PROPAGANDA D'ISTRUZIONE

BIBLIOTECA DEL POPOLO

CENTESIMI 80 IL VOLUME

Volume doppio. — Lire 1,60

DOMENICO RAVALICO

Calcolo Infinitesimale

PARTE PRIMA
CALCOLO DIFFERENZIALE

Ogni volumetto consta di 64 pagine di fitta composizione e contiene un completo trattatello elementare di scienza pratica, di cognizioni utili ed indispensabili, dettato in forma popolare, succinta, chiara, alla portata di ogni intelligenza.

CASA EDITRICE SONZOGNO
della Società Anonima ALBERTO MATARELLI
Via Pasquirolo, 14 - MILANO

OGNI VOLUME 80 CENTESIMI

BATTAGLINI

VOLUME 645 646

ENCICLOPEDIA MODERNA ITALIANA

Questa, che la Casa Editrice Sonzogno presenta al pubblico italiano, è l'enciclopedia europea più ricca di voci e la più aggiornata. L'opera, che condensa e sostituisce un'intera grande biblioteca, sarà completa in

DUE VOLUMI CON QUATTROMILA PAGINE CINQUEMILA ILLUSTRAZIONI E OLTRE QUATTROCENTOMILA VOCI SVOLTE

La Casa Editrice Sonzogno, per rendere possibile l'acquisto dell'*Enciclopedia Moderna Italiana* anche alle famiglie più modeste, l'ha messa in vendita:

A DISPENSE SETTIMANALI, NELLE EDICOLE: L'opera intera consterà di 250 dispense di 16 pagine ciascuna. Ogni dispensa costa . . . . L. **1.—**

A FASCICOLI MENSILI, NELLE LIBRERIE: L'opera intera consterà di 50 fascicoli di 80 pagine ciascuno. Ogni fascicolo costa . . . . . L. **5.—**

Prezzo dell'Opera completa: L. 250

PRENOTAZIONI TOTALI O PARZIALI:

Allo scopo di facilitare l'acquisto dell'opera anche a coloro che, per difficoltà varie, non potessero procurarsela presso i rivenditori, apriamo le seguenti prenotazioni all'*Enciclopedia Moderna Italiana*, con decorrenza dal primo fascicolo, o da qualsiasi fascicolo successivo:

PRENOTAZIONI ALL'OPERA COMPLETA (50 fascicoli mensili di 80 pagine) col dono, alla fine dell'opera, delle coperte in tela, dei frontespizi, dei risguardi con 8 carte geogr. a colori L. **230**

PRENOTAZIONI A 10 FASCICOLI (col dono come sopra a coloro che rinnoveranno gli abbonamenti sino alla fine dell'opera) . . . . . L. **48**

È terminata la pubblicazione del **PRIMO VOLUME** (dalla lettera A alla lettera L). Magnifico volume di 2000 pagine, con 2500 illustrazioni, solidamente rilegato in tela, con frontespizio e 4 carte geografiche a colori nei risguardi, in vendita in Italia e Colonie al prezzo di . . . . L. **125**

Sono in vendita la coperta in tela, solida ed elegante, i risguardi, con 4 carte geografiche a colori, una tavola riproducente le bandiere di tutti gli Stati del mondo, ed il frontespizio: tutto compreso, al prezzo di lire **10.—**

L'OPERA SARÀ COMPLETATA ENTRO L'ANNO 1936

Inviare l'importo alla CASA EDITRICE SONZOGNO - Via Pasquirolo, 14 - MILANO (C. C. Postale n. 3-11529)

BIBLIOTECA DEL POPOLO
Volume doppio L. 1.60

DOMENICO RAVALICO

Calcolo Infinitesimale

PARTE PRIMA

CALCOLO DIFFERENZIALE

CASA EDITRICE SONZOGNO - MILANO
della Società An. ALBERTO MATARELLI
Via Pasquirolo, 14

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA

Finito di stampare il 30 gennaio 1936-XIV

Stab. Grafico Matarelli della Società Anonima ALBERTO MATARELLI
Milano - Via Passarella N. 15. c-36-a

Nell'accingersi a compilare questi volumetti l'Autore si prefisse di restringere in poche pagine gli elementi del Calcolo infinitesimale: *le pure basi del Calcolo stesso e nulla più. Il lettore non vi cercherà quindi un'esposizione qualsiasi dei sistemi del Calcolo, mentre potrà forse giovarsi di esso per iniziarsi allo studio di questa branca delle Matematiche superiori.*

Questi due volumetti sono stati scritti per quelle persone: operai, capotecnici, ecc. per le quali il Calcolo è mezzo e non fine.

Oggi i tecnici hanno abbandonato il sistema di fare alla meglio; oggi si richiede perfezione in tutto; è naturale, quindi, che non bastino più le quattro operazioni elementari dell'Aritmetica, come un tempo.

L'Autore, tenendo presenti questi punti di vista, ha cercato esprimersi in modo chiaro e semplice e di abbondare in esempi, sicuro che questi servano meglio di qualunque dissertazione all'insegnamento elementare.

D. R.

Nell'accingersi a compilare questi volumetti l'autore si propose di restringere in poche pagine gli elementi del Calcolo infinitesimale: le pure basi del Calcolo stesso e nulla più. Il lettore non vi cercherà quindi un'esposizione completa del Calcolo, ma li potrà forse giovarsi il caso per iniziarsi allo studio di questa branca delle Matematiche superiori.

Questi due volumetti sono stati scritti per quelle persone: operai, capotecnici, ecc. per le quali il Calcolo è mezzo e non fine.

Oggi i tecnici hanno abbandonato il sistema di fare alla meglio: oggi si richiede perfezione in tutto; è naturale quindi che non bastino più le quattro operazioni elementari dell'Aritmetica, come un tempo.

L'Autore, tenendo presenti questi punti di vista, ha cercato esprimersi in modo chiaro e semplice e di attendere in alcuni punti che questi servano meglio di qualunque dissertazione all'insegnamento elementare.

D. E.

CALCOLO INFINITESIMALE

PARTE I.

CALCOLO DIFFERENZIALE.

CAPITOLO PRIMO.

Funzioni — Limiti — Infinitesimi.

1\. — Siano date due quantità, e si supponga che siano collegate tra loro in modo che, *pur rimanendo costanti i loro valori,* col variare di una, varî pure l'altra. Si ammetta che una sola delle due quantità date possa variare indipendentemente dall'altra quantità, allora si dirà che la prima quantità è *variabile,* e che la seconda è la sua *funzione.*

In realtà, anche la quantità funzione è variabile, quindi per distinguerla dall'altra quantità, si dirà che essa è *variabile dipendente,* e che la quantità da cui essa dipende è *variabile indipendente.* Una variabile indipendente è una quantità alla quale si può supporre assegnato un valore arbitrario, che determina quello della variabile indipendente. Così, per es., nel movimento uniforme di un corpo: lo spazio percorso è funzione del tempo, assegnando a quest'ultimo un valore qualunque, si determina pure un valore del primo.

Benchè sia arbitrio fissare la variabile indipendente: il tempo, quando essa è data non è più possibile scegliere un'altra variabile indipendente, almeno sino a che si considera la medesima questione, si può invece trasformarla, rendendola dipendente di un'altra quantità.

In generale, si dinota y la variabile dipendente, ed x la variabile indipendente, mentre con i simboli

$$F(x) \quad f(x) \quad \varphi(x) \quad \psi(x)$$

si esprimono le funzioni, così l'equazione

$$y = f(x)$$

dinota che y è funzione di x, esprime cioè che la variabile dipendente y varia con il variare della variabile indipendente x.

2. — Se l'equazione che esprime la relazione esistente tra le quantità variabili x ed y, è tale che in un suo membro si trova la sola y, mentre nell'altro membro si trova una funzione della sola x, si dice che y è una funzione *esplicita* di x. Quando invece, un'equazione tra x e y non è di questa forma, si conviene denominarla *implicita*. Così

$$y = ax + bx + cx + d$$

è una funzione esplicita di x, mentre

$$y - ax + bx + yx + y^2 = 0$$

è una funzione implicita di x.

I termini *esplicita* ed *implicita* suppongono che y sia realmente una funzione di x, nel senso con cui noi abbiamo usato questa parola.

Le funzioni esplicite possono essere suddivise in due gruppi: *funzioni esplicite algebriche* e *funzioni esplicite trascendenti*.

Le prime sono quelle in cui sono indicate le sole operazioni: addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevazione a potenza, ed estrazione di radice; nelle seconde sono invece indicate oltre alle precedenti operazioni superiori come le funzioni esponenziali, le funzioni logaritmiche, le funzioni trigonometriche. Noi qui supponiamo che il numero di codeste operazioni sia finito, giacchè, come vedremo in seguito, potrebbe anche essere infinito.

Alla variabile dipendente in un'equazione possiamo supporre assegnato un valore qualunque, positivo o negativo, reale od imaginario, arbitrariamente piccolo o grande. Se supponiamo una serie di diversi valori assegnati ad x, ad incominciare da un valore negativo molto grande e che va gradatamente decrescendo di valore assoluto, ossia crescendo algebricamente, sino ad un grande valore positivo, la serie di valori che s'ottengono, per y può presentare risultati molto diversi.

Per esempio, se

$$y = x^3$$

i valori di x ai quali corrispondono simultaneamente valori di y, formeranno una serie che comincia con un valore negativo numericamente grande, e va crescendo algebricamente sino ad un grande valore positivo. Mentre se

$$y = x^2$$

i valori di y non sono mai negativi. Se invece

$$y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$$

i valori di y sono imaginari per ogni valore di x non compreso tra $-a$ e $+a$.

3. — Sia ora dato il polinomio

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$$

di infiniti termini continuamente decrescenti, la somma di tutti questi tende sempre più ad una data quantità numerica, ossia tende ad un *limite;* il concetto di limite è importantissimo, giacchè sta a base di tutta l'analisi.

Un esempio renderà ancora più chiaro il concetto di limite.

Si costruisca un quadrato, si dividano i suoi lati per metà e si congiungano i quattro punti, si otterrà così un altro quadrato i cui spigoli coincideranno coi i punti di mezzo dei lati del quadrato dato. Si dividano nuovamente per metà i lati del nuovo quadrato, e si congiungano i quattro punti così ottenuti, si potrà ripetere, teoricamente, l'operazione un numero infinito di volte, si avrà sempre un quadrato per quanto piccolo ; ora sommando l'area del primo quadrato, con quella del secondo, più quella del terzo, e così via, si otterrà un'area che tenderà ad un'area di determinata grandezza, alla quale però, la somma delle aree dei quadrati dati non potrà mai giungere, anche PERCHÈ differiàr sempre di quantità che potranno essere infinitamente piccole.

Possiamo ora dare una definizione più esatta del limite, che abbia a corrispondere con la nozione intuitiva avuta.

— Si dice che una data quantità a tende verso il limite indicato da un'altra quantità b, quando, preso un numero ε positivo e piccolo a piacere, la differenza

$$a - b$$

è minore in valore assoluto di ε, ossia quando

$$(a-b) \leq \varepsilon$$

Posta a funzione di una quantità variabile indipendente c. e posti i limiti tra i quali a può variare, definiti dal campo A, potremo anche dire:

— Si dice che una data quantità a tende al limite segnato da un'altra quantità b, quando, preso un numero positivo ε, piccolo a piacere, esiste un numero m tale che, se c appartiene ad A, e se

$$(c) > (m)$$

i valori corrispondenti della a sono tali che la differenza

$$a-b$$

non superi ε in valore assoluto.

Ed infine si dice — che se, preso ε (numero positivo arbitrariamente piccolo) esiste un intorno B di a, tale che in tutti i punti di questo, appartenenti al primo campo A, ove la a è definita, esistono valori di b, e non più di ε, allora deve essere

$$(a-b) \leq \varepsilon$$

ove si possono sostituire le seguenti due disuguaglianze

$$a-b \leq \varepsilon \quad ; \quad b-a \leq \varepsilon$$

che si possono anche trasformare

$$b-\varepsilon \leq a \leq b+\varepsilon$$

la quale disuguaglianza dice che a è compreso nel campo definito dai limiti

$$b-\varepsilon \quad \text{e} \quad b+\varepsilon$$

rimanendo ε piccolo a piacere.

4. — Data una quantità a per dire che essa tende indefinitamente al limite b, si usa la formula

$$\lim_{a=\infty} a = b$$

Così, ad esempio,

$$\lim_{x=0} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x=0} \log \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x=0} \log x = -\infty$$

$$\lim_{x=0} a^x = 1$$

$$\lim_{x=0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x=0} \cos x = 1$$

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{x} = 1$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{x}{n} = 0$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{x^n}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots n} = 0$$

$$\lim_{m=\infty} (x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m) = \infty$$

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} = 0$$

$$\lim_{x=1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{h=0} [\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x] = 0$$

$$\lim_{p=0} a^{x+h} = \log_a x$$

$$\lim_{x=a} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x=a} h^{f(x)} = h^a \quad \text{(supposto } h > 0)$$

$$\lim_{z=0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = \frac{\pi}{180} = 0{,}01745\ldots$$

$$\lim_{x=0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

$$\lim_{m=\infty} m \log_a \left(1 + \frac{1}{m}\right) = \log_a e$$

$$\lim_{x=0} \frac{\log_e (1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x=0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = 2$$

5. — Siano date due quantità a e b, le quali si possono scegliere piccole a piacere, ad ogni modo saranno sempre tali che il rapporto tra le due quantità, abbia ad essere, per esempio,

1.° piccolissimo;
2.° grandissimo;
3.° nè piccolissimo nè grandissimo;

allora si dirà che:

1.° a è di un ordine di piccolezza maggiore di quello di b;
2.° a è di un ordine di piccolezza minore di quello di b;
3.° a e b sono dello stesso ordine di piccolezza.

6. — Una quantità infinitamente piccola si denomina — *infinitesimo* — se invece infinitamente grande, *infinito.*

Si abbia quindi un infinitesimo a, esso quindi essendo infinitamente piccolo, tenderà indefinitamente a zero, senza però — condizione fondamentale — arrivarvi mai a zero, e sia b un altro infinitesimo variabile con il variare di a, cioè funzione di a, e consideriamo il rapporto $\frac{b}{a}$ e poi il limite

$$\lim_{a=0} \frac{b}{a} \qquad (1)$$

riferito al rapporto stesso.

Se invece di a si avesse un'altra quantità α, infinitamente piccola essa pure, si dovrebbe avere

$$\lim_{a=0} \frac{b}{a} = \lim_{\alpha=0} \frac{b}{\alpha}$$

Da questa eguaglianza si deduce che il limite (1) può

1.° non esistere;
2.° essere finito e diverso da zero;
3.° essere zero;
4.° essere infinito;

ai quali casi corrispondono le proprietà degli infiinitesimi considerati, che per il

1.° caso $= a$, b sono infinitesimi diversi;
2.° caso $= a$, b sono infiinitesimi dello stesso ordine;
3.° caso $= a$ è infinitesimo d'ordine inferiore a b;
4.° caso $= a$ è infinitesimo d'ordine superiore a b.

7. — Siano date due quantità a e b, e si supponga che

tendano indefinitamente all'infinito, anzichè a zero, si dirà che

1° — $\lim \frac{a}{b}$ non esiste

2° — $\lim \frac{a}{b}$ esiste

3° — $\lim \frac{a}{b} = \infty$

4° — $\lim \frac{a}{b} = 0$

a seconda che sussistono i casi dati nel precedente articolo.

8. — Siano a e $b = \text{sen}\, x$, se x tende indefinitamente a zero, nel caso che tanto a quanto b siano funzioni infinitesime di x, si avrà

$$\lim_{x=0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = \lim_{x=0} \frac{a}{b} = 0$$

9. — Concludendo, diremo che se sono date ad es. x, y, z, ... funzioni di a e b, infinitesimi dello stesso ordine, posto

$$\frac{a}{b} = c$$

si ha

$$\lim_{c=0} \frac{x+y}{z+\dots} = \lim \frac{a}{b}$$

$$\text{Poichè } \lim \frac{a}{b} = \lim \frac{z}{x} = \lim \frac{1+\frac{a}{x}}{1+\frac{b}{z}}.$$

CAPITOLO SECONDO.

Funzioni derivate.

10. — Sia $f(x)$ una funzione qualunque di x, purchè reale, e sia $f(x+h)$ la stessa funzione di $x+h$; il valore limite a cui tende il rapporto

$$(1) \qquad \frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

per h indefinitamente decrescente, vien detto *rapporto incrementale.*

In codesto rapporto il denominatore è la differenza di due valori della variabile indipendente, mentre il numeratore è la differenza di due valori corrispondenti alla funzione $f(x)$.

L'*incremento* h di x si figura simbolicamente con il segno ∇h, mentre la differenza $f(x+b) - f(x)$ che corrisponde all'incremento della funzione $f(x)$, viene figurata con il segno Δf, così che il rapporto (1) diviene

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

La scritta formola sta alla base dell'intero calcolo differenziale.

Se $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ ha un limite quando

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h=0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

l'incremento h diviene indefinitamente piccolo, questo limite si chiama *derivata* della funzione $f(x)$ nel punto x. —

Questo limite è dinotato dal simbolo $\frac{dy}{dx}$, e se $f(x)$ dinota una funzione qualunque di x, allora con il segno $f'(x)$ si indica la derivata di $f(x)$ rispetto ad x.

Per trovare la derivata di una funzione occorre « derivare » questa funzione.

Il calcolo infiinitesimale si cura della risoluzione di questi due importantissimi problemi:

1.°) Trovare la derivata di una funzione data,

2.°) Trovare la funzione di una derivata data.

La prima questione viene studiata dal calcolo differenziale, la seconda questione invece appartiene al calcolo integrale, e di essa noi non ce ne occuperemo.

11. — Con alcuni esempi cercheremo di chiarire la definizione esposta nel paragrafo precedente.

Sia $$f(x)=x^2$$
sarà $$f(x+h)=(x+h)^2$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$$

ed essendo

$$\lim_{h=0} 2x + h = 2x$$

ne risulta che $2x$ è la derivata di x^2 rispetto ad x, e ciò essendo x^2 funzione di x, chè essa varia con il variare di x.

Sia

$$f(x) = \frac{a}{x}$$

sarà

$$f(x+h) = \frac{a}{x+h}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{a}{x+h} - \frac{a}{x}}{h} = -\frac{a}{x(x+h)}$$

ed essendo

$$\lim_{h=0} -\frac{a}{x(x+h)} = -\frac{a}{x^2}$$

ne risulta che $-\frac{a}{x^2}$ è la derivata di $\frac{a}{x}$ rispetto ad x.

Ugualmente potremo operare per una qualunque altra funzione algebrica.

Sia

$$f(x) = \sqrt{(a^2 - x^2)}$$

sarà

$$f(x+h) = \sqrt{[a^2 - (x+h)^2]}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\frac{2x+h}{\sqrt{[a^2-(x+h)^2]} + (a^2 - x^2)}$$

Il limite di questa espressione allorchè h diviene infinitamente piccola è

$$-\frac{x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

essa sarà quindi la derivata della funzione data.

Ma forse meglio di ogni espressione algebrica che richiede una disposizione mentale troppo inclinata, servirà a chiarire il concetto di derivata il seguente esempio geometrico.

Sia data una curva NAB e sia $\varphi(x)$ la linea che la rappresenta, rispetto due assi cartesiani ortogonali, di cui x rappresenta l'ascissa, y l'ordinata. Sappiamo dalla geometria analitica che per ogni valore di x corrisponde un valore di y, essendo data l'equazione

$$y = \varphi(x)$$

ossia y è funzione di x.

Supponiamo ora che a partire dall'origine O si dia ad x un certo valore C, *al segmento* $\overline{OC}$ corrisponde, come sappiamo, un altro segmento sulla retta y, rappresentato dalla retta $\overline{AC}$. Se x, a partire da questa cresce, di una quantità arbitraria che si può dinotare con il simbolo Δx, e che può per esempio essere eguale al segmento $\overline{CD}$, crescerà anche y di una certa quantità che può a sua volta venir espressa con il segno Δy, sicchè abbiamo

$$y + \Delta y = \varphi(x + \Delta x)$$

onde

$$\Delta y = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)$$

dato che

$$y = \varphi(x)$$

da cui otteniamo il rapporto

$$(1) \qquad \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta y}$$

Ora essendo AB la secante della curva data, osserveremo che con il diminuire della distanza di AB la B tende ad A, e quando vi coinciderà segnerà, non più la secante, ma la tangente al punto A.

Cioè il limite del rapporto (1) col tendere di Δx e quindi anche di Δy a zero, si può considerare come la tangente della curva nel punto A, essa rappresenterà quindi la derivata della funzione data.

12. — Siano $\varphi(x)$ e $\varphi(x)$ due funzioni di x, e sia

$$u = \varphi(x)\,\psi(x)$$

Si muti x in $x+h$, in modo da avere $\varphi(x + h)\,\psi(x+h)$ e sia $u + \Delta u$ codesto nuovo prodotto, allora

$$u + \Delta u = \varphi(x + h)\,\psi(x + h)$$

da cui

$$\Delta u = \varphi(x + h)\,\psi(x + h) - \varphi(x)\,\psi(x) =$$
$$= [\varphi(x + h) - \varphi(x)]\,\psi(x + h) + \varphi(x)\,[\psi(x + h) - \psi(x)]$$

quindi

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \psi(x+h) + \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} \varphi(x)$$

Ora supponiamo $\Delta\ x$ convergente indefinitamente a zero,

$$\lim \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$$

sarà allora la derivata di $\psi\ (x)$ rispetto a x, ossia sarà $\varphi'\ (x)$

$$\lim \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h}$$

sarà invece la derivata di $\psi(x)$ rispetto a x, ossia sarà $\psi'\ (x)$ quindi

$$\frac{d\ u}{d\ x} = \varphi'(x)\,\psi(x) + \psi'(x)\,\varphi(x)$$

Da cui ricaviamo la Regola : — *La derivata di un prodotto si ottiene moltiplicando ciascun fattore per la derivata dell'altro fattore, ed addizionando i prodotti risultati.*

13. — Siano, come al solito, $\varphi\ (x)$ e $\psi\ (x)$ due funzioni di x, e sia

$$u = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

si supponga x mutato in $x+h$, e sia $u + \Delta u$, il nuovo valore del quoziente. Allora

$$u + \Delta u = \frac{\varphi(x+h)}{\psi(x+h)}$$

onde

$$\Delta u = \frac{\varphi(x+h)\,\psi(x) - \varphi(x)\,\psi(x+h)}{\psi(x+h)\,\varphi(x)} =$$

$$= \frac{[\varphi(x+h) - \varphi(x)]\,\psi(x) - [\psi(x+h) - \psi(x)]\,\varphi(x)}{\psi(x+h)\,\psi(x)}$$

La seguente è un'altra applicazione geometrica. Sempre nella medesima figura, l'area compresa tra i punti $ONAC$, deve necessariamente essere una funzione di x, poichè essa è una quantità definita allorchè si assegna ad x un dato valore, e varia con il variare di x.

Sia u questa funzione, e sia $CD = \Delta\ x$

$$u + \Delta u = \text{area } A\,B\,C\,D$$

quindi

$$y \Delta x \quad \text{e} \quad (y + \Delta y) \Delta x$$

saranno i punti tra i quali è compreso l'incremento $\Delta\ u$ onde

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} \text{ sarà compreso tra } y \text{ e } y + \Delta y.$$

Ora con il tendere indefinitamente a zero dell'incremento di $x = \Delta\ x$ e quindi della funzione $\Delta\ u$, abbiamo che il valore limite ci rappresenterà la derivata della funzione u rispetto ad x, ed essendo y questo limite, sarà

$$\frac{d u}{d x} = y.$$

14. — Siano ora

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_n$$

n funzioni, e sia y la loro somma, ossia

$$y = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$$

supponiamo anche che tutte queste funzioni siano derivabili, allora derivando termine a termine, otteniamo

$$y' = x'_1 + x'_2 + x'_3 + \ldots + x'_n$$

onde

$$y' - y = x'_1 - x_1 + x'_2 - x_2 + \ldots + x'_n - x_n$$

$$\Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \ldots + \Delta x_n$$

e si divida

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x_1}{\Delta x} + \frac{\Delta x_2}{\Delta x} + \ldots + \frac{\Delta x_n}{\Delta x}$$

Diminuisca indefinitamente l'incremento $\Delta\ x$, e si avrà

$$\frac{d y}{d x} = \frac{d x'}{d x} + \frac{d x_2}{d x} + \ldots + \frac{d x_n}{d x}$$

Potremo quindi dire che *la derivata della somma di due o più funzioni è la somma dei coefficienti differenziali delle funzioni date.*

Da cui possiamo ricavare la regola per derivare una somma di funzioni.

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\dfrac{\varphi (x + h) - \varphi\ (x)}{h}\ \psi (x) - \dfrac{\psi (x + h) - \psi (x)}{h}\ \varphi (x)}{\psi (x + h)\ \varphi (x)}$$

Col tendere di $\Delta\ x=h$ verso il limite zero, quest'ultima espressione diverrà

$$\frac{d\,u}{d\,x}=\frac{\varphi'(x)\,\psi(x)-\psi'(x)\,\varphi(x)}{[\psi(x)]^2}$$

Da cui possiamo ricavare la Regola. — *La derivata di un quoziente si ottiene moltiplicando l'addendo maggiore per la derivata dell'addendo minore e questo ultimo per la derivata del primo; sottraendo inoltre, il secondo prodotto dal primo e dividendo il risultato ottenuto per il quadrato dell'addendo maggiore.*

15. — Il risultato dell'articolo precedente riguardo alla somma può anche ottenersi nel seguente modo. Essendo

$$u=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

da cui

$$\varphi(x)=u\,\psi(x)$$

sarà

$$\varphi'(x)=\frac{d\,u}{d\,x}\,\psi(x)+u\,\psi'(x)$$

onde

$$\psi(x)\,\frac{d\,u}{d\,x}=\varphi'(x)-\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,\psi'(x)$$

quindi

$$\frac{d\,u}{d\,x}=\frac{\varphi'(x)\,\psi(x)-\psi'(x)\,\varphi(x)}{[\psi(x)]^2}$$

16. — Sia $y=\log f(x)$, dove $f(x)$ è una funzione intera e positiva, per avere la sua derivata poniamo $z=f(x)$ così che si avrà

$$y=\log z$$

da cui

$$y'=\frac{1}{z}\,f'(z)=\frac{1}{f(x)}\,f'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

d'onde si ricava la Regola: — *La derivata di un logaritmo si ottiene dividendo la funzione derivata del suo valore per la funzione stessa.*

17. — Sia $y=c$, in cui c è una costante, la sua derivata, dato che c è costante ciò che vuol dire che y essendo eguale

a c sarà pure costante, è uguale a zero, ossia non potendo y variare, sarà $\Delta y = 0$, onde

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

per qualunque sia il valore di Δx; quindi

$$\frac{d y}{d x} = 0$$

da cui risulta che — *la derivata di una costante è zero.* —

18. — Sia u una funzione di y, funzione di z, sia cioè

$$u = f\ (y);\ y = f\ (z).$$

Supponiamo che esistano le derivate $u^1 = f^1(y)$ e $y^1 = f^1(z)$ della u rispetto ad y e della y rispetto a z. Si vuole trovare la derivata u^1 di u rispetto a z.

L'incremento Δz dato alla z, attribuisce alla y un incremento Δy e questo a sua volta determina alla u un incremento Δu.

Sarà quindi

$$f'(u) = \lim_{\Delta z = 0} \frac{\Delta u}{\Delta z} = \lim_{\Delta z = 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} = \lim_{\Delta z = 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} \cdot \lim_{\Delta z = 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} =$$
$$= f\ (y)\ \varphi'\ (z) = u'\ y'.$$

19. — *La derivata di una potenza x^m il cui esponente è una quantità costante, è*

$$m\, x^{m-1}$$

Sia $m \frac{p}{q}$, essendo p e q numeri interi e positivi, e rappresenti $y = x^m$; sarà $y = x^{\frac{p}{q}}$, onde $y^q = x^p$ e $dy^q = dx^p$.

Ora, per essere p e q interi e positivi, si ha

$$d\, y^q = q\, y^{q-1}\, d\, y \quad \text{e} \quad d\, x^p = p\, x^{p-1}\, d\, x$$

Dunque

$$q\, y^{q-1} = p\, x^{p-1}$$

d'onde

$$d\, y = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{y^{q-1}}\, d\, x = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{x^{\frac{p}{q}(q-1)}} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}\, d\, x$$

ossia

$$d\, y = m\, x^{m-1}\, d\, x \quad , \quad \frac{d\, y}{d\, x} = m\, x^{m-1}$$

come si doveva dimostrare.

Sia m un numero razionale e positivo, l'algebra insegna, che cercando di ridurre un dato numero irrazionale in frazione continua, si trova una frazione continua avente un numero infinito di frazioni integranti; che il numero dato è compreso tra due ridotte consecutive qualunque rn ed $rn+1$ di tale frazione; e che la differenza $rn+1 - rn1$ si approssima indefinitamente a zero col crescere di n. Ne segue che il numero m si può riguardare come eguale al limite verso cui tende il numero razionale della somma $\frac{p}{q}$ i cui termini crescono indefinitamente secondo una certa legge. Ma il ragionamento fatto per dimostrare il teorema nel caso precedente sta, qualunque siano le grandezze definite dai numeri p e q. Dunque, anche quando m è irrazionale e positivo, si ha

$$\frac{dy}{dx} = m\,x^{m-1}$$

Sia finalmente $m - n$, essendo $n =$ un numero positivo, razionale od irrazionale, e rappresentiamo ancora x^m con y; sarà

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

da cui

$$dy = -\frac{d\,x^n}{x^{2n}} = -\frac{n\,x^{n-1}\,dx}{x^{2n}} = -n\,x^{n-1}\,dx$$

ossia

$$\frac{dy}{dx} = m\,x^{m-1}$$

20. — Mediante i precedenti teoremi si può agevolmente derivare una funzione algebrica esplicita qualunque. Ecco alcuni esempi:

(1) Sia

$$y = x^3 + 2\,x^2 - 3\,x + c$$

sarà

$$dy = 3\,x^2\,dx + 4\,x\,dx - 3\,dx$$

e per conseguenza

$$\frac{dy}{dx} = 3\,x^2 + 4\,x - 3$$

(2) Sia

$$y = (a + x)(b + 2x^2)$$

sarà

$$dy = (a + x)\, d\,(b + 2x^2)\, d(a + x) = (a + x)\, 4x\, dx + (b + 2x^2)\, dx$$

da cui

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 4ax + b$$

(3) Sia

$$y = \frac{ax}{a^2 + x^2}$$

sarà

$$dy = \frac{(a^2 + x^2)\, d\,(ax) - ax\, .\, d\,(a^2 + x^2)}{(a^2 + x^2)^2} =$$

$$= \frac{a\,(a^2 + x^2)\, dx - 2\,a\,x^2\, dx}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{a\,(a^2 - x^2)\, dx}{(a^2 + x^2)^2}$$

da cui

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\,(a^2 - x^2)}{(a^2 + x^2)^2}$$

(4) Sia

$$y = (a + bx)^3$$

sarà

$$dy = 3\,(a + bx)^2\, d\,(a + bx) = 3\,b\,(a + bx)^2\, dx$$

da cui

$$\frac{dy}{dx} = 3\,b\,(a + bx)^2$$

(5) Sia

$$y = (a + bx^2)^n$$

sarà

$$dy = n\,(a + bx^2)^{n-1}\, d\,(a + bx^2) = 2\,b\,n\,x\,(a + bx^2)^{n-1}\, dx$$

da cui

$$\frac{dy}{dx} = 2\,b\,n\,x\,(a + bx^2)^{n-1}$$

(6) Sia

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

sarà

$$d\,y = \frac{d\,(a^2 - x^2)}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{-2\,x\,d\,x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x\,d\,x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

da cui

$$\frac{d\,y}{d\,x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

(7) Sia

$$y = \sqrt{x + \sqrt{a^2 + x^2}}$$

sarà

$$d\,y = \frac{d\,(x + \sqrt{a^2 + x^2})}{2\sqrt{x + \sqrt{a^2 + x^2}}} = \frac{d\,x\,\frac{x\,d\,x}{\sqrt{a^2 + x^2}}}{2\sqrt{x + \sqrt{a^2 + x^2}}} =$$

$$= \frac{(x + \sqrt{a^2 + x^2})\,d\,x}{2\sqrt{x + \sqrt{a^2 + x^2}}\,\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{\sqrt{x + \sqrt{a^2 + x^2}}}{2\sqrt{a^2 + x^2}}\,d\,x$$

da cui

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{\sqrt{x + \sqrt{a^2 + x^2}}}{2\sqrt{a^2 + x^2}}$$

(8) Sia

$$y = \frac{x - x^2}{x^3}$$

ossia

$$y = \frac{x}{x^3} - \frac{1}{x}$$

cioè

$$y = x^{-3} - x^{-4}$$

da cui

$$d\,y = -3\,x^{-4} + x^{-2}\,d\,x = -\frac{3}{x^4} + \frac{1}{x^2}\,d\,x = \frac{-2}{-x^4 + x^2}\,d\,x$$

risulta

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{-2}{-x^4 + x^2}$$

(9) Sia

$$y = \frac{4 - 3\,x^2}{x^3}$$

cioè, sia

$$y = \frac{4}{x^3} - \frac{3}{x}$$

che si può scrivere

$$y = 4\,x^{-3} - x^{-1}$$

da cui

$$d\,y = -\,12\,x^{-4} + 3\,x^{-2}\,d\,x = \frac{3\,(x^2 - 4)}{x^4}\,d\,x$$

risulta

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{3\,(x^2 - 4)}{x^4}$$

21. — Esercizi.

(1) $y = a\,x^4 + b\,x^2 - 2\,c\,x + 3$;

$$;\ \frac{d\,y}{d\,x} = 4\,a\,x^3 + 2\,b\,x - 2\,c$$

(2) $y = a\,x^{\frac{2}{3}} - b\,x^{\frac{1}{3}} \pm c$;

$$;\ \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{2\,a\,\sqrt[3]{x}\,b}{3\,\sqrt[3]{x^2}}$$

(3) $y = 2\,a\,x^{-\frac{3}{2}} + 4\,b\,x^{-\frac{1}{2}} \pm c$;

$$;\ \frac{d\,y}{d\,x} = -\,\frac{3\,a + 2\,b\,x}{x^2\,\sqrt{x}}$$

(4) $y = x\,(a + x)\,(a^2 + x^2)$;

$$;\ \frac{d\,y}{d\,x} = a^3 + 2\,a^2\,x + 3\,a\,x^2 + 4\,x^3$$

5) $y = \dfrac{a - x}{a + x}$;

$$;\ \frac{d\,y}{d\,x} = -\,\frac{2\,a}{(a + x)^2}$$

(6) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x - 1}$;

$$; \frac{dy}{dx} = \frac{2x(x-2)}{(x^2+x-1)^2}$$

(7) $y = (a^2 - x^2)^2$;

$$; \frac{dy}{dx} = -4x(a^2 - x^2)$$

(8) $y = (2ax - x^2)^3$;

$$; \frac{dy}{dx} = 6x^2(a-x)(2a-x)^2$$

(9) $y = (a + bx^n)^m$;

$$; \frac{dy}{dx} = mnbx^{n-1}(a+bx^n)^{m-1}$$

(10) $y = (a+x)^m (b+x)^n$;

$$; \frac{dy}{dx} = (a+x)^m (b+x)^n$$

(11) $y = \dfrac{(x+4)^2}{x+3}$;

$$; \frac{dy}{dx} = \frac{(x+2)(x+4)}{(x+3)^2}$$

(12) $y = \sqrt{a+x}$;

$$; \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{a+x}}$$

(13) $y = \sqrt{1+x^2}$;

$$; \frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

(14) $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$;

$$; \frac{dy}{dx} = \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

(15) $y = (a-x)\sqrt{a+x}$;

$$; \frac{dy}{dx} = -\frac{a+3x}{2\sqrt{a+x}}$$

(16) $y = (a + x)\sqrt{a - x}$;

$$; \frac{dy}{dx} = \frac{a - 3x}{2\sqrt{a - x}}$$

(17) $y = \left(1 - x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$;

$$; \frac{dy}{dx} = \frac{1}{8x^{\frac{1}{2}}} \frac{4x^{\frac{1}{6}} - 3}{\left(1 - x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

(18) $y = \frac{a + x}{\sqrt{a - x}}$;

$$; \frac{dy}{dx} = \frac{3a - x}{2(a - x)^{\frac{3}{2}}}$$

(19) $y = \frac{\sqrt{a + x}}{\sqrt{a - x}}$;

$$; \frac{dy}{dx} = \frac{a}{(a - x)\sqrt{a^2 - x^2}}$$

(20) $y = \frac{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}$;

$$; \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1}{x^2}$$

CAPITOLO TERZO.

Derivazione delle funzioni logaritmiche.

22. — Sia a la base di un sistema di logaritmi. Per indicare il logaritmo di una quantità in tale sistema si scriverà a sinistra della quantità data il simbolo $\log_a$ che si legge *logaritmo a base a di;* quindi il logaritmo di x si rappresenterà con il segno $\log_a x$.

Il logaritmo di x, qualunque ne sia la base, è sempre, evidentemente, una funzione di x, che varia con il variare di x, e come tale ammetterà quindi una derivata, ci proponiamo quindi il seguente problema :

Trovare la derivata della funzione $\log_a x$.

Posta $y = \log_a x$, sappiamo che la derivata di y rispetto ad x, è uguale al limite verso cui converge il rapporto:

$$\frac{\log_a (x+h) - \log_a x}{h} = \frac{1}{h} \log_a \frac{x+h}{x} = \frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

per h tendente indefinitamente a zero.

Osserviamo che la formula finale a cui abbiamo ridotto il rapporto, può essere scritta anche sotto altra forma

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{x}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

da cui si deduce che il problema propostoci si risolve in questo molto più semplice: Trovare il limite a cui converge la quantità

$$\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

per h tendente indefinitamente a zero.

Per far ciò poniamo $\dfrac{x}{h} = z$, otterremo

$$\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z$$

ove il valore assoluto di z cresce proporzionalmente al tendere di h verso zero. Il problema si riduce ancora, ora basta cercare il limite verso cui converge codesta quantità, quando il valore assoluto di z cresce indefinitamente.

Poniamo, per semplicità di trattazione che la quantità z abbia valore assoluto intero e positivo, si ha dall'algebra che

$$\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = 1 + z\frac{1}{z} + \frac{z(z-1)}{2} \cdot \frac{1}{z^2} +$$
$$+ \frac{z(z-1)(z-2)}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{z^3} + \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{z^4} +$$
$$+ \ldots + \frac{z(2-1)(z-2)\ldots(z-n-1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n-1 \cdot n} = 1 + 1 +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2 \cdot 3}\left(1 - \frac{1}{z}\right)\left(1 - \frac{2}{z}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}\left(1 - \frac{1}{z}\right)\left(1 - \frac{2}{z}\right)\left(1 - \frac{3}{z}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2 \cdot 3 \ldots n}\left(1 - \frac{1}{z}\right)\left(1 - \frac{2}{z}\right)\ldots\left(1 - \frac{n}{z}\right)$$

Risulta, che se si fa crescere indefinitamente la quantità z, dandogli valori sempre interi e positivi, la quantità

$$\left(1+\frac{1}{z}\right)^z$$

tende verso il limite

$$(1)\qquad 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\,.\,2}+\frac{1}{2\,.\,2\,.\,2}+\ldots+\frac{1}{2\,.\,2\,.\,2\ldots 2}$$

ove i termini del polinomio sono infiniti; pur rimanendo sempre finito il suo valore sommatorio; esso risulta dal polinomio

$$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\,.\,3}+\frac{1}{2\,.\,3\,.\,4}+\ldots+\frac{1}{2\,.\,3\,.\,4\ldots n}$$

che si ricava direttamente dal polinomio di cui sopra.

Noteremo qui che il polinomio (1), poichè i suoi termini, ad incominciare dal terzo, sono maggiori dei termini che occupano lo stesso posto nell'altro, e dalla teoria delle progressioni per quoziente si ha che la somma coincide con l'espressione con la quale, come appunto vogliamo notare, si può scrivere il polinomio (1)

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}$$

che è uguale ad uno. Il valore del polinomio (1), il quale è compreso fra due e tre, si suole rappresentare con la lettera e.

Se $z=\alpha+\beta$ ove α è un numero intero e positivo, mentre β è pure un numero positivo ma minore di 1, il limite, verso cui converge $\left(1+\frac{1}{z}\right)^z$ quando z cresce indefinitamente, è ancora eguale ad e.

Quale dimostrazione noteremo che infatti in questo caso la formola $\left(1+\frac{1}{z}\right)^z$ è compresa fra le espressioni

$$\left(1+\frac{1}{\alpha+1}\right)^\alpha \quad \text{ed} \quad \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha+1}$$

le quali, per ∞ crescente indefinitamente assumono, convergendo verso i propri limiti rispettivamente il valore e; giacchè la prima espressione è uguale al quoziente

$$\left(1+\frac{1}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1} : \left(1+\frac{1}{\alpha+1}\right)$$

i cui due termini, per α crescente indefinitamente, convergono rispettivamente verso i limiti e ed 1, mentre la seconda espressione viceversa è uguale al prodotto

$$\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$$

i di cui rispettivi fattori, sempre per α crescente indefinitamente, convergono pur essi, verso i medesimi valori limiti e ed 1.

Ora β uguale a zero, z diviene uguale ad α, cioè α esprime il valore assoluto di z. Se z è un numero intero ma negativo, codesto valore β rimarrà sempre il suo valore assoluto, ed in questo caso si avrà

$$\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}=\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^{-1}=\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{-\alpha}=\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^{\alpha}=$$
$$=\left(\frac{\alpha-1+1}{\alpha-1}\right)^{\alpha}=\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)^{\alpha}=\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)^{\alpha-1}\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)$$

da cui si ricava immediatamente che, quando α cresce indefinitamente, la quantità $\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}$ converge verso il limite e, e ciò giacchè

$$\left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)^{\alpha-1} \quad \text{ed} \quad \left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right)$$

convergono rispettivamente verso i limiti e ed 1.

Concludendo, potremo affermare, in base alle precedenti considerazioni, che *la derivata della funzione* $\log_a x$ *è*

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\log_e a}$$

Ed in generale potremo dire che

$$d\log_a x=\frac{dx}{x}\log_a e$$

da cui

$$d\log_a f(x)=\frac{d\,f(x)}{f(x)}\log_a e=\frac{f'(x)}{f(x)}\log_a e\,.\,dx$$

23. — Il numero e è la base del sistema di logaritmi che furono inventati dal Neper del quale portano il nome, *neperiani,* si dicono però anche *naturali.* Essi furono i primi logaritmi calcolati.

Oltre che naturali si denominano spesso anche *iperbolici*, e ciò per una loro relazione con l'iperbole, relazione di cui ci occuperemo a suo tempo. Il valore di e non può essere mai determinato esattamente, ma sempre approssimativamente con un errore piccolo a piacere, sappiamo che esso è dato dalla serie di termini

$$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\,.\,3}+\frac{1}{2\,.\,3\,.\,4}+\ldots$$

ed è compreso tra due e tre. Con un errore pari ad un decimilionesimo

$$e=2,7182818.$$

I logaritmi neperiani sono molto usati nel calcolo infinitesimale, e per non ripetere il simbolo $\log e$, si scriverà semplicemente log, sottintentendo il coefficiente e.

24. — Oltre ai logaritmi naturali, vi sono anche degli altri sistemi, ed è facile passare da un sistema all'altro.

Sia

$$x=a^{\log_a x}$$

si prendano i logaritmi naturali d'ambo i membri,

$$\log x=\log_a x \log a \tag{1}$$

$$\log_a x=\frac{1}{\log a}\log x$$

da cui

$$\log x=\frac{1}{\log a}\log x \log a=\log x$$

Quindi risulta che: avendosi una tavola di logaritmi naturali, per calcolare una tavola di logaritmi a base di a, basta moltiplicare i logaritmi neperiani per il quoziente $\frac{1}{\log a}$, cioè basta dividerli per il logaritmo neperiano che esprime la base dei logaritmi ai quali si vuol passare.

Il numero $\frac{1}{\log a}$ si chiama *modulo* del sistema di logaritmi a base a. Nei logaritmi decimali ove la base è 10 il modulo ha un valore approssimato, con un errore di mezzo decimilionesimo

$$0,4342945.$$

Questo modulo è anche uguale a $\log_{10} e$, poichè facendo $x=e$ ed $a=10$ nell'eguaglianza (1) si ha $1=\log_{10} e\,.\,\log_{10}$

Un valore di log 10, con un valore approssimativo pari a mezzo decimilionesimo, è

$$2{,}3025851.$$

25. — Sappiamo che la derivata di un prodotto è data

$$d\,(u\,v\,w\,z\ldots) = v\,w\,z\ldots d\,u + u\,w\,z\ldots d\,u + \ldots$$

ciò può essere facilmente dimostrato con il mezzo dei logaritmi nel modo seguente:

Se si rappresente con y il prodotto $u\,v\,w\,z\ldots$, si ha

$$\log y = \log u + \log v + \log w + \log z + \ldots$$

da cui derivando ambedue i membri, s'ottiene

$$\frac{d\,y}{y} = \frac{d\,u}{u} + \frac{d\,v}{v} + \frac{d\,w}{w} + \frac{d\,z}{z} + \ldots$$

onde risulta che

$$d\,y = d\,u + d\,v + d\,w + d\,z + \ldots$$

26. — Ora data una qualunque espressione algebrica, trigonometrica, ecc., si è convenuto di dare il nome di logaritmo neperiano dell'espressione data all'esponente della potenza di e che la rappresenta. Sia data l'espressione $a+b\sqrt{-1}$, il suo logaritmo neperiano, sarà l'esponente della potenza di e equivalente ad $a+b\sqrt{-1}$, si conviene inoltre di rappresentarlo con $\log a+b\sqrt{-1}$. Da questa convenzione risulta, ritenendo le denominazioni sue proprie, che per $b=0$, l'espressione $\log a+b\sqrt{-1}$ è reale; quindi, per la convenzione suddetta, anche i logaritmi neperiani delle quantità reali hanno un'infinità di valori.

Se si rappresenta rispettivamente con $\log\,(A)$ e $\log\,(-A)$ uno qualunque dei valori dei logaritmi neperiani di A e di $-A$, essendo A quantità reale e positiva, si ha

$$\log\,(A) = \log A + \sqrt{-1}$$

$$\log\,(-A) = \log A\,(-1) + \sqrt{-1}$$

27. — *Trovare la derivata della funzione* $f(x)=ax$.

Se si rappresenta la funzione con y, si ha

$$\log y = x \log a$$

da cui, derivando, s'ottiene

$$\frac{d\,y}{y} = \log a\,d\,x$$

e quindi

$$\frac{d\,y}{d\,x} = y \log a = a^x \log a \qquad (1)$$

Ed in generale

$$d\,a^{f(x)} = a^{f(x)} \log a \,.\, d\,f\,(x) = a^{f(x)} \log a\, f'\,(x)\, d\,x$$

Ora, se nell'equazione ( ) si pone $a = e$, s'ottiene

$$d\,e^x = e^x\,d\,x$$

dunque la derivata della funzione e^x è ancora e^x.

Qui si presenta il problema di *trovare le funzioni di* x *che sono eguali alle loro derivate.*

Se si rappresenta con y una funzione di x la quale sia eguale alla sua derivata, si ha l'equazione

$$\frac{d\,y}{d\,x} = y$$

dalla quale si ricava immediatamente

$$d\,y = y\,d\,x \quad , \quad \frac{d\,y}{y} = d\,x \quad , \quad \log y = \frac{d\,x}{d\,y}$$

quindi, rappresentando con C una quantità costante qualunque,

$$\log y = x + c$$

onde

$$y = e^{x+c} = e^x \,.\, e^c$$

Dunque le funzioni di x che sono eguali alle loro derivate sono quelle che si possono ridurre alla forma $m\,e^x$, ove m rappresenta una quantità costante qualunque.

28. — Qui seguiranno alcuni esempi di derivazione di funzioni logaritmiche od esponenziali di una sola variabile.

(1) Sia data l'equazione logaritmica

$$y = \log\,(x + \sqrt{a^2 + x^2})$$

applicando la regola di derivazione di un'espressione logaritmica

$$d\,y = \frac{d\,(x + \sqrt{a^2 + x^2})}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{d\,x + \dfrac{x\,d\,x}{\sqrt{a^2 + x^2}}}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{d\,x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

da cui s'ottiene

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

(2) Sia

$$y = \log [\, (x-a)^m \, (x-b)^n \, (x-c)^p \ldots]$$

sarà

$$y = m \log (x-a) + n \log (x-b) + p \log (x-c) + \ldots$$

da cui

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{m}{x-a} + \frac{n}{x-b} + \frac{p}{x-c} + \ldots$$

Se si rappresenta con $\psi\ (x)$ il prodotto $(x-a)^m\ (x-b)^n \ldots$, si ha $y = \log\ [\psi^n\ (x)]$ da cui

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{f'\,(x)}{f\ (x)}$$

dunque

$$\frac{f'\,(x)}{f\ (x)} = \frac{m}{x-a} + \frac{n}{x-b} + \frac{r}{x-c} + \ldots$$

e per conseguenza

$$f'\ (x) = m\,\frac{f\,(x)}{x-a} + n\,\frac{f\,(x)}{x-b} + p\,\frac{f\,(x)}{x-c} + \ldots$$

(3) Sia

$$y = \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

sarà

$$y = \frac{1}{2} \log (1+x) - \frac{1}{2} \log (1-x)$$

da cui

$$d\,y = \frac{1}{2}\ \frac{d\,(1+x)}{1+x} - \frac{1}{2}\ \frac{d\,(1-x)}{1-x} = \frac{d\,x}{1-x^2}$$

perciò

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{1-x^2}$$

(4) Sia

$$y = \log\,.\,\log x$$

sarà

$$d\,y = \frac{d \log x}{\log x} = \frac{d\,x}{x \log x}$$

da cui

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \log x}$$

(5) Sia

$$y = u^v$$

essendo u e v due funzioni di x, sarà

$$\log y = v \log u$$

da cui

$$\frac{dy}{y} = v \frac{du}{u} + \log u \, dv$$

onde

$$dy = \frac{yv}{u} du + y \log u \, . \, dv$$

perciò

$$\frac{dy}{dx} = \frac{yv}{u} \cdot \frac{du}{dx} + y \log u \, . \, \frac{dv}{dx}$$

(6) Sia

$$y = x^x$$

sarà

$$\log y = x \log x$$

da cui

$$\frac{dy}{y} = x \frac{dx}{x} + \log x \, dx = (1 + \log x \; dx$$

onde

$$dy = x^x (1 + \log x) \, dx$$

perciò

$$\frac{dy}{dx} = x^x (1 + \log x$$

(7) Sia

$$y = \log \frac{a + bx}{a - bx}$$

si ponga

$$\frac{a + bx}{a - bx} = z$$

sarà

$$y = \log z$$

quindi

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}$$

ove

$$\frac{dy}{dz}=\frac{1}{z}$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{b\,(a-b\,x)+b\,(a+b\,x)}{(a-b\,x)^2}=\frac{2\,a\,b}{(a-b\,x)^2}$$

risulta

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{z}\,\frac{2\,a\,b}{(a-b\,x)^2}$$

dando a z il suo valore si ottiene finalmente

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\,a\,b}{\dfrac{a+b\,x}{a-b\,x}(a-b\,x)^2}=\frac{2\,a\,b}{a^2-b^2\,x^2}$$

29. — Esercizi.

(1) $y=\log\dfrac{a+x}{a-x}$;

$$;\ \frac{dy}{dx}=\frac{2\,a}{a^2-x^2}$$

(2) $y=\log\left[c\,(a+x)^2\right]$;

$$;\ \frac{dy}{dx}=\frac{2}{(a+x)\log a}$$

(3) $y=e^x\,(x-1)$;

$$;\ \frac{dy}{dx}=x\,e^x$$

(4) $y=e^x\,(x^2-2\,x+2)$;

$$;\ \frac{dy}{dx}=x^2\,e^x$$

(5) $y=e^{e^x}$;

$$;\ \frac{dy}{dx}=e^{e^x}\,.\,e^x$$

(6) $y=e^x\log x$;

$$;\ \frac{dy}{dx}=e^x\,(x^{-1}+\log x)$$

(7) $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$;

$$; \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{2\,e^x}{(e^x + 1)^2}$$

(8) $y = \log \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$;

$$; \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{2\,x^x}{e^{2x} - 1}$$

(9) $y = 2\,e^{\sqrt{x}} (x^{\frac{3}{2}} - 3\,x + 6\,x^{\frac{1}{2}} - 6)$;

$$; \frac{d\,y}{d\,x} = x\,e^{\sqrt{x}}$$

(10) $y = \log (x + a + \sqrt{2\,a\,x + x^2})$;

$$; \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\sqrt{2\,a\,x + x^2}}$$

(11) $y = \log (x - \sqrt{x^2 - a^2})$;

$$; \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

(12) $y = \log \frac{x}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$;

$$; \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

(13) $y = \log \frac{(x + 2)^2}{(x + 3)^{\frac{3}{2}} \sqrt{x + 1}}$;

$$; \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{x}{(x + 1)\,(x + 2)\,(x + 3)}$$

(14) $y = \log \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1}$;

$$; \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{2}{x\sqrt{x^2 + 1}}$$

(15) $y = e^x \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$;

$$; \frac{d\,y}{d\,x} = e^x \cdot \frac{2 - x^2}{1 - x^2} \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$$

CAPITOLO QUARTO.

Derivazione delle funzioni trigonometriche.

30. — Nel corso di questo capitolo e dei capitoli seguenti, con i simboli che la trigonometria ci fornisce

$$\operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{tang} x, \operatorname{cotang} x, \sec x, \operatorname{cosec} x,$$

si rappresenteranno sempre le lunghezze di linee trigonometriche che ci sono note, riferite al raggio come unità di misura; per conseguenza, quando nelle questioni geometriche che incontreremo, si vorrà applicare il principio della omogeneità, tali simboli si riguarderanno come numeri astratti, esprimenti i rapporti fra le linee da essi rappresentate ed i rispettivi raggi. La quantità cognita od incognita x, misurerà sempre un arco sulla circonferenza di raggio qualunque, esso rappresenterà sempre la lunghezza, quindi, di un arco, riferita sempre al suo raggio come unità, che verrà a sua volta riguardato come un numero astratto. Può anche in varie questioni essere utile svolgere con tali espressioni calcoli numerici usando le tavole ordinarie dei logaritmi delle linee trigonometriche, in questo caso converrà cercare l'ampiezza, ossia il numero dei gradi dell'arco x. Se quest'ampiezza si rappresenta con z, si ha

$$z = \frac{180}{\pi} x$$

Inversamente, essendo data l'ampiezza z, sarà facile riconoscere x

$$x = \frac{180}{\pi} z$$

Nella prima formola terremo presente che il fattore $\frac{180}{\pi}$ è uguale all'ampiezza degli archi lunghi come i loro raggi, la quale è

$$57,^\circ 2958 = 57^\circ \, 17' \, 44'' \ldots$$

con un errore minore di mezzo secondo.

Nella seconda formula invece lo stesso fattore $\frac{180}{\pi}$ rappresenta la lunghezza dell'arco di un grado riferita al raggio preso come unità, essa è

0,0174533...

con un errore minore di un decimilionesimo.

31. — Ci proponiamo ora di svolgere un primo problema: *Trovare la derivata di senx.*

Sia $y = \operatorname{sen} x$, poniamo $\operatorname{sen} x = z$, otterremo $y = z$.

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

Quando h converge verso zero, $\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$ convergerà necessariamente pure verso zero, ed il rapporto $\frac{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$, come la trigonometria insegna, tenderà indefinitamente verso l'unità. Dunque

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

La derivata di senx è cosx.

32. — *Trovare la derivata di cosx.*

Dal precedente problema possiamo dedurre che

(1) $$d \operatorname{sen} x f(x) = \cos f(x) \,.\, f'(x)\, dx$$

da cui se $y = \cos x$, avremo

$$x = \frac{\pi}{2} - \Delta x$$

$$y = \operatorname{sen} \Delta x$$

Dalla (1) sappiamo

$$d \operatorname{sen} \Delta x = \cos \Delta x \, d \Delta x$$

e per conseguenza

$$dy = \cos \Delta x \, d \Delta x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) . \, d\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = - \operatorname{sen} x \, dx$$

da cui risulta finalmente

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen} x$$

Da quest'ultimo risultato deduciamo che in generale

$$d \cos f(x) = -\operatorname{sen} f(x) \, . \, f'(x) \, dx$$

33. — *Trovare la derivata di tang x.*

Come per i precedenti problemi, si ponga $y = \operatorname{tang} x$, ed essendo dalla trigonometria

$$\operatorname{tang} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

sarà, applicando la regola per derivare un quoziente

$$dy = \frac{\cos x \, d \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \, d \cos x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x \, dx + \operatorname{sen}^2 x \, dx}{\cos^2 x} = -\frac{dx}{\cos^2 x}$$

e per conseguenza ancora avremo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tang}^2 x$$

34. — *Trovare la derivata di cotang x.*

Essendo

$$d \operatorname{tang} x = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

sarà in generale

$$d \operatorname{tang} f(x) = \frac{f(x)}{\cos^2 f(x)} \, dx$$

da cui essendo, come la trigonometria insegna,

$$\cot x = \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$d \cot x = d \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = -\frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}$$

da cui risulta immediatamente

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

Le derivate sia di tang x *che* di cotang x si possono però trovare anche direttamente, partendo dalla definizione nota della derivata di una funzione.

35. — *Trovare la derivata di sec x.*
Essendo

$$d \cos x = - \operatorname{sen} x \, d x$$

sarà, come abbiamo visto, in generale

$$d \cos f(x) = - \operatorname{sen} f(x) \cdot f'(x) \, d x$$

da cui essendo, come la trigonometria insegna

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$d \sec x = d \frac{1}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} d x$$

da cui si deduce immediatamente

$$\frac{d y}{d x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

36. — *Trovare la derivata di cosec x.*
Essendo

$$d \operatorname{sen} x = \cos x \, d x$$

ed in generale

$$d \operatorname{sen} f(x) = \cos f(x) \cdot f'(x) \, d x$$

da cui essendo, come la trigonometria insegna

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$d \operatorname{cosec} x = d \frac{1}{\operatorname{sen} x} = - \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} d x$$

da cui s'ottiene immediatamente

$$\frac{d y}{d x} = - \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

37. — Le precedenti funzioni trigonometriche, che contengono linee trigonometriche espresse per mezzo dei rispettivi archi, si denominano *funzioni trigonometriche dirette.* Quelle invece, che contengono archi espressi per mezzo di una loro linea trigonometrica, si sogliono dire *funzioni trigonometriche inverse.*

Per rappresentarle si fa uso delle denominazioni arc sen x, arc cos x, arc tang x, ecc. Esse esprimono, come abbiamo detto, l'arco il cui seno è x, l'arco il cui coseno è x, ecc.

Si sa dalla trigonometria che ad ogni valore di x corrisponde un numero infinito di valori delle funzioni arc sen x, arc cos x, ... giacchè infiniti sono gli archi che si possono prendere su una circonferenza.

Quindi, se per ognuna di codeste funzioni, si riguardano valori come tante funzioni distinte di x, e se si considerano due qualunque di queste funzioni, esse sono tali che o la loro differenza o la loro somma è costante, e perciò le loro derivate sono le stesse, o differiscono solo nel segno.

Ora, se con le lettere X, Y, Z, U, si rappresentano i rispettivi valori di arc sen$x$, che può variare tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, di arc cos x, che può variare da 0 a π, di arc tang x e arc cotang$x$, che variano da $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, e se si rappresenta con m un numero intero qualunque, positivo o negativo od anche nullo, si ha in generale

$$\text{arc sen}\, x = m\pi + (-1)^m X \quad , \quad \text{arc cos}\, x = 2\, m\pi \pm (+1)\, Y$$

$$\text{arc tang}\, x = m\pi + (+1)\, Z$$

$$\text{arc cot}\, x = (2\, m + 1)\frac{\pi}{2} + (-1)\, U$$

38. — Proponiamoci ora il seguente problema:

Trovare la derivata di arc sen x.

Sia $y=$arc sen x, sarà $x=$sen$y$, da cui derivando

$$\cos y\, d\, y = d\, x$$

da cui, come sappiamo,

$$\frac{d\, y}{d\, x} = \frac{1}{\cos y}$$

Essendo però $\cos y = \pm \sqrt{1-x^2}$ sarà

$$\frac{d\, y}{d\, x} = \pm \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

Alla derivata ottenuta bisogna dare lo stesso segno di cos y, se fra i valori di arc sen x si considera quello che ha minimo valore assoluto, ossia quello che è da $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ bisogna darle il segno $\times$.

In generale abbiamo

$$d\, \text{arc sen}\, f\,(x) = \pm \frac{f'\,(x)\, d\, x}{\sqrt{1-f\,(x^2)}}$$

39. — *Trovare la derivata di arc cos x.*

Sia, come al solito, $y = \text{arc} \cos x$, sarà $\cos y = x$, da cui

$$-\text{sen}\, y\, d\, y = d\, x$$

onde

$$\frac{d\, y}{d\, x} = -\frac{1}{\text{sen}\, y}$$

ma essendo $\text{sen}\, y = \pm \sqrt{1 - x^2}$ avremo

$$\frac{d\, y}{d\, x} = \mp \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Alla derivata ottenuta bisogna dare segno contrario a quello di $\text{sen}\, y$; quindi, se fra i valori di $\text{arc} \cos x$ si considera il minimo positivo ossia quello che è da 0 a π bisogna darle il segno —.

In generale abbiamo

$$d \, \text{arc} \cos f(x) = \mp \frac{f'(x)\, d\, x}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}}$$

Come abbiamo visto le derivate di $\text{arc sen}\, x$ ed $\text{arc} \cos x$, per uno stesso valore di x, sono eguali, oppure differiscono soltanto nel segno, secondo i segni che loro si danno, ossia secondo i valori che si considerano degli archi.

40. — *Trovare la derivata di arc tang x.*

Poniamo ancora $y = \text{arc tang}\, x$, sarà $x = \text{tang}\, y$, da cui

$$d\, x = (1 + \text{tang}^2\, y)\, d\, y$$

onde si ricava

$$\frac{d\, y}{d\, x} = \frac{1}{1 + \text{tang}^2\, y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Ed in generale

$$d \, \text{arc tang}\, f(x) = \frac{f'(x)\, d\, x}{1 + f(x)^2}$$

Similmente si ricava pure anche la derivata di $\text{arc cotang}\, x$ che risulta di valore assoluto identico a quello della derivata di $\text{arc tang}\, x$, sempre per uno stesso valore di x, e di segno contrario, qualunque siano i valori che si considerano degli archi. Così sarà

$$d \, \text{arc cotang}\, x = -\frac{d\, x}{1 + x^2}$$

da cui immediatamente

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$$

41. — Dopo quanto sino qui si dimostrò per le funzioni trigonometriche esplicite, sarà bene studiare le varie applicazioni, essendo in grado di derivare qualunque funzione esplicita ad una variabile, nella quale vi siano espressioni trigonometriche.

1. Sia $y = \operatorname{sen} \frac{x}{a}$, cerchiamo la sua derivata.

Si ponga anzitutto $\frac{x}{a} = z$, risulta $y = \operatorname{sen} z$, da cui si ha

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx}$$

ove

$$\frac{dy}{dz} = \cos z \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{a}$$

da cui

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a} \cos z = \frac{\cos z}{a}$$

ponendo ora per z il suo valore, s'ottiene

$$\frac{\cos \frac{x}{a}}{a} = \cos \frac{x}{a^2}$$

2. Sia $y = x - \operatorname{sen} x \cos x$: cerchiamo la sua derivata. Applicando le regole per la derivazione di un prodotto, otteniamo facilmente.

$$dy = dx - \cos^2 x\, dx + \operatorname{sen}^2 x\, dx =$$
$$= (1 - \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)\, dx = 2 \operatorname{sen}^2 x\, dx$$

da cui si ha immediatamente

$$\frac{dy}{dx} = 2 \operatorname{sen}^2 x$$

3. Sia da trovare la derivata di $\operatorname{tang} x + \sec x$, poniamo come sempre

$$y = f(\operatorname{tang} x + \sec x)$$

sia ora $\operatorname{tang} x + \sec x = z$, avremo

$$y = f(z)$$

da cui

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}$$

ove

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\operatorname{sen} x}{(\cos^2 x)^2} \quad , \quad \frac{dz}{dx} = 1$$

quindi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen} x}{(\cos^2 x)^2} = \frac{\cos x}{(1 - \operatorname{sen} x)^2}$$

4. Sia $y = \operatorname{sen}^m (ax + b)$; sarà

$$dy = m \operatorname{sen}^{m-1} (ax + b)\, d \operatorname{sen} (ax + b) =$$
$$= a m \operatorname{sen}^{m-1} (ax + b) \cos (ax + b)\, dx$$

da cui

$$\frac{dy}{dx} = a m \operatorname{sen}^{m-1} (ax + b) \cos (ax + b)$$

5. Sia $y = log$ (sen$x$) ; si ponga

$$\operatorname{sen} x = z$$

da cui

$$y = \log z$$

quindi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}$$

ove

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{z} \qquad \text{e} \qquad \frac{dz}{dx} = \cos x$$

onde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{z} \cos x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cotang} x$$

6. Sia $y = \operatorname{sen} (\log x)$; si ponga

$$\log x = z$$

da cui

$$y = \operatorname{sen} z$$

quindi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}$$

ove

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \cos z \qquad \text{e} \qquad \frac{d\,z}{d\,x} = \frac{1}{x}$$

onde

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{\cos z}{x} = \frac{\cos(\log x)}{x}$$

7. Sia $y = \text{arc}\cos \dfrac{4 - 3\,x^2}{x^3}$; si ponga

$$\frac{4 - 3\,x^2}{x^3} = z$$

con i medesimi procedimenti, abbiamo

$$\frac{d\,y}{d\,z} = -\frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{4 - 3\,x^2}{x^3}\right)^2\right\}}} =$$

$$= \frac{-x^3}{\sqrt{(x^6 - 9\,x^4 + 2\,4\,x^2 - 1\,6)}}$$

$$\frac{d\,z}{d\,x} = \frac{-6\,x^4 - 3\,x^2\,(4 - 3\,x^2)}{x^6} = \frac{3\,(x^2 - 4)}{x^4}$$

quindi

$$\frac{d\,y}{d\,x} = -\frac{x^3}{\sqrt{(x^6 - 9\,x^4 + 2\,4\,x^2 - 1\,6)}} \cdot \frac{3\,(x^2 - 4)}{x^4}$$

$$= \frac{-3\,(x^2 - 4)}{x\sqrt{\{(x^2 - 1)\,(x^2 - 4^2)\}}} = -\frac{3}{\sqrt{(x^2 - 1)}}$$

42. — ESERCIZI.

(1) $\log \text{cotang}\, x = y$;

$$;\ \frac{d\,y}{d\,x} = -\frac{2}{\text{sen}\, 2\,x}$$

(2) $\dfrac{\text{tang}^3 x}{3} - \tan x + x = y$;

$$;\ \frac{d\,y}{d\,x} = \text{tang}^4 x$$

(3) $(a^2 + x^2)\, \text{arc}\tan \dfrac{x}{a} = y$;

$$;\ \frac{d\,y}{d\,x} = 2\,x\, \text{arc}\tan \frac{x}{a} + a$$

(4) $e^{(a+x)^2} \operatorname{sen} x = y$;

$$; \frac{d\,y}{d\,x} = e^{(a+x)^2}\,2\,(a+x)\operatorname{sen} x + \cos x$$

(5) $\tan a^{\frac{1}{x}} = y$;

$$; \frac{d\,y}{d\,x} = - \frac{\sec^2 a^{\frac{1}{x}}}{x^2} \log a \;.\; a^{\frac{1}{x}}$$

(6) $\operatorname{sen} n\,x\,(\operatorname{sen} x)^n = y$;

$$; \frac{d\,y}{d\,x} = n\,(\operatorname{sen} x)^{n-1} \operatorname{sen}\,(n+1)\,x$$

(7) $\operatorname{tang}^{-1}(n \operatorname{tang} x) = y$;

$$; \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{n}{\cos^2 x + n^2 \operatorname{sen}^2 x}$$

(8) $e^{\operatorname{sen} x} = y$;

$$; \frac{d\,y}{d\,x} = e^{\operatorname{sen} x} \cos x$$

(9) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{tang} x} = y$;

$$; \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{\cos^3 x - \operatorname{sen}^3 x}{1 + \operatorname{sen} 2\,x}$$

(10) $2 \log \operatorname{sen} x + \operatorname{cosec}^2 x = y$;

$$; \frac{d\,y}{d\,x} = -\,2 \cot^3 x$$

(11) $\operatorname{arc\,cos} \dfrac{b + a \cos x}{a + b \cos x} = y$;

$$; \frac{d\,y}{d\,x} =$$

(12) $\operatorname{arc\,tang} \dfrac{2\,x}{1 - x^2} = y$;

$$; \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{2}{1 + x}$$

(13) $\dfrac{1}{2\sqrt{a\,b}} \operatorname{arc\,sen} \dfrac{2\,x\sqrt{a\,b}}{a + b\,x^2} = y$;

$$; \frac{d\,y}{d\,x} = \pm \frac{1}{a + b\,x^2}$$

(14) $\text{arc sen}\,(3\,x - 4\,x^3) = y$;

$$; \frac{d\,y}{d\,x} = \pm \frac{3}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(15) $\log\,(\cos x + \text{sen}\,x)\,y$;

$$; \frac{d\,y}{d\,x} = \text{tang}\,\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

(16) $\log \sqrt{\frac{1 - \text{sen}\,x}{1 + \text{sen}\,x}} = y$;

$$; \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\cos x}$$

(17) $\log \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) =$;

$$; \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\cos x}$$

(18) $x^m\, e^{\text{sen}x} = y$;

$$; \frac{d\,y}{d\,x} = x^{m-1}\, e^{\text{sen}x}\,(m + x \cos x)$$

(19) $x^{\text{sen}x} = y$;

$$; \frac{d\,y}{d\,x} = x^{\text{sen}x}\left(\frac{\text{sen}\,x}{x} + \cos x \log x\right)$$

(20) $\log \sqrt{\frac{1 - \cos m\,x}{1 + \cos m\,x}} = y$;

$$; \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{m}{\text{sen}\,m\,x}$$

(21) $\log\,(x\,\text{sen}\,x + \cos^2 x) = y$;

$$; \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{\text{sen}\,x - \text{sen}^2\,x + x\cos x}{x\,\text{sen}\,x + \cos^2 x}$$

(22) $\log \cos x = y$;

$$; \frac{d\,y}{d\,x} = -\,\text{tang}\,x$$

(23) $\log \text{fang}\,x = y$;

$$; \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{2}{\text{sen}\,2\,x}$$

(24) $\log \operatorname{arc} \cos \sqrt{1 - x^2}$;

$$; \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2} \,.\, \operatorname{arc} \operatorname{sen} x}$$

(25) $\frac{\operatorname{sen} 5\,x}{5} + \frac{\operatorname{sen} 7\,x}{7} - \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 11\,x}{11}$;

$$; \frac{d\,y}{d\,x} = 4 \operatorname{sen} 2\,x \operatorname{sen} 3\,x \cos 6\,x$$

CAPITOLO QUINTO.

Derivazione successiva.

43. — Se x ed y dinotano quantità tali che ciascuna di esse si capaciti di variare indipendentemente dall'altra, ossia che ciascuna di esse varii senza disturbare l'altra quantità, si potrà derivare l'una quantità rispetto all'altra, tenendo, come abbiamo fatto sino ad ora, y funzione *dipendente* di x, ed x funzione indipendente, si potrà invece derivare ugualmente rispetto ad y derivando la sua derivata. In questo caso la funzione che ne risulta vien detta *seconda derivata* della funzione x, mentre costituisce la *prima derivata* la funzione che deriva da y funzione di x.

La derivata di $\frac{d\,y}{d\,x}$ sarà quindi la seconda derivata della funzione y rispetto ad x, e si rappresenterà brevemente con

$$y'' \text{ oppure } f''\,(x)$$

e cioè sarà

$$\frac{d\,\frac{d\,y}{d\,x}}{d\,x} = \frac{d^2\,y}{d\,x^2}$$

Continuando, se si deriva ancora la $\frac{d^2\,y}{d\,x^2}$ la derivata risultante si chiamerà *terza derivata* della funzione y rispetto ad x, essa cioè sarà la derivata della seconda derivata della funzione y, e si rappresenterà con i simboli

$$y''' \text{ oppure } f'''(x)$$

e cioè sarà

$$\frac{d\,\dfrac{d^2 y}{d x^2}}{d x} = \frac{d^3 y}{d x^3}$$

Si potrà così continuare a derivare ogni successiva derivata, e si giungerà alla quarta, quinta, ecc., derivata, ed in termine generale se si faranno n derivazioni successive della funzione y, l'ultima derivata a cui si giungerà dicesi *n esima derivata della funzione y*, e si rappresenta con i simboli

$$y^{(n)} \text{ oppure } f^{(n)}(x)$$

Quando nella formazione delle successive derivate di una funzione y, se ne trova una costante, appunto perchè, come sappiamo, la derivata di una costante è zero, le derivate seguenti saranno tutte nulle.

44. — Sia $y = f(x)$. Se x è una quantità variabile indipendente il suo incremento differenziale si considera come una quantità costante; da ciò ne deriva quindi

$$d^2 y = d\,\{f^{\mathrm{I}}(x)\,dx\} = dx\,.\,d\,f^{\mathrm{I}}(x) = dx\,.\,f^{\mathrm{II}}(x)\,dx = f^{\mathrm{II}}(x)\,dx^2,$$
$$d^3 y = d\,\{f^{\mathrm{II}}(x)\,dx^2\} = f^{\mathrm{III}}(x)\,dx^3,$$
$$d^4 y = d\,\{f^{\mathrm{III}}(x)\,dx^3\} = f^{\mathrm{IV}}(x)\,dx^4,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$d^n y = d\,\{f^{(n-1)}(x)\,dx^{n-1}\} = f^{(n)}(x)\,dx^n,$$

risulta che, come abbiamo *a priori* determinato

$$f^{\mathrm{II}}(x) = \frac{d^2 y}{d x^2},\ f^{\mathrm{III}}(x) = \frac{d^3 y}{d x^3},\ f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{d x^n}$$

Se invece x dipende da un'altra variabile u, è funzione di *u rispetto* ad x, è l'incremento differenziale di x è pure funzione di questa variabile indipendente, perciò abbiamo

$$d^2 = d\,\{f^{\mathrm{I}}(x)\,dx\} = f^{\mathrm{II}}(x)\,dx^2 + f^{\mathrm{I}}(x)\,d^2 y,$$
$$d^3 y = d\,\{f^{\mathrm{II}}(x)dx\} = d\,(d^2 y) = f^{\mathrm{III}}(x)dx^3 + 3\,f^{\mathrm{II}}(x)dx\,d^2x + f^{\mathrm{I}}(x)d^3x,$$
$$d^4 y = d\,\{f^{\mathrm{III}}(x)\,dx\} = d\,(d^3 y) = f^{\mathrm{IV}}(x)\,dx^4 + 6\,f^{\mathrm{III}}(x)dx^2 d^2x +$$
$$+ 3\,f^{\mathrm{II}}(x)\,(d^2x)^2 + 4\,f^{\mathrm{II}}(x)\,dx\,d^3x + f^{\mathrm{I}}(x)\,d^4x$$

e così di seguito.

Quindi, se come abbiamo stabilito u è la variabile da cui x dipende, otteniamo

$$x = \varphi(u)$$

inoltre y quale funzione di x, rispetto la variabile indipendente u, sarà espressa dalla formula

$$y = f\{\varphi(u)\}$$

da cui, rappresentando con $\psi(u)$ questa funzione, sarà

$\psi^{I}(u) = f^{I}(x) \cdot \varphi^{I}(u),$

$\psi^{II}(u) = f^{II}(x)\{\varphi^{I}(u)\}^2 + f^{I}(x) \cdot \varphi^{II}(u),$

$\psi^{III}(u) = f^{III}(x)\{\varphi^{I}(u)\}^3 + 3f^{II}(x) \cdot \varphi^{I}(u) \cdot \varphi^{II}(u) + f^{I}(x) \cdot \varphi^{III}(u),$

$\psi^{IV}(u) = f^{IV}(x)\{\varphi^{I}(u)\}^4 + 6f^{III}(x)\{\varphi^{I}(u)\}^2\varphi^{II}(u) + 3f^{II}(x)\{\varphi^{II}(u)\}^2 +$
$+ 4f^{II}(x) \cdot \varphi^{II}(u) \cdot \varphi^{III}(u) + f^{I}(x) \cdot \varphi^{IV}(u),$

e così di seguito.

45. — Proponiamoci ora il seguente problema:

— *Trovare le successive derivate della funzione $y = \log x$.*

Sappiamo che la prima derivata di $y = \log x$ è

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

la seconda derivata essendo la derivata della prima, sarà la derivata della quantità variabile $\frac{1}{x^1}$, se cioè

$$y = \frac{1}{x}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{(1 \cdot 2)^{(2-1)}}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$$

e così di seguito si otterranno

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{2}{x^3}$$

$$\frac{d^4 y}{dx^3} = \frac{6}{x^4}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1 . 2 . 3 \ldots n - 1\,(-1)^{n-1}}{x^n}$$

46. — *Cercare le successive derivate della funzione*

$$y = x^m.$$

La prima derivata sappiamo che è data

$$\frac{dy}{dx} = m\,x^{m-1}$$

derivando il risultato otterremo la seconda derivata, ecc.,

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = m (m - 1) x^{m-2}$$

$$\frac{d^3 y}{d x^3} = m (m 1 -) (m - 2) x^{m-3}$$

$$. \, , \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, .$$

$$\frac{d^n y}{d x^n} = (m - 1) (m - 2) \ldots (m - n + 1) x^{m-n}$$

Nel caso che l'esponente m sia intero e positivo, si ottiene

$$\frac{d^m y}{d x^m} = m (m - 1) (m - 2) \ldots 3 . 2 . 1$$

da cui deriva che la *mesima* derivata di una funzione intera di x di grado m è costante, e che quindi le derivate successive sono nulle.

47. — *Avendosi due variabili y ed x espresse in funzione di una terza variabile indipendente* u, *trovare le successive derivate di y, funzione di u rispetto ad x.*

Essendo $y = f (x)$ ed $x = \varphi (u)$ sarà, eliminando $y = \psi (u)$ sarà, eliminando u da tali equazioni e risolvendo l'equazione risultante rispetto ad y,

$$d y = f' (x) \, d x$$

da cui

$$f' (x) = \frac{d y}{d x} \tag{1}$$

onde

$$f' (x) = \frac{\varphi' (u)}{\psi' (u)} \tag{2}$$

Derivando i due membri della equazione ( ) si ha

$$f'' (x) \, d x = d \frac{d y}{d x} = \frac{d x \, d^2 y - d y \, d^2 x}{d x^2}$$

ossia

$$f'' (x) = \frac{d x \, d^2 y - d y \, d^2 x}{d x^3} \tag{3}$$

con ciò

$$f'' (x) = \frac{\varphi' (u) \, \psi'' (u) - \psi' (u) \, \varphi'' (u)}{\{ \varphi' (u) \}^3} \tag{4}$$

Derivando ancora i due membri della (3) si avrebbe la terza derivata $f^{III}(x)$ e così di seguito.

Osserveremo che si poteva anche risolvere il problema ricavando le derivate di $f(x)$ dalle equazioni del paragrafo precedente relative al caso di x non indipendente.

48. — Col procedimento tenuto per risolvere il precedente problema, si sono trovate le derivate di y rispetto ad x, espresse per mezzo di y e di x rispetto a u. Posto che le funzioni variabili y e x siano indipendenti, ossia siano tali da poter variare senza disturbarsi reciprocamente, e sia u una terza quantità, come l'abbiamo sino ad ora concepita tale però di poter variare sia con il variare della x, sia con il variare della y, si dirà che *—u è funzione delle variabili indipendenti di x, y—.*

Con ciò non si può ottenere che, necessariamente, una sola derivata rispetto ad x della funzione u,, quindi non si può ottenere una derivata rispetto ad x ed a y.

Siano dunque

$$\frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^3u}{dx^3} \cdots \frac{d^nu}{dx^n} \cdots$$

derivate di u rispetto alla variabile indipendente, e sola variabile, x — e siano

$$\frac{du}{dy}, \frac{d^2u}{dy^2}, \frac{d^3u}{dy^3} \cdots \frac{d^nu}{dy^n} \cdots$$

derivate di u rispetto la variabile indipendente, e sola indipendente, y — abbiamo che per derivare una funzione di due variabili indipendenti, bisognerà supporre che le due variabili possano variare solamente — *una alla volta.* —

Riprenderemo , più innanzi, la questione.

49. — *Data l'equazione $x = \varphi(y)$ trovare le derivate di y, considerando x variabile indipendente ed y sua funzione.*

Si rappresenti con $y = f'(x)$ l'espressione che si otterrebbe risolvendo l'equazione data, rispetto ad y; si avrà differenziando i due membri dell'equazione data,

$$dx = \varphi'(y)\,dy = \varphi'(y)\,f'(x)\,dx$$

da cui

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

Si derivino i due membri di quest'ultima equazione. si otterrà ancora

$$f'''(x)\,dx = -d\{\varphi''(y)[\varphi'(y)]^{-3}\}$$
$$= 3[\varphi'(y)]^{-4}[\varphi''(y)]^2 dy - [\varphi'(y)]^{-3}\varphi'''(y)\,dy$$
$$= 3[\varphi'(y)]^{-5}[\varphi''(y)]^2 dy - [\varphi'(y)]^{-4}\varphi'''(y)\,dx$$

da cui

$$f'''(x) = \frac{3[\varphi''(y)]^2 - \varphi'(y)\,\varphi'''(y)}{[\varphi'(y)]^5}$$

Procedendo in modo analogo troveremo successivamente la quarta, quinta, ecc., derivata di $f(x)$.

Nelle formule precedenti si potevano anche trovare le derivate di $f(x)$ facendo $u = y$ e $\psi(u) = y$ come nel precedente paragrafo.

Qui noteremo che le funzioni $f(x)$ e $\varphi(y)$ diconsi *inverse* l'una dell'altra; quindi, per cagione d'esempio, le funzioni x^m e $\log x$ sono rispettivamente inverse della funzioni $\sqrt[m]{y}$ ed e^y.

Essendo

$$y = f(x) \quad \text{ed} \quad x = \varphi(y)$$

si ha

$$f[\varphi(x)] = y \quad \text{e} \quad \varphi[f(x)] = x$$

ove si scorge facilmente che se si prende una data funzione di una variabile e poi del risultato si prende la funzione inversa, il risultato finale è uguale alla variabile ossia la seconda operazione distrugge l'effetto della primafl Così

$$\sqrt[m]{x^m} = x \quad \text{ed} \quad e^{\log x} = x$$

Codesto procedimento di risoluzione dicesi *cambiamento della variabile indipendente da x ad y.*

50. — Sappiamo che

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad \text{e che} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\,\frac{dz}{dx}$$

ove z è una terza funzione variabile indipendente.

Date x ed y, tutte e due funzioni di quest'ultima variabile z, si cerca di esprimere le successive derivate di y, rispetto ad x, per mezzo delle derivate di y ed x *rispetto* a z: effettuando il cambiamento della variabile indipendente.

Otteniamo dalla (1)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dz}}{\dfrac{dx}{dz}}$$

da cui

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\frac{\dfrac{dy}{dz}}{\dfrac{dx}{dz}}=\frac{d}{dz}\frac{\dfrac{dy}{dz}}{\dfrac{dx}{dz}}\frac{dz}{dx}=$$

$$=\frac{\dfrac{d^2y}{dz^2}\dfrac{dx}{dz}-\dfrac{d^2x}{d^2z}\dfrac{dy}{dz}}{\left(\dfrac{dx}{dz}\right)^2}\frac{dz}{dx}=\frac{\dfrac{d^2y}{dz^2}\dfrac{dx}{dz}-\dfrac{d^2x}{dz^2}\dfrac{dy}{dz}}{\left(\dfrac{dx}{dz}\right)^3}$$

In seguito otteniamo

(2) $$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dz}\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}\dfrac{dx}{dz}-\dfrac{d^2x}{dz^2}\dfrac{dy}{dz}}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3}$$

ove, come facilmente si osserva, non è più x la variabile indipendente, ma la funzione z. La (2) può venir espressa dalla

(3) $$\frac{\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\dfrac{dx}{dz}-\dfrac{d^3x}{dz^3}\dfrac{dy}{dz}\right)\left(\dfrac{dx}{dz}\right)^3-3\left(\dfrac{dx}{dz}\right)^2\dfrac{d^2x}{dz^2}\dfrac{d^2y}{dz^2}\dfrac{dx}{dz}-\dfrac{d^2x}{dz^2}\dfrac{dy}{d}}{\left(\dfrac{dx}{dz}\right)^4}\frac{dz}{dx}=$$

$$=\frac{\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\dfrac{dx}{dz}-\dfrac{d^3x}{dz^3}\dfrac{dy}{dz}\right)\dfrac{dx}{dz}-3\,\dfrac{d^2x}{dz^2}\left(\dfrac{d^2y}{dz^2}\dfrac{dx}{dz}-\dfrac{d^2x}{dz^2}\dfrac{dy}{dz}\right)}{\left(\dfrac{dx}{dz}\right)^5}$$

similmente possiamo esprimere la quarta derivata $\dfrac{d^4y}{dx^4}$ e così di seguito.

51. — Proponiamoci ora il problema seguente:

Cambiare la variabile indipendente da x a z in una equazione della forma

$$f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ldots,\ \frac{d^n y}{dx^n}\right)=0 \tag{1}$$

essendo $ax+b=e^2$

Abbiamo anzitutto che essendo

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} \text{ ed } ax+b=e^z, \text{ si ha}$$

$$\frac{dy}{dx}=ae^{-z}.\ \frac{dy}{dz}$$

Derivando ulteriormente, la derivata così ottenuta, rispetto ad x, si ottiene la seguente espressione:

$$\frac{d\dfrac{dy}{dx}}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}=a\ \frac{d}{dz}\left(e^{-z}\frac{dy}{dz}\right)\cdot\frac{dz}{dx}=$$

$$=a^2e^{-z}\left(e^{-z}\frac{d^2y}{dz^2}-e^{-z}\frac{dy}{dz}\right)$$

$$=a^2\ e^{2-z}\left(\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}\right)$$

che si può scrivere simbolicamente sotto la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2}=a^2e^{2z}\left(\frac{d}{dz}-1\right)\frac{dy}{dz}.$$

che sarà la seconda derivata dell'equazione data rispetto ad x. Derivando ancora codesta seconda derivata rispetto ad x, otterremo

$$\frac{d^3y}{dx^3}=a^2\frac{d}{dz}\left\}e^{-2z}\left(\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}\right)\right\{\cdot\frac{dz}{dx}=$$

$$=a^3\ e^{-z}\left\}e^{2-z}\left(\frac{d^3y}{dz^3}-\frac{d^2y}{dz^2}\right)-2e^{-2z}\left(\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}\right)\right\{$$

$$=a^3\ e^{-3z}\left\}\frac{d^3y}{dz^3}-\frac{d^2y}{dz^2}\right)-2\left(\frac{d^2y}{dz^2}\frac{dy}{dz}\right)\right\{$$

$$=a^3\ e^{-3z}\left(\frac{d^3y}{dz^3}-3\frac{d^2y}{dz^2}\pm2\frac{dy}{dx}\right).$$

Osservando la penultima delle espressioni che determinano $\frac{d^3 y}{d x^3}$, si vede che può essere ancora scritta simbolicamente sotto la forma

$$\frac{d^3 y}{d x^3} = a^3 e^{-3z} \left(\frac{d}{dz} = 1\right)\left(\frac{d}{dz} - 2\right)\frac{dy}{dz}$$

che sarà le terza derivata, dell'equazione data, rispetto ad x. Si potrà così continuare di seguito, per la quarta, quinta, ecc., derivata, ed in termine generale si avrà

$$\frac{d^n y}{d x^n} = a^{\,h} e^{nz} \left(\frac{d}{dz} - 1\right)\left(\frac{d}{dz} - 2\right) \ldots \left(\frac{d}{dz} - n + 1\right)\frac{dy}{dz}$$

Concludendo osserveremo che sostituendo nell'equazione (1) in luogo di

$$x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}$$

le loro espressioni in funzione di z, anzichè di x, come abbiamo fatto ed alle successive derivate di x, le successive derivate di z, si ottiene l'equazione cercata.

52. — Il seguente esempio chiarirà quanto si è detto nel paragrafo precedente. Sia data l'equazione

$$(ax+b)^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 3a(ax+b)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2(ax+b)\frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

L'equazione fra y e z sarà allora

$$a^3 \frac{d^3 y}{d z^3} + (2a - a)^3 \frac{dy}{dz} - 2y = 0$$

procedendo come abbiamo fatto.

53. — Esercizi.

1. $y = a^x$; $\frac{dy}{dx} = (a^x \log a)$,

; $\frac{d^2 y}{dx^2} = (a^x \log a)$,

; . . . . . .

; $\frac{d^n y}{dy^n} = a^x (\log. a$

2. $y = \operatorname{sen} x$; $\frac{dy}{dx} = \cos x$,

$$;\frac{d^2 y}{d x^2} = - \operatorname{sen} x,$$

$$;\frac{d^3 y}{d x^3} = - \cos x,$$

$$; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad .$$

$$;\frac{d^n y}{d x^n} = \operatorname{sen}\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Per comprendere come si possa giungere a quest'ultimo risultato, bisogna osservare che

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right),$$

$$- \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(\pi + x\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{2} + x\right),$$

$$- \cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right),$$

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(2\pi + x\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{2} + x\right),$$

ed in generale che

$\frac{d^n y}{d x^n} = \operatorname{sen}\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$, come si doveva dimostrare.

3. $y = \cos z$; $\frac{dy}{dx} = - \operatorname{sen} x.$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = - \cos x,$$

$$\frac{d^3 y}{d x^3} = \operatorname{sen} x,$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad .$$

$$\frac{d^n y}{d x^n} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

4.

Trovare la seconda derivata di $y = \tan^{-1}\frac{x}{y}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2 + y^2}$,

$$;\frac{d^2 y}{d x^2} = - \frac{2xy}{d\, v^2}$$

5 . $y = 4x^3 - 5x + 3$

$$x = 3z^2 - 4z - 1 \; ; \frac{dy}{dz} = (12x^2 - 5)(6z\ 4),$$

$$; \frac{d^2 y}{dz^2} = 24x(6z - 4)^2 + 6(12x^2 - 5)$$

$$; \frac{d^3 y}{dz^3} = 24 \{(6z - 4)^3 + 18x(6z - 4)\}$$

$$; \frac{d^4 y}{dz^4} = 864 \{6z - 4)^2 + 3x\}$$

$$; \frac{d^5 y}{dz^5} = 25920 (3z - 2)$$

$$; \frac{d^6 y}{dz^6} = 77760$$

Essendo come si vede costante la sesta derivata, tutte le altre sono nulle.

6. $$y = \mathrm{tang}^{-1} \frac{x}{a} \quad ; \frac{dy}{dx} = \frac{a}{a^2 - x^2}$$

$$; \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{2xa}{(x^2 + a^2)^2}$$

; . . . .

$$; \frac{d^n y}{dx^n} = \pm \frac{nxa}{(x^2 + a^2)^n}$$

7. Trovare la quarta derivata di $\frac{1}{e^x - 1}$ e di $e^{-\frac{1}{x2}}$;

$$; (1) \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{e^x\, 11\, e^{2x} + 11\, e^{3x} + e^{4x}}{(e^x - 1)^5}$$

$$; (2) \frac{d^4 y}{dx^4} = e^{-\frac{1}{x2}} \{16x^{-12} - 144x^{-10} +$$

$$+ 300x^{-8} - 120x^{-6}\}$$

8. Trovare l'ennesima derivata di $\frac{1}{a^2 + x^2}$

$$; \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{|1}{2_a\sqrt{(-1)}} \left\{ \frac{1}{x - a\sqrt{(-1)}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\left[x + a\sqrt{(-1)}\right]^{n+1}} \right\}$$

9. Trovare la quarta derivata della

$$y = a x^4 + b x^3 + e x^2 + f x + g$$

$$; \frac{d^4 y}{d x^4} = 24 a$$

10. Trovare l'ennesima derivata di $y = e^{ax}$

$$; \frac{d^n y}{d x^n} = a^n e^{an}$$

11. Trovare la quarta e quinta derivata di $y = x^4 - \frac{1}{x^4}$

$$; \frac{d^4 y}{d x^4} = 2 . 3 . 4 . - \frac{4 . 5 . 6 . 7}{x^8}$$

$$; \frac{d^5 y}{d x^5} = \frac{4 . 5 . 6 . 7 . 8}{x^9}$$

12. Trovare la quarta derivata di $y = \operatorname{sen}(ae + b)$

$$; \frac{d^4 y}{d x^4} = a^4 \operatorname{sen}(a y + b)$$

13. Trovare la *n*esima derivata di $y = x e^x$

$$; \frac{d^n y}{d x^n} = (n + x) e^x$$

14. Cambiare la variabile indipendente da x ad y nella equazione

$$\frac{d^3 y}{d x^3} \cdot \frac{dy}{dx} - 3 \left(\frac{d^2 y}{d x^2}\right)^2 - 2 \frac{d^2 y}{d x^2} \left(\frac{d y}{d x}\right)^2 - x \left(\frac{d y}{d x}\right)^5 = 0$$

$$; \frac{d^3 x}{d y^3} - 2 \frac{d^2 x}{d y^2} + x = 0$$

15. Cambiare la variabile indipendente da x a z nell'equazione

$$x^4 \frac{d^4 y}{d x^4} + 6 x^3 \frac{d^3 y}{d x^3} + 7 x^2 \frac{d^2 y}{d x^2} + x \frac{d y}{d x} = 0$$

essendo $x = e^z$

$$; \frac{d^4 y}{d z^4} - y = 0$$

16. Cambiare la variabile indipendente da x a z nella equazione

$$(1+x^2)^2 \frac{d^2 x}{dx^2} - 2(1-x)(1+x^2)\frac{dy}{dx} + y = 0$$

essendo $x = \operatorname{tang} z$

$$; \frac{d^2 y}{dz^2} - 2\frac{dy}{dz} + y = 0$$

CAPITOLO SESTO

Sviluppo in serie di funzioni.

57. — Un'espressione algebrica, quando consta di un numero finito di termini, si dice *polinomio*, quindi l'espressione

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

è un polinomio, perchè consta di un numero di termini che si possono numerare, quattro, l'espressione invece

$$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\,.\,3} + \frac{1}{2\,.\,3\,.\,4} + \ldots + \frac{1}{2\,.\,3 \ldots n} + \ldots$$

consta di un numero di termini che non si può numerare, e che quindi è infinito. Un polinomio, quando ha un numero infinito di termini, positivi o negativi, formati secondo una determinata legge, prende il nome di serie; è una serie la progressione geometrica

$$a + ax + ax^2 + ax^3 + \ldots + ax^n + \ldots$$

quando, come il caso, la si immagini prolungata all'infinito.

55. — Se la somma, che si rappresenta con Sn, *dei* primi n termini di una serie, si approssima indefinitamente ad un determinato limite, quando n cresce indefinitamente, la serie dicesi *convergente*, ed il limite che si rappresenterà con S, verso cui converge tale serie, dicesi somma della serie. La differenza $S - Sn$, la quale è uguale alla somma dei termini che seguono l'ennesimo, e che si approssima indefinitamente a zero, quando n cresce indefinitamente, chiamasi *resto* della serie dopo l'$n$esimo termine, e si rapprsenta con Rn.

Se invece, viceversa, la somma Sn non si approssima ad un determinato limite quando n cresce indefinitamente, la serie dicesi essere *divergente*.

La serie $2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}\ldots$ è convergente, essa, come sappiamo, rappresenta la base e dei logaritmi neperiani o naturali.

La serie $a+ax+ax^2+ax^3\ldots$ nella quale le quantità a ed x possono essere positive o negative, e convergente solamente quando il valore assoluto di x è minore di 1, chè si ha dall'algebra che tale serie

$$S\,n=a\,\frac{1-z^n}{1-z},$$

e questa quantità, per n crescente indefinitamente, si approssima proporzionalmente al valore limite

$$S=\frac{a}{1+x}$$

In questo caso

$$R\,n=\frac{1-x}{a}-\frac{a\,(1-x^n)}{1-x}=\frac{a\,x^n}{1-x}$$

La serie precedente è invece divergente quando il valore assoluto di x è maggiore di 1, perchè allora il valore della somma Sn cresce indefinitamente con il crescere di n. La medesima serie rimane divergente anche quando il valore di x è uguale ad 1, perchè in questo caso essa diviene della forma

$$a+a+a+a+a+\ldots\ldots$$

da cui la somma Sn dei primi n termini sarà an, di modo che il valore assoluto di Sn diviene infinitamente grande sieme ad n.

56. — Si abbia la serie

$$a+2a+3a+\ldots+na+\ldots$$

essa, come ogni altra serie, può venire espressa dal simbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,a$$

che si legge — sommatoria di na per n variabile da uno ad infiinito —, equivale quindi alla somma di infiniti termini del tipo na, in cui ad n può attribuirsi tutti i valori interi e positivi compresi tra 1 ed ∞

Nello stesso modo il simbolo

$$\sum_{n=k}^{n=h} na$$

che si legge — sommatoria di na per n variabile di h a k — equivale alla somma

$$ah + a\,(h+1) + a\,(h+2) + \ldots + a\,(k-1) + ak.$$

Questo simbolo è molto comodo perchè permette di scrivere in una breve formula, un'espressione che sarebbe lunghissima se non infinita, come quelle sin'ora qui considerate.

57. — La serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \tag{1}$$

è divergente, poichè le si può dare la forma

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots$$

onde si vede che essa è maggiore della serie

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \ldots$$

la quale è divergente, e ciò può fornire un criterio di divergenza per la serie (1).

Si vedrà, nei seguenti paragrafi, che sovente conviene dare a certe quantità la forma di serie, specialmente quando si ha da determinare approssimativamente il loro valore. Ma è pur egualmente chiaro che data una serie, le si può attribuire una data quantità, in questo caso la serie deve essere convergente ed ha per somma la quantità stessa. È di specialissima importanza in tutto il calcolo saper determinare se una serie è convergente o è divergente.

Sovente per fare ciò basta paragonarla ad una serie maggiore o minore la quale si sappia essere convergente o divergente, questo è il caso della serie (1).

58. — Sia data la serie

$$u_1 + u_2 - u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

si ha, come sappiamo, $u_n = R_{n-1} - R_n$ ove i resti R_{n-1} e R_n si approssimano indefinitamente a zero con il crescere di n, dunque anche u_n per n tendente a ∞ converge verso zero.

Ciò basta a fornirci un criterio di divergenza:

— quando u_n non converge verso zero, col tendere al ∞ di n, la serie è divergente.

Non è però sufficiente benchè necessario, ammettere che la serie è convergente, perchè col crescere di n la u_n tende verso zero. Così la serie (1) del paragrafo precedente, la quale ha per termine generale $\frac{1}{n}$, decresce indefinitamente col crescere di n, purtuttavia non è convergente.

59. — Sia data la serie

$$\pm u_1 \mp u_2 \pm u_3 \mp \ldots \pm u_{n-1} \mp u_n \pm \ldots$$

ove u_1, u_2,... rappresentino n valori assoluti dei termini, e questi abbiano segni alternativamente positivi e negativi, mentre, per ipotesi, i loro valori decrescono con il crescere di n.

La somma Sn si può scrivere sotto le forme seguenti

$$Sn + (u_{n+1} - u_{n+2}) + (u_{n+3} - u_{n+4}) + \ldots + (u_{n-p-1} - u_{np}) + u_p$$

$$Sn + 1\ (u_{n+2} - u_{+3}) - (u_{n+4} - u_{n+5}) - \ldots - (u_{p-1} - u_p)$$

In queste formole i binomi $u_{n+1} - u_{n+2}$, $- u_{n+3} - u_{n+4}$, ecc., ed i binomi $u_{n+2} - u_{n+3}$, $- u_{n+4} - u_{n+5}$, ecc., sono quantità positive. Dunque Sp è compresa tra Sn ed $Sn+r$. In modo analogo si dimostra che Sp è ancora compresa tra Sn ed $Sn+1$ quando u_{n+1} od u_p od ambedue queste unità sono precedute dal segno —. Se dunque Sp è sempre compresa tra Sn ed $Sn+1$, e per conseguenza il valore assoluto della differenza Sp—Sn è minore di quello della differenza $Sn+1$—Sn. Ma questo è u_{n+1} e per ipotesi u_{n+1} decresce indefinitamente col crescere di n. Dunque Sp crescendo indefinitamente p, converge verso un determinato limite, quindi la serie è convergente.

— *Una serie è convergente quando, a partire da uno qualunque dei suoi termini, i termini successivi sono alternativamente positivi e negativi, ed i loro valori assoluti decrescono indefinitamente.*

Ecco un esempio: La serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{1}{n} - \ldots$$

è convergente, ed il valore assoluto dell'errore che si commette facendo soltanto la somma dei primi n termini è minore di

$$\frac{1}{n+1}$$

60. — Sia data la serie

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n +$$

si rappresenterà con k il limite a cui converge il rapporto

$$\frac{n_n + 1}{u_n}$$

quando n cresce indefinitamente. Quindi: la serie

$$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\,.\,3} + \frac{1}{2\,.\,3\,.\,4} + \dots + \frac{1}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,.\,.\,n} + \dots$$

ha per limite

$$K = \lim\left(\frac{1}{2.3.4 \dots n\,(n-1)} : \frac{1}{2.3.4 \dots n}\right) = \lim \frac{1}{n+1} = 0;$$

e per la serie

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n + \dots$$

$$K = \lim \frac{n}{n+1} = 1;$$

e per la serie

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{n} + \dots$$

$$K = \lim \frac{-n}{n+1} = -1$$

61. — Sia data la serie

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + u_{n+1} + \dots \qquad (1)$$

e si rappresenti con α un numero qualunque compreso tra il suo limite k ed 1. Il rapporto $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, convergendo verso k, è chiaro che vi sarà un valore di n tale che, per esso e per i valori maggiori, tale rapporto sarà minore di α. — Sia p questo valore; sarà

$$u_{p+1} < \alpha\, n_p,$$
$$u_{p+2} < \alpha\, u_{p+1} < \alpha^2\, u_p,$$
$$u_{p+3} < \alpha\, u_{p+2} < \alpha^3\, u_p,$$
$$\dots\dots\dots$$

onde $u_{p+1} + u_{p+2} + u_{p+3} + \ldots < u_p (\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \ldots)$. Ma la serie $\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots$ è convergente dunque è convergente anche la serie $u_{p+1} + u_{p+2} + u_{p+3} + \ldots$, e e per conseguenza anche la serie (1).

— *Una serie è convergente quando il valore assoluto del limite k è minore dell'unità.*

Si può dimostrare anche inversamente che

— *Una serie è convergente quando il valore assoluto del limite k è maggiore dell'unità.*

Siano in questo caso $u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots u_n$ valori assoluti dei termini della serie. Essendo il valore assoluto di k maggiore di 1, vi sarà un valore di n tale che, per esso e per i valori maggiori, il rapporto $\frac{u_n + 1}{u_n}$ sarà maggiore di 1; ma se

$$\frac{u_n + 1}{u_n} > 1 \text{ sarà } u_{n+1} > u_n$$

Dunque, crescendo indefinitamente n, i valori assoluti dei termini crescono, quindi, come abbiamo dimostrato più sopra, la serie è divergente, come si voleva dimostrare.

62. — Al posto delle quantità $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, \ldots$ nella serie (1) del paragrafo precedente, noi possiamo porre delle funzioni, otterremo così una *serie di funzioni*, così, ad es.

$$f(x) + h f^{1}(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f^{\mathrm{II}}(x) + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f^{\mathrm{III}}(x) + \ldots$$

e l'algebra ci insegna che codesta serie di funzioni può essere espressa simbolicamente dalla formula $f(x + h)$. Dimostreremo ora il seguente teorema più generale e che è noto sotto il nome di *teorema di Taylor*. — *Se la funzione $f(x)$ e le sue derivate sino alla nesima inclusa, sono continue per i valori della variabile da x ad $x + h$, si ha*

$$f(x + h) = f'(x) + \frac{e^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \frac{h}{1.2.3} f'''(x) + \ldots$$

$$+ \frac{h^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)} f^{(n1)}(x) + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} f^{(n)}(x + \theta h)$$

essendo — θ compreso tra 0 ed 1.

Cerchiamo ora di dimostrare questo importantissimo teorema. Anzitutto occorre dimostrare che essendo x ed h due quantità date qualunque, e stando le ipotesi fatte, il resto, che si rappresenterà con R, risultante dalla sottrazione dei primi n termini della serie

$$f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \frac{h}{1.2.3} f'''(x) + ..$$

da $f(x+h)$, è uguale ad $\frac{h^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(x + \theta h)$ essendo

essendo θ un numero compreso fra 0 ed 1.

Si ponga

$$R = \frac{h}{1.2.3\ldots n} P$$

essendo P una quantità da determinarsi il cui valore generale dipenderà dai valori delle quantità x, h ed n, e si rappresenti $x+h$ con X; sarà $h = X - x$ ed

$$f(X) - f(x) - (X-x) f(x)' \frac{(X-x)^2}{1.2} f''(x) - \frac{(X-x)}{1.2.3} f'''(x) -$$

$$- \ldots - \frac{(X-x)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n\text{-}1)} f^{(n-1)}(x) - \frac{(X-x)}{1.2.3\ldots n} P = O.$$

Se nei primo membro di quest'ultima eguaglianza si pone z in luogo di x, e se si rappresenta con $\varphi(x)_z$ il risultato di tale sostituzione, si ha

$$\varphi(z) = f(x) - f(z) - (X-z) f'(z) - \frac{(X-z)^2}{1.2} f''(z) - \ldots$$

$$- \frac{(X-z)^{n-1}}{1.2.3,..(n-1)} f^{(n-1)}(z) - \frac{(X-z)^n}{1.2.3\ldots n} P,$$

$$\varphi^1(x) = - \frac{(X-z)^{(n-1)}}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{(n)}(z) + \frac{(X-z)^{(n-1)}}{1.2.3\ldots(n-1)} P,$$

e si ha inoltre che l'equazione $\varphi(z) = 0$ è soddisfatta da $z=x$ e da $z=X$. Di più, osservando le funzioni $\varphi(z)$ e $\varphi^1(z)$, si vede che, per le ipotesi fatte, nell'enunciato teorema, esse sono continue per i valori di z da $z=x$ a $z=X$. Dunque, per quanto si disse nel precedente paragrafo, tra x ed X vi deve essere una radice dell'equazione $\varphi^1(z) = 0$, ossia dell'equazione.

$$P - f^{(n)}(z) = 0$$

da cui, se si rappresenta con $x + \theta(X - x)$ tale radice, θ essendo un numero compreso fra 0 ed 1, si ha

$$P - f^{(n)}[x + \theta(X-x)] = 0$$

Da questa equazione deriva

$$P = f^{(n)}\,[x + \theta\,(X - x) = f^{(n)}\,(x + \theta\,h),$$

e per conseguenza

$$R = \frac{h}{1\,.\,2\,,\,3\,.\,.\,.\,n} f^{(n)}\,(x + \theta\,h)$$

In quest'ultima espressione $f\,(x + \theta\,h)$ vien detto *termine complementare della formola di Taylor,* e si approssima indefinitamente a 0 con il crescere di n.

Ora, se con x si riguarda una variabile indipendente, e e si rappresenta $f\,(x)$ con y, h con dx, e $f^{(n)}\,(x + \theta\,h)\,dx^n$ con $(d^n\,y)$, si ha

$$f\,(x + d\,x) = y + d\,y + \frac{1}{1\,.\,2} d^2 y + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} d^3\,y + \ldots$$

$$+ \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,(n-1)} d^{n-1} y + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,n} (d^n y)_{x + \theta\,d\,x}\,.$$

63. — Il termine complementare P è anche eguale ad

$$\frac{h^n}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,(n-1)} (1-\theta)^{n-1}\,f^{(n)}\,(x + \theta\,h)$$

essendo θ compreso tra 0 ed 1.

Ciò può essere chiarito, ed a tal fine, si ponga

$$R = h\,P$$

essendo P una quantità da determinarsi, il cui valore generale dipende dai valori delle quantità x, h, ed n, e si rappresenti ancora $x + h$ con X; sarà

$$f\,(X) - f\,(x) - (X - x)\,f\,(x) - \frac{(X - x)}{1\,.\,2} f''\,(x) - \ldots$$

$$- \frac{(X - x)^{n-1}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,(n-1)} f^{\,(n-1)}\,(x) - (X - x)\,P = O$$

Ora, se nel primo membro di questa espressione si pone z in luogo di x, e se si rappresenta con $\varphi\,(x)$ il risultato di questa sostituzione, mentre z viene riguardata come una variabile, si ha che

$$\phi\,(x) = f\,(X) - f\,(z) - (X\,z)\,f'\,(z) - \frac{(X - z)^2}{1\,.\,2} f''\,(z) - \ldots$$

$$- \ldots \frac{(X - z)^{n1}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,(n\,1)} f^{(n-1)}\,(2) - (X\,z)\,P,$$

$$\varphi'\,(3) = - \frac{(X - z)^{n-1}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,(n\,1)} f^{(n)}\,(z) + P$$

e che l'equazione $\varphi(z)=0$ è soddisfatta da $z=x$ e da $z=X$. Di più, per le ipotesi fatte nell'enunciato teorema di Taylor, le funzioni $\varphi(z)$ e $\varphi'(z)$ sono continue per i valori di z da $z=x$ e $z=X$. Dunque fra x ed X si ha una radice dell'equazione $\varphi'(z)=0$ ossia dell'equazione.

$$P-\frac{(X-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}(z)=$$

da cui, se con $x+\theta(X-x)$ essendo, come abbiamo posto, θ un numero compreso fra 0 ed 1. si ha

$$P-\frac{[X-x-\theta(X-x)]}{1.2.2\ldots(n-1)}f^{(2)}[x+\theta(X-x)]=0$$

Da questa equazione deriva

$$P=\frac{[X-x-\theta(X-x)]^{n1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}[x+\theta(X-x)]$$

$$=\frac{h^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n\,1)}f^{(n)}(x+\theta h)$$

e per conseguenza

$$R=\frac{h}{1.2.3\ldots(n\,1)}(1-\theta)^{n-1}f^{(n)}(x+\theta h)$$

64. — Se nell'eguaglianza data dal teorema di Taylor si pone $x=\text{D}$, si ha

$$f(x)=f(0)+hf'(0)+\frac{h^2}{1.2}f''(0)+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(0)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(0)+\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}\theta h$$

In questa eguaglianza si può sostituire la lettera x con la lettera z; quindi ne risulta il seguente teorema che è noto sotto il nome di *teorema di Mac Laurin* :

— *Se la funzione $f(z)$ e le sue derivate fino alla nesima inclusivamente sono continue per i valori della variabile da 0 ad x, si ha*

$$f(x)=(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(0)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots,(n\,1)}f^{(n-1)}(0)+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(\theta x)$$

essendo θ un numero compreso tra 0 ed 1. —

65. — Il termine complementare della formola di Mac

Laurin è ugunle a quello della formola di Taylor, e cioè è uguale a

$$\frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n\ 1)} (1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(\theta x) \qquad (1)$$

essendo θ un numero compreso fra 0 ed 1.

La serie di Mac Laurin

$$f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0) + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(0) + \ldots$$

è talvolta convergente, ma non ha per somma $f(x)$. Allora con il crescere di n il resto della serie converge verso lo stesso limite il termine (1) ossia il termine complementare, per conseguenza questo è uguale al resto della serie.

66. — Sia

$$f(x) = (1+x)^m$$

Per questa funzione (se, nel caso dell'esponente frazionario, si considerano solamente i valori aritmeticiosi $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, ecc., la serie di Mac Laurin è

$$1 + m x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{m(m-1)(m\ 2)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} x^n + \ldots$$

Per questa serie il limite k è $= -x$. Quindi la serie è divergente quando il valore assoluto di x è > 1, convergente è invece qunado tale valore è < 1. Per riconoscere se in questo caso la serie ha per somma $(1+x)^m$, si considera prima il caso di $x > 0$, poi il caso di $x < 0$.

Consideriamo questi due casi:

1.° Caso. Essendo

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$$

il termine complementare è

$$R = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} x^n (1+\theta x)^{m-n}$$

a cui si può dare la forma

$$R = \frac{m(m-1)\ (m-2)(m\ n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} x^n \left(\frac{1}{1+\theta x}\right)^{n-m}$$

In questa formola il fattore

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n},$$

col crescere di n, converge verso il limite zero, poichè è il termine generale della serie (1) del paragrafo precedente, la quale è convergente. Il fattore

$$\left(\frac{1}{1+\theta x}\right)^{n-m}$$

converge verso un limite finito, perchè, in questo caso, è sempre minore di 1, e, qualunque sia m, vi è $\frac{1}{1+\theta x}$ sempre un valore di n tale che, per esso e per i valori maggiori, l'esponente n-m è positivo. Un fattore di R convergendo verso il limite zero e l'altro convergendo verso un limite finito, R converge verso il limite zero, da cui risulta che la serie ha per somma $(1+x)^m$.

2.° *Caso*. In questo caso il termine R è ancora eguale a

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots(n+1)} x^n (1-\theta)^{n-1} (1+\theta^x)^{m-n}$$

Qui, il fattore

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m\,n+1)}{1.2.3\ldots(n-1)} x^n$$

col crescere di n, converge verso il limite zero, perchè, se lo si riguarda come un termine generale di una serie, questa è convergente. Se nel fattore $(1-\theta)^{n-1}(1+\theta\ x)^{mn}$ a cui si può dare la forma $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$ $(1+\theta x)^{m-1}$, se si pone $x - - z$, si ha

$$\left(\frac{1-\theta}{1-\theta z}\right)(1-\theta z)^{m-1}$$

in questa espressione $\frac{1-\theta}{1-\theta z}$ è sempre minore di 1; quindi col crescere di n, la potenza $\left(\frac{1-\theta}{1-\theta z}\right)$ converge verso un limite finito. Inoltre il fattore $(1-\theta z)^{m-1}$ è minore di 1 se l'esponente m-1 è positivo, ed è sempre minore di

$$\frac{1}{(1-z)^{1}{}_{-}{}^{m}}$$

se $m-1$ è negativo.

Dunque con il crescere di n, il valore assoluto della formula (1) converge verso un limite finito. Un fattore di R convergendo verso il limite zero, mentre un altro converge verso un limite finito, R converge verso il limite zero, da cui risulta che la serie ha per somma

$$(1+x)^n.$$

67. — Cercheremo ora di chiarire quanto sino qui si è detto, con qualche esempio in segno d'applicazione.

(1) Svolgere in serie la funzione $\frac{1}{1+x}$, quando x è compreso tra 1 e —1.

Abbiamo che

$$\frac{1}{1+x} - (1+x)^{-1}$$

e l'algebra insegna

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots$$

(2) Svolgere in serie la funzione $\sqrt{1+x}$, quando x è compreso tra 1 e —1.

Abbiamo che

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

e sappiamo che

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \ldots$$

(3) Svolgere in serie la funzione $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$, quando x è compresa tra 1 e —1.

Abbiamo che

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

da cui

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \ldots$$

(4) Svolgere la funzione

$$f(x) = e^x$$

occorre qui applicare la formula di Mac Laurin. In questo caso

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = 1$$

quindi la serie è

$$1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} + \ldots$$

(5) Svolgere la funzione

$$f(x) = \text{sen } x.$$

Occorre anche qui applicare la formula di Mac Laurin. In questo caso

$$f(x) = \text{sen } x, \; f^{I}(x) = \cos x, \; f^{II}(x) = -\text{sen } x,$$
$$f^{III}(x) = -\cos x, \; f^{IV}(x) = \text{sen } x, \; f^{V}(x) = \cos x,$$
$$f^{VI}(x) = -\text{sen } x, \; f^{VII}(x) = -\cos x$$

quindi la serie richiesta è

$$x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots$$

(6) Svolgere la funzione

$$f(x) = \cos x.$$

Anche qui occorre l'applicazione della serie di Mac Laurin, in questo caso

$$f(x) = \cos x, \; f^{I}(x) = -\text{sen } x, \; f^{II}(x) = -\cos x,$$
$$f^{III}(x) = \text{sen } x. \; f^{IV}(x) = \cos x, \; f^{V}(x) = -\text{sen } x,$$
$$f^{VI}(x) = -\cos x, \; f^{VII}(x) = -\text{sen } x$$

quindi la serie richiesta è

$$1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$$

(7) Svolgere la funzione

$$f(x) = \text{arc sen } x.$$

Se si volesse applicare anche in questo caso la formola di Mac Laurin, come per i casi precedenti, i calcoli riuscirebbero troppo lunghi, perciò si procederà con un altro metodo che qui riuscirà più conveniente.

La derivata di arc sen x, è, come sappiamo

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

che si può svolgere in serie ordinata secondo le potenze intere e positive di x, quando $x^2 < 1$, ossia quando x è compreso tra 1 e -1, si potrà pure svolgere arc sen x, quando anche in questo caso x è compreso tra 1 e -1. Si rappresenti questa serie con

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A^3 x_3 + A_4 x^4 + \ldots \qquad (1)$$

La sua derivata dovrà essere identicamente eguale alla serie che rappresenta $(1-x^2)-\frac{1}{2}$; quindi si avrà

$$A_1+2A_2x+3A_3x^2+4A_4x^4+5A_5x^5+\ldots$$
$$=\pm\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\ldots\right)$$

nel cui secondo membro si dovrà porre il segno + o — secondo che il valore di arc sen x che si vuole considerare sia il coseno positivo oppure negativo.

I due membri di tale eguaglianza sono identicamente eguali solo quando in essi le derivate delle medesime potenze di x sono eguali. Perciò

$$A_1=\pm 1,\ 2A_2=0,\ 3A_3=\pm\frac{1}{2},\ 4A_4=0,$$
$$5A_5=\pm\frac{1.3}{2.4},\ 6A_6=0,\ 7A_7=\pm\frac{1.3.5}{2.4.6},\ldots$$

onde

$$A=\pm 1,\ A_2=0,\ A_3=\pm\frac{1}{2}.\frac{1}{3},\ A_4=0$$
$$A_5=\pm\frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{5},\ A_6=0,\ A_7=\pm\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1}{7},\ldots$$

sostituendo questi valori nella serie (1), essa diviene

$$A_0\pm\left(x+\frac{1}{2}.\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}.\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{x^7}{7}+\ldots\right)$$

In questa serie il primo termine, Ao, non è determinato. Tale indeterminazione proviene da questo che la funzione arc sen x, per ogni valore di x, ha un numero infinito di valori. Se di questi valori si considera quello che è da $-\frac{\pi}{1}$ a $\frac{\pi}{2}$, allora il coseno è positivo e ad $x=o$ deve corrispondere arc sen $x=o$, per cui

$$\text{arc sen}\, x=x+\frac{1}{2}.\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}.\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.5}\frac{x^7}{7}+\ldots$$

Ed in generale, se si rappresenta con m un numero intero qualunque, positivo o negativo o nullo, si ha

$$\text{arc sen}\, x=m\pi+(-1)^m\left(x+\frac{1}{2}.\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}.\frac{x^5}{5}+\ldots\right).$$

(8) Svolgere la funzione

$$f\,(x)=\text{arc tang}\, x.$$

Anche qui bisogna mantenere lo stesso procedimento tenuto nell'esempio precedente. La sua derivata

$$\frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$$

può essere svolta in serie, quando $x^2 < 1$, ossia quando x è compreso fra 1 e -1, secondo le potenze intere e positive di x, con ciò anche la funzione propostaci potrà, quando anche qui x è compreso tra 1 e -1, essere svolta in serie ordinata nello stesso modo. Si rappresenti questa serie con

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + A_5 x^5 + \ldots$$

Per determinare i coefficienti Ao, A_1, A_2, A_3, ... basta farne la derivata ed eguagliarla alla serie rappresentante $(1+x^2) - 1$. Si ha così

$$A^1 + 2\,A_2 x + 3\,A_3 x^2 + 4\,A_4 x^3 + 5\,A_5 x^4 + 6\,A_6 x^5 +$$
$$+ 7\,A_7 x^6 + \ldots + nA_n x^n =$$
$$= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$$

onde, eguagliando i coefficienti delle medesime potenze di x nei due membri,

$$A_1 = 1, 2\,A_2 - 0, 3\,A_3 = -1, 4\,A_4 = 0, 5\,A_5 - 1$$
$$6\,A_6 = 0, 7\,A_7 = -1, \ldots,$$

e quindi

$$A_1 = 1, A_2 = 0, A_3 = -\frac{1}{3}, A_4 = 0, A_5 = \frac{1}{5}$$

$$A_6 = 0, A_7 = -\frac{1}{7}, \ldots$$

Sostituendo questi valori nella serie (1) si ottiene la serie cercata

$$A_0 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

In questa serie il primo termine non è determinato, chè la funzione arc tang x, per ogni valore di x, ha un numero infinito di valori. Se di questi valori si considera quello che è fra $-\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{4}$, ad $x = o$ deve corrisvondere arc tang $x = o$, quindi

$$\text{arc tang}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

In generale, se si rappresenta con m un numero intero qualunque, si ha

$$\text{arc tang}\, x = m\pi + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

68. —

ESERCIZI.

(1) $y = \sqrt{(a^2 + x^2)^3}$ per $x^2 < a^2$;

$$a^3 + \frac{3}{2} a x^2 + \frac{3 \,.\, 1}{2 \,.\, 4} \cdot \frac{x^4}{a} - \frac{3 \,.\, 1 \,.\, 1}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} \cdot \frac{x^6}{a^3} +$$

$$+ \frac{3 \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8} \cdot \frac{x^8}{a^5} - \frac{1 \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8 \,.\, 10} \cdot \frac{x^{10}}{a^7} + \dots$$

(2)

$$y = \frac{a^3}{(a-x)^3}, \text{ per } x < a3;$$

$$1 + \frac{1}{3} \cdot + \frac{x}{a} + \frac{3 \,.\, 4}{1 \,.\, 2} \cdot \frac{x^2}{a^2} + \frac{3 \,.\, 4 \,.\, 5}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \cdot \frac{x^3}{a^3} +$$

$$+ \frac{3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} \cdot \frac{x^4}{a^4} + \dots$$

(3)

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{3 - 7_x}}, \text{ per } x < \frac{3}{7};$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} x + \frac{1 \,.\, 4}{3 \,.\, 6} \left(\frac{7}{3}\right)^2 x^2 + \frac{1 \,.\, 4 \,.\, 7}{3 \,.\, 6 \,.\, 9} \left(\frac{3}{7}\right)^3 x^3 + \right. \left. + \frac{1 \,.\, 4 \,.\, 7 \,.\, 10}{3 \,.\, 6 \,.\, 9 \,.\, 12} \left(\frac{3}{7}\right)^4 x^4 + \dots \right\}$$

(4

$$y = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \text{ per } x < a;$$

$$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \frac{a+x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 1 + \frac{x}{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{a^3} +$$

$$+ \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} \cdot \frac{a^4}{x^4} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} \cdot \frac{x^6}{a^6} + \dots$$

(5

$$x = \frac{1}{\sqrt{(a^2 - a x)^3}} \text{ per } x < a;$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{a^3}} \left(1 + \frac{3}{10} \cdot \frac{x}{a} + \frac{3 \,.\, 13}{10 \,.\, 20} \cdot \frac{x^2}{a^2} + \frac{3 \,.\, 13 \,.\, 23}{10 \,.\, 20 \,.\, 30} \cdot \frac{x^3}{a^3} + \dots \right)$$

(6) $$y = \log 2,\ y = \log 3,\ y = \log 5;$$

$$\log 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\,.\,3^3} + \frac{1}{5\,.\,3^5} + \ldots\right)$$

$$\log 3 = \log 2 + 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3\,.\,5^3} + \frac{1}{5\,.\,5^5} + \ldots\right)$$

$$\log 5 = 2\log 2 + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3\,.\,9^3} + \frac{1}{5\,.\,3^5} + \ldots\right)$$

(7) $$y = \log_6 180;$$

$$\frac{2\log 2 + 2\log 3 + \log 5 + \ldots}{\log 2 + \log 3 + \ldots}$$

CAPITOLO SETTIMO.

Espressioni indeterminate.

69. — Quando una funzione di una variabile indipendente, $f(x)$, per un valore determinato di x, prende una delle forme

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0^0, 1^{+\infty}, \infty^0,$$

si dice *espressione indeterminata*, e chiamasi *valore vero di* $f(x)$ il limite verso cui tende il valore di $f(x + \mathrm{h})$ per h convergente indefinitamente a zero.

70. Sia $f(x) = \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, ove per un valore determinato di x, $\theta(x) = 0$ e $\psi(x) = 0$. Pongasi eguale ad a codesto valore di x, si avrá

$$f(a) = \frac{0}{0}$$

ove la funzione prende il valore indeterminato di zero sopra zero.

Cerchiamo il valore vero di questa funzione. Abbiamo anzitutto che se, facendo le successive derivate di $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ e sostituendovi a invece di x, si trova che le derivate $\varphi^{(n)}(x)$ e $\psi^{(n)}(x)$, sono le prime che non divengono nulle contemporaneamente per $x = a$ e che, per questo valore di x, tali derivate sono continue, si potrà immaginare una quantità h siffattamente piccola che si abbia per il teorema di Taylor

$$\varphi(a+h)=\varphi(a)+h\varphi'(a)+\ldots+$$
$$+\frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\psi^{(n-1)}(a)+$$
$$+\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^{(n)}(a+\theta h)$$
$$\psi(a+h)=\psi(a)+h\psi'(a)+\ldots+$$
$$+\frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\psi^{(n-1)}(a)+$$
$$+\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}\psi^{(n)}(a+\theta' h)$$

Allora, essendo per ipotesi

$$\varphi(a)=\varphi'(a)=\varphi''(a)=\ldots=\varphi^{(n-1)}(a)=0$$
$$\psi(a)=\psi'(a)=\psi''(a)=\ldots=\psi^{(n-1)}(a)=0$$

sarà

$$f(a+h)=\frac{\varphi^{(n)}(a+\theta h)}{\psi^{(n)}(a+\theta^7 h)}$$

Questa eguaglianza dimostra che il limite verso cui tende il fattore $f\ (a+h)$ per h convergente indefinitamente a zero, è uguale a quello verso cui converge il quoziente

$$\frac{\varphi^{(n)}(a+\theta' h)}{\psi^{(n)})a+\theta\ h)}$$

essia che

$$f(a)\ \frac{\varphi^{(n)}(a)}{\psi^{(n)}(a)}$$

71. — Sia ora $f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ ove $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ sono funzioni che diventano entrambe infinite per $x=$a, abbia

$$f(a)=\frac{\infty}{\infty}$$

Sia il limite della frazione $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\dfrac{1}{\psi(x)}}{\dfrac{1}{\varphi(x(}}$$

il termine a sinistra per $x=a$ diviene $\dfrac{\dfrac{1}{\infty}}{\dfrac{1}{\infty}}$ sappiamo che

$\dfrac{1}{\infty}=0$, quindi per la regola precedente il limite è

$$\frac{-\dfrac{\psi'(a)}{[\psi(a)]^2}}{-\dfrac{\varphi'(a)}{[\varphi(a)]^2}}\;\theta\;\left\{\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}\right\}^2\frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)}$$

quindi

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}=\left\{\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}\right\}^2\frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)}$$

Onde la funzione $f(x)$ per $x=a$ eguale a

$$\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$$

72. — Sia ora $f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$, ove $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ diventino infinite per un valore a di x, avremo che per $x=a$

$$\varphi(x)-\psi(x)=\infty-\infty$$

Cerchiamo il valore vero di quest'espressione. Si pongo

$$y=\varphi(x)-\psi(x)$$

allora si ha

$$e^y=e^{\varphi(x)-\psi(x)}$$

$$=\frac{e^{\varphi(x)}}{e^{\psi(x)}}$$

da cui per $x=a$, l'ultima formula si trasforma nella forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$, e noi sappiamo svolgere una simile espressione.

73. — Sia ancora $f(x)=\varphi(x)\,.\,\psi(x)$ ove $\varphi(x)$ diviene 0 per $x=a$ e $\psi(x)$ diviene ∞ per lo stesso valore x. Per un tale valore di x la funzione $f(x)$ prende la forma

$$f(x)=0+\infty$$

si cerchi il limite di $\varphi(x) \cdot \psi(x)$ quando x converge indefinitamente ad a;

$$\varphi(x) \cdot \psi(x) = \frac{\varphi^{(x)}}{\frac{1}{\psi^{(x)}}}$$

e siccome $\frac{\psi(x)}{1}$ per $x = a$ prende la forma di $\frac{1}{\infty} = 0$, la funzione si riduce alla forma più semplice di $\frac{0}{0}$, anche in questo caso siamo in grado di trovare il suo limite, con le formule note.

Se per es. si ha l'espressione $x^m (\log x)^n$ ove m ed n sono positivi, essa prende la forma $0 \times \infty$ quando $x = o$. Si procede come abbiamo indicato e s'ottiene

$$\frac{x^m}{\frac{1}{\log (x)^m}}$$

che prende la forma $\frac{0}{0}$ quando $x = 0$.

74. — Siano $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ due funzioni variabili di una stessa variabile indipendente x e supponiamo che

$$f(x) = [\varphi(x)]^{\psi(x)}$$

prenda una delle forme indeterminate

$$0^0, \infty^0, 1^\infty;$$

si cerca allora il valore limite di questa espressione.

Osservando che

$$\varphi(x) = e^{\log \varphi(x)}$$

abbiamo

$$\{\varphi(x)\}^{\psi(x)} = e^{\psi(x) \log \varphi(x)}$$

Ora $\psi(x) \log \varphi(x)$ in ciascuno dei casi proposti prende la forma $0 \times \infty$ e che noi sappiamo già, per il paragrafo precedente, come si svolge. Necessita un esempio, sia

(1) $$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen} x} = e^{\operatorname{sen} x \log x}$$

qui osserveremo che

$$\operatorname{sen} x \log x = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot x \log x$$

La quantità h potendosi supporre piccola a piacere arbitrariamente, si può svolgere $\sqrt{a+h}$ in serie ordinata secondo le potenze intere e positive di h. Effettuando questo svolgimento, si ha

$$f(a+h)\ \frac{\sqrt{a}\left(1+\frac{h}{2}+\ldots\right)-\sqrt{a}+\sqrt{h}}{\sqrt{2ah+h^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{h}+\frac{1}{2}\frac{h}{\sqrt{a}}\cdots}{\sqrt{h}\,\sqrt{2a+h}}=\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{h}{a}}\cdots}{\sqrt{2a+h}},$$

da cui si scorge che, quando h converge a zero, $f(h+a)$ converge verso il limite $\frac{1}{\sqrt{2a}}$, e per conseguenza

$$f(a)=\frac{1}{\sqrt{2a}}$$

Similmente si poteva giungere al medesimo risultato semplificando l'espressione risultante dalla divisione della derivata del numeratore per quella del denominatore, in modo da ottenere

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x-a}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}}$$

che può essere scritta

$$\frac{\sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{x^2-a\,x^2}}{2\,x\sqrt{x}}$$

ove ponendo $x=a$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2a}}$$

come precedentemente si è fatto.

(5) Determinare il valore vero per $x=\infty$, della funzione

$$f(x)=\frac{5^{2x}}{e^{x2}}$$

Come per l'esempio precedente, anche in questo caso, le derivate del numeratore e del denominatore prendono valori infinitamente grandi per $x = \infty$. Per trovare il valore vero della frazione cerchiamo il suo logaritmo neperiano, si ha

$$\log f(x)\ 2x \log 5 - x^2 = x\,(2 \log 5 - x)$$

ove per $\log f(x) = \infty$, si ha $\log f(\infty) = -\infty$. Risulta essere

$$f(\infty) = e^{\infty} = 0$$

(2). Determinare il valore vero, per $x = 0$, della funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2}$$

Dividendo, come al solito, la derivata del numeratore per quella del denominatore si ha la frazione $\frac{e^x}{2x}$ che, per $x = \infty$, diviene della forma $\frac{\infty}{\infty}$. Desiderando ancora la derivata del numeratore di questa frazione per quella del denominatore, si ha $\frac{e^x}{2}$ che è eguale ad ∞ per $x = \infty$. Dunque

$$f(\infty) - \infty.$$

(3). Vogliasi il valore vero, per $x = \infty$, della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 2\cos x}{x^2 + 2\,\mathrm{sen}\,x}$$

Per $x = \infty$ le funzioni sen x e cos x hanno valore indeterminato, non maggiore di 1 nè minore di -1; quindi $a^2 - 2\cos x = \infty$, $x^2 + 2\,\mathrm{sen}\,x = \infty$, quindi

$$f^1(x) = \frac{\infty}{\infty}$$

Se si addiziona ancora la derivata del numeratore di questa frazione per quella del denominatore si ottiene la frazione $\frac{1 + \cos x}{2 - \mathrm{sen}\,x}$ che, per $x = \infty$, è pienamente determinata. Bisogna quindi ricorrere ad altre considerazioni per trovare il chiesto valore.

Alla funzione si può dare la forma

$$\frac{1 - \frac{2\cos x}{x^2}}{1 + \frac{2\,\mathrm{sen}\,x}{x^2}}$$

Per $x = \infty$ si ha $\frac{2 \cos x}{x^2} = 0$ e $\frac{2 \operatorname{sen} x}{x^2} = 0$. Dunque

$$f(\infty) = 1$$

(4). Determinare il valore vero, per $x = a$, della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

In questo caso tutte le derivate sia del numeratore che del denominatore per $x = a$ prendono valori infinitamente grandi.

Si ponga $a + h = x$, si avrà

$$f(a+h) = \frac{\sqrt{a-h} + \sqrt{a} + \sqrt{h}}{\sqrt{2ah + h^2}}$$

(6). Determinare, per $x = 0$, il valore vero della funzione

$$f(x) = \frac{x\sqrt{\cos x}\,(x + 2e^x)}{x + \operatorname{tang} x}$$

Qui, per abbreviare i calcoli, conviene osservare che la funzione data può essere scritta sotto la formula

$$\frac{x}{x + \operatorname{tang} x} \sqrt{\cos x}\,(x + 2e^x)$$

e che, per $x = 0$, il fattore

(1) $$\frac{x}{x + \operatorname{tang} x}$$

prende la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, mentre il prodotto

$$\sqrt{\cos x}\,(x + 2e^x)$$

diviene uguale a 2, per cui basta cercare il valore vero di (1) e poi moltiplicarlo per 2. Dividendo la derivata del numeratore di questa frazione per quella del denominatore, si ha la frazione

$$\frac{1}{2 + \operatorname{tang}^2 x}$$

che, per $x = 0$, diviene $\frac{1}{2}$. Dunque

$$f(0) = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

75. — Ed ora daremo qualche esempio sulle espressioni della forma $\frac{\infty}{\infty}$.

(1) Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{1 + \tanh x}{x^2 \operatorname{tang} x}$$

che per $x = \frac{\pi}{2}$ prende la forma di $\frac{\infty}{\infty}$. Per trovarne il valore vero dividasi la derivata del numeratore per quella del denominatore; si avrà

$$\frac{\frac{x^2}{\cos^2 x} + 2x \operatorname{tang} x}{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

che, per $x = \frac{\pi}{2}$, prende ancora la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Prima di fare le derivate dei termini di questa frazione conviene darle forma più semplice. Semplificandola si trova l'espressione $x^2 + x \operatorname{sen} 2x$ che, per $x = \frac{\pi}{2}$, diviene eguale a $\frac{\pi^2}{4}$. Si può conchiudere dicendo che

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$$

Si poteva ancora più sollecitamente arrivare a codesto risultato, moltiplicando il numeratore ed il denominatore di $f(x)$ per $\cos x$ e ponendo $x = \frac{\pi}{2}$ nell'espressione risultante la quale è

$$\frac{x^2 \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x}$$

che per $x=0$ diviene

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$x \log x = 0$$

da cui

$$\operatorname{sen} x \log x = 0$$

dunque

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen} x} - 1 \text{ per } x = 0$$

e per $x=a$ si ha

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen} x} = \left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tang}\frac{\pi}{2}\frac{x}{a}}$$

da cui applicando la formula (1) abbiamo

$$e^{\operatorname{tang}\frac{\pi}{2}\frac{x}{a}\log\left(2-\frac{x}{a}\right)} = e^{\frac{2}{\pi}}$$

quando $x=a$.

76. — Cerchiamo ora di applicare a qualche esempio quanto sino qui abbiamo determinato, per le espressioni indeterminate della forma $\frac{0}{0}$.

(1) Debbasi trovare il valore vero della funzione

$$f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$$

per $x=2$, ove prende la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Dividendo la derivata del numeratore per quella del denominatore si ha la frazione $\frac{3x^2}{1}$ che per $x=2$ prende il valore 12.

Dunque, in questo caso

$$f(2)=\text{-}2.$$

Però il valore vero di questa funzione poteva essere trovato anche con un altro metodo, e ciò osservando che

$$\frac{x^3-8}{x-2}\, x^2+2x+4$$

espressione che, per $x=2$, prende ugualmente il valore 12.

(2) Determinare il valore vero della funzione

$$f(x) = \frac{x^4+a\,x^3-3\,a^2x^2-a^3x+2\,a^4}{x^4-a\,x^3-13\,a^2x^2+25\,a^3x-12\,a^4}$$

per $x=a$, che prende la forma $\frac{0}{0}$.

Dividendo la derivata del numeratore per quella del denominatore si trova la frazione

$$\frac{4\,x^3+3\,a\,x^2-6\,a\,x^2-a^3}{4\,x^3-3\,a\,x^2\,26\,a\,x^3-25\,a^3}$$

che, per $x=a$, prende ancora la forma $\frac{0}{0}$

Formando ancora le derivate del numeratore e del denominatore di questa frazione, e dividendo la prima per la seconda, si ha la frazione

$$\frac{12\,x^2 + 6\,a\,x - 6\,a^2}{12\,x^2 - 6\,a\,x - 26\,a^2}$$

che per $a = x$, prende il valore di $-\frac{3}{5}$. Dunque

$$f(a) = -\frac{3}{5}$$

(3) Trovare il valore vero della funzione

$$f(x) = \frac{x - \sqrt{2\,x^2 - a^2}}{2\,x - \sqrt{5\,x^2 - a^2}}$$

per $x = a$.

La derivata del numeratore è $1 - \frac{2\,x}{\sqrt{2\,x^2 = a^2}}$ che, per $x = a$, acquista il valore di -1. Quella del denominatore è eguale a $2 - \frac{5\,x}{\sqrt{5\,x^2 - a^2}}$ che per $x = a$, prende il valore $-\frac{1}{2}$. Dunque

$$f(a) = 2.$$

,(4) Trovare il valore vero della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + 2\,x - 3}{\sqrt[3]{x - 1}}$$

per $x = 1$.

La derivata del numeratore è $2x + 2$ che è $= 4$ per $x = 1$; quella del denominatore è $\frac{1}{3}(x - 1)$ che è $= \infty$ per $x = 1$.

Dunque $$f(1) = 0.$$

(5) Trovare, per $x = 0$, il valore vero della funzione

$$f(x) = \frac{\log \cos x}{x^3}$$

Dividendo la derivata del numeratore per quella del denominatore, si ottiene la frazione $\frac{-\operatorname{tang} x}{3\,x^2}$ che per $x = 0$ prende la forma $\frac{0}{0}$. Dividendo ancora la derivata del numeratore per quella del denominatore di questa frazione si trova

$$\frac{-\frac{1}{\cos^2 x}}{6\,x} = \frac{1}{6\,x\cos\ x}$$

espressione quest'ultima che, come si vede, ha valore negativo o positivo secondo che il valore di x è positivo o negativo, ed il cui valore assoluto cresce indefinitamente quando quello di x si approssima indefinitamente a zero. Dunque

$$f(0) = -\infty \text{ oppure} = \infty$$

a secondo che x, approssimandosi indefinitamente a zero, si mantiene sempre positivo o negativo.

77. — Ora chiariremo con qualche esempio quanto precedentemente abbiamo determinato per una funzione $f(x)$ che per un valore a di x prende la forma $\infty - \infty$.

(1) Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2\,x\left(e^{\pi x}+1\right)}$$

e vogliasi trovare il suo valore vero per $x=0$.

Riducendo allo stesso denominatore si ha

$$f(x) = \frac{\pi\left(e^{\pi x}-1\right)}{4\,x\left(e^{\pi x}+1\right)}$$

che per $x=0$, prende la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per trovare il valore vero di questa espressione, osserviamo che la si può scrivere

$$\frac{e^{\pi x}-1}{x} \times \frac{\pi}{4\left(e^{\pi x}+1\right)}$$

ove per $x=0$, il primo fattore diviene $\frac{0}{0}$ e l'altro $\frac{\pi}{8}$, basta quindi determinare il valore vero del primo fattore.

La derivata del numeratore è

$$\pi\,e^{\pi x}$$

la derivata del denominatore $x=1$. Dunque

$$f(0) = \pi \,.\, \frac{\pi}{8}\,\frac{\pi^2}{8}$$

(2) Sia data la funzione

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} + \log x$$

e debbasi trovare il suo valore vero per $x=0$.

La funzione (1) si può trasformare nella (2)

$$e^{\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{\log x}{e^{\frac{1}{x}}}\right) \tag{2}$$

Dividendo la derivata del numeratore per quella del denominatore della frazione

$$\frac{\log x}{e^{\frac{1}{x}}}$$

si trova

$$\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x}\,e^{\frac{1}{x}}} = -\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}$$

espressione che diviene 0 per $x=0$. Dunque

$$e^{\infty}\,(1 \pm 8) = \infty$$

(3) Determinare il valore vero, per $x=$, della funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 1 - x}$$

Sia $x = \frac{1}{y}$, si avrà da cercare il limite a cui si approssima indefinitamente il valore dell'espressione

$$\sqrt{\frac{1}{y^2} - \frac{7}{y} + 1} - \frac{1}{y} = \frac{\sqrt{1 - 7y + y} - 1}{y}$$

Dividendo, ora, la derivata del numeratore per quella del denominatore si ha ,

$$\frac{-7 + 2y}{2\sqrt{1 - 7y + y^2}}$$

che per $y=0$, acquista il valore $-\frac{2}{7}$ Dunque

$$f(\infty) = -\frac{2}{7}$$

78. — Daremo qualche esempio ora di funzioni

$$f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$$

ove per $x=a$, $\varphi(x)$ diviene eguale a 0, e $\psi(x) = \infty$

(1) Sia data la funzione

$$f(x) = (1-x) \operatorname{tang} \frac{\pi x}{2}$$

e debbasi determinare il suo valore vero per $x=1$.

Osserviamo che a questa funzione si può dare la forma

$$\frac{1-x}{\cot \frac{\pi x}{2}}$$

che per $x=1$, diviene della forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Come al solito, si divida la derivata del numeratore per quella del denominatore e semplificando il quoziente, si avrà

$$\frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi x}{2}}{\pi}$$

espressione che, per $x=1$, prende il valore $\frac{\pi}{2}$. Dunque

$$f(1) = \frac{2}{\pi}$$

(2) Sia data la funzione

$$f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

e debbasi trovare il suo valore vero per $x=0$. La funzione può essere scritta sotto la forma

$$\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$$

e con il medesimo procedimento degli esempi precedenti: dividendo la derivata del numeratore per quella del denominatore

$$\frac{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} e^{\frac{1}{x}}$$

espressione che diviene infinita quando $x=0$ Dunque

$$f(0)=\infty$$

Si poteva giungere al medesimo risultato svolgendo $e^{\frac{1}{x}}$ in serie ordinata secondo le potenze intere e positive di $\frac{1}{x}$ Si avrebbe avuto

$$f(x)=x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2\,.\,3\,x^3}+\ldots\right)=$$

$$=x+1+\frac{1}{x}+\frac{2}{2x^2}+\frac{1}{2\,.\,3\,x^3}+\ldots,$$

onde risultava ugualmente infinito il valore chiesto.

79. — Ci rimane ancora da dare qualche esempio di espressioni indeterminate delle forme 0^0, 1^∞, ∞^0, che *a priori* abbiamo già determinate.

(1) Forma 0^n.

Sia data la funzione

$$f(x)=(x-1)^{\log x}$$

il logaritmo neperiano di questa funzione è

$$\log x \log (x-1),$$

a cui si può dare la forma più conveniente

$$\frac{\log (x-1)}{\frac{1}{\log x}}$$

Quest'espressione per $x=1$ diviene $\frac{\infty}{\infty}$. Si divida la derivata del numeratore per quella del denominatore, si avrà

$$\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x\log^2 x}}=-x\frac{\log^2 x}{x-1}$$

ove il fattore a sinistra diviene $\frac{0}{0}$ epr $x=1$. Ripetendo la stessa operazione ancora una volta si ha la frazione

$$\frac{2\log x}{x}$$

che per $x=1$ diviene $=0$. Dunque

$$f\,(1)=e^0=1$$

(2) Forma $.^{\infty}$

Sia data la funzione

$$f\,(x)=(1+n)^{\frac{1}{x}}$$

che prende la forma 1^{∞} per $x=0$, si cerchi il suo valore vero. Come per l'esempio precedente, si cerchi il suo logaritmo neperiano

$$\frac{\log\,(1+x)}{x}$$

indi si divida la derivata del numeratore, della frazione ottenuta, per la derivata del denominatore, si ottiene

$$\frac{1}{1+x}$$

che per $x=0$ prende il valore 1. Dunque

$$f\;(0)=e^1=e$$

(3) Forma ∞^0.

Sia data la funzione

$$f\,(x)=(1+x^3)^{\frac{1}{1+x}}$$

che prende la forma ∞^0 per $x=\infty$, si cerchi il suo valore vero.

Come al solito, il suo logaritmo neperiano è

$$\frac{(\log 1+x^3)}{1+x}$$

poi dividendo la derivata del numeratore di questa frazione, per la derivata del suo denominatore, si ha

$$\frac{3\,x^2}{1+x^3}$$

Ripetendo la stessa operazione ancora una volta si trova

$$\frac{6\,x}{3\,x^2}=\frac{2}{x}$$

che per $x=\infty$ prende il valore 0. Dunque $\log f\,(\infty)=0$ e perciò

$$f\,(\infty)=e^0-1$$

80 **Esercizi.**

(1) Trovare, per $x=1$, il valore vero della funzoine

$$f(x)=\frac{x^3-1}{x^3+2x^2-x-2}$$

$$;f(1)=\frac{1}{2}$$

(2) Trovare, per $x=\frac{3}{2}$, il valore vero della funzione

$$f(x)=\frac{6x^2-17x+12}{8x^2-18x+9};$$

$$;f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{6}$$

(3) Trovare, per $x=a$, il valore vero della funzione

$$f(x)=\frac{x^m-a^m}{x-a};$$

$$;f(0)=m\,a^{m-1}$$

(4) Trovare, per $x=1$, il valore vero della funzione

$$f(x)=\frac{x^4-1}{x^2-1};$$

$$;f(1)=2$$

(5) Trovare, per $x=\infty$, il valore vero della funzione

$$f(x)=\frac{\log x}{x};$$

$$;f(\infty)=0$$

(6) Trovare, per $x=0$, il valore vero della funzione

$$f(x)=\frac{x\,\mathrm{sen}\,x}{x^3};$$

$$;f(0)=\frac{1}{6}$$

(7) Trovare, per $x=\infty$, il valore vero della funzione

$$f(x)=x^7.e^{-x};$$

$$;f(\infty)=0$$

(8) Trovare, per $x=1$, il valore vero della funzione

$$f(x)=\frac{x^x-x}{1-x+\log x};$$

$$;f(1)=-2$$

(9) Trovare, per $x=0$, il valore vero della funzione

$$f(x)=\frac{e^x\,2x-e^{-x}}{x-\operatorname{sen} x}\,;$$

$$;f(0)=2$$

(10) Trovare, per $x=\infty$, il valore vero della funzione

$$f(x)=\frac{e^x}{x}\,;$$

$$;f(\infty)-\infty$$

(11) Trovare, per $x=0$, il valore vero della funzione

$$f(x)=\frac{\sec x}{x}-\cot x\,;$$

$$;f(0)=0$$

(12) Trovare, per $x=a$, il valore vero della funzione

$$f(x)=\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{a}}{x-a}\,;$$

$$;f(a)=\frac{1}{5\sqrt{x^4}}$$

(13) Trovare, per $x=0$, il valore vero della funzione

$$f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}\log(1+x)}\,;$$

$$;f(0)=2$$

(14) Trovare, per $x=\infty$, il valore vero della funzione

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^3+2x+7}}{x+1}\,;$$

$$;f(\infty)=\infty$$

(15) Trovare, per $x=\infty$, il valore vero della funzione

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^3+5x+1+2x}}{\sqrt[4]{5x^4+3x+1}+\sqrt{x^2+1}}\,;$$

$$;f(\infty)=\frac{3}{1+\sqrt[4]{5}}$$

(16) Trovare, per $x=1$, il valore vero della funzione

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{2x+6}-\sqrt{0x+1}+\sqrt[4]{5x-1}-\sqrt[5]{20x+12}}{x^2+1+\sqrt{x^3+1}-\sqrt[3]{63x+1}}$$

$$;f(1)=\frac{3\sqrt{2}-4}{69}$$

(17) Trovare, per $x=0$, il valore vero della funzione

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} n x - n x \cos n x}{2 x^2 \operatorname{sen} n x};$$

$$; f(0) - \frac{n^2}{6}$$

(18) Trovare, per $x=1$, il valore vero della funzoine

$$f(x) = \left(x^2 + 2x - 3\right)^{x-1}$$

$$; f(1) = 1$$

(19) Trovare, per $x=0$, il valore vero della funzione

$$f(x) = \frac{a^x - h^x}{x};$$

$$; f(0) = \log \frac{h}{a}$$

(20) Trovare, per $x=0$, il valore vero della funzione

$$f(x) = \frac{x^5 + 3x^2 + 4x + 1}{7x^5 + x^4 + x^3};$$

$$; f(0) = \frac{1}{7}$$

(21) Trovare, per $x = \frac{\pi}{1}$, il valore vero della funzione

$$f(x) = \frac{1 - \operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x - 1};$$

$$; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

(22) Trovare, per $x=0$, il valore vero della funzione

$$f(x) = \cos(x)^{\frac{1}{x}};$$

$$; f(0) = 1$$

(23) Trovare, per $x=0$, il valore vero della funzione

$$f(x) = \frac{\cos x - \cos 2x}{\cos x - \cos 3x};$$

$$; f(0) = \frac{3}{8}$$

(24) Trovare, per $x=1$, il valore vero della funzione

$$f(x) = \frac{\log x}{x - 1};$$

$$; f(1) = 1$$

(25) Trovare, per $x = \infty$, il valore vero della funzione

$$f(x) = \frac{x + \cos x}{x - \operatorname{sen} x};$$

$$; f(\infty) = 1$$

(26) Trovare, per $x = \infty$, il valore vero della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 1} - x;$$

$$; f(\infty) = 0$$

(27) Trovare, per $x=0$, il valore vero della funzione

$$f(x) = x^x;$$

$$; f(0) = 1$$

(28) Trovare, per $x=0$, il valore vero della funzione

$$f(x) = \frac{\tan x - x}{x \operatorname{sen} x};$$

$$; f(0) = 0$$

(29) Trovare, per $x=0$, il valore vero della funzione

$$f(x) = x \log x;$$

$$; f(0) = 0$$

(30) Trovare, per $x=0$, il valore vero della funzione

$$f(x) = {}^{\operatorname{sen} x};$$

$$; f(0) = 1$$

(31) Trovare, per $x = \infty$, il valore vero della funzione

$$f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}};$$

$$; f(\infty) = 1$$

CAPITOLO OTTAVO.

Espressioni imaginarie.

81. — La serie

$$1 + x + \frac{1 \, . \, 2}{x^2} + \frac{1 \, . \, 2 \, . \, 3}{x^3} + \ldots$$

essendo sempre eguale ad e^x quando x è quantità reale, si è convenuto rappresentarla col simbolo e^x anche quando x è un'espressione della forma

$$a + \sqrt{-1}$$

essendo a, b quantità reali, per definizione, si hanno

$$e^{x\sqrt{1-}} - \frac{x^2}{1.2}\frac{x^3}{1.2.3}\sqrt{-1} + \frac{x^4}{1.2.3.4} +$$

$$+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}\sqrt{1-} - \ldots = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots +$$

$$+\sqrt{-1}\left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\right)$$

ed

$$e^{x+y\sqrt{-1}} = 1 + (x+y\sqrt{-1}) + \frac{(x+y\sqrt{-1})^2}{1.2} +$$

$$+\frac{(x+y\sqrt{-1})^3}{1.2.3} + \ldots$$

Il secondo membro della precedente eguaglianza è

$$= \cos x + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen} x; \text{ quindi}$$

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen} x$$

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\,\operatorname{sen} x$$

dalle quali equazioni derivano le seguenti

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

82. — L'eguaglianza

$$c^x \cdot e^y = e^{x+y}$$

sta anche quando x o y, od ambedue questi esponenti, sono della forma $a + h\sqrt{-1}$ essendo a e b quantità reali qualunque.

Si sa dall'algebra che l'eguaglianza (1) è vera quando x e S sono reali. In questo caso, sostituendovi invece delle espressioni e^x, e^y, e^{x+y} le serie che equivalgono, essa diviene

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \ldots\right)\left(1 + y + \frac{h^2}{1.2} + \ldots\right) = \tag{3}$$

$$= 1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{1.2} + \ldots$$

Questa eguaglianza essendo un'identità rispetto ad x e ad s, se si sviluppano le potenze indicate nel suo secondo membro ed il prodotto indicato nel primo, i coefficenti dei termini che nei due membri conterranno le medesime potenze di x ed s saranno eguali. Quindi se, dopo aver fatto tali sviluppi, si sostituisce $a + h\sqrt{-1}$ invece di x, od $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ invece di y, oppure contemporaneamente $a + h\sqrt{-1}$ ed $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ invece di x ed y, i due membri saranno ancora identicamente eguali, perciò l'eguaglianza sussisterà ancora, ma in tal caso l'eguaglianza (2) equivale all'cguàglianza (1). Dunque quest'nltima eguaglianza sta anche quando x od y od ambi questi esponenti sono della forma $a + b\sqrt{-1}$.

Anche l'eguaglianza

$$e^x \,.\, e^y \,.\, e^z \ldots = e^{x+y+z+\cdots}$$

è vera quando tutti od alcuni degli esponenti x, s, z... sono della forma $a + b\sqrt{-1}$, essendo a, b due quantità reali.

83. — Se nell'espressione

$$\left(e^{x+y\sqrt{-1}}\right)$$

le quantità x, s, m sono reali, e se alle potenze di $e^{x+x\sqrt{-1}}$ con esponenti frazionari e con esponenti negativi si dà lo stesso significato che a quelle di una quantità reale, si ha

$$\left(e^{x+y\sqrt{-1}}\right) = e^{mx+my\sqrt{-1}}$$

se m è un numero intero e positivo, la potenza m *mesima* di $e^{x+y\sqrt{-1}}$ è il prodotto di m fattori eguali ad $e^{x+y\sqrt{-1}}$ perciò è eguale ad una potenza di e avente per esponente la somma degli esponenti dei fattori ossia è $= e^{mx+my\sqrt{-1}}$ Se m è irrazionale e positivo, l'eguaglianza (1) sussiste

Se $m = \dfrac{p}{q}$ essendo p e q numeri interi e positivi, si ha

$$\left(e^{x+y\sqrt{-1}}\right)^m = \sqrt[q]{(e^{x+y\sqrt{-1}})^p} = \sqrt{e^{px+py\sqrt{-1}}} =$$

$$= e^{\frac{px+py\sqrt{-1}}{q}} = e^{mx+my\sqrt{-1}}$$

anche, dato che in questo caso m si può riguardare come eguale al limite verso cui tende un numero razionale della forma $\frac{p}{}$ i cui termini crescono indefinitamente secondo una certa legge, e la dimostrazione data pel caso precedente è dipendente dalla grandezza dei numeri p e q.

Se finalmente $m = -n$, essendo n un numero intero e positivo qualunque, si ha

$$(e^{x+y\sqrt{-1}})^m = \frac{1}{(e^{x+y\sqrt{-1}})^n} = \frac{1}{e^{nx+ny\sqrt{-1}}} =$$
$$= e^{nx-ny\sqrt{-1}} = e^{mx+my\sqrt{-1}}$$

Dall'eguaglianza

$$(e^{x\sqrt{-1}})^m = e^{mx\sqrt{-1}}$$

deriva immediatamente il *teorema di moivre*

$$(\cos x + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,x)^m = \cos mx + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,mx$$

84. — L'eguaglianza (1) sussiste per qualunque valore di m, e si è convenuto farla sussistere anche quando m prende m il valore immaginario $a + b\sqrt{-1}$, essendo a, b quantità reali. Quindi per definizione si ha

$$(e^{x+y\sqrt{-1}})^{a+b\sqrt{-1}} = e^{(x+y\sqrt{-1})(a+b\sqrt{-1})} =$$
$$= e^{ax-by+(ay+(ay+bx)\sqrt{-1}}$$

85. — Ora, sia c una quantità reale qualunque. Essendo $c = e^{\log c}$ mentre sussiste ancora l'eguaglianza precedente per $y=0$, si ha che

$$c^{a+b\sqrt{-1}} = e^{a\log c + b\log c\sqrt{-1}}$$

onde segue che le regole per la moltiplicazione, la divisione, e l'innalzamento a potenza di grado reale, qualunque delle potenze di una quantità reale con esponenti reali, sono applicabili alle potenze di una quantità reale qualunque con esponenti della forma $a+b\sqrt{-1}$.

86. — L'eguaglianza

$$e^{x+y\sqrt{-1}} = e^x(\cos y + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,y)$$

fa vedere che le espressioni della forma $e^{x+y\sqrt{-1}}$ dove x ed y sono quantità reali qualunque, si possono porre sotto la forma $a+b\sqrt{-1}$ essendo a e b quantità reali.

Reciprocamente ad ogni espressione della forma $a+b\sqrt{-1}$ ove a e b sono quantità reali qualunque, si può dare la forma $e^{x+y\sqrt{-1}}$ essendo x e y quantità reali. Infatti, se si pone $a+b\sqrt{-1}=e^{x+y}\sqrt{-1}$ e si rappresentano con r e φ il modulo ed uno dei valori dell'argomento di $a+b\sqrt{-1}$, si ha

$$r(\cos\varphi+\sqrt{-1}\ \mathrm{sen}\ \varphi)=e^{x}(\cos y+\sqrt{-1}\ \mathrm{sen}\ y)$$

questa equazione equivale alle due

$$e^{x}\cos y=\mathrm{sen}\ \varphi$$

$$e^{x}\ \mathrm{sen}\ y=\cos\varphi$$

dalle quali

$$e^{x}=r$$

onde

$$x=\log r$$

ed

$$y=\varphi+2k\pi$$

essendo k un numero intero qualunque. Dunque

$$a+b\sqrt{-1}=e^{\log r+(\varphi+2k\pi)\sqrt{-1}}$$

dalle quali, essendo α e β reali,

$$\left(a+b\sqrt{-1}\right)^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}=\left(e^{\log r+\varphi(2k\pi)\sqrt{-1}}\right)^{\alpha+\beta\sqrt{-1}}$$

$$=e^{\alpha\log r-\beta(\varphi k\pi)}+\left[\beta\log r+\alpha(\varphi+2k\pi)\right]^{\sqrt{-1}}$$

e quindi risulta che le dette regole del calcolo delle potenze sono anche applicabili alle potenze di un'espressione della forma $a+b\sqrt{-1}$ con esponenti della stessa forma.

87. — Per generalizzare si è convenuto di dare il nome di *logaritmo neperiano di* $a+b\sqrt{-1}$ all'esponente della potenza di c.

Di questo logaritmo neperiano abbiamo parlato nell'articolo.

Sappiamo che le serie

$$x-\frac{x^{3}}{1.2.3}+\frac{x}{1.2.3.4.5}-\ldots$$

$$1-\frac{x^{2}}{1.2}+\frac{x^{4}}{1.2.3.4}-\ldots$$

hanno per somme rispettivamente sen x e cos x, quando x è quantità reale, ora, si è convenuto di rappresentarle con i simboli sen x e cos x anche quando x prende la forma imaginaria $a+b\sqrt{-1}$, essendo sempre a e b quantità reali.

88. — Ne segue che le eguaglianze (1) dell'articolo i cui membri sono espressioni equivalenti alle sopradescritte

serie, sussistono anche quando in luogo di x si sostituisce $x + y\sqrt{-1}$ essendo sempre x e y quantità reali.

Facendo questa sostituzione, si avrà

$$(1)\begin{cases} \cos\left(x + y\sqrt{-1}\right) = \dfrac{e^{-x\sqrt{-1}-y} + e^{-x\sqrt{-1}+y}}{2} \\ \operatorname{sen}\left(x + y\sqrt{-1}\right) = \dfrac{e^{-x\sqrt{-1}-y} + e^{-x\sqrt{-1}+y}}{2\sqrt{-1}} \end{cases}$$

onde, essendo

$$e^{x\sqrt{-1}-y} = e^{-y}(\cos x + \sqrt{-1}\operatorname{sen} x)$$
$$e^{-x\sqrt{-1}+y} = e^{y}(\cos x - \sqrt{-1}\operatorname{sen} x)$$

da cui, con opportune semplificazioni e trasformazioni, si ottiene

$$(2)\begin{cases} \cos\left(x + y\sqrt{-1}\right) = \cos x\,\dfrac{e^{y} + e^{-y}}{2}\,\operatorname{sen} x\,\dfrac{e^{y} - e^{-y}}{2}\sqrt{-1} \\ \operatorname{sen}\left(x + y\sqrt{-1}\right) = \operatorname{sen} x\,\dfrac{e^{y} + e^{-y}}{2}\,\cos x\,\dfrac{e^{y} - e^{-y}}{2}\sqrt{-1} \end{cases}$$

Se in queste formole si pone $x = 0$, s'ottiene

$$\cos\left(y\sqrt{-1}\right) = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(y\sqrt{-1}\right) = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\sqrt{-1}$$

Sostituendo nelle formule (2) $\cos\left(y\sqrt{-1}\right.$ e $\operatorname{sen}\left(y\sqrt{-1}\right)$ in luogo di $\dfrac{e^{y} + e^{-y}}{2}$ ed $\dfrac{e^{y} - e^{-y}}{2}\sqrt{-1}$, si trova che, come per gli archi reali, si ha

$$(3)\begin{cases} \cos\left(x + y\sqrt{-1}\right. = \cos x \cos\left(y\sqrt{-1}\right) - \\ \qquad\qquad - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\left(y\sqrt{-1}\right) \\ \operatorname{sen}\left(x + y\sqrt{-1}\right. = \operatorname{sen} x \cos\left(y\sqrt{-1}\right) - \\ \qquad\qquad + \cos x \operatorname{sen}\left(y\sqrt{-1}\right) \end{cases}$$

Se si innalzano al quadrato i due membri di ciascuna delle eguaglianze (1) e poi si addizionano membro a membro le eguaglianze risultanti, si trova, dopo aver fatto le opportune semplificazioni, che,

$$\operatorname{sen}^2\left(x + y\sqrt{--1}\right) + \cos^2\left(x + y\sqrt{-1}\right) = 1$$

89. — Si è convenuto di rappresentare coi simboli tang x e cot x i quozienti $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ e $\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ anche quando x è una espressione della forma $a+b\sqrt{-1}$, essendo a e b quantità reali.

Quindi si può dire che, per definizione, si ha

$$\operatorname{tang} \; (x+y\sqrt{-1} = \frac{\operatorname{sen}\left(x+y\sqrt{-1}\right)}{\cos\left(x+y\sqrt{-1}\right)}$$

$$\operatorname{cotang} (x+y\sqrt{-1} = \frac{\cos\left(x+y\sqrt{-1}\right)}{\operatorname{sen}\left(x+y\sqrt{-1}\right)}$$

Se in queste formole si pongono per sen $\left(x+y\sqrt{-1}\right)$ e cos $\left(x+y\sqrt{-1}\right)$, le espressioni date dalle eguaglianze (2) dell'articolo precedente, si trovano, dopo aver fatte le necessarie trasformazioni, le formole

$$(3)\left\{\begin{aligned} \operatorname{tang}\left(x+y\sqrt{-1}\right) &= \frac{2\operatorname{sen} 2x\,(e^{2y}-e^{-2y})\sqrt{-1}}{2\cos 2x+e^{2y}+e^{-2y}} \\ \cot\left(x+y\sqrt{-1}\right) &= \frac{2\operatorname{sen} 2x-(e^{2y}-e^{-2y})\sqrt{-1}}{-2\cos 2x+e^{2y}+e^{-2y}} \end{aligned}\right.$$

90. — Si rappresentano con i simboli

$$\operatorname{arc\,sen}\left(a+b\sqrt{-1}\right),\ \operatorname{arc\,cos}\left(a+b\sqrt{-1}\right)$$
$$\operatorname{arc\,tang}\left(a+b\sqrt{-1}\right),\ \operatorname{arc\,cot}\left(a+b\sqrt{-1}\right)$$

dove a e b sono quantità reali qualunque, le espressioni della forma $x+y\sqrt{-1}$ che hanno rispettivamente il seno, il coseno, la tangente, la cotangente eguali a

$$a+b\sqrt{-1}$$

Ciò posto, vogliasi ridurre

$$\operatorname{arc\,sen}\,(a+b\sqrt{-1}$$

alla forma $\qquad x+y\sqrt{-1}$

In questo caso si ha l'equazione

$$\operatorname{sen} x\,\frac{e^{x}+e^{-y}}{2}+\cos x\,\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\sqrt{-1}=a+b\sqrt{-1}$$

questa equazione equivale alle due

$$(e^{y}+e^{-y})\operatorname{sen} x=2a$$
$$(e^{y}-e^{-y})\cos x=2b$$

onde, ricavando sen x e cos x, e rappresentando con r e ϕ il modulo ed uno dei valori dell'argomento di $a+b\sqrt{-1}$, risulta

$$(1)\quad \begin{cases} \operatorname{sen} x = \dfrac{2\,r\cos\varphi}{e^{x}+e^{-y}} \\ \cos x = \dfrac{2\,r\operatorname{sen}\varphi}{e^{y}-e^{-y}} \end{cases}$$

Innalzando al quadrato i membri di ciascuna equazione ed addizionando membro a membro le equazioni risultanti, si ottiene un'equazione contenente soltanto y, la quale, ponendosi

$$(2)\qquad e^{2y}+e^{-2y}=z$$

e facendo le debite semplificazioni, diviene

$$(3)\qquad z^{2}-4\,r^{2}z+8\,r^{2}\cos 2\,\varphi-4=0$$

dall'(2), risolvendola rispetto ad e^{y}, s'ottiene

$$(4)\qquad e^{y}=\pm\frac{\sqrt{z+2}\pm\sqrt{z-2}}{2}$$

Se nel primo membro dell'equazione (3) si sostituisce Z2 in luogo di Z il risultato della sostituzione è

$$-8\,r^{2}(1-\cos^{2}\varphi)=$$
$$=-16\,r^{2}\operatorname{sen}^{2}\varphi=-16\,b^{2}$$

Dunque, qualunque siano i valori di a e b, i valori di z sono reali, e se b non è$=0$, uno di essi è maggiore e l'altro è minore di 2. Ciò posto, l'equazione (4) dimostra che, se b non è nulla, y ha due valori reali, i quali corrispondono al valore di z che è maggiore di 2, cioè a

$$z=2\,(r^{2}+(\sqrt{r^{4}-2\,r^{2}\cos 2\,\varphi+1})$$

ed hanno segni contrari e valori assoluti eguali perchè

$$\frac{\sqrt{z+2}+\sqrt{z-2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{z+2}-\sqrt{z-2}}{2}=1$$

e perciò sono dati dalla formula

$$y=\pm\log\sqrt{\frac{r^{2}+1+\sqrt{r^{4}-2\,r^{2}\cos 2\,\varphi+1}}{2}}$$
$$+\sqrt{\frac{r^{2}-1+\sqrt{r^{4}-2\,r^{2}\cos 2\,\varphi+1}}{2}}$$

Trovati così i valori di y, si possono trovare i valori corrispondenti di x, mediante la prima delle equazioni (1), la quale, sostituendo e semplificando diviene

$$\operatorname{sen} x = \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{\dfrac{r^2 + 1 + \sqrt{r^4 - 2 r^2 \cos 2 \varphi + 1}}{2}}}$$

Bisognerà però prendere, fra l'infinità di valori che questa formola dà per x, quelli il cui coseno hanno lo stesso segno, che il valore di $\cos x$ dato dalla seconda delle dette equazioni.

Quando $b = 0$ ed $a^2 > 1$, se si rappresenta con α il valore assoluto di a: si ha $r = \alpha$ e $\varphi = 0$; oppure $= \pi$ secondo che a è positiva o negativa; l'equazione (3) da $z = 2$ e $Z = 2\,(2\alpha^2 - 1)$; a $z = 2$ corrisponde $y = 0$; a $Z = 2\,(2\alpha^2 - 1)$ corrisponde $y = \pm \log\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}\right)$; ad $y = 0$ non corrispondono valori reali di x; ad $y = \pm \log\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}\right)$ corrisponde, secondo che a è positiva o negativa, $\operatorname{sen} x = 1$ oppure $= -1$ e per conseguenza $x = (4k + 1)\frac{\pi}{2}$ oppure $= -1$ e per conseguenza $x = (4k + 1)\frac{\pi}{2}$ oppure $= (k - 1)\frac{\pi}{2}$ essendo k un numero intero qualunque; quindi

$$\operatorname{arc\,sen} \alpha = (4k + 1)\frac{\pi}{2} \pm$$

$$\pm \sqrt{-1} \log\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}\right)$$

$$\operatorname{arc\,sen} (-\alpha) = (4k - 1)\frac{\pi}{2} \pm$$

$$\pm \left(\sqrt{-1} \log\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}\right)\right.$$

Il numero k potendo essere positivo o negativo o nullo, si ha anche

$$\operatorname{arc\,sen} (-\alpha) = -$$

$$\left[(4k + 1)\frac{\pi}{2} \pm \sqrt{-1} \log\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1 -}\right.\right] = - \operatorname{arc\,sen} \alpha$$

ESERCIZI.

(1). Dare la forma $a + b\sqrt{-1}$ alle seguenti espressioni :

(*a*) $$e^{1-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}$$

(*b*) $$\log(-2\sqrt{-1})$$

(*c*) $$2^{1+\sqrt{-1}}$$

(*d*) $$(1+\sqrt{-1})^{1-\sqrt{-1}}$$

(*e*) $$\operatorname{sen}(2\sqrt{-1})$$

(*f*) $$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\sqrt{-1}\right)$$

(*g*) $$\operatorname{tang}\frac{\pi-4\sqrt{-1}}{8}$$

(*h*) $$\cot(-\sqrt{-1})$$

(*i*) $$\operatorname{arc}\cos 2.$$

Si ottengono i seguenti risultati

(*a*) $$-e\sqrt{-1}$$

(*b*) $$\log 2+\frac{\pi}{2}(4k+3)\sqrt{-1}$$

(*c*) $$2e^{2\varkappa\pi}\cos(\log 2)+$$ $$+2e^{2\varkappa\pi}\operatorname{sen}(\log 2)\,.\sqrt{-1}$$

(*d*) $$\cos\frac{\pi\log 4}{4}+\operatorname{sen}\frac{\pi\log 1}{4}\,.\sqrt{-1}$$

(*e*) $$\frac{e^2-e^{-2}}{2}\sqrt{-1}$$

(*f*) $$\frac{e^2+1}{2e\sqrt{2}}-\frac{e^2-1}{2e\sqrt{2}}\sqrt{-1}$$

(*h*) $$\frac{e\sqrt{2}-(e^2-1)\sqrt{-1}}{e^2+e\sqrt{2}+1}$$

(*i*) $$2\varkappa\pi\pm\sqrt{-1}\,\log(2+\sqrt{3})$$

(2). Esprimere $\operatorname{sen}^5\varphi$ e $\cos^6\varphi$ per mezzo dei seni e coseni di archi multipli di φ.

Si devono ottenere i seguenti risultati.

$$\operatorname{sen}^5 \varphi = \frac{1}{16} (\operatorname{sen} 5 \varphi - 5 \operatorname{sen} 3 \varphi + 10 \operatorname{sen} \varphi)$$

$$\cos^6 \varphi = \frac{1}{32} \cos^6 \varphi + 6 \cos 4 \varphi + 15 \cos 2 \varphi + 10)$$

y può presentare risultati molto diversi.

Per esempio, se

$$y = x^3$$

i valori di x ai quali corrisponderanno simultaneamente valori di y, formeranno una serie che comincia con un valore negativo numericamente grande, e va crescendo algebricamente sino ad un grande valore positivo. Mentre se

$$y = x^2$$

i valori di y non sono mai negativi, se invece

$$y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$$

i valori di y sono imaginari per ogni valore di x non compreso tra $-a$ e $+a$.

(3). Il concetto di *limite* è alla base di tutto il calcolo differenziale, che consiste ad esprimere le conseguenze che si possono trarre da questa nozione.

Sia data la progressione geometrica

$$2 + \frac{1}{1+2} + \text{———}$$

CAPITOLO NONO.

Massimi e minimi delle funzioni.

92. — **Abbiasi la funzione**

$$y = f\,(x)$$

Il valore y che corrisponde ad un determinato valore a di x dicesi essere un *massimo* od un *minimo* quando è maggiore o minore dei corrispondenti valori ad $x = a + h$ e ad $x = a - h$, essendo h una quantità infinitesima, ossia, con altre parole, $f\,(a)$ è un massimo o è un minimo della funzione $f\,(x)$ quando, essendo sempre h una quantità infinitesima, la differenza

$$f\,(a+h) - f\,(a)$$

è negativa o positiva, qualunque sia in segno di h.

Se $f(x)$ ed $f^1(x)$ sono continue per $x=a$, dal teorema di Taylor si ha

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h)=hf'(a+\theta h)+Rf'(a)-$$
$$-hf'(a)=hf'(a)+h[f'(a+\theta h)-f'(a)]$$

ossia, rappresentando con R il prodotto

$$h[f'(a+\theta h)-f'(a)]=R$$

si ha

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a)=R$$

In quest'ultima eguaglianza R è una quantità infinitesima d'ordine superiore al primo rispetto ad h, quindi se $f^1(a)$ è differente da zero, la differenza

$$f(a+m)-f(a)$$

ha lo stesso segno di h. Dunque, in tal caso, $f(a)$ non è nè minimo nè massimo, e $f(a)$ è massimo o minimo solamente quando $f^1(a)=0$.

Se, dunque, $f\ (a)=0$, ed $f^{11}(x)$ è continua per $x=a$, si ha

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^2}{1\,.\,2}f''(a)+R_1$$

essendo R una quantità infinitesima d'ordine superiore al secondo rispetto ad h.

Dunque, se $f^{11}(a)$ è differente di zero, la differenza

$$f(a+h)-f(a)$$

ha lo stesso segno di h, da cui $f(a)$ è un massimo o un minimo, secondo che $f^{11}(a)$ è negativa o positiva.

Se $f^{11}(a)=0$ ed $f^{111}(a)$ è continua per $x=a$, si ha

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3}f'''(a)+R_2$$

essendo R_2 anche qui, una quantità infinitesima d'ordine superiore al terzo rispetto ad a. Questa eguaglianza dimostra che se $f^{111}(a)$ è differente di zero, $f(a+h)-f(a)$ ha lo stesso segno col cambiare del segno di h. Dunque in tal caso $f(a)$ non è nè massimo nè minimo, ed $f(a)$ sarà massimo o minimo solamente quando $f^{111}(a)=0$.

Se $f'''(a)=0$ ed $f^{IV}(x)$ e continua per $x=a$, si ha

$$f(a+h-f(a)=\frac{h^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}f^{IV}(a)+R_3$$

essendo R_3 una quantità infinitesima d'ordine superiore al quarto rispetto ad h. Dunque se $f^{IV}(a)$ è differente di zero,

$f(+h) - f(a)$ ha lo stesso segno di $f^{IV}(a)$ qualunque sia il segno di h, da cui $f(a)$ è un massimo o è un minimo secondo che $f^{IV}(a)$ è positiva o negativa.

In generale, — quando alcune delle derivate successive di $f(x)$ divengono nulle per $x=a$, e per questo valore di x la prima derivata che non diviene nulla è continua: se questa derivata è d'ordine pari, $f(a)$ è un massimo o è un minimo, secondo che per $x=a$ il valore di tale derivata è negativo o positivo; se invece è d'ordine impari, $f(a)$ ne è nè massimo nè minimo.

Quindi facilmente si possono trovare i massimi ed i minimi di una funzione, esplicita od implicita, di una sola variabile quando sono soddisfatte, come ordinariamente lo sono, le enunciate condizioni di continuità.

Gli esempi seguenti faranno vedere chiaramente il metodo da seguirsi, ed anche come in certi casi si possono semplificare i calcoli.

Talvolta $f(a)$ è un massimo o un minimo quando $f^1(x)$ o qualche altra derivata non è continua per $x=a$.

Così l'ordinata MP della curva rappresentata dalla figura 2 è un massimo, e per $x=OP$ *la derivata* $f^1(x)$ non è continua perchè $f(x)$ è la costante angolare dell'equazione della tangente alla curva nel punto di ascissa x e dalla figura si vede che intorno al punto M non vi ha continuità nelle direzioni delle tangenti. In tali casi per scoprire se $f(a)$ è un massimo od un minimo bisogna esaminare come variano i valori di $f(x)$ quando x, variando, prende valori vicinissimi ad a.

Può anche succedere che, essendo h una quantità infinitesima, $f(x)$ sia reale per $x=a+h$ e per $x=a$ e sia imaginaria per $x=a-h$, oppure sia reale per $x=a-h$ e per $x=a$ e sia imaginaria per $x=a+h$. Allora $f(a)$ si può dire esser un massimo od un minimo secondo che è maggiore o minore di $f(a+h)$ oppure di $f(a-h)$. Tali massimi o minimi si possono trovare cercando prima per quali valori di x la funzione è imaginaria, e quindi esaminando come variano i valori reali della funzione, corrispondenti a valori di x prossimi a quelli per cui essa è immaginaria.

Negli esempi che seguono non si parlerà dei valori di e ∞ di $-\infty$ che talora prendono le funzioni col variare di x, poichè non vi è alcuna difficoltà a trovare i loro valori corrispondenti.

93. — (1) Sia $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + x$.

Eguagliando a zero la prima derivata di questa funzione e semplificando l'equazione risultante, si ottiene

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

equazione che è soddisfatta da $x = 3$ e da $x = 1$. Per riconoscere se questi valori di x corrispondono a massimi o a minimi della funzione, si fa la seconda derivata di $f(x)$ che è

$$6x - 6 = 6(x - 1),$$

poi, osservando che il fattore positivo 6 non influisce sul segno di questa derivata, si sostituiscono successivamente nell'altro fattore, cioè in $x - 1$, i numeri 3 e -1 in luogo di x.. Il primo di questi numeri dà un risultato positivo, poichè corrisponde ad un minimo che è$=3$. L'altro dà un risultato negativo, poichè corrisponde ad un massimo che è$=35$.

(2) Sia

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 16$$

Eguagliando a zero $f^1(x)$ e semplificando, si ha

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$$

ossia

$$(x - 1)^3 = 0$$

equazione che è soddisfatta da $x = 1$. Invece di formare $f''(x)$, quì basta fare la derivata di $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

Sopprimendo in questa derivata il fattore positivo 3, $x^2 - 2x + 1$ che, per $x = 1$, diviene$=0$. Formando la derivata di $x^2 - \text{T} + 1$ e sopprimendosi li fattore positivo 2, si trova $x = 1$ che, per $x = 1$, diviene 0. Derivando $x - 1$, si trova per derivata 1 che è quantità intera e positiva. Dunque $f^{IV}(1)$ è positiva e quindi $f(1)$ è un minimo

(3) Sia

$$f(x^x) = x$$

vogliasi riconoscere se vi sono valori positivi di x a cui corrispondono massimi o minimi della funzione.

Per valori positivi di x la funzione, essendo positiva poichè qui si considerano solo valori aritmetici, corrisponderà a valori massimi o minimi che corrispondene pure a massimi e minimi del suo logaritmo neperiano; basta quindi cercare i massimi ed i minimi di $\log f(x)$ ossia di $x \log x$. Eguagliando a zero la prima derivata di questa funzione, si ha $1+\log x=0$ onde $\log x=-1$ da cui $x=e>\frac{1}{e}$. La seconda derivata di $x \log x$ è $\frac{1}{x}$ che, per $x=\frac{1}{e}$, diviene e. Dunque ad $x=\frac{1}{e}$ corrisponde un minimo di $f(x)$ il quale è $=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$.

(4) Sia $f(x)=x^5(x-)^3$

La prima derivata di questa funzione è

$$5x^4(-3)^3+3x^5(x-3)^2=x^4(\ -3)^2(8-15).$$

Se si osserva che, quando $f(x)$ è continua per $x=a$, $f(a)$ non può essere una massimo o un minimo senza che $f'(x)$ cambi di segno, essendo h una quantità infinitesima, x passa dal valore $a+h$ al valore $a-h$, nel caso particolare in cui si tratta, il fattore $x^4(x-3)^2$ di $f'(x)$ non diviene mai negativo, quindi si scorge che basta eguagliare a zero il fattore $8x-15$. L'equazione risultante dà $x=\frac{15}{8}$.

La derivata di $8x-15$ è 8 che è un numero intero e positivo, si conchiude quindi che ad $x=\frac{15}{8}$ corrisponde un minimo.

(5) Sia

$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$$

In questo caso si possono semplificare i calcoli osservando che alla funzione si può dare la forma

$$f(x)=1-\frac{6x}{x^2+3x+2}$$

da cui si vede che i valori di x corrispondenti a massimi o minimi della funzione corrispondono a minimi o massimi della frazione

$$\frac{x}{x^2+3x+2}$$

e per conseguenza a minimi o massimi della frazione

$$\frac{x^2+3x+2}{x}=x+3+\frac{2}{x}$$

La prima derivata di quest'ultima funzione è $1-\frac{2}{x^2}$ ce h diviene zero per $x=\sqrt{2}$ e per $x=-\sqrt{2}$. Dunque a $x=\sqrt{2}$ corrisponde a un minimo, e a $-\sqrt{2}$ un massimo.

(6) Sia $$y^3-3\,a\,x\,y+x^3=0$$
ove a rappresenta una quantità intera e positiva.

L'equazione differenziale immediata di primo ordine è
$$(x^2-ay)\;dx+(y^2-ax)\;dy=0$$
che dà
$$\frac{d\,y}{d\,x}=\frac{a\,y-x^2}{y^2-a\,x}$$

Eguagliando a zero il numeratore di questa frazione si ha $ay-x^2=0$. Considerando come simultaneamente questa equazione e l'equazione data, eliminando inoltre x, si trova $x^6-2a^3\,x^3=0$. Quest'equazione è soddisfatta da $x=0$ a cui corrisponde $y=0$ e da $x=a\sqrt[3]{2}$ a cui corrisponde $y=a\sqrt[3]{4}$.

Per $x=0$ ed $y=0$ l'espressione $\dfrac{d\,y}{d\,x}$ prende la forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$. Per averne il valore vero conviene ricorrere all'equazione differenziale immediata di secondo ordine che è
$$2\,x\,dx^2-2\,a\,dx\,dy+2\,y\,dy^2+(y^2-a\,x)\,d^2\,y=0$$

Dividendo i due membri di questa equazione $a^2\,dx^2$ ed osservando che, per $x=0$ ed $y=0$, il fattore che moltiplica d^2y e$=0$, si ha
$$x-a\frac{dy}{dx}+y\,\frac{dy^2}{dx^2}=0$$
da cui, per essere $x=0$ *ed* $y=0$, deriva
$$\frac{dy}{dx}=0 \text{ e } \frac{dy}{dx}=\infty$$

Qui conviene esaminare come varia y per valori di x prossimi a zero. Facendo quest'esame si trova che ad ogni valore di x positivo e vicino a zero corrispondono tre valori reali per y, di cui uno negativo e due positivi, e ad ogni valore di x corrisponde un solo valore reale di y, il quale è positivo. Si conchiude che zero non è nè un massimo nè un minimo di y.

Per $x=a\sqrt{2}$ ed $y=a\sqrt{4}$ si ha $\dfrac{dy}{dx}=0$. La prececedente equazione differenziale di secondo ordine, ponendosi $dy = 0$ $x = a\sqrt{2}$ ed $y = a\sqrt{4}$, e semplificando, diviene $2\,dx^2 + ad^2 y = 0$ e dà $\frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{2}{a}$. Dunque $a\sqrt{4}$ è un massimo di y.

(7) Trovare fra i rettangoli inscritti in un dato triangolo ABC, ed aventi un lato sopra BC, quale abbia maggior area.

Sia $DEGF$ un rettangolo qualunque inscritto, e si rappresentino con x, y i suoi lati FG e GE, e con z la sua area; sarà $z = xy$. Ora dalla geometria elementare si ha la proporzione

$$DE : BC = AK : AH$$

ove, con AH e BC si rappresentano a e b, deriva

$$a x = b\,(a - y).$$

Dunque

$$z = \frac{b}{a}(a - y)\,y = \frac{b}{a}(a y - y^2)$$

Eguagliando a zero la prima derivata di $ay - y^2$, si ottiene

$$a - 2y = 0$$

da cui

$$y = \frac{a}{2}$$

la seconda derivata di $ay - y^2 = -2$.

Dunque ad $y = \frac{a}{2}$ corrisponde un massimo di z e per conseguenza i lati del rettangolo richiesto sono

$$y = \frac{a}{2} \text{ ed } x = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{2} = \frac{b}{2}$$

(8). Un piccolo disco circolare piano è posto orizzontalmente sopra una tavola e viene illuminato da una lampada. Essendo data la distanza orizzontale AB dal centro a del disco alla verticale BF che passa per il centro F della fiamma, e sapendosi che l'intensità della luce sul disco varia in proporzione inversa del quadrato della distanza FA ed in ragione diretta del seno dell'angolo FAB, si vuol determinare l'altezza FB della fiamma in modo che la detta intensità sia massima.

Qui, per semplificare i calcoli, conviene determinare prima l'angolo FAB. Si rappresenti con F quest'angolo e con a la distanza $A B$; sarà $F A = \frac{a}{\cos\theta}$, da cui l'intenstià della luce sul disco sarà proporzionale al quadrato $\operatorname{sen}\theta \frac{\cos^2\theta}{a^2}$

Basterà dunque cercare fra i valori di θ da 0 a $\frac{\pi}{2}$ quello a cui corrisponde un massimo del prodotto $\operatorname{sen}\theta \cos^2\theta$ che si rappresenta con z. Eguagliando a zero la derivata $\frac{dz}{d\theta}$, si na la equazione

$$\cos^2\theta - 2\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta = 0$$

la quale è soddisfatta da $\cos\theta = 0$ e da $\operatorname{tang}^2\theta = \frac{1}{2}$.

La seconda derivata di z è

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} = 2\operatorname{sen}^3\theta - 7\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta =$$
$$= \operatorname{sen}\theta \cos^2\theta \; (2 \operatorname{tang}^2\theta - 7)$$

Per $\cos\theta = 0$ si ha $\theta = \frac{\pi}{3}$, da cui $\operatorname{sen}\theta = 1$ e $\frac{d^2 z}{d\theta^2} = 2$.

Dunque $\theta = \frac{\pi}{2}$ e corrisponde ad un minimo di z che è $= 0$.

Per $\operatorname{tang}\theta = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ il seno ed il coseno di θ sono positivi e $2\operatorname{tang}^2\theta - 7 = -6$; per conseguenza $\frac{d^2 z}{d\theta^2}$ è negativa.

Dunque $\operatorname{tang}\theta = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ e corrisponde ad un massimo di z, ossia il valore di θ che risolve il problema è quello che ha per tang $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. A questo valore di θ corrisponde

$$F B = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

(9). Date due rette $A C$ e $C D$, e dati due punti A e B sopra $A C$, trovare sopra $C D$ un punto M tale che l'angolo compreso fra le rette $M A$ ed $M B$ sia massimo. Si rappresentino con a, b, x le rette $A C$, $B C$, $C M$, con a e o gli angoli $A\,C\,D$ e $A\,M\,B$, si tiri la $M\,P$ perpendicolare ad $A\,C$; sarà

$$\text{tang}\ A\,M\,P = \frac{A\ P}{P\,M}\frac{a^x \cos\alpha}{x \,\text{sen}\,\alpha}\ \text{tang}\ B\,M\,P = \frac{B\,P}{B\ M} = \frac{x\cos\alpha - b}{x\,\text{sen}\,\alpha}$$

e per conseguenza

$$\text{tang}\ \theta = \frac{\dfrac{a - x\cos\alpha}{x\,\text{sen}\,\alpha} + \dfrac{x\cos\alpha - b}{x\,\text{sen}\,\alpha}}{\dfrac{(n - \cos x\,\alpha)\,(x\cos\alpha - b)}{x^2\,\text{sen}^2\,\alpha}} =$$

$$= \frac{(a-b)\,x\,\text{sen}\,\alpha}{x^2 - (a+b)\,x\cos x\,\alpha + a\,b}$$

da cui

$$\frac{d\,\theta}{d\,x} = -\frac{\dfrac{d\cot\theta}{d\,x}}{1 + \cot^2\theta}$$

quindi $\dfrac{d\,\theta}{d\,x}$ diviene $= 0$ quando $\cot\,\theta = \infty$ e quando $\dfrac{d\cot\theta}{d\,x} = 0$. A $\cot\theta = \infty$ corrisponde $\theta = 0$ che non è un massimo. Dunque, per avere il valore di x che corrisponde al massimo valore di θ, basta eguagliare a zero la derivata di $\cot\,\theta$, ossia, poichè $(a - b)$ sen α è una quantità costante.

$$\frac{x^2\,(a+b)\,x\cos\alpha + a\,b}{x} = x - (a+b)\cos\alpha + \frac{a\,b}{x}$$

Ciò facendo, si trova l'equazione

$$1 - \frac{a\,b}{x^2} = 0$$

da cui si ha $x = \sqrt{ab}$. Questo valore di x corirsponde ad un massimo di θ perchè da esso corrisponde un valore positivo e per conseguenza un valore negativo di $\dfrac{d^2\,0}{d\,x^2}$.

(10). Determinare, fra i varî quadrilateri che hanno i lati della medesima lunghezza quello che ha l'area massima.

Si rappresentino con α, β, γ, δ le lunghezze date dei lati AB, BC, CD, DA, con θ e φ gli angoli incogniti B e D, con z l'area e si tiri la diagonale AC; sarà

$$z = \text{area } ABC + \text{area } ACD = \tfrac{1}{2}(\alpha\beta \operatorname{sen}\theta + \gamma\delta \operatorname{sen}\varphi) \qquad (1)$$

e

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\theta - \gamma^2 + c^2 - 2\gamma\delta\cos\varphi \qquad (2)$$

Eguagliando a zero la derivata di z riguardata come funzione di θ, e derivando l'equazione (2) si trova

$$\alpha\beta \operatorname{sen}\theta + \gamma\delta\cos\varphi \frac{d\gamma}{d\theta} = 0$$

e

$$\alpha\beta \operatorname{sen}\theta - \gamma\delta \operatorname{sen}\varphi \frac{d\varphi}{d\theta}$$

fra queste due equazioni eliminando $\frac{d\varphi}{d\theta}$ e semplificando l'equazione risultante, s'ottiene

$$\operatorname{sen}\theta\cos\varphi + \cos\theta \operatorname{sen}\varphi = 0$$

ossia $\operatorname{sen}(\theta + \varphi) = 0$. Quest'equazione è soddisfatta da

$$\theta + \varphi = k\pi$$

essendo k un numero qualunque intero. Ma dalla natura del problema si ha che il quadrilatero non corrisponde nè a $\theta + \varphi = 0$, nè a $\theta + \varphi = 2\pi$. Dunque tale quadrilatero è quelle per cui $\theta + \varphi = \pi$; ossia quello a cui si può circoscrivere un circolo.

Volendosi trovare il massimo di a basterà osservare che, quando $\theta + \varphi = \pi$, si ha $\operatorname{sen}\varphi = \operatorname{sen}\theta$ e $\cos\varphi = -\cos\theta$, da cui, le equazioni (1) e (2) divengono.

$$z = \tfrac{1}{2}(\alpha\beta + \gamma 8)\operatorname{sen}\theta \text{ ed } \alpha^2 + \beta^2 -$$
$$-2\alpha\beta\cos\theta = \gamma^2 + \delta^2 + 2\gamma\delta\cos\theta.$$

Da queste equazioni eliminando θ, e semplificando la espressione risultante di z, e ponendo $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2_p$ si ha

$$z = \sqrt{(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)(p-8)}$$

94. — ESERCIZI.

(1) $y^2 - 2\,axy + x^2 = m^2$, trovare i valori di x a cui corrispondono i massimi e i minimi di y;

$$x = \frac{a\ m}{\sqrt{1-a^2}} \text{ un massimo} = \frac{m}{\sqrt{1-a^2}}$$

$$x = -\frac{a\ m}{\sqrt{1-a^2}} \text{ un minimo} = \frac{-m}{\sqrt{-1\,a^2}}$$

(2). Determinare tra i triangoli che hanno la medesima ipotenusa quello di area massima: l'isoscele.

(3). Trovare fra i cilindri circolari retti di superficie totale medesima, quello di volume massimo: l'equilatero.

(4). Cercare fra i triangoli isosceli quello di area massima: l'equilatero.

(5). Trovare fra i quadrati inscritti in un dato quadrato quello di area minima: il quadrato richiesto è quello i cui vertici dividono per metà i lati del quadrato dato.

(6). Determinare tra i parallelepipedi rettangoli dello stesso volume, quello di superficie minima: il cubo.

(7). Per un punto dato dentro ad un angolo dato, condurre una retta in modo che il triangolo risultante abbia area minima: la retta richiesta è quella che è divisa per metà dal punto dato.

CAPITOLO DECIMO.

Cambiamento della variabile indipendente.

95. — Abbiamo dimostrato vera l'equazione

$$\frac{d\,y}{d\,x} \times \frac{d\,x}{d\,y} = 1$$

che può essere scritta

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\dfrac{d\,x}{d\,y}}$$

e sappiamo anche che

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,z}\frac{d\,z}{d\,x} = \frac{\dfrac{d\,y}{d\,z}}{\dfrac{d\,z}{d\,x}}$$

quindi abbiamo

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{d}{d x}\,\frac{\dfrac{d y}{d z}}{\dfrac{d x}{d z}} = \frac{d}{d z}\,\frac{\dfrac{d y}{d z}}{\dfrac{d x}{d z}} \cdot \frac{d z}{d x} =$$

$$= \frac{\dfrac{d^2 y}{d x^2}\dfrac{d x}{d z} - \dfrac{d^2 x}{d z^2}\dfrac{d y}{d z}}{\left(\dfrac{d x}{d z}\right)^2} \cdot \frac{d z}{d x} =$$

$$= \frac{\dfrac{d^2 y}{d z^2}\dfrac{d x}{d z} - \dfrac{d^2 x}{d z^2}\dfrac{d y}{d z}}{\left(\dfrac{d x}{d z}\right)^3}$$

ed abbiamo pure che

$$\frac{d^3 y}{d x^3} = \frac{d}{d z}\,\frac{\dfrac{d^2 y}{d z^2}\dfrac{d x}{d z} - \dfrac{d^2 x}{d z^2}\dfrac{d y}{d z}}{\left(\dfrac{d x}{d z}\right)^3} \cdot \frac{d z}{d x} =$$

$$= \frac{\left(\dfrac{d^3 y}{d z^3}\dfrac{d x}{d z} - \dfrac{d^3 x}{d z^3}\dfrac{d y}{d z}\right)\left(\dfrac{d x}{d z}\right)^3 - 3\left(\dfrac{d x}{d z}\right)^2\dfrac{d^2 x}{d z^2}\left(\dfrac{d^2 y}{d z^2}\dfrac{d x}{d z} - \dfrac{d^2 x}{d z^2}\dfrac{d y}{d x}\right)}{\left(\dfrac{d x}{d z}\right)^4}\,\frac{d z}{d x}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{d^3 y}{d z^3}\dfrac{d x}{d z} - \dfrac{d^3 x}{d z^3}\dfrac{d y}{d z}\right)\dfrac{d x}{d z} - 3\,\dfrac{d^2 x}{d x^2}\left(\dfrac{d^2 y}{d z^2}\dfrac{d x}{d z} - \dfrac{d^2 x}{d z^2}\dfrac{d y}{d z}\right)}{\left(\dfrac{d x}{d z}\right)^5}$$

similmente si può ottenere per $\dfrac{d^4 y}{d x^4}\ \dfrac{d^5 y}{d x^5}$, ecc.

Questo procedimento è detto — *cambiamento della variabile indipendente da x a z* — così mentre

$$\frac{d^2 y}{d x^2}$$

la variabile indipendente è x, nella espressione

$$\frac{\frac{d^2 y}{d z^2}\frac{d x}{d z} - \frac{d^2 x}{d z^2}\frac{d y}{d z}}{\left(\frac{d x}{d z}\right)^3}$$

la variabile indipendente non è più x, ma bensì per il cambiamento effettuato, è z.

96. — Supponiamo che nell'articolo precedente si ponga $z=y$, si avrà

$$\frac{d y}{d x}=1, \frac{d^2 y}{d z^2}=0, \frac{d^3 y}{d z^3}=0 \text{ ecc.},$$

$$\frac{d x}{d z}=\frac{d x}{d y}, \frac{d^2 x}{d z^2}=\frac{d^2 x}{d y^2}, \text{ ecc.},$$

da cui

$$\frac{d y}{d x}=\frac{1}{\frac{d x}{d y}}$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2}=-\frac{\frac{d^2 x}{d y^2}}{\left(\frac{d x}{d y}\right)^3}$$

$$\frac{d^3 y}{d x^3}=\frac{\frac{d x}{d y}\frac{d^3 x}{d y^3}-3\left(\frac{d^2 x}{d y^2}\right)^2}{\left(\frac{d x}{d y}\right)^5}$$

Queste formole possono ottenersi direttamente come segue,

$$\frac{d y}{d x}=\frac{1}{\frac{d x}{d y}}$$

da cui

$$\frac{d^2 y}{d x^2}=\frac{d}{d x}\frac{1}{\frac{d x}{d y}}$$

$$=\frac{d}{d y}\frac{1}{\frac{d x}{d y}}\cdot\frac{d y}{d x}$$

$$=-\frac{\dfrac{d^2x}{dy^2}}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2}\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{d^2x}{dy^2}}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{d}{dx}\frac{\dfrac{d^2x}{dy^2}}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3}=-\frac{d}{dy}\frac{\dfrac{d^2x}{dy^2}}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3}\cdot\frac{dy}{dx}=$$

$$=-\frac{\dfrac{d^3x}{dy^3}\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3-3\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2\left(\dfrac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^7}=$$

$$=-\frac{\dfrac{d^3x}{dy^3}\dfrac{dx}{dy}-3\left(\dfrac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^5}$$

Questo procedimento è detto — *cambiamento della variabile indipendente da x ad y.* —

97. — Cambiare la variabile indipendente in $x^n\dfrac{d^ny}{dx^n}$ da x a z, essendo $x=e^z$.

Abbiamo

$$\frac{d}{dt}\left(x^n\frac{d^ny}{dx^n}\right)=\frac{d}{dx}\left(x^n\frac{d^ny}{dx^n}\right)\frac{dx}{dz}=$$

$$=\left(n\,x^{n-1}\frac{d^ny}{dx^n}+x^n\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)x$$

$$=n\,x^n\frac{d^ny}{dx^n}+x^{n+1}\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}};$$

quindi

$$\frac{d}{dz}\left(x^n\frac{d^ny}{dx^n}\right)-n\,x^n\frac{d^ny}{dx^n}=x^{n+1}\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$$

$$\left(\frac{d}{dz}-n\right)x^n\frac{d^ny}{dx^n}=x^{n+1}\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$$

Si ponga $n=1$

$$\left(\frac{d}{d\,z}=1\right)x\,\frac{d\,y}{d\,x}=x^2\,\frac{d^2\,y}{d\,x^2}$$

Ma

$$\frac{d\,y}{d\,z}=\frac{d\,y}{d\,x}\frac{d\,x}{d\,z}=x\,\frac{d\,y}{d\,z}$$

onde

$$x^2\,\frac{d^2\,y}{d\,x^2}=\left(\frac{d}{d\,z}-1\right)\frac{d\,y}{d\,z}.$$

Si ponga $n=2$

$$\left(\frac{d}{d\,z}-2\right)x^2\,\frac{d^2\,y}{d\,x^2}=x^3\,\frac{d^3\,y}{d\,x^3}=$$

$$=\left(\frac{d}{d\,z}-2\right)\left(\frac{d}{d\,z}-1\right)\frac{d\,y}{d\,z}.$$

Ed in generale, si ponga $n=m$

$$x^n\,\frac{d^my}{dx^m}=\left\{\frac{d}{d\,z}-(m-1)\right\}\left\{\frac{d}{d\,z}-(m-2)\right\}\cdots\left\{\frac{d}{d\,z}-(m-n)\right\}\frac{d\,y}{d\,z}.$$

98. — Sia u una funzione dipendente da due altre funzioni x ed y, sia cioè $u=f\,(x,\ y)$, proponiamoci il problema di dererminare la derivata di u. Per risolvere il problema bisognerà in primo luogo supporre che delle due variabili indipendenti $x\,y$, una sola varii, o meglio, bisognerà risolvere il problema supponendo che le due funzioni $x\,y$, varino una alla volta. Poniamo quindi dapprima y la funzione variabile; avremo

$$\frac{f\,(x,\,y+\Delta\,y)-f\,(x,\,y)}{\Delta\,x}$$

Indi poniamo x la variabile, otterremo

$$\frac{f\,(y,\,x+\Delta\,x)-f\,(y,\,x)}{\Delta\,x}$$

Possiamo quindi considerare il limite

$$\lim\frac{f\,(y+\Delta\,y,\,x+\Delta\,x)-\varphi\,(y,\,x+\Delta\,x)}{\Delta\,y}$$

da cui abbiamo la risoluzione chiesta

$$\frac{d\,u}{d\,x}=\frac{d\,u}{d\,y}\frac{d\,y}{d\,u}+\frac{d\,u}{d\,x}\frac{d\,x}{d\,u}$$

Si supponga ora, u una funzione delle tre variabili indipendenti x, y, z, e che queste siano legate da tre equazioni con tre nuove variabili indipendenti θ, φ, r: si cerca di esprimere $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$, per mezzo delle derivate di u prese rispetto alle nuove variabili.

Abbiamo

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= \frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} + \frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{du}{dr}\frac{dr}{dx} \\
\frac{du}{dy} &= \frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dy} + \frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{du}{dr}\frac{dr}{dy} \\
\frac{du}{dz} &= \frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dz} + \frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dz} + \frac{du}{dr}\frac{dr}{dz}
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ma per mezzo delle tre equazioni tra x, y, z, θ, φ, r, possiamo determinare i valori di

$$\frac{d\theta}{dx}, \frac{d\theta}{dy}, \frac{d\theta}{dz}, \frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}, \frac{dr}{dy}, \frac{dr}{dz}$$

e quindi le equazioni precedenti esprimono $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ e $\frac{du}{dz}$ in termini di $\frac{du}{d\theta}$, $\frac{du}{d\varphi}$ e $\frac{du}{dr}$.

Inoltre, risolvendo le equazioni precedenti, possiamo esprimere $\frac{dn}{d\theta}$, $\frac{du}{d\varphi}$ e $\frac{du}{dr}$ in termini di $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$, i quali possono anche trovarsi per mezzo delle equazioni

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du}{d\theta} &= \frac{du}{dx}\frac{dx}{d\theta} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{d\theta} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{d\theta} \\
\frac{du}{d\varphi} &= \frac{du}{dx}\frac{dx}{d\varphi} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{d\varphi} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{d\varphi} \\
\frac{du}{dr} &= \frac{du}{dx}\frac{dx}{dr} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dr} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dr}
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

99. — Supponiamo ora, per dare un esempio su ciò che precede che si ponga

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \; y = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \; z = r \cos \theta$$

Onde, applicando le equazioni (2) abbiamo

$$\frac{dx}{d\theta} = r\cos\theta\cos\varphi, \quad \frac{dy}{d\theta} = r\cos\theta, \operatorname{sen}\varphi, \quad \frac{dz}{d\theta} = -r\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = -r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \quad \frac{dy}{d\varphi} = r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \quad \frac{dz}{d\varphi} = 0$$

$$\frac{dx}{dr} = \operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \quad \frac{dy}{dr} = \operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\varphi, \quad \frac{dz}{dr} = \cos\theta$$

quindi

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} &= r\cos\theta\cos\varphi\,\frac{du}{dx} + r\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\,\frac{du}{dy} - r\operatorname{sen}\theta\,\frac{du}{dz} \\ \frac{du}{d\varphi} &= -r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,\frac{du}{dx} + r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,\frac{du}{dy} \\ \frac{du}{dr} &\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,\frac{du}{dx}\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,\frac{du}{dy} + \cos\theta\,\frac{du}{dz} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Se adoperiamo le equazioni (1) dell'articolo precedente, dobbiamo porre le relazioni tra x, y e z sotto la forma

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{(x^2 + y^2)}}{z}$$

$$\varphi = \tan^{-1}y\,\frac{y}{z}$$

quindi

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} = \frac{x}{r} = \operatorname{sen}\theta\cos\varphi$$

$$\frac{dr}{dy} = \frac{y}{r} = \operatorname{sem}\theta\cos\varphi$$

$$\frac{dr}{dz} = \frac{z}{r} = \cos\theta$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} = \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}$$

$$\frac{d\theta}{dy} = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}\cdot\frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} = \frac{\cos\theta\operatorname{sen}\varphi}{r}$$

$$\frac{d\theta}{dz} = -\frac{\sqrt{(x^2 + y^2)}}{x^2 + y^2 + z^2} = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} - -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\text{sen }\varphi}{r \text{ sen }\varphi}$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\varphi}{r \text{ sen }\theta}$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = 0$$

quindi

$$\frac{du}{dx} = \text{sen }\theta \cos\varphi \frac{du}{dr} + \\ + \frac{\cos\theta \cos\varphi}{r}\frac{du}{d\theta} - \frac{\text{sen }\varphi}{r \text{ sen }\theta}\frac{du}{d\varphi}$$

$$\frac{du}{dy} = \text{sen }\theta \text{ sen }\varphi \frac{du}{dr} + \\ + \frac{\cos\theta \text{ sen }\varphi}{r}\frac{du}{d\theta} + \frac{\cos\varphi}{r \text{ sen }\theta}\frac{du}{d\varphi}$$

$$\frac{du}{dz} = \cos\theta \frac{du}{dr} - \frac{\text{sen }\theta}{r}\frac{du}{d\theta}$$

100. — Alcuni esempi chiariranno quanto sino qui si è esposto.

(1). Cambiare la variabile indipendente da x ad y nella equazione

$$x^2 \frac{d^2u}{dx^2} + x\frac{du}{dx} + u = 0$$

supponendo $y = \log x$.

Applicando i suesposti principi, s'otterrà

$$\frac{d^2u}{dy^2} + u = 0$$

(2). Trasformare $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{2x}{1+x^2}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{(1+x^2)^2} = 0$ iu una

equazione nella quale θ è la variabile indipendente, essendo

$$\theta = \text{tang}^{-1} x$$

Come risultato si avrà

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + y = 0$$

(3). Trasformare

$$\frac{d^2 u}{d x_1^2} + \frac{d^2 u}{d x^2{}_2} + \frac{d n^2}{d x_3^2} + \ldots + \frac{d^2 u}{d x_n^2}$$

in termini di u, ove u è una funzione di r ed

$$r^2 = x^2{}_1 + x^2{}_2 + x^2{}_3 + \ldots x^2{}_n;$$

come risultato finale si avrà

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{du}{dr} = 0$$

(4). Trasformare

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + 2 \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} \frac{dy}{dx} + \frac{4 n^2 y}{(e^{2x} + e^{-2x})^2 = 0} = 0$$

in un'equazione nella quale t sia la variabile indipendente, essendo $x = \log \sqrt{(\tang t)}$.

Come risultato finale si otterrà

$$\frac{d^2 y}{d t^2} + n^2 y = 0$$

(5). Siano date le equazioni

$$x = a\,(1 - \mathrm{cost}\ t)$$
$$y = a\,(n\,1 + \mathrm{sen}\ t)$$

esprimere $\frac{d^2 y}{d x^2}$ in termini di t.

Si avrà per risultato

$$-\frac{n \cos t + 1}{a\,\mathrm{sen}^3 t}$$

INDICE

PARTE PRIMA. — *Calcolo differenziale.*

ROMANTICA MONDIALE

SONZOGNO

Questa collezione raccoglie i capolavori della moderna letteratura avventurosa e drammatica di tutto il mondo. Composta di eleganti volumi in-16°, solidamente rilegati e protetti da un'artistica sopracoperta illustrata a colori, la Romantica Mondiale Sonzogno ha lo scopo di divulgare in Italia, a mitissimo prezzo, i romanzi di grande successo e il tipo delle collezioni eleganti che tanta fortuna ottengono in Inghilterra e in America.

Prezzo dei volumi: Dal N. 1 al N. 32 - L. **5.—**
Dal N. 33 in avanti - L. **4.50**

VOLUMI PUBBLICATI:

1. London J., *Martin Eden.*
2. Dupuy-Mazuel H., *Il Giocatore di scacchi.*
3. Bazin R., *Gingolph l'abbandonato.*
4. Leroux G., *Il Castello Nero.*
5. Conrad J., *Il Negro del «Narciso».*
6. Leroux G., *Strane nozze di Rouletabille.*
7. London J., *Zanna Bianca.*
8. Blasco Ibañez V., *Terre maledette.*
9. Conrad J., *L'Agente segreto.*
10. Rider Haggard H., *La Donna eterna.*
11. Conan Doyle A., *Un Mondo perduto.*
12. London J., *Il richiamo della foresta.*
13. London J., *Radiosa Aurora.*
14. Wylm A., *Nefer-si risorta.*
15. London J., *Il Lupo dei mari.*
16. Conrad J., *Cuore di tenebra.*
17. Curwood J. O., *La Trappola d'oro.*
18. Curwood J. O., *Il coraggio di Marge O'Doone.*

Inviare l'importo alla CASA EDITRICE SONZOGNO
Milano (2/14) - Via Pasquirolo, 14

ROMANTICA MONDIALE SONZOGNO

19-20. London J., *La Valle della Luna.* - Vol. I e II.
21. Conrad J., *Nostromo.*
22. Curwood J. O., *Kazan.*
23. London J., *Smoke Bellew.*
24. Blasco Ibañez V., *La Maja nuda.*
25. Curwood J. O., *Nomadi del Nord.*
26. Leroux G., *Il delitto di Rouletabille.*
27. Sabatini R., *Scaramouche.*
28. Curwood J. O., *Il termine del fiume.*
29. Curwood J. O., *Saetta.*
30. Curwood J. O., *La Valle degli Uomini silenziosi.*
31. Blasco Ibañez V., *Il Paradiso delle donne.*
32. Curwood J. O., *La Foresta in fiamme.*
33. Curwood J. O., *Il Paese di là.*
34. Sabatini R., *Il Capitano Blood.*
35. Curwood J. O., *L'ultima frontiera.*
36. Leroux G., *Rouletabille in Russia.*
37-38. Kipling R., *Il libro della Giungla* - Vol. I e II.
39. Curwood J. O., *Il figlio di Kazan.*
40. Sabatini R., *L'Uomo e il Destino.*
41. Curwood J. O., *L'Avventura del capitano Plum.*
42. Mandel R., *Il volo alle stelle.*
43. Curwood J. O., *I Cacciatori di lupi.*
44. Curwood J. O., *I Cacciatori d'oro.*
45. London J., *L'ammutinamento dell'Elsinore.*
46. Zane Grey, *Il retaggio del deserto.*
47. Leroux G., *L'Automa insanguinato.*
48. Leroux G., *La Macchina per uccidere.*
49. Curwood J. O., *Isobel.*
50. Zane Grey, *Sotto le stelle del West.*
51. Curwood J. O., *Fiore del Nord.*
52. Zane Grey, *Il Fiume abbandonato.*
53. Baronessa Orczy, *Il trionfo della Primula Rossa.*
54. Zane Grey, *Nevada.*
55. London J., *Il Vagabondo delle stelle.*

Inviare l'importo alla Casa Editrice Sonzogno
Milano (2/14) - Via Pasquirolo, 14

ROMANTICA MONDIALE SONZOGNO

56. Curwood J. O., *L'onore delle grandi nevi.*
57. Zane Grey, *Betty Zane.*
58. Sabatini R., *I cancelli della morte.*
59. Zane Grey, *L'ultima pista.*
60. Freuchen P., *L'Eschimese.*
61. Zane Grey, *La Valle delle Sorprese.*
62. London J., *La Figlia delle nevi.*
63. Rosny J. H., *La Guerra del fuoco.*
64. Zane Grey, *L'oro del deserto.*
65. Rider Haggard H., *Il ritorno di Ayesha.*
66. Curwood J. O., *La Valle dell'Oro.*
67. Zane Grey, *Carovane combattenti.*
68. Conrad J., *Vittoria.*
69. Curwood J. O., *La Terra promessa.*
70. Pemberton M., *La Nave dei diamanti.*
71. Zane Grey, *L'ultimo dei «Plainsmen».*
72. Curwood J. O., *L'Orso grigio.*
73. Sabatini R., *Lo Sparviero del mare.*
74. Stacpoole (de Vere) H., *L'Isola delle Perle.*
75. Zane Grey. *La selva del Tonto Rim.*
76. Colautti A., *Il Figlio.*
77. Zane Grey, *Il Ranger del Texas.*
78. Sabatini R., *Bellarion.*
79. Curwood J. O., *Un signore di coraggio.*
80. Conan Doyle A., *La Grande Ombra.*
81. Zane Grey, *Il cavallo selvaggio.*
82. Baronessa Orczy, *La vendetta di Sir Percy.*
83. Leroux G., *Le Tenebrose.*
84. Leroux G., *Sangue sulla Neva.*
85. Pignatelli V. (Principe), *L'ultimo dei Moschettieri.*
86. Sabatini R., *I pretendenti di Yvonne.*
87. Curwood J. O., *Filippo Steele.*
88. Zane Grey., *L'anima della frontiera.*
89. Corra B., *Il Passatore.*
90. Sabatini R., *La pelle del leone.*
91. Stacpoole (De Vere) H., *La Spiaggia dei sogni.*
92. Zane Grey., *Il Ponte dell'arcobaleno.*

Inviare l'importo alla CASA EDITRICE SONZOGNO
Milano (2/14) - Via Pasquirolo, 14

ROMANTICA MONDIALE SONZOGNO

93. Pemberton Max, *Il Capitano Nero.*
94. Sabatini R., *L'Estate di San Martino.*
95. Pignatelli V. (Principe), *Il Dragone di Buonaparte.*
96. Pignatelli V. (Principe), *La lettera di Barras.*
97. Sabatini R., *Il vessillo del Toro.*
98. Mason A. E. W., *Le quattro piume.*
99. Pignatelli V. (Principe), *Le Tre Vedette.*
100. Pignatelli V. (Principe), *Florise.*
101. Sabatini R., *La giustizia del Duca.*
102. Dell Ethel M., *La traccia dell'aquila.*
103. Rider Haggard H., *La signora di Blossholme.*
104. Curwood J. O., *Il Cacciatore Nero.*
105. Corra B., *Il Condottiero.*
106. Fox E., *La Signora dai nastri viola.*
107. Pignatelli V. (Principe), *Danican-bey.*
108. Pignatelli V. (Principe), *Il Ventesimo Dragoni.*
109. Sabatini R., *I ribelli della Carolina.* - Vol. I.
110. Sabatini R., *I ribelli della Carolina.* - Vol. II.
111. Zane Grey, *Wildfire.*
112. Baronessa Orczy, *Le avventure della Primula* Rossa.
113. Pemberton Max, *Il Giardino delle spade.*
114. Sabatini R., *Amori ed Armi.*
115. Curwood J. O., *L'antica strada maestra.*
116. Aicard J., *Morino dei Mori.*
117. Sabatini R., *La vergogna del buffone.*
118. Leroux G., *I Mohicani di Babele.*
119. Baronessa Orczy, *L'uomo grigio.*
120. Sabatini R., *Le cronache del capitano Blood.*
121. Mason A. E. W., *La strada interrotta.*
122. Rider Haggard H., *Le miniere del Re Salomone.*
123. Baronessa Orczy, *Il nido dello Sparviero.*
124. Sabatini R., *Il cavaliere della taverna.*
125. Williamson C. e A., *Il topo e il leone.*
126. Corra B., *Sanya, la moglie egiziana.*
127. Stacpoole (De Vere) H., *Satana.*
128. Bazin R., *La terra che muore.*
129. Sabatini R., *Le nozze di Corbal.*
130. Stevenson R. L., *La freccia nera.*

Inviare l'importo alla CASA EDITRICE SONZOGNO
Milano (2/14) - Via Pasquirolo, 14

BIBLIOTECA DEL POPOLO

a Centesimi **80** il volume :: :: Volume doppio L. **1.60**

1. Grammatica italiana.
2. Elementi d'aritmetica.
3. Il mondo a volo d'uccello.
4. Compendio di cronologia.
5. La storia d'Italia.
6. Pasteur.
7. Geologia.
8. Elementi di astronomia.
9. Compendio di mitologia.
10. Pizzo d'Irlanda.
11. Elementi di geometria.
12. Elementi di chimica.
13. Esercizî di calligrafia.
14. Nozioni di musica.
15. Fatti della stor. greca.
16. L'igiene per tutti.
17. Storia nat. : *Mammiferi*
18. Idem *Uccelli.*
19. Idem *Pesci.*
20. *Alessandro Volta.*
21. Storia della Repubblica romana.
22. Avviamento allo studio della botanica.
23. Punto Filet.
24. La storia di Francia.
25. Letture classiche di morale, di storia e descrittive.
26. Esercizî e probl. di geometria.
27. Favole in prosa.
28. Errori e pregiudizî popolari.
29. Storia dell'Impero romano.
30. Storia dei Valdesi.
31. Galateo.
32. Merletti ad uncinetto.
33. Il segretario privato.
34. Dizionarietto dei più celebri pittori scultori e architetti,
35. Pierluigi da Palestrina
36. Il medico di se stesso.
37. Il Poker.
38. Elementi di armonia.
39. Tre veleni.
40. Elementi di disegno.
41. Fisiologia elementare.
42. Esercizi di lettura musicale.
43. Credenze e superstizioni antiche e moderne
44. Elementi di anatomia.
45. Le arti primarie.
46. La ginnastica per tutti
47. Proverbi scelti.
48. Corrisp. commerciale.
49. Elementi di meccanica.
50. Animali e vegetali velenosi.
51. Lavori ad ago.
52. Elementi d'agricoltura
53. Principii di disegno lineare.
54. Elementi di solfeggio.
55. Elementi di algebra.
56. Il giuoco della dama.
57. Storia nat. : *Gl'insetti.*
58. Album lavori femminili in bianco.
59. Grani d'esperienza.
60. I fiori artificiali.
61. La cucina igienica.
62. Album di lavori femminili in colore.
63. Effemeridi di storia patria.
64. Vocabolario ortografico
65. Album di lavori femminili d'eleganza.
66. Il giardino, l'orto, il frutteto.
67. Ricettario domestico.
68. Età della pietra.
69. Un po' di tutto.
70. Età del bronzo e ferro.
71. Elementi di fisica.
72. Sindacalismo fascista.

73-74. Tesi di storia della musica.

75. Storia della Russia.
76. Storia della Turchia.
77. Istituzioni di Diritto Corporativo.
78. Radiotelegrafia - Radiotelefonia.
79. Mineralogia.
80. Aiutati che Dio t'aiuta.
81. San Francesco d'Assisi.
82. Esercizî di lett. musicale per istr. a fiato.
83. Storia d'Inghilterra.
84. Storia della Germania.
85. Storia della letteratura italiana.
86. La canzone d'Orlando.
87. Tomaso-Alva Edison.
88. Il contabile per tutti.
89. Storia della pittura.
90. Grammatica francese.
91. Centuria d'uomini illustri italiani.
92. Pio X.
93. Anthologie Française.
94. Elementi di rettorica.
95. Lavori femminili a punto in croce.
96. Enrico Ibsen.
97. Esercizî d'algebra.
98. I fratelli Giuseppe e Andrea Chénier.
99. Nozioni di ortografia.

101. Il popolo Svizzero.
102. Il processo Ramorino.
103. Il Pianoforte.
104. Il fattore di campagna.
105. Grammatica inglese.
106. Disegno architettonico.
107. L'architettura.
108. English reading book.
109. Aritmetica pratica.
110. Curiosità storiche e letterarie.
111. Grammatica spagnola.
112. Emanuele Filiberto.
113. Compendio di apicoltura (Ediz. rifatta).
114. Vocabolario delle voci e delle maniere errate.
115. Santa Rita da Cascia.
116. Della versificazione italiana.
117. Gli avvolgimenti dell'indotto.
118. Pequeno manual de lectura espanola.
119. Dizion. dei sinonimi.
120. Storia dei popoli scandinavi.
121. I fenomeni dell'atmosfera.
122. Storia dei grandi viaggiatori italiani.
123. Letteratura italiana.
124. Il Buddha.
125. Grammatica tedesca.
126. *Giuseppe Mazzini.*

127 e 128. *G. Garibaldi.*

129. La patria nei canti dei poeti italiani.
130. L'arte del vetro.
131. *Arnaldo da Brescia.*
132. Architettura classica.
133. Sant'Agostino.

134 e 135. Partimenti. — Regole musicali.

136. Consigli pratici.
137. *Dante Alighieri.*
138. *Raffaello Sanzio.*
139. Grammatica latina.
140. *Michel. Buonarroti.*
141. La logismografia.
142. *Vittorio Alfieri.*
143. Racconti morali.
144. *Benvenuto Cellini.*
145. Prose moderne.
146. Il piccolo Plutarco.
147. *Leonardo da Vinci.*
148. Studi sociali.
149. Il problema della casa.
150. La Nave.
151. I fiori e loro linguaggio.

Inviare l'importo alla CASA EDITRICE SONZOGNO - Milano

BIBLIOTECA DEL POPOLO

152. *Alessandro Manzoni.*
153. Ebanisteria.
154. *Carlo Cattaneo.*
155. Sant'Antonio da Padova.
156. Esplosivi in uso presso l'Esercito Italiano.
157. *Masaniello*
158. *Giovanni da Procida.*
159. *Umberto Biancamano.*
160. *Francesco Petrarca.*
161. I nostri monti.
162. La Xilografia.
163. Il carbone bianco.
164. Geografia astron. e fisica.
165. Il mondo antico.
166. *Ugo Foscolo.*
167. Gli Italiani in Russia.
168. Le 5 giorn. di Milano.
169. Storia della letteratura tedesca.
170. San Carlo Borromeo.
171. I molluschi.
172. *Cristoforo Colombo.*
173. Santa Teresa del Bambin Gesù.
174. *Niccolò Machiavelli.*
175. Storia della Polonia.
176. Manuale di vinicoltura.
177. San Vincenzo de' Paoli.
178. Gli antichi Germani e loro invasioni.
179. *Victor Hugo.*
180. Storia dell'Austria.
181. La letteratura Nord-Americana.
182. Elem. di Diritto Civile positivo.
183. Merceologia.
184. La guida dell'agricoltore.
185. Darwin e il Darwinismo.
186. La contabilità agricola
187. Storia d'Ungheria.
188. Gli agronomi celebri.
189. Man. di bachicoltura.
190. Moto e forza.
191. Trattatello di termologia.
192. L'elettricità in azione.
193. Storia d'Irlanda.
194. Manualetto di pollicoltura.
195. Allevamento del bestiame.
196. *Torquato Tasso.*
197. Apparecchi radiofonici a cristallo.
198. Anatomia umana.
199-200. La tubercolosi nei piccoli centri.
201. Storia della Chimica.
202. L'arte del porgere.
203. La Provincia nell'ordinamento degli Enti Autarchici.
204. Cori celebri.
205. Galvanoplastica.
206. Storia letterat. greca.
207-208. Contrappunto e Fuga.
209. Il mare.
210. Manuale di Telegrafia.
211. *Lodovico Ariosto.*
212. Storia della Bulgaria.
213-214. *Benito Mussolini.*
215. Economia applicata.
216. La vita di Maometto.
217. Grammatica-Vocabolario della lingua universale «Esperanto»
218. *Cicerone.*
219. *Giordano Bruno.*
220. Rivoluzione francese.
221. Elementi di ragioneria.
222. Stelle cadenti, ecc.
223. Fisiologia vegetale.
224. Metallurgia.
225. *Ettore Fieramosca.*
226. La Carta del lavoro.
227. Viticoltura nazionale.
228. Vita di Pietro il Grande
229-230. Sant'Ambrogio.
321. L'Islamismo nel passato e nel presente.
232. Vade-Mecum dell'italiano in Germania.
233. Virgilio.
234. Storia di un Secolo. — Fascicolo primo.
235. Id. — Fasc. secondo.
236. Id. — Fasc. terzo.
237. Id. — Fasc. quarto.
238. Esempi di corrispondenza francese.
239. Vade-Mecum dell'italiano in Francia.
240. La vita nell'età feudale.
241. Gaetano Donizetti.
242. I fiori. — Fascicolo I.
243. Idem. — Fascicolo II.
244. Pequeno manuale espanol-italiano.
245. San Filippo Neri.
246-247. L'ebanista.
248. San Francesco di Sales.
249. Il Piccolo Artista.
250. Gramm. portoghese.
251. L'Italie dans la poesie française contemp.
252. La Polizia Tributaria applicata ai Monopoli.
253. Trattato di prospettiva
254. Il Maestro della scuola obbligatoria.
255. I Commentarii della Guerra Civile.
256-257. La ceramica.
258-259. Passi per lo studio dell'Armonia.
260. Diritto Corporativo e Sindacale.
261-262. L'arte del Profumiere.
263. Indoratura, inargentatura e metalizz.
256-266. L'oreficeria.
264. Televisione.
267. Santa Caterina da Siena.
268. Storia del Socialismo — Parte antica.
270. Fibre tessili, stoffe.
271. La carta.
272. Il legno.
273. Illusioni ottiche.
275. Pequeno livre de leotura Portogueza.
277. *Bismarck.*
278. Elementi di filosofia.
279. Letteratura latina.
280. La Repubblica Romana del 1849.
281. Sintassi latina.
283. Primi elementi di numismatica generale.
284. Letteratura francese.
285. Vade-Mecum dell'Italiano in Inghilterra.
286. Letteratura greca.
288. Storia Nat. - I rettili.
289. Pirotecnica dei dilettanti.
290. *(In preparazione)*
291. *Giuseppe Verdi.*
292. Trigonometria piana.
293. I logaritmi spiegati.
294. Storia Belle Arti. Parte I. *L'Architettura.*
295. Idem. — Parte II. *La Scultura.*
296-297. Idem. — Parte III. *La pittura.*
298. Idem. — Parte IV. *La Musica.*
299. Insegnameno pratico dei lavori femminili
300. Compend. di pedagogia.
301. Storia della Stampa.
303. Il carbone fossile.
304. Storia della pedagogia
305. La Storia della Fisica.
306. Pizzi, *frivolitè e macramè.*
307. Antologia Mazziniana
309. Storia della Filosofia.
311-312. I Commentarii della Guerra Gallica.
310. Antichità greche.
313. Scienza delle Finanze.
314-315. La fisica del suono.
316. Sociologia Criminale.
317. Nuovi ed eleganti lavori femminili.
319. *Leone XIII.*
320. Del Conclave.
321. Lo spiritismo.
322. Antichità romane.
323. Storia orientale.
324. Dottrine Positiviste.
325. La filosofia di A. Schopenhauer.
326. Origine lingua italiana
327. Anatomia animale.

Inviare l'importo alla CASA EDITRICE SONZOGNO - Milano

BIBLIOTECA DEL POPOLO

328. Storia letterat. inglese.
330. Il Radio e la costituzione della materia.
331. L'origine dell'uomo.
332. Stregoneria e Occul.
333. Istituzioni medioevali.
334. Sintassi Italiana.
335. Le dottrine filosofiche di Gerbert Spencer.
336. Topo-cron. dantesca.
337. *(In preparazione).*
338. Il gioco degli scacchi.
339. Il nuovo Codice Penale illustrato. — Vol. I.
340. Storia del Medioevo.
341. La fabbric. dello zucchero di barbabietola.
342. *Giacomo Leopardi.*
343. Sociologia Spenceriana.
344-345. Il nuovo Codice Penale illustrato. — Volume II.
346. Compendio di Storia [Moderna.
347. Il cervello.
348. *(In preparazione).*
349. Micrografia vegetale.
350. I principî delle radiocomunicazioni.
351. *(In preparazione).*
352 e 353. L'A B C del montatore elettric.
354. Fisiologia Moderna.
355. Teorema di Pitagora.
356. *Niccolò Tommaseo.*
357. Ventilazione a riscaldamento (Parte I).
359. Federico Nietzsche e la sua Filosofia.
360. Elementi di Algebra.
361. Il razionalismo.
362. Grammatica greca antica. — Parte I.
363. Il materialismo.
364. *(In preparazione).*
365. Ventilazione e Riscaldamento (Parte II).
366. *(In preparazione).*
367-368. Giuochi di società.
369. Letteratura giapponese
370. L'Egitto antico.
372. Le carni alimentari.
373. Letteratura russa.
374. Geometria descrittiva.
375. *(In preparazione).*
376. Risoluz. delle equazioni di primo e sec. grado.
377. *(In preparazione).*
378. Manuale del ciclista.
380. Frasario d'affari italiano-inglese.
381. La teoria atomica.
382. Formulario di chimica inorganica. - Parte I
383. Idem. — Parte II.
384. *(In preparazione).*
385. Il libro dei giuochi.
386. Grammatica greca antica. — Parte II.
387. Il dilettante elettr.
388. La scherma di fioretto.
389. *(In preparazione).*
390. Storia delle Ferrovie.
391-392. Il futurismo.
393. *(In preparazione).*
394. Letteratura Francese contemporanea.
395. *(In preparazione).*
396. Lavoro Teneriffa. — Pizzi di Bruges, ecc.
397. Giurispr. veterinaria.
398. Elem. di stereometria.
399-400. Il Bridge.
401. Il gioco del biliardo.
403. La macchina dinamo-elettrica.
404-405. Prime nozioni di Geodesia operativa.
406. Letteratura Spagnuola.
407. *(In preparazione).*
408-409. Antidoti e Soccorsi d'urgenza.
410. *(In preparazione).*
411. *(In preparazione).*
412. Istituzioni di Diritto Romano.
413. Le malattie delle piante coltivate e rimedi.
414. Giuochi diversi.
415-416. L'Erbario.
417. L'allievo capomastro.
418. Nozioni di chimica org.
419-420. Rimedi nuovi.
422. Prospetto di tutte le coniugazioni franc.
424. Istit. di diritto civile.
425. Corrispondenza spagnuola-italiana.
426. Il soprannaturale.
427. *Giosuè Carducci.*
428. Geometria descrittiva.
429-430. Pratica del Canto in chiave di *Sol.*
431. La tramvia elettrica.
432. Calcolo differenziale: massimi e minimi.
433. Il Testamento. Sue forme. - Sua validità.
434. *(In preparazione).*
435. La macchina a vapore
436. La fotografia dei colori.
437. *(In preparazione).*
438. Manuale dei verbi della lingua italiana.
439. La Dottrina del Diritto Naturale.
440. Caccia e selvaggina.
441. Importanti applicazioni dei logaritmi.
442. Formulario di Chimica org. — Parte I.
443. Enigmistica.
444. Il problema dell'Universo nella filosofia
445. I primi elementi di analisi minerale.
446. Marte e l'ipotesi della sua abitabilità.
447. La filosofia della longevità.
448. L'Italia prima di Roma.
449. *(In preparazione.).*
450. L'essenza del marxismo.
451. La storia del Sole.
452-453. Dizionarietto delle forme verb. latino.
454-455. Princ. vocaboli del *Poliglotta* INGLESE.
456-457. Id. FRANCESE.
458-459. Id. SPAGNUOLO
460-461. Id. TEDESCO.
462. *(In preparazione).*
463. La filosofia del Diritto
464-465. La Radio elementare.
466. La Sociologia.
467-468. La navigazione aerea. — I. Areostati e Dirigibili.
469. Aree e volumi.
470. Raccolte e preparazioni zoologiche.
471. Metodo per mandolino napoletano.
472. Manualetto per l'emigrante in Europa.
473. Fotografia per tutti.
474-475. La Navigazione aerea. — II. Areoplani e macchine.
476. *(In preparazione).*
477. Vocabolarietto di termini filosofici.
479. L'essenza dell'anarchismo.
480-481. Petit résumé de syntaxe Française.
482. Gli Esquimesi.
484. *Leone Tolstoi.*
485-486. Il dilettante meccanico.
487. Fraseologia latina.
488. *(In preparazione).*
489. I secoli della letteratura italiana: Il Trecento.
490. Idem: Il Quattrocento.
491. La teoria e la prat. del trasporto musicale.
492. I sec. della lett. ital.: Il Cinquecento.
493. Il Commercio nell'antichità.
494. Manualetto d'ippica.
495. « La Divina Commedia » esposta al popolo: L'Inferno.
496. Le proiezioni ortogonali

Inviar l'importo alla CASA EDITRICE SONZOGNO - Milano.

BIBLIOTECA DEL POPOLO

497-498 La locomotiva a vapore moderna.
499. «La Divina Commedia» esposta al popolo: Il Purgatorio.
500. I secoli della letter. ital.: Il Seicento.
501. «La Divina Commedia» esposta al popolo: Il Paradiso.
502. La storia e la teoria dell'antica musica greca.
503. L'«Odissea» narrata al popolo. Parte I.
504. Apparecchi facili a costruirsi: 1.° Elettricità.
505. L'«Odissea» narrata al popolo. Parte II.
506. L'«Eneide» esposta al popolo. — Parte I.
507. Id. Id. — Parte II.
508. *(In preparazione).*
509. «La Gerusalemme liberata», esposta al popolo. — Parte I.
510. *(In preparazione).*
511. «La Gerusalemme liberata», esposta al popolo. — Parte II.
512. Formulario di chimica org. — Parte II.
513. Storia e antologia della letteratura turca.
514. L'«Iliade» esposta al popolo. — Parte I.
515. L'arabo parlato.
516. L'«Iliade» esposta al popolo. — Parte II.
517. Manuale di chimica analitica qualitativa per uso degli studenti.
518. Storia e antologia della letteratura araba.
519. Vade-Mecum del Saggiatore dei metalli preziosi.
520. Eccezioni fonetiche della lingua francese.
521. I secoli della letter. ital.: Il Settecento.
522. Teoria del regolo calcolatore e sue appl.
523. I secoli della letterat. ital. l'Ottocento.
524. Vade-Mecum dell'italiano in Giappone.
525. Nozioni di topografia pratica.
526. Storia degli Stati Uniti d'America.
527. Rimario della lingua italiana. — Vol. I.
528. Id. id. Vol. II.
530. La luce elettrica.
531. *(In preparazione).*
533. La Stenografia. — Volume I.
534. Idem — Vol. II.
535. Idem. — Vol. III.
536. Geometria analitica del piano e sue applicazioni.
537. Dizionarietto dantesco e sue applicazioni.
538. Trigonometria sferica.
539. Storia del risorgimento italiano.
540. I secoli della letteratura italiana: Il Periodo delle origini.
541. Elementi di costruzione delle macchine.
542. L'operaio meccanico.
543. Formulario completo di Computisteria e Ragioneria. — Vol. I.
544. Id. id. — Vol. II.
545. I fenomeni dell'ipnotismo e della suggestione.
546. *Riccardo Wagner*, la vita e le opere.
547. Prontuario delle forme del verbo latino.
548. *(In preparazione).*
549. La costruzione geometrica delle ombre.
550. Nozioni di statica grafica e sue applicaz.
551. Prontuario delle forme del verbo tedesco.
552. Monete d'oro e d'argento legali e false.
553. Prontuario delle forme del verbo francese.
554. Pile per usi domestici.
555. Accumulatori per usi domestici.
556. Lo Stato nella Sociologia Spenceriana.
557. Curiosità e sofismi matematici.
558. La Luce Elettrica domestica.
559. Storia Parlamentare della III Repubblica di Francia.
560. Disinfezione e disinfettanti. [inglesi.
561. Come coniugare i verbi.
562. Storia del pop. arabo.
563. L'aritmetica per gli adulti. - Parte I.
564. Id., id. - Parte II.
565. Id., id. - Parte III.
566. I fondamenti della Geometria di posizione.
567. Beethoven, la sua vita e le sue opere.
568. La lotta greco-romana.
569. La Cinematografia.
570. Canottaggio e nuoto.
571. Nozioni di idraulica.
572. Foot-ball.
573. Compendio di letteratura indiana.
574. Francesco Giuseppe e la storia di Casa d'Absburgo.
575. Applicazioni algebriche alla geometria piana e solida.
578. Trento e Trieste.
579. I terremoti e la sismologia.
580-581 Come si diventa telegrafisti e radiotelegrafisti.
582. Storia del Messico.
583. La Marina Militare Italiana nel 1915.
584. Storia del Belgio.
585. Leggi, usi e convenzioni della guerra moderna.
586. Storia di Spagna.
587. L'esercito Italiano.
588-589. Iniziamento alla teoria dei numeri.
590. Geomet. non-euclidea
591. Il Dispotismo.
592-593. Tesi di calcolo letterale.
594. Allevamento del coniglio e degli animali da cortile.
595. Storia dell'Albania fino al 1916.
596. Le caldaie a vapore marine.
597-598. Il mare Adriatico.
601. La motocicletta e il motociclista.
602. Elementi di telegrafia senza filo.
603. Dizionarietto Geografico Etimologico.
604. L'Automobile.
605. L'«Orlando furioso» esposto al popolo. — Parte I.
606. Idem. Parte II.
607. Idem. Parte III.
608. Idem. Parte IV.
609. Idem. Parte V.
610-611. La storia delle razze cavalline.
612-613. Idee di cosmogonia.
614. La sifilide.
615. La blenorragia.
616. La Casa di Savoia.
617. Frammenti di storia dell'astrologia.
618-619. La pesca meccanica.

Inviare l'importo alla CASA EDITRICE SONZOGNO - *Milano.*

620. Le malattie professionali.
621. Istruzione orale dei sordomuti.
622-623. Lo sviluppo storico delle forme animali.
624. La tisi polmonare e la sua moderna cura.
625. G. B. Molière e le sue opere.
626. L'essiccazione delle patate e di altri generi commestibili.
627. Il gergo nella società, nella storia, nella letteratura.
628. *Camillo Benso di Cavour.*
629. Conferenze popolari sulla tubercolosi.
630. Storia della scrittura.
631. Il Benzolo, il Toluolo e gli esplosivi derivanti
632-633. Fari e segnali marittimi.
634. *Carlo Goldoni.*
635. Nozioni sulla resistenza dei materiali.
636. Dizionario degli Autori italiani, latini e greci.
637 Sezioni coniche.
638-639. L'industria del freddo.
640-641. Nozioni e curiosità araldiche.
642. La fabbricazione dell'acciaio al forno Martin.
643-644. Prontuario dantesco.
645-646. Calcolo infinitesimale, - Parte I, *Calcolo differenziale.*
647. Idem. Parte II, *Calcolo integrale.*
648. Elementi di costruzioni in cemento armato.
649. La patria dell'uomo.
650. Compendio di letteratura italiana.
651. I motori d'aviazione.
652. Malattie e rimedi.
653. Formulario per il tornitore meccanico
654. Esercizi sulla resistenza dei materiali.
655. *Federico Mistral e "Mirella".*
656. *Galileo Galilei.*
657. Sunti di didattica.
658. Gli ingranaggi.
659-660. I «promessi sposi» esposti al popolo.
661. Misure elettriche pratiche.
662. I motori a scoppio nell'agricoltura.
663. I contatori elettrici a induzione.
664-665. Costruzioni in ferro.
666-667. Piccolo voca[...] commerciale i[...] tro lingue.
668. Breve corso di [...] economica. - V[...] Nozioni gene[...]
669. Id. Vol. II - Dell[...]
670. Id. Vol. III - L'E[...]
671. Id. Vol. IV - L'A[...]
672. Id. Vol. V - L'As[...]
673. Id. Vol. VI - L'A[...]
674. Corso Elementa[...] gebra - Vol.
675. Id. - Vol. II.
676. Id. - Vol. III.
677. Id. - Vol. IV.
678. Id. - Vol. V.
679-680. Geometria [...] tare. - Vol. [...]
681-682. Id. - Vol. [...]
683-684. Id. - Vol. [...]
685. La tenuta dei [...] scrittura se[...] doppia. - Vo[...]
686. Id. - Vol. II.
687. Antologia dell[...] moderna - Vol[...] ta commerci[...]
688. Idem. Vol. II [...] dustriale. [...]
689. Idem. Vol. III - [...]
690. Idem. Vol. IV - [...] ciale.

UNA BIBLIOGRAFIA GRAT[...]

di libri di coltura popolare, romanzi, poemi, racconti di via[...] opere classiche, si ha nel *Catalogo della Casa Editrice Sonzo[...]* che *chiunque* può avere *gratis*, inviando all'Amministrazio[...] in Milano - Via Pasquirolo, 14 - un semplice biglietto, [...] nome e indirizzo, in busta aperta affrancata con 5 centesi[...] con su scritto: *Ordinazione Libraria.*

Il Catalogo Sonzogno

contiene l'elenco completo dei volumi pubblicati nelle cel[...] Raccolte Sonzogno:

Romantica Mondiale Sonzogno.
Collezione dei Grandi Autori.
I Grandi Romanzi d'amore.
Letteratura moderna italiana e straniera.
La biblioteca tascabile.
La biblioteca del popolo.
Le biblioteche tecnico-scientifiche.
La biblioteca universale.
La biblioteca classica econo[...]
La biblioteca classica illus[...]
La collezione Sonzogno.
I romanzi polizieschi[...]

Inviare l'importo alla CASA EDI[...]

AUMENTO
sul prezzo di copertina 5% 25 febb. 1940-XV[...]
Determinazione Ministero Corpora[...]
Casa Editrice Sonzogno — [...]