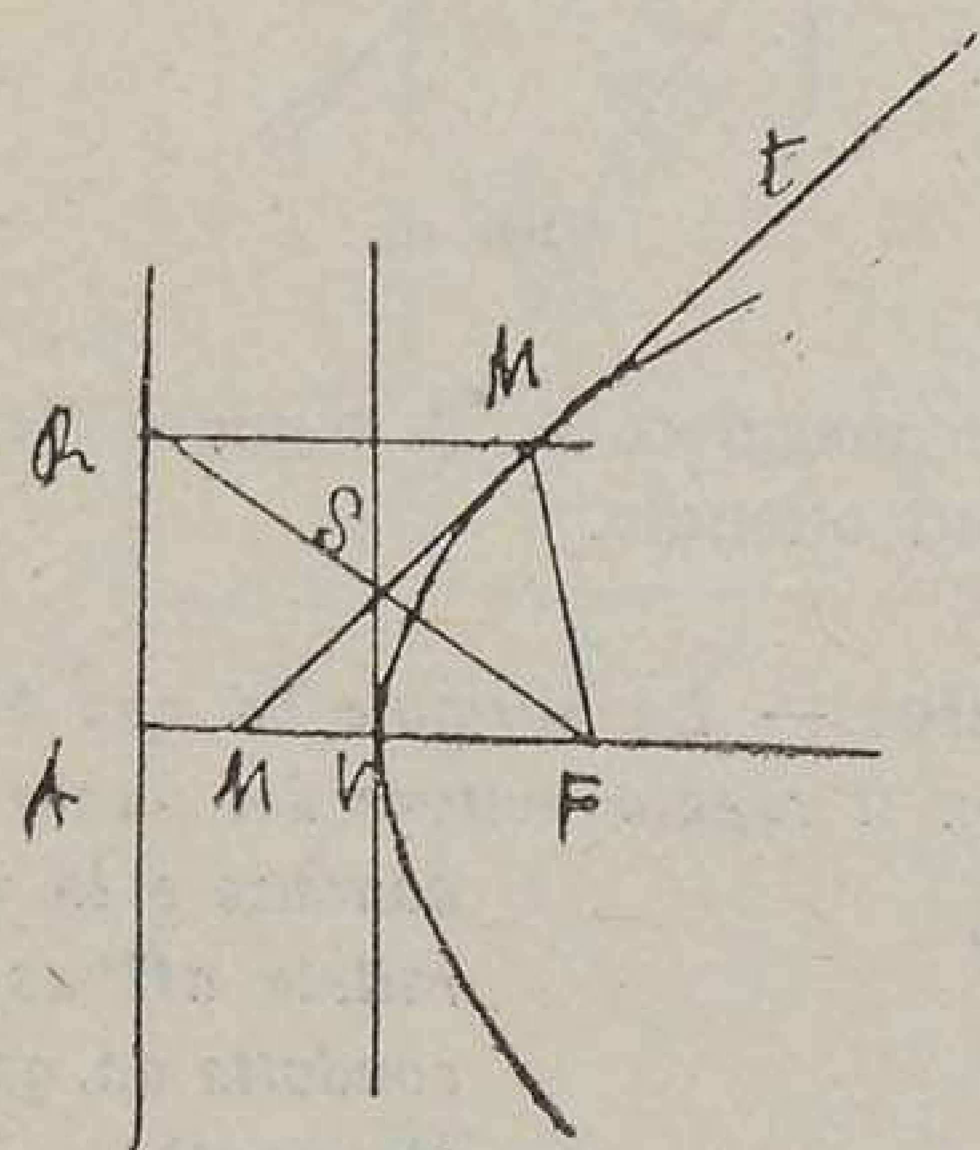

Fig. 42.

Proprietà. — La figura $NFTM$ è un parallelogrammo e quindi $NM = FT$ ma $NM = MF$ quindi $FT = MF$; cioè la distanza che il fuoco ha dal punto di contatto M di una tangente è eguale a quella che ha pure dal punto di intersezione della normale a quella tangente con l'asse; ed ancora tale ultima distanza è eguale a quella che il punto M ha dalla direttrice.

Teorema. — *Equazione della parabola.*

Sia M un punto della curva di coordinata y ed x riferendosi al vertice. Si sa che il parametro è $2p$; si ha

$$AR = AF + FR$$

cioè $x = \frac{p}{2} + FR$. Il raggio vettore $Z = AR$ cioè $Z = x + \frac{p}{2}$; poichè dal triangolo rettangolo MFR si ricava $y^2 = z^2 - \overline{FR}^2$ sostituendo:

$$y^2 = (x + \frac{p}{2})^2 - (x - \frac{p}{2})^2.$$

Svolgendo si ottiene $y^2 = = 2px$ che è l'equazione degli assi della parabola.

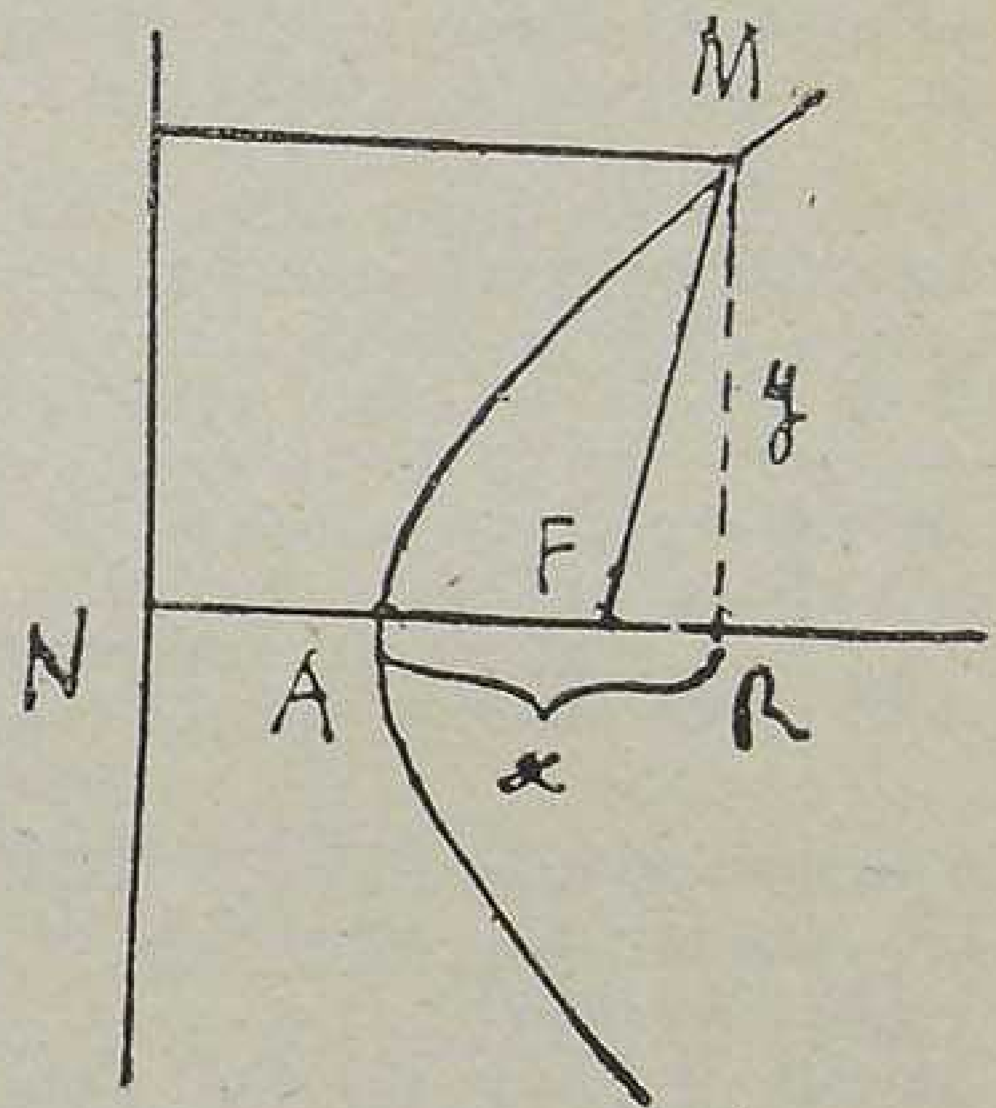

Fig. 43.

OSSERVAZIONI. — La relazione $y^2 = 2px$ si può porre sotto la forma $2p : y = y : x$ ossia la distanza di un punto qualunque della curva dall'asse è media proporzionale al doppio parametro ed alla distanza del vertice del piede della perpendicolare condotto dal punto considerato all'asse.

La relazione suddetta può ancora scriversi $\frac{y^2}{x} = 2p$ cioè il rapporto fra il quadrato dell'ordinata e l'ascissa di un punto qualunque della curva è costante ed eguale al parametro.

La curva è riferita al vertice A, centro delle ordinate.

Si osservi che per $x=o$ si ha $y=o$ cioè si ha l'origine della curva all'origine degli assi. Per $x=\frac{1}{2}p$ si ha $y^2=2p.\frac{p}{2}=p^2$ cioè $y=p$ cioè il punto che si considera ha per ascissa il fuoco e dista da esso e dall'asse del semiparametro.

BIBLIOTECA DEL POPOLO

129. La patria nei canti dei poeti italiani.
130. L'arte del vetro.
131. *Arnaldo da Brescia.*
132. Architettura classica.
133. *Daniele Manin.*
134 e 135. Partimenti. — *Regole musicali.*
136. Consigli pratici.
137. *Dante Alighieri.*
138. *Raffaello Sanzio.*
139. Grammatica latina.
140. *Michel. Buonarroti.*
141. La logismografia.
142. *Vittorio Alfieri.*
143. Racconti morali.
144. *Benvenuto Cellini.*
145. Prose moderne.
146. Il piccolo Plutarco
147. *Leonardo da Vinci*
148. Studi sociali.
149. Il problema della casa.
150. Centuria di donne illustri italiane.
151. I fiori e loro linguaggio.
152. *Alessandro Manzoni*
153 Ebanisteria
154. *Carlo Cattaneo*
155 Torino e suoi dintorni.
156. Esplosivi in uso presso l'Esercito Italiano.
157. *Masaniello.*
158. *Giovanni da Procida.*
159. Oreficeria.
160. *Francesco Petrarca.*
161. I nostri monti.
162. Napoli e suoi dintorni
163. Il carbone bianco.
164. Geografia astron. e fisica.
165. Il mondo antico.
166. *Ugo Foscolo.*
167. Gli Italiani ni Russia.
168. Le 5 giorn. di Milano.
169. La guida del coscritto.
170. Roma e suoi dintorni.
171. I molluschi.
172. *Cristoforo Colombo.*
173. Elementi di statistica.
174. *Niccolò Machiavelli.*
175. Storia della Polonia.
176. Manuale di vinicoltura.
177. Sommario storico della Guerra.
178. Gli antichi Germani e le loro invasioni
179. *Victor Hugo.*
180. Storia dell'Austria.
181. La letteratura Nord-Americana.
182. Elem. di Diritto Civile positivo.
183. Merceologia.
184. La guida dell'agricoltore.
185. Darwin e il Darwinismo.
186. La contabilità agricola.
187. Storia d'Ungheria.
188. Gli agronomi celebri.
189. Man. di bachicoltura.
190. Moto e Forza
191. Trattatello di termologia.
192. L'elettricità in azione.
193. Storia d'Irlanda.
194. Manualetto di pollicoltura.
195. Allevamento del bestiame.
196 *Torquato Tasso.*
197. Effemeridi. — N. 1.
198. Anatomia umana.
199. Contabilità dello Stato.
200. Trattatello sulle materie tessili, coloranti.
201. Storia della Chimica.
202. L'arte del porgere.
203. Dizionario politico-parlamentare.
204. Cori celebri.
205. Galvanoplastica.
206. Storia letterat. greca.
207 e 208. Contrappunto e Fuga.
209. Il Mare.
210. Manuale di Telegrafia.
211. *Lodovico Ariosto.*
212. Storia della Bulgaria.
213. Effemeridi. — N. 2.
214. *Guglielmo I*, imperatore di Germania.
215 Economia applicata.
216. La vita di Maometto
217. Grammatica-Vocabolario della lingua universale «Esperanto».
218. Effemeridi. — N. 3.
219. *Giordano Bruno.*
220. Rivoluzione francese.
221. Elementi di ragioneria.
222. Stelle cadenti, ecc.
223. Fisiologia vegetale.
224. Metallurgia.
225. *Ettore Fieramosca.*
226. Cronometria moderna.
227. Viticoltura nazionale.
228. Vita di Pietro il Grande.
229. Fabbricaz. del vetro.
230. Tarsia, ebanist., tornio.
231. La Calzoleria.
232. Vade-Mecum dell'italiano in Germania.
233. Penne metalliche, Aghi. Spille, ecc.
234. Storia di un Secolo. — Fascicolo primo.
235. Id. — Fasc. secondo.
236. Id. — Fascicolo terzo.
237. Id. — Fasc. quarto.
238. L'arte del Bastaio e del Sellaio.
239. Vade-Mecum dell'italiano in Francia.
420. La vita nell'età feudale.
241. L'arte del Magnano.
242. I fiori. — Fascicolo I.
243. Idem. — Fascicolo II.
244. Pequeno manual espanol-italiano.
245. L'arte del tornio.
246 e 247. L'ebanista.
248. I ventagli.
249. Il Piccolo Artista.
250. Gramm. portoghese.
251. L'Italie dans la poesie française contemp.
252. Cooperative di produz.
253 Trattato di prospettiva.
254. Il Maestro della scuola obbligatoria.
255. Concia e pellicceria.
256 e 257. La Ceramica.
258 e 259. Bassi per lo studio dell'Armonia.
260. Società cooperative di consumo.
261 e 262. L'arte del Profumiere.
263. Indoratura, inargentatura e metallizz.
264. Musaico e tarsia. — Sedie, stipettaio, ecc.
265 e 266. L'oreficeria.
267. L'istruzione Elementare e Normale.
268. Storia del Socialismo. — Parte antica.
269. Id. — Parte moderna.
270. Fibre tessili, stoffe.
271. La carta.
272. Il legno.
273. Illusioni ottiche.
274. Leva Militare.
275. Pequeno livre del leotura Portugueza.

BIBLIOTECA DEL POPOLO

276. *Guglielmo Gladstone.*
277. *Bismarck.*
278. Elementi di filosofia.
279. Letteratura latina.
280. La Repubblica Romana del 1849.
281. Sintassi Latina.
282. Storia del Socialismo. — II parte moderna.
283. Primi elementi di numismatica generale.
284. Letteratura francese.
285. Vade-Mecum dell' Italiano in Inghilterra.
286. Letteratura Greca.
287. Borse di Commer. Operaz., tasse di Borsa
288. Storia Nat. - I Rettili
289. Pirotecnica dei dilettanti.
290. La regina Vittoria di Inghilterra.
291. *Giuseppe Verdi.*
292. Trigonometria piana.
293. I logaritmi spiegati.
294. Storia Belle Arti. Parte 1.ª *L'Architettura.*
295. Idem. — Parte 2.ª: *La Scultura*
296 e 297. Idem. — Parte 3.ª *La Pittura.*
298. Idem. — Parte 4.ª: *La Musica.*
299. Il cucito nelle scuole
300. Compend. di Pedagogia
301. Storia della Stampa.
302. Storia Econ. politica
303. Il carbon fossile.
304. Storia della Pedagog.
305. La Storia della Fisica
306. Pizzi a fusetti. - Frange e bordure, ecc.
307. Antologia Mazziniana.
308. Storia del Commercio
309. Storia della Filosofia
310. Antichità greche.
311 e 312. Il possesso e la sua tutela.
313. Scienza delle Finanze.
314. Compendio di Diritto Internazionale pubb.
315. Diritto Costituzionale.
316. Sociologia Criminale.
317. Nuovi ed eleganti lavori femmin.li.
318. Diritto Internazionale
319. *Leone XIII.*
320. Del Conclave.
321. Lo spiritismo.
322. Antichità romane.
323. Storia orientale.
324. Dottrine Positiviste.
325. La filosofia di A. Schopenhauer.
326. Origine lingua italiana.
327. Anatomia animale.
328. Storia letterat. inglese
329. Stilistica.
330. Il Radio e la costituzione della materia.
331. L'origine dell'uomo.
332. Stregoneria e Occul.
333. Istituzioni medioevali.
334. Sintassi Italiana.
335. Le dottrine filosofiche di Herbert Spencer
336. Topo-cron. dantesca.
337. Storia e sviluppo delle Colonie dei Fenici.
338. Il gioco degli scacchi.
339. Biologia vegetale.
340. Storia del Medioevo.
341. La fabbric. dello zucchero di barbabietola.
342. *Giacomo Leopardi.*
343. Sociologia Spenceriana.
344. Compendio di Psicologia senz'anima.
345. Comuni e Rinascimento in Italia.
346. Compendio di Storia Moderna.
347. Il cervello.
348. Il Microscopio.
349. Micrografia vegetale.
350. Trattatello di metrica barbara e classica.
351. L'evoluzione storica della famiglia.
352 e 353. L'A, B, C del montatore elettric.
354. Fisiologia Moderna.
355. Teorema di Pitagora.
356. *Niccolò Tommaseo.*
357. Ventilazione e Riscaldamento. (Parte I.)
358. L'India antica.
359. Federico Nietzsche e la sua Filosofia.
360. Elementi di Algebra.
361. Il razionalismo.
362. Grammatica greca antica. — Parte I.
363. Il materialismo.
364. Storia della Ragioneria.
365. Ventilazione e Riscaldamento. (Parte II.)
366. Storia della dottrina naturale.
367 e 368. Giuochi di società.
369. Letteratura giapponese.
370. L'Egitto antico.
371. Composizione e correzione delle bozze.
372. Le carni alimentari.
373. Letteratura russa.
374. Geometria descrittiva.
375. Medicina legale.
376. Risoluz. delle equazioni di 1.° e 2.° grado.
377. La vita dei batteri.
378. Manuale del ciclista.
379. Apparecchi da proiezioni e loro struttura.
380. Frasario d' affari italiano-inglese.
381. La teoria atomica.
382. Formular. di chimica inorganica. - Parte I.
383. Idem. — Parte II.
384. Guida degli apparecchi da proiezioni.
385. Il libro dei giuochi.
386. Grammatica greca antica. — Parte 2.ª
387. Il dilettante elettric.
388. La scherma di fioretto.
389. Compendio di diritto amminist. italiano.
390. Storia delle Ferrovie.
391. La morte apparente.
392. Antropologia crimin.
393. La Conquista delle Regioni Aeree.
394. Letteratura Francese contemporanea.
395. Brevetti e Privative.
396. Lavoro Teneriffa. — Pizzi di Bruges, ecc.
397. Giurispr. veterinaria.
398. Elem. di stereometria
399. Storia e Antologia della Poesia Sud-Amer.
400. Manuale per i Notai.
401. Il giuoco del biliardo.
402. Storia dell'America del Sud.
403. La macchina dinamo-elettrica.
404. La musica in Oriente.
405. Le Epilessie.
406. Letteratura Spagnuola.
407. Formulario Notarile.
408 e 409. Antidoti e Soccorsi d'urgenza.

BIBLIOTECA DEL POPOLO

410. Ordinamento Generale Giudiziario
411. Geografia econ. d'Italia.
412. Istituzioni di Diritto Romano.
413. Le malattie delle piante coltivate e rimedi.
414. Giuochi diversi.
415 e 416. L'erbario.
417. L'allievo Capomastro.
418. Nozioni di chimica org.
419 e 420. Rimedi nuovi.
421. Lavori in pagliette e in perline.
422. Prospetto di tutte le coniugazioni franc.
423. Embriologia dell' uomo e dei vertebrati.
424. Istit. di diritto civile.
425. Corrispondenza spagnuola-italiana.
426. Il soprannaturale.
427. *Giosuè Carducci.*
428. Geometria descrittiva.
429 e 430. Pratica del Canto in chiave di *Sol.*
431. La tramvia elettrica.
432. Calcolo differenziale: massimi e minimi.
433. Il Testamento. Sue forme - Sua validità.
434. Il Diritto Penale.
435. La macchina a vapore.
436. La fotografia dei colori.
437. Monete-Pesi-Misure.
438. Manuale dei verbi della lingua italiana.
439. La Dottrina del Diritto Naturale.
440. Caccia e selvaggina.
441. Importanti applicazioni dei logaritmi.
442. Formulario di Chimica org. — Parte I.
443. Enigmistica.
444. Il Problema dell'Universo nella filosofia.
445. I primi elementi di analisi minerale.
446. Marte e l'ipotesi della sua abitabilità.
447. La filosofia della longevità.
448. L'Italia prima di Roma.
449. Delle Assicurazioni in generale.
450. L' essenza del Marxismo.
451. La Storia del Sole.
452-453. Dizionarietto delle forme verb. latine
454-455. Princ. vocaboli del *Poliglotta* INGLESE.
456-457. Id. - FRANCESE.
458-459. Id. - SPAGNUOLO.
460-461. Id. - TEDESCO.
462. La posta attraverso i tempi.
463. La filosofia del Diritto.
464-465. Atlantico Geografico tascabile.
466. La Sociologia.
467-468. La navigazione aerea — I. Aerostati e Dirigibili.
469. Aree e volumi.
470. Raccolte e preparazioni zoologiche.
471. Metodo per mandolino napoletano.
472. Manualetto per l'emigrante in Europa.
473. Fotografia per tutti.
474-475. La navigazione aerea — II. Aeroplani e macchine vol.
476. Manualetto per l'allievo linotipista.
477. Vocabolarietto di termini filosofici.
478. Manuale del Bibliotecario.
479. L' essenza dell' anarchismo.
480-481. Petit résumé de syntaxe Française.
482. Gli Esquimesi.
483. La previsione del tempo.
484. *Leone Tolstoi.*
485-486. Il dilettante meccanico.
487. Fraseol. latina.
488. Il Culto religioso.
489. I secoli della letteratura italiana: il Trecento.
490. Idem: Il Quattrocento.
491. La teoria e la prat. del trasporto musicale.
492. I sec. della lett. ital.: Il Cinquecento.
493. Il Commercio nell'antichità.
494. Manualetto d'ippica.
495. «La Divina Commedia» esposta al popolo: L'Inferno.
496. Le proiezioni ortogon.
497-498. La locomotiva a vapore moderna.
499. «La Divina Commedia» esposta al popolo: Il Purgatorio.
500. I secoli della letter. ital.: Il Seicento.
501. «La Divina Commedia» esposta al popolo: Il Paradiso.
502. La storia e la teoria dell' antica musica greca.
503. L' « Odissea » narrata al popolo. Parte I.
504. Apparecchi facili a costruirsi: 1.° Elettricità.
505. L' « Odissea » narrata al popolo. Parte II.
506. L'« Eneide » esposta al popolo. — Parte I.
507. Id. Id. — Parte II.
508. L'Evoluz. della vita.
509. «La Gerusalemme liberata», esposta al popolo. — Parte I.
510. Le Banche.
511. «La Gerusalemme liberata», esposta al popolo. — Parte II.
512. Formulario di chimica org. — Parte II.
513. Storia e antologia della letteratura turca.
514. L' « Iliade » esposta al popolo. — Parte I.
515. L'arabo parlato.
516. L'«Iliade» esposta al popolo. — Parte II.
517. Manuale di chimica analitica qualitativa per uso degli studenti.
518. Storia e antologia della letterat. araba.
519. Vade-Mecum del Saggiatore dei metalli preziosi.
520. Eccezioni fonetiche della lingua francese.
521. I secoli della letter. ital.: Il Settecento.
522. Teoria del regolo calcolatore e sue appl.
523. I secoli della letter. ital.: L'Ottocento
524. Vade-Mecum dell' italiano in Giappone.
525. Nozioni di topografia pratica.
526. Storia degli Stati Uniti d'America.
527. Rimario della lingua italiana — Vol. I.
528. Id. — Vol. II.

BIBLIOTECA DEL POPOLO

529. Geografia storico-politica.
530. La luce elettrica.
531. La cooperativa di consumo.
532. La Legge Elettor. Politica, esposta e spiegata al popolo.
533. La Stenografia. — Volume I.
534. Idem. — Vol. II.
535. Idem. — Vol. III.
536. Geometria analitica del piano e sue applicazioni.
537. Dizionarietto dantesco.
538. Trigonometria sferica e sue applicazioni.
539. Storia del risorgimento italiano.
540. I secoli della letteratura italiana: Il Periodo delle origini.
541. Elementi di costruzione delle macchine.
542. L'Operaio meccanico.
543. Formulario completo di Computisteria e Ragioneria. — Vol. I.
544. Id. id. — Vol. II.
545. I fenomeni dell'ipnotismo e della suggestione.
546. *Riccardo Wagner*, la vita e le opere.
547. Prontuario delle forme del verbo latino.
548. Il Consulente Amministrativo.
549. La costruzione geometrica delle ombre.
550. Nozioni di statica grafica e sue applicaz.
551. Prontuario delle forme del verbo tedesco.
552. Monete d'oro e d'argento legali e false.
553. Prontuario delle forme del verbo francese.
554. Pile per usi domestici.
555. Accumulatori per usi domestici.
556. Lo Stato nella Sociologia Spenceriana.
557. Curiosità e sofismi matematici.
558. La Luce Elettrica domestica.
559. Storia Parlamentare della III Repubblica di Francia.
560. Disinfezione e disinfettanti.
561. Come coniugare i verbi inglesi.
562. Storia del pop.° arabo.
563. L'Aritmetica per gli adulti. - Parte I.
564. Id., id. - Parte II.
565. Id., id. - Parte III.
566. I fondamenti della Geometria di posizione.
567. Beethoven, la sua vita e le sue opere.
568. La lotta greco-romana.
569. La Cinematografia.
570. Canottaggio e nuoto.
571. Nozioni di idraulica.
572. Foot-ball.
573. Compendio di letteratura indiana.
574. Francesco Giuseppe e la storia di Casa d'Absburgo.
575. Applicazioni algebriche alla geometria piana e solida.
576. Dizionario biblico. — Vol. I. - Parte Geografico-Storica.
577. Idem. — Vol. II. - Parte Religiosa.
578. Trento e Trieste.
579. I terremoti e la sismologia.
580-581. Manualetto indicatore dei servizi del telegrafo e del telefono.
582. Storia del Messico.
583. La Marina Militare Italiana nel 1915.
584. Storia del Belgio.
585. Leggi, usi e convenzioni della guerra moderna.
586. Storia di Spagna.
587. L'Esercito Italiano.
588-589. Iniziamento alla teoria dei numeri.
590. Geometr. non-euclidea.
591. Il Dispotismo
592-593. Tesi di ca terale.
594. Allevamento del coniglio e degli animali da cortile.
595. Storia dell'Albania fino al 1916.
596. Le caldaie a vapore marine.
597-598. Il mare Adriatico
599-600. Panificazione razionale moderna.
601. La motocicletta e il motociclista.
602. Elementi di telegrafia senza filo.
603. Dizionarietto Geografico Etimologico
604. L'automobile.
605. L'Orlando furioso esposto al Popolo. — Parte I.
606. Idem. Parte II.
607. Idem. Parte III.
608. Idem. Parte IV
609. Idem. Parte V.
610-611. La storia delle razze cavalline.
612-613. Idee di cosmogonia.
614. La sifilide.
615. La blenorragia.
616. La Casa di Savoia.
617. Frammenti di storia dell'astrologia,
618-619 La pesca meccanica.
620. Le malattie professionali.
621. Istruzione orale dei sordomuti.
622-623. Lo sviluppo storico delle forme animali.
624. La tisi polmonare e la sua moderna cura.
625. G. B. Molière e le sue operere-
626. L'essiccazione delle patate e di altri generi commestibili
627. Il gergo nella società, nella storia, nella letteratura.
628. Camillo Benso di Cavour.
629. Conferenze popolari sulla tubercolosi.
630. Storia della scrittura
631. Il Benzolo, il Toluolo e

634. - Carlo Goldoni.
635. - Nozioni sulla resistenz
636. - Dizionario degli Auto
637. - Sezioni coniche.

Inviare Cartolina-Vaglia alla Casa

== AUMENTO ==
sul prezzo di copertina 5 % 25 febbraio 1940-XVIII
Determinazione Ministero Corporazioni
Casa Editrice Sonzogno — Milano