

PROPA-
GANDA
D'ISTRU-
ZIONE

BIBLIOTECA DEL POPOLO.

◀ CENTESIMI 80 IL VOLUME ▶

Volume doppio. — L. 1,60

A. LOPERFIDO

PRIME NOZIONI

DI

Geodesia Operativa

Ogni volumetto consta di 64 pagine di fitta composizione e contiene un completo trattatello elementare di scienza pratica, di cognizioni utili ed indispensabili, dettato in forma popolare, succinta, chiara, alla portata di ogni intelligenza.

CASA EDITRICE SONZOGNO
della Società Anonima ALBERTO MATARELLI
Via Pasquirolo, 14 - MILANO

BATTAGLINI

VOLUME

404
405

MANUALI TECNICI SONZOGNO

(già BIBLIOTECA DI "SCIENZA PER TUTTI,")

Sono manuali teorici e pratici insieme, compilati da competenti, i quali, oltre che dallo studio, hanno acquistato capacità d'insegnamento e di volgarizzazione dall'esperienza quotidiana nelle officine e nei laboratori.

Volumi pubblicati:

1. **IL FENOMENO DELLA VITA.** Opera premiata al Concorso internazionale di «Scienza per Tutti» di ANTONINO CLEMENTI Prezzo L. 4.—
2. **PAGINE DI BIOLOGIA VEGETALE** (*Antologia Delpiniana*) del Prof. FR. NICOLOSI-RONCATI, 28 illustraz., 1 tav. Prezzo L. 4.—
3. **LA RICOSTRUZIONE DELLE MEMBRA MUTILATE** del Prof. G. FRANCESCHINI, 71 illustraz., 1 tav. Prezzo L. 4.—
4. **I PIU' SIGNIFICATIVI TROVATI DELLA CITOLOGIA** del Dott. R. GALATI MOSELLA, 80 allustraz., 1 tav. Prezzo L. 4.—
5. **I CIBI E L'ALIMENTAZIONE**, D.r A. ANGIOLANI Prezzo L. 4.—
6. **LE RECENTI CONQUISTE DELLE SCIENZE FISICHE** di DOMENICO RAVALICO, 61 illustraz. 1 tav. Prezzo L. 4.—
7. **LA CHIMICA MODERNA** (*Teorie fondamentali*) del Dott. ARCEO ANGIOLANI (vol. doppio) Prezzo L. 8.—
8. **PRINCIPII DEL DISEGNO ARCHITETTONICO** del Prof. GIUSEPPE ODONI, 24 illustrazioni Prezzo L. 3.—
9. **L'AUDION E LE SUE APPLICAZIONI** di EMILIO DI NARDO, 98 illustrazioni Prezzo L. 4.50
10. **LE LECHE INDUSTRIALI DEL FERRO** del Dott. A. ANGIOLANI, con 45 illustrazioni Prezzo L. 6.—
11. **LA CONQUISTA DELL'ARIA** dell'Ing. P. A. MADONIA, con 56 illustrazioni Prezzo L. 4.—
12. **ELEMENTI DELLE MACCHINE** dell'Ing. P. A. MADONIA, con 122 illustrazioni Prezzo L. 5.—
13. **FERROVIE AEREE** (*Teleferiche*) dell'Ing. F. BARBACINI, con 204 illustrazioni Prezzo L. 7.—
14. **L'AUTOMOBILE** - Ing. A. PISELLI Prezzo L. 5.—
15. **CINEMATICA DEI MECCANISMI** - Ing. A. UCCELLI, con 112 illustrazioni Prezzo L. 6.—
16. **MACCHINE ELETTRICHE** - Ing. A. MADERNI, con 233 illustrazioni Prezzo L. 10.—
17. **MACCHINE UTENSILI** - Ing. A. NANNI, 108 ill. Prezzo L. 6.—
18. **MANUALE TEORICO-PRATICO DI RADIOTECNICA**, - Ing. A. BANFI con 176 illustraz. e 3 tavole fuori testo. Prezzo L. 10.—
19. **MANUALE DI COSTRUZIONE DI GALLERIE** - Ing. ENZO LOLLINI, con 49 illustrazioni Prezzo L. 6.—
20. **IL PERICOLO NEISSER** (*Conseguenze e cura della BLENORRAGIA*) - Dott. ANTONIO Pozzo, con 21 illustrazioni e 2 tavole a colori fuori testo Prezzo L. 5.—

Inviare Cart.-Vaglia alla Casa Editrice Sonzogno, Milano (104)
Via Pasquirolo, 14.

BIBLIOTECA DEL POPOLO
Volume doppio. — L. 1,60.

A. LOPERFIDO

PRIME NOZIONI DI
GEODESIA OPERATIVA



CASA EDITRICE SONZOGNO — MILANO
della Società An. ALBERTO MATARELLI
Via Pasquirolo, 14

—————
PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA.
—————

Finito di stampare il 15 ottobre 1928.

Stabilimento Grafico Matarelli della Soc. An. ALBERTO MATARELLI
Milano (104) - Via Passarella N. 15. - *Printed in Italy.* 10-28-3

PREFAZIONE

Si può dire poco, in poche lezioni, di una vasta scienza come la geodesia; ma la difficoltà maggiore è quella della precisa raccolta, non ambigua, di tante notizie, non escluse quelle di natura storica, relative ai metodi con cui la scienza realizza i suoi diversi scopi.

Ho cercato di attenermi, per quanto potevo, al pauca sed perfecta; e con ogni ragione, senza mai nulla ammettere in modo assoluto, vennero esposte utili nozioni per chi deve lavorare nel campo delle forze terrestri.

Non altro per ora.

A. LOPERFIDO.

PRIME NOZIONI DI
GEOGRAFIA
PRIME NOZIONI DI
GEOGRAFIA

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA.

Finito di stampare il 15 ottobre 1928.

Stabilimento Grafico Matarelli della Soc. An. ALBERTO MATARELLI
Milano (104) - Via Passarella N. 15. - *Printed in Italy.* 10-28-3

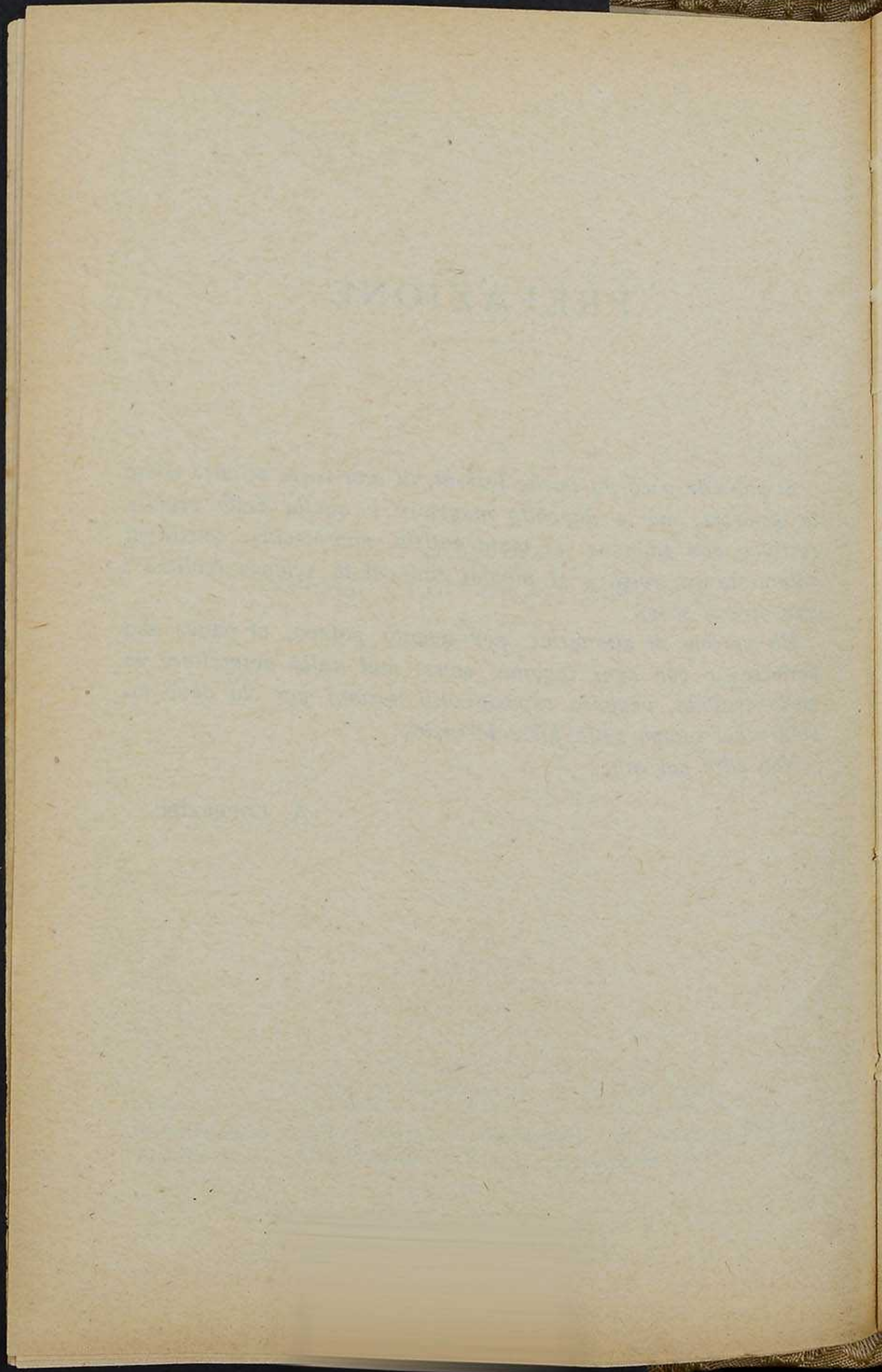
PREFAZIONE

Si può dire poco, in poche lezioni, di una vasta scienza come la geodesia; ma la difficoltà maggiore è quella della precisa raccolta, non ambigua, di tante notizie, non escluse quelle di natura storica, relative ai metodi con cui la scienza realizza i suoi diversi scopi.

Ho cercato di attenermi, per quanto potevo, al pauca sed perfecta; e con ogni ragione, senza mai nulla ammettere in modo assoluto, vennero esposte utili nozioni per chi deve lavorare nel campo delle forze terrestri.

Non altro per ora.

A. LOPERFIDO.



PRIME NOZIONI DI
GEODESIA OPERATIVA

PRIME MOUNTAIN
GEOGRAPHICAL

NOZIONI PRELIMINARI.

Le scienze sperimentali che fanno capo alla geometria terrestre, esplicano la loro attività tracciando grandi e piccoli allineamenti, onde sono distinti i seguenti campi: *astronomico*, quando il punto mirato appartiene alla sfera celeste; *geodetico*, quando si tratta di collegare due punti della superficie terrestre alla distanza non maggiore di 200 chilometri; *campo balistico*, quando è lanciato un proiettile con una prestabilita velocità iniziale allo scopo di superare distanze anche di 100 e più chilometri, e *campo topografico*, che non oltrepassa i 15 chilometri. In ogni caso l'allineamento resta determinato con misure angolari e lineari. Alla prima misura è attribuito il nome di *grandezza vettoriale*, alla seconda quello di *grandezza scalare*. Le misure angolari sono conseguite, almeno nel campo della geometria terrestre, sempre direttamente; le quantità scalari possono derivare o da operazioni dirette ovvero anche indirettamente. Bisogna dunque considerare strumenti goniometrici e apparati longimetri.

Il piano verticale che contiene l'allineamento incontra la superficie della terra, concepita geometricamente, secondo una linea che si chiama *sezione normale* e che, per approssimazione, noi considereremo come linea di *minimo percorso* o *geodetica*.

Sul piano l'immagine della geodetica è la linea retta; sopra la superficie terrestre sarà quella di una linea che in ogni punto ha comune la normale con la superficie stessa a cui appartiene. Sulla sfera, essa rappresenta un arco di circolo massimo che non supera la semicirconferenza. Questo concetto della geodetica si armonizza col principio della minima azione. Per ogni geodetica della terra occorre dunque almeno una mi-

sura angolare e quella della sua lunghezza — e qui bisogna spiegare la nozione delle grandezze vettoriali.

La misura di un angolo è considerata nella sua amplitudine, ovvero analiticamente; nel primo caso indica il numero di gradi, minuti primi e secondi contenuti nell'arco compreso fra i lati ed appartenente al circolo avente per centro il vertice dell'angolo, e si chiama *misura geometrica*; nell'altro, invece, la misura dell'angolo è uguale al rapporto fra la lunghezza del medesimo arco ed il raggio, e si chiama *misura analitica*. La misura geometrica è sempre diretta ed è la più notevole, perchè consentanea all'uso che ne fa la scienza, mentre la misura analitica, rispetto alla prima, rappresenta un metodo di misura indiretta.

Misura degli angoli.

La relazione algebrica fra le due misure si può ottenere nel seguente modo:

È noto che fra l'amplitudine α di un angolo e l'arco s del circolo avente per raggio r esiste la relazione:

$$\alpha : s = 360^\circ : 2\pi r$$

da cui:

$$\alpha = \frac{s}{r} \frac{180^\circ}{\pi}$$

L'angolo $\frac{180^\circ}{\pi}$ è costante e rappresenta, all'incirca, un angolo di 57° a cui è attribuito il nome di *radiante*; per tale caratteristica può essere assunto come unità di misura; quindi ponendo:

$\frac{180^\circ}{\pi} = \frac{1}{\text{arc } 1^\circ}$ (amplitudine dell'arco la cui lunghezza è uguale al raggio) avremo:

$$\alpha = \frac{s}{r \text{ arc } 1^\circ}$$

e conseguentemente: $\frac{s}{r} = \alpha \text{ arc } 1^\circ$.

Si può anche considerare il radiante espresso in minuti primi e secondi e avremo :

$$\alpha' = \frac{s}{r \text{ arc } 1'} \qquad \frac{s}{r} = \alpha' \text{ arc } 1'$$

$$\alpha'' = \frac{s}{r \text{ arc } 1''} \qquad \frac{s}{r} = \alpha'' \text{ arc } 1''$$

Queste relazioni sono utilissime specialmente nel calcolo delle serie usate nell'astronomia e nella geodesia.

Nozione della parallasse, con riferimento al sistema solare.

Le conseguenti uguaglianze :

$$s = r \alpha^{\circ} \text{ arc } 1^{\circ}$$

$$s = r \alpha' \text{ arc } 1'$$

$$s = r \alpha'' \text{ arc } 1''$$

servono a determinare la lunghezza dell'arco in funzione dell'angolo al centro, detto *angolo parallattico* o semplicemente *parallasse*.

La nozione di parallasse conduce anche all'accertamento della distanza, perchè, come nel caso del nostro sistema solare, la parallasse rispetto alla Terra essendo di $8'',80$ (angolo sotto cui dal centro del Sole è visto il semiasse equatoriale r) avremo :

$$r = \Delta \alpha \text{ arc } 1'' = \Delta \cdot 8'',80 \text{ arc } 1''$$

(Δ distanza del Sole dal centro della Terra), quindi :

$$\Delta = \frac{r}{8'',80 \text{ arc } 1''}$$

Essendo : $\frac{1}{\text{arc } 1''} = 206264'',8$ si deduce :

$$\Delta = 23439 \cdot r$$

ossia circa 149 milioni e mezzo di chilometri.

Allo stesso modo possiamo determinare il raggio del disco

solare che così risulta di circa 109,3 raggi terrestri pari a 697 000 chilometri, perchè, indicando con δ il diametro apparente del Sole ed R il suo raggio, si ottiene :

$$R = \Delta \frac{\delta}{2} \text{ arc } 1'', \text{ dove } \delta = 961'',8$$

La parallasse solare è determinata col passaggio di Venere sul disco del Sole od anche con altri metodi. Il passaggio di Venere sul disco solare dovrebbe accadere ad ogni rivoluzione sinodica, cioè con l'intervallo di 586 giorni; ma a causa dell'inclinazione dell'orbita del pianeta su quello della Terra di

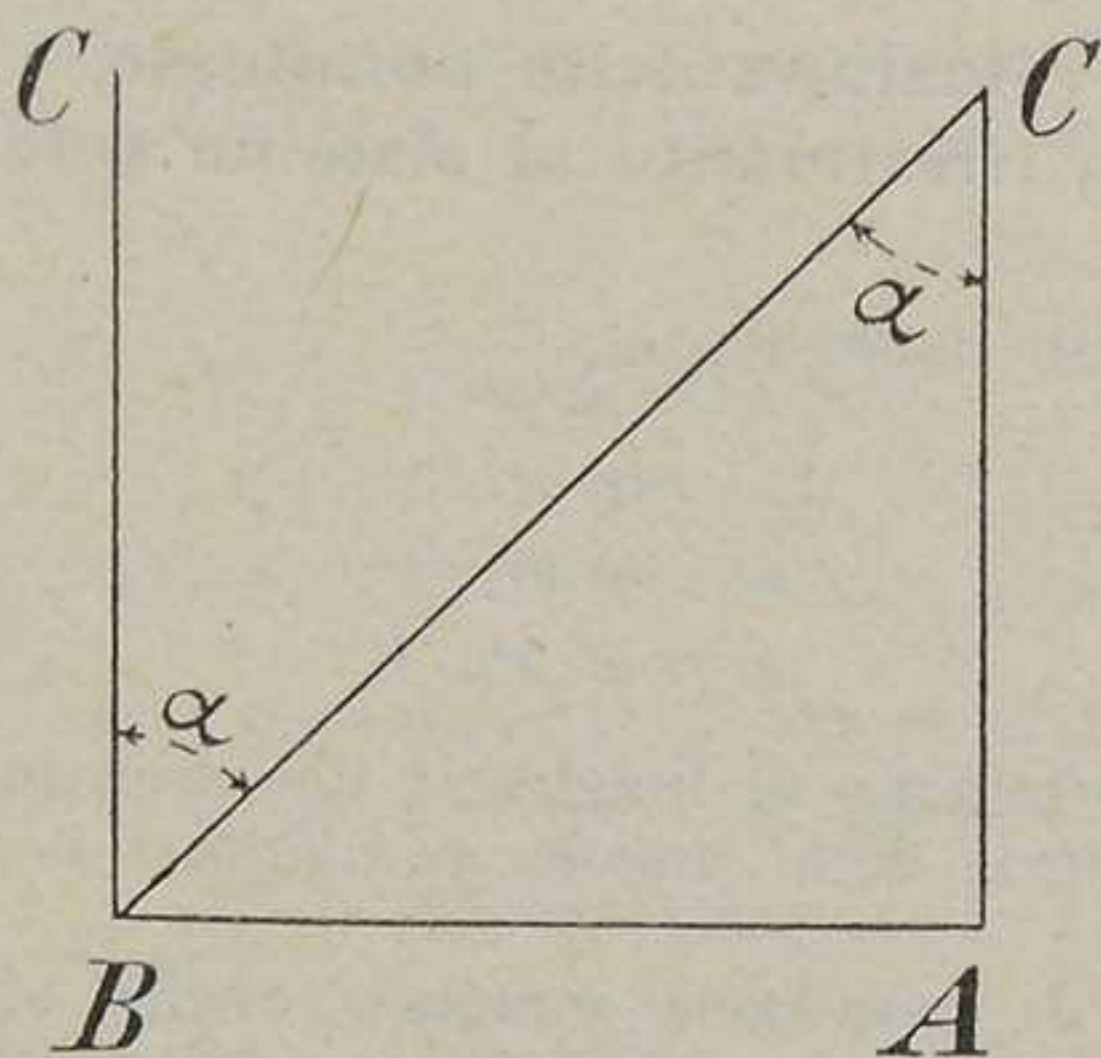


Fig. 1.

circa $30^{\circ},5$ e della distanza di Venere dall'orbita stessa della Terra, il fenomeno si verifica con diversa previsione.

L'ultimo passaggio di Venere risale al 6 dicembre 1882; il prossimo avvenimento analogo si dovrà verificare l'8 giugno 2004 e successivamente, dopo 8 anni, il 6 giugno 2012, l'11 dicembre 2117 e l'8 dicembre 2125.

La misura della parallasse di un oggetto terrestre C rispetto a due centri di osservazione prestabiliti: A e B , si può ottenere così :

Supponiamo che la distanza AB sia quella di un regolo trasportabile e suscettibile perciò di essere adagiato in modo che il punto C venga a trovarsi sulla perpendicolare AC ad AB ;

in *B* sia anche applicato un circolo graduato, allo scopo di realizzare la misura geometrica dell'angolo α . Si potrà così determinare anche la distanza del punto *C* da *A* e da *B*.

Su questo principio è fondato il telemetro ad angolo parallattico variabile ed il metodo per la misura diretta degli allineamenti topografici. Se non che, in quest'ultimo caso, l'angolo α è misurato direttamente sul punto *C*.

Vi sono però telemetri ad angolo parallattico costante, come la diottra topografica ed il teodolite topografico, nelle due forme di tacheometro e cleps; ma questo problema, che involge la misura indiretta delle distanze, viene trattato ampiamente nella teoria degli strumenti diottrici centrati.

Con la nozione della parallasse, noi dunque perveniamo alle dimensioni del sistema solare, giacchè, riferendoci all'anno della Terra, si ha che il cubo della distanza media di un pianeta, rispetto al Sole, è proporzionale al quadrato della sua rivoluzione intorno al Sole stesso.

Ad esempio, l'anno di Giove, rispetto a quello della Terra, preso come unità, è 11,8; il quadrato di questo numero è 139,24; la sua radice cubica è precisamente 5,18; quindi la distanza media di Giove dal Sole è di circa 776 milioni di chilometri.

Le distanze planetarie così risultanti formano una progressione geometrica col primo termine uguale a 3 e la ragione uguale a 2. Questa legge, intuita prima dal matematico Titius e poi dall'astronomo Bode, esprime dunque le distanze progressive da Mercurio a Saturno in questa maniera:

Mercurio	Venere	Terra	Marte	Giove	Saturno
0	3	6	12	48	96

Ora, essa non può essere attribuita al caso, giacchè consegue dalla condensazione progressiva della nebulosa solare, a sua volta proporzionale al tempo, di guisa che le distanze planetarie indicano il tempo che corre da una formazione alla successiva, ed ecco perchè apparve la lacuna fra Marte e Giove, oggi colmata con la scoperta degli asteroidi.

La misura diretta di una linea tracciata sulla superficie della Terra si può ottenere col semplice confronto rispetto ad un campione determinato: il metro, la doppia tesa, il klafter. Tra queste tre lunghezze è conosciuto il rapporto, di guisa che l'opportuno ragguaglio non offre alcuna difficoltà.

Ciò che invece può dar luogo a controversia è precisamente il metro campione, poichè la lunghezza del meridiano terrestre non è costante nel tempo e nello spazio, e quindi il metro campione perde la qualità intrinseca di unità di misura.

Fin dal 1861 Padre Secchi — il grande astronomo italiano — aveva proposto di riferirsi a qualche cosa di più stabile. Michelson realizzò questo concetto con la misura delle radiazioni luminose invariabili nel tempo e nello spazio. Oggi noi abbiamo il riferimento del metro alle radiazioni del cadmio, onde i postulati sperimentali non sono più discutibili.

Il metodo più logico per la misura diretta delle linee è quello ottico, nel quale è utilizzato il *cannocchiale panfocale*, a cui fa riscontro il *plesiotoscopio*, strumento diottrico centrato, destinato alla visione di oggetti vicini e lontani, ossia microscopio composto e cannocchiale nello stesso tempo.

Nel campo topografico ed in quello della balistica esterna, la misura diretta delle lunghezze si può anche conseguire con la nozione dell'angolo parallattico, precisamente come nel caso della distanza fra la Terra ed il Sole.

Equazioni delle curve di 2° grado.

Tutto ciò che abbiamo fin qui accennato sarà meglio sviluppato in seguito; per ora dobbiamo fermarci a considerare la forma che può avere l'allineamento nello spazio accessibile alle nostre misure — e perciò occorrono le seguenti nozioni:

Il segmento AB invariabile si muove appoggiando i termini a due assi cartesiani ortogonali; allora ogni suo punto descriverà una curva la quale può essere definita così. Si assuma: $AC = b$; $CB = a$ e si ponga $\hat{A}BO = \alpha$; e siano $OA_1 = CD = x$, $A_1C = y$ le coordinate del punto C . Si avrà:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \operatorname{sen} \alpha \\ y &= b \operatorname{cos} \alpha \end{aligned} \right\} (1)$$

Da queste due equazioni si ricava:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

la quale caratterizza l'ellisse; a e b rappresentano i due semiassi; quindi le (1) sono le equazioni *parametriche*. Quando

$a=b$, nel qual caso C è il centro del segmento AB , allora si ottiene l'equazione del circolo, cioè :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Il circolo dunque rappresenta una varietà dell'ellisse; e poichè all'ellisse occorrono due parametri a e b per essere

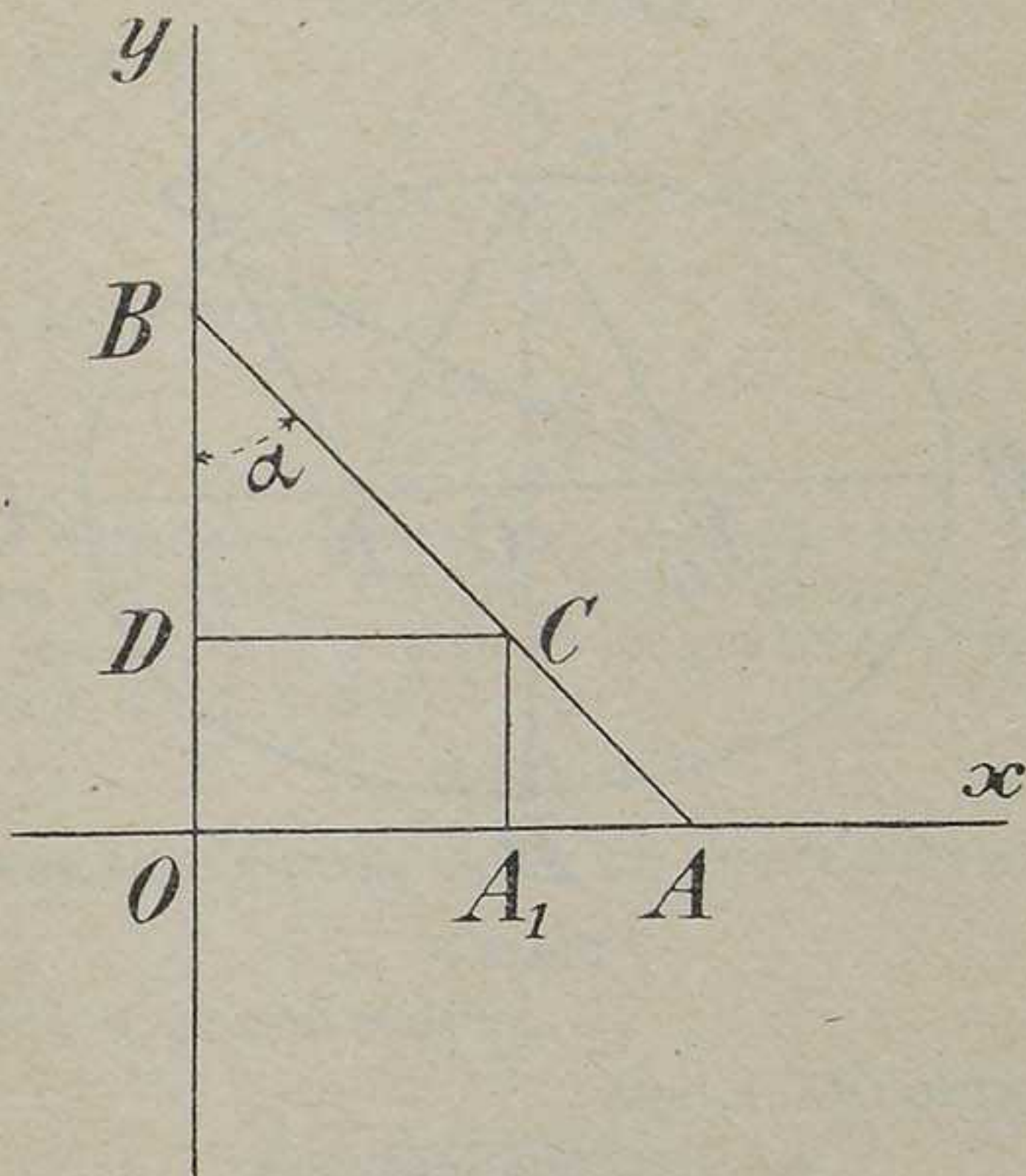


Fig. 2.

determinata in modo unico, ed al circolo uno solo, così la moltitudine delle ellissi è assai più numerosa di quella dei circoli. L'ellisse può dunque cambiare di forma e grandezza, il circolo invece cambia in grandezza e mai in forma. L'ellisse, come il circolo, è una linea chiusa intorno ad un centro di simmetria, perchè l'equazione (2) sussiste anche per valori negativi di x e di y ; ma sull'asse maggiore di essa, ad ugual distanza dall'accennato centro di simmetria, esistono due punti,

i quali, per analogia ad alcune proprietà dell'energia raggiante, sono chiamati *fuochi*. La distanza di ognuno di essi dal centro si chiama *eccentricità lineare* e s'indica con c ; mentre il rapporto $\frac{c}{a} = e$ è detto *eccentricità numerica*.

Ora la somma dei raggi vettori PF e PF_1 , è sempre uguale all'asse maggiore $2a$, dunque per il termine C dell'asse minore si avrà :

$$CF = CF_1 = a$$

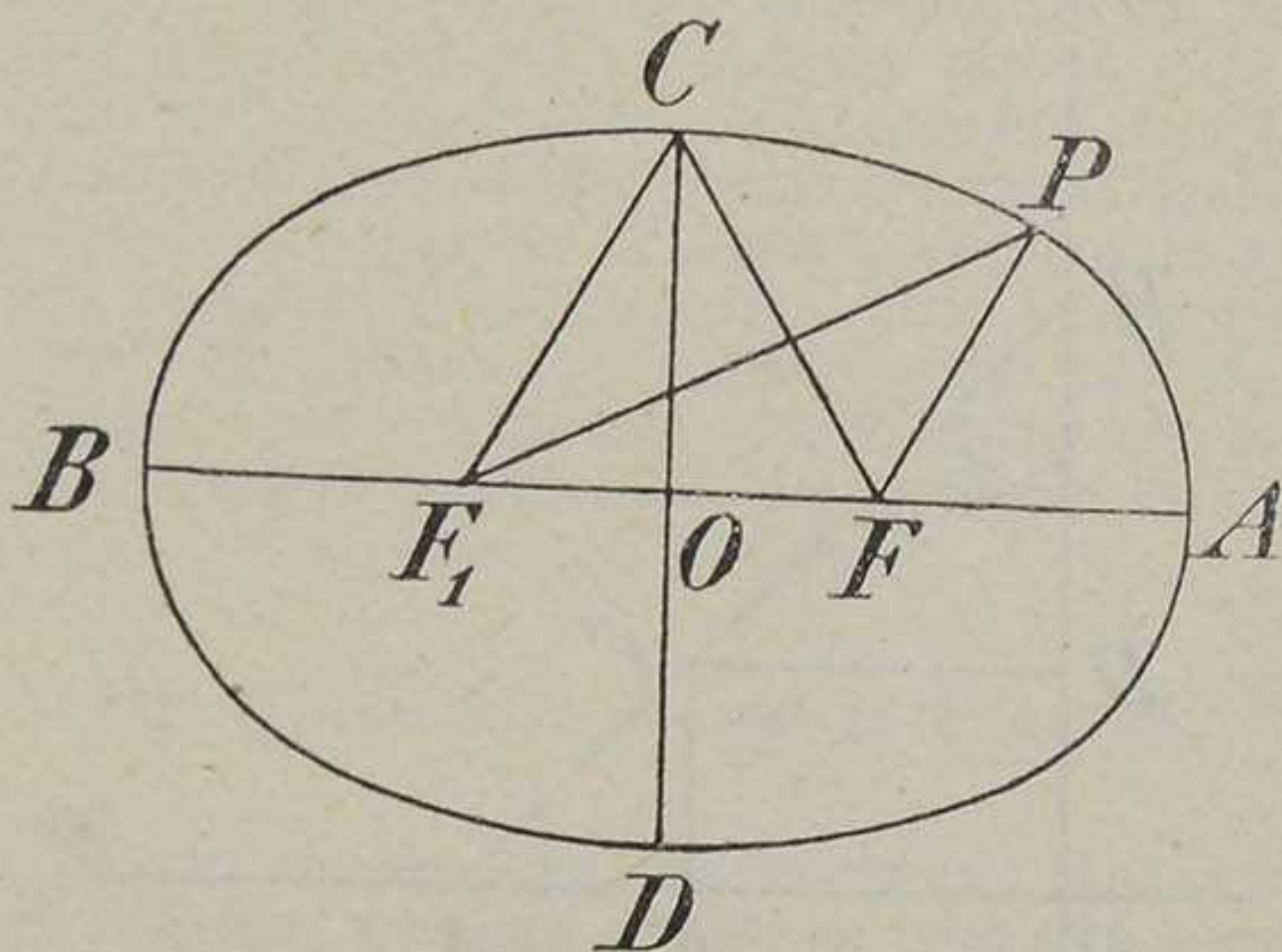


Fig. 3.

quindi, essendo $OC = b$, sarà :

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

e perciò :

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

da cui :

$$\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2$$

Conseguentemente l'equazione (2) diventa :

$$x^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = a^2$$

Adunque i parametri dell'ellisse possono anche essere a ed e , mentre per passare dall'equazione del circolo a quella dell'ellisse, basta moltiplicare l'ordinata per $\frac{b}{a}$.

Se invece delle (1) si considerano queste due equazioni:

$$x = \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} ; y = b \operatorname{cotg} \alpha,$$

potremo dedurre:

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} ; \frac{y^2}{b^2} = \operatorname{cotg}^2 \alpha$$

e quindi, per sottrazione:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Questa equazione caratterizza l'iperbola, che, per essere individuata sul piano, richiede, come l'ellisse, due parametri e quindi anch'essa può cambiare in grandezza e forma.

Quando $a=b=1$, si avrà:

$$x^2 - y^2 = 1$$

che rappresenta l'iperbola equilatera, mentre l'equazione:

$$x^2 + y^2 = 1$$

rappresenta il circolo unitario.

Funzioni iperboliche.

Dall'equazione del circolo deriva, come è noto, la relazione fondamentale di trigonometria:

$$\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1$$

e da quella dell'iperbole equilatera:

$$x^2 - y^2 = 1,$$

scaturisce la nozione delle funzioni iperboliche.

Perchè essendo:

$$(x+y)(x-y) = 1,$$

si può assumere :

$$(x + y) = e^u$$

$$(x - y) = e^{-u}$$

da cui :

$$x = \frac{1}{2} (e^u + e^{-u})$$

$$y = \frac{1}{2} (e^u - e^{-u})$$

La prima definisce il coseno iperbolico che si indica con *Chu* e la seconda invece il seno iperbolico, indicato col simbolo *Shu*; quindi :

$$Ch^2u - Sh^2u = 1$$

Il rapporto fra seno e coseno iperbolici, che si rappresenta con *Thu*, sarà la tangente iperbolica, cioè :

$$Thu = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$$

Il rapporto inverso caratterizza la cotangente iperbolica. L'argomento *u* è connesso anche alla latitudine geografica, la quale prende allora il nome di *amplitudine iperbolica*, mentre *u* si dice latitudine crescente utilizzata nella costruzione delle carte nautiche, col metodo di Mercatore.

Se, infine, consideriamo la curva (parabola) :

$$y^2 = 4px$$

la quale ha la proprietà di avere i suoi punti equidistanti da una retta *d* (direttrice) e da un punto *F* (fuoco) potremo constatare che essa non ha più centro di simmetria ed è ad un solo fuoco — come il circolo ha un solo parametro — e quindi può variare in grandezza, ma non in forma. I proiettili nello spazio vuoto, o in elementi resistenti, quando abbiano piccola velocità iniziale e siano molto pesanti, seguono una parabola. Il circolo e la parabola, l'ellisse e l'iperbola, come la retta ed il piano, sono forme geometriche pure, perchè possono essere descritte in un solo modo e con la medesima regola; ma la retta ed il piano non hanno parametri, perchè procedono con uniformità nel loro illimitato sviluppo.

Si può dimostrare che la parabola è il limite verso cui ten-

dono l'ellisse e l'iperbola quando si supponga invariabile la distanza di un fuoco dall'apside più vicino, e mobili indefinitivamente il centro e l'altro fuoco. Si avrà nel caso dell'ellisse :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

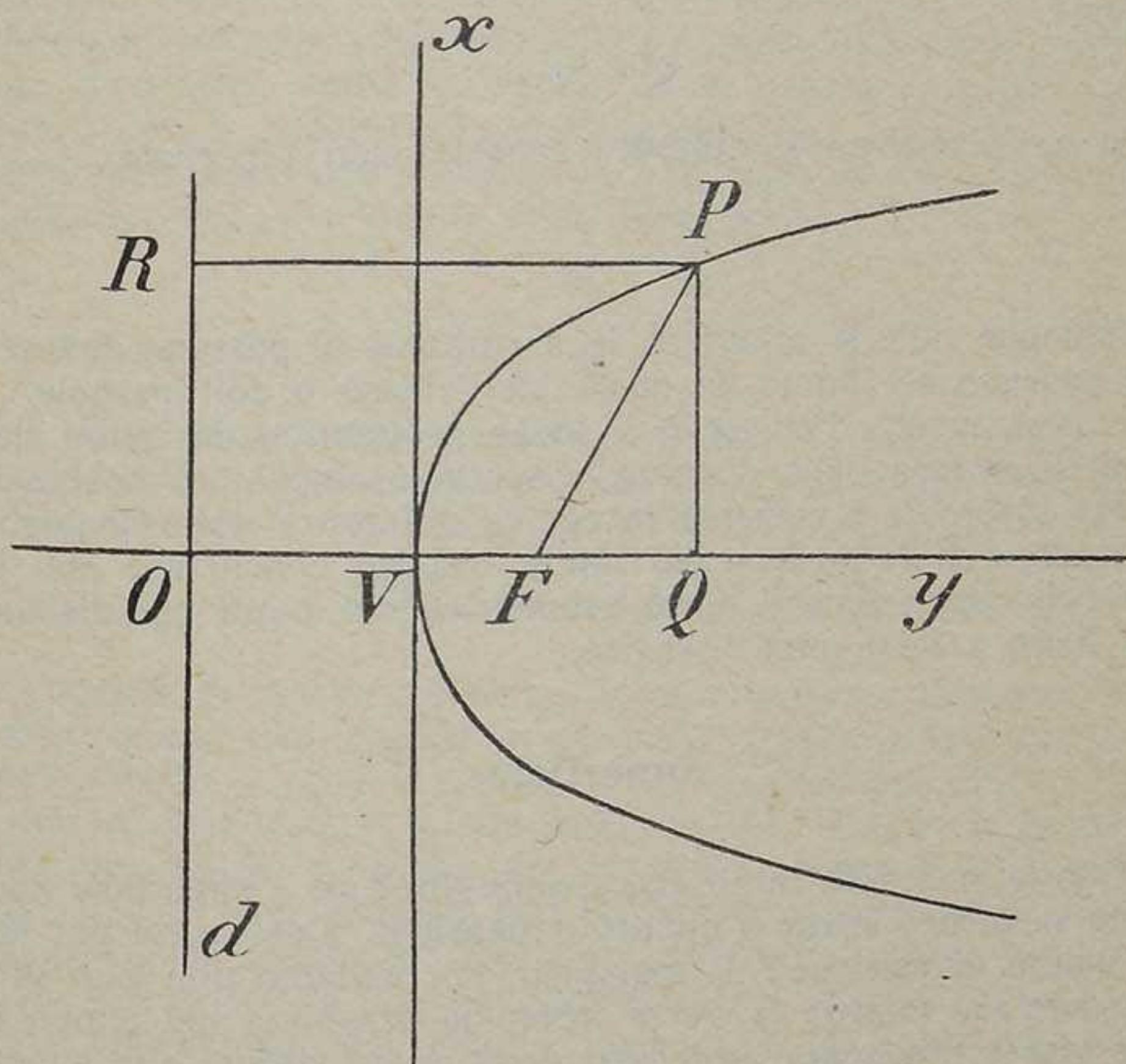


Fig. 4.

e, trasportando l'origine delle coordinate all'apside fisso :

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

da cui :

$$y^2 = \frac{2b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2$$

Ora,

$$a(1-e) = \frac{p}{2}$$

così, al limite, si avrà :

$$\frac{b^2}{2a} = \frac{p}{2} \quad ; \quad \frac{b^2}{a^2} = 0$$

quindi :

$$y^2 = 2px$$

In modo analogo si dimostra considerando l'iperbola :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Adunque tutte le proprietà della parabola si possono dedurre col concetto del limite da quelle dell'ellisse o dell'iperbola.

E così, mentre l'ellisse è il luogo geometrico dei punti dei quali la somma delle distanze, rispetto ai fuochi, è costante, e per l'iperbola è costante invece la differenza delle analoghe distanze, con la nozione del limite bisogna concludere che la parabola rappresenta il luogo geometrico dei punti equidistanti dal fuoco e dalla retta direttrice.

Superficie.

Con la medesima intuizione si può giungere a superficie adagiate su di uno spazio a quattro dimensioni. Quale sarà per noi la quarta dimensione? Il mondo in cui viviamo non può prescindere dal tempo; la Terra insomma organizza nel tempo la sua vita e l'esistenza medesima degli esseri diffusi alla superficie, avvinta dai cicli di evoluzione, di cui la topografia costituisce i documenti storici. Il tempo dunque sarà la quarta dimensione, onde il mondo nostro diventa tetradimensionale. Il topografo però sopprime una dimensione nella rappresentazione delle plaghe terrestri sul piano cartesiano, ma resta sempre il tempo, per cui se potesse essere realizzata la cronofotografia, noi vedremmo spiccare le montagne dall'oceano e ruscellare i mari attraverso i continenti, ossia raccolta, come in una successione cinematografica, la storia delle formazioni geografiche.

Ciò premesso, nella genesi della sfera, la sua equazione sarà :

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (3)$$

onde la sfera è anche una forma geometrica pura ad un solo parametro.

Facendo ruotare l'ellisse intorno ad uno dei suoi assi, per esempio l'asse minore, nasce un'altra superficie che si chiama *ellissoide rotondo*, ugualmente forma geometrica pura, ma con due parametri, come l'ellisse, che la genera. La sua equazione, con la medesima considerazione che giustifica il passaggio dall'equazione del circolo a quella dell'ellisse e dall'equazione del circolo a quella della sfera, sarà :

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{1 - e^2} = a^2 \quad (4)$$

a è il semiasse maggiore dell'ellissoide, e l'eccentricità.

L'esperienza prova che, nel suo insieme, la superficie della Terra differisce poco da quella di un ellissoide; per cui :

$$a = 6377397 \text{ m} , e = 0,0816$$

Tuttavia la teoria dimostra che la superficie dinamica della Terra, quella che specificano le acque oceaniche in pieno equilibrio stabile — ossia il geoide — non può adattarsi all'ellissoide, e così si manifestano quelle deviazioni che assume la geodesia per una logica soluzione del problema connesso alla forma del pianeta, e la geologia per illustrare le ipotesi sulla disposizione delle masse all'interno ed all'esterno della Terra.

Prescindendo da queste considerazioni d'ordine fisico, faremo ora notare che, mentre i meridiani ed i paralleli, sulla sfera, sono ugualmente circolari, sull'ellissoide invece i meridiani sono ellissi uguali e soltanto i paralleli sono circolari ed il relativo raggio, come anche sulla sfera, va diminuendo dall'equatore al polo con la legge del coseno, precisamente come la velocità di rotazione del pianeta e la stessa forza centrifuga che agisce nel piano dei paralleli.

Nei problemi della geodesia operativa occorre la nozione di curvatura in un punto dell'ellissoide terrestre: per intendere bene questo concetto bisogna prima considerare le equazioni parametriche dell'ellissoide.

Riguardo alla sfera, indicando con θ ed ω la latitudine e la longitudine di un punto A ; $z y$ il piano del primo meridiano, $OA = a$ il raggio della sfera, avremo :

$$x = a \cos \theta \operatorname{sen} \omega$$

$$y = a \cos \theta \cos \omega$$

$$z = a \operatorname{sen} \theta$$

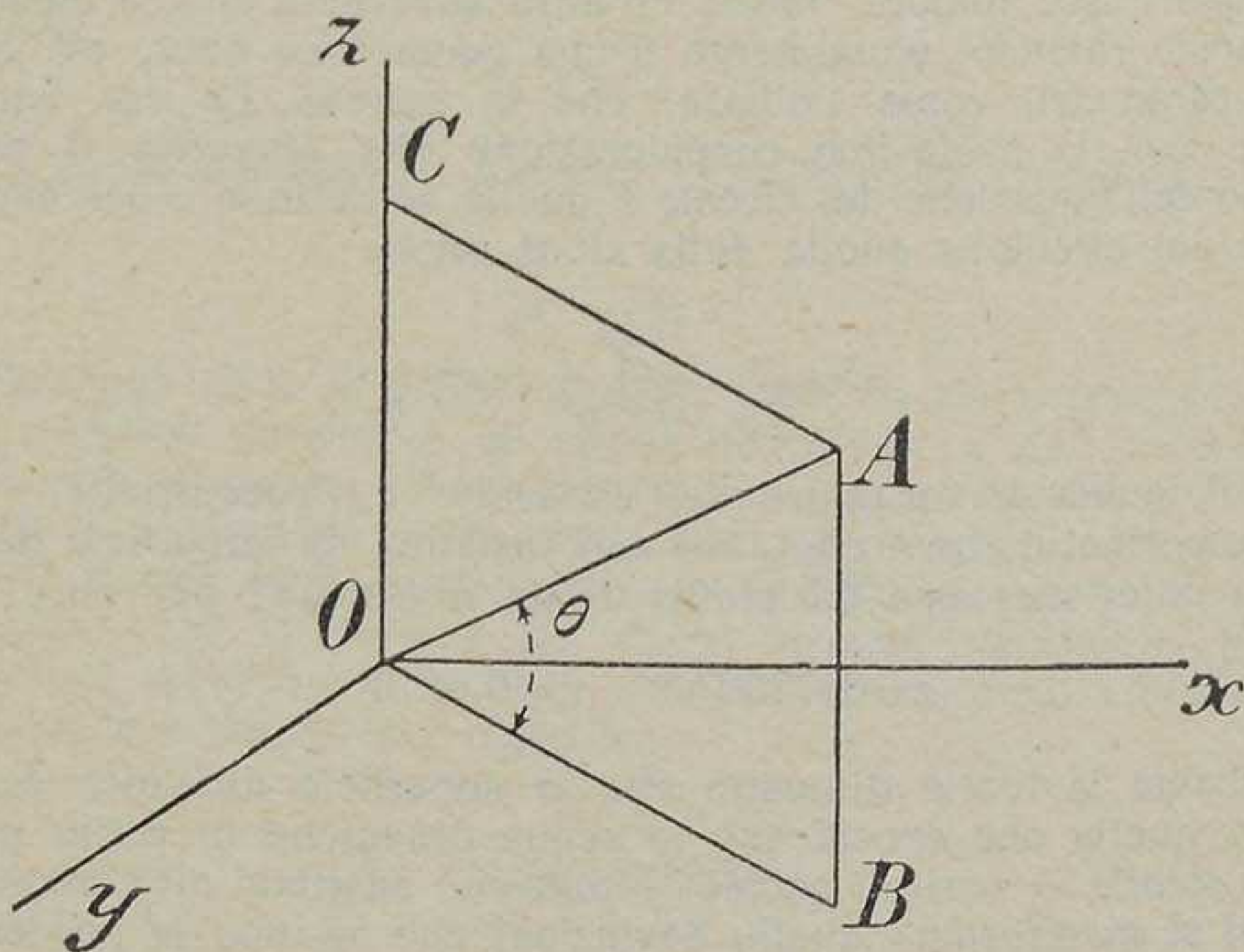


Fig. 5.

La parallela AC ad OB , proiezione del raggio sul piano xy dell'equatore, indica il raggio del parallelo sferico che passa per lo stesso punto A , e perciò :

$$AC = a \cos \theta$$

Se noi indichiamo con N la normale principale all'ellissoide in un punto A di cui φ ed ω rappresentano le coordinate geografiche, latitudine e longitudine rispettivamente, avremo :

$$x = N \cos \varphi \operatorname{sen} \omega$$

$$y = N \cos \varphi \cos \omega$$

$$z = N (1 - e^2) \operatorname{sen} \varphi$$

Il raggio del parallelo ellissoidico sarà :

$$AC = N \cos \varphi$$

Se noi consideriamo la sfera concentrica all'ellissoide e con raggio uguale al semiasse maggiore a , potremo chiamare cor-

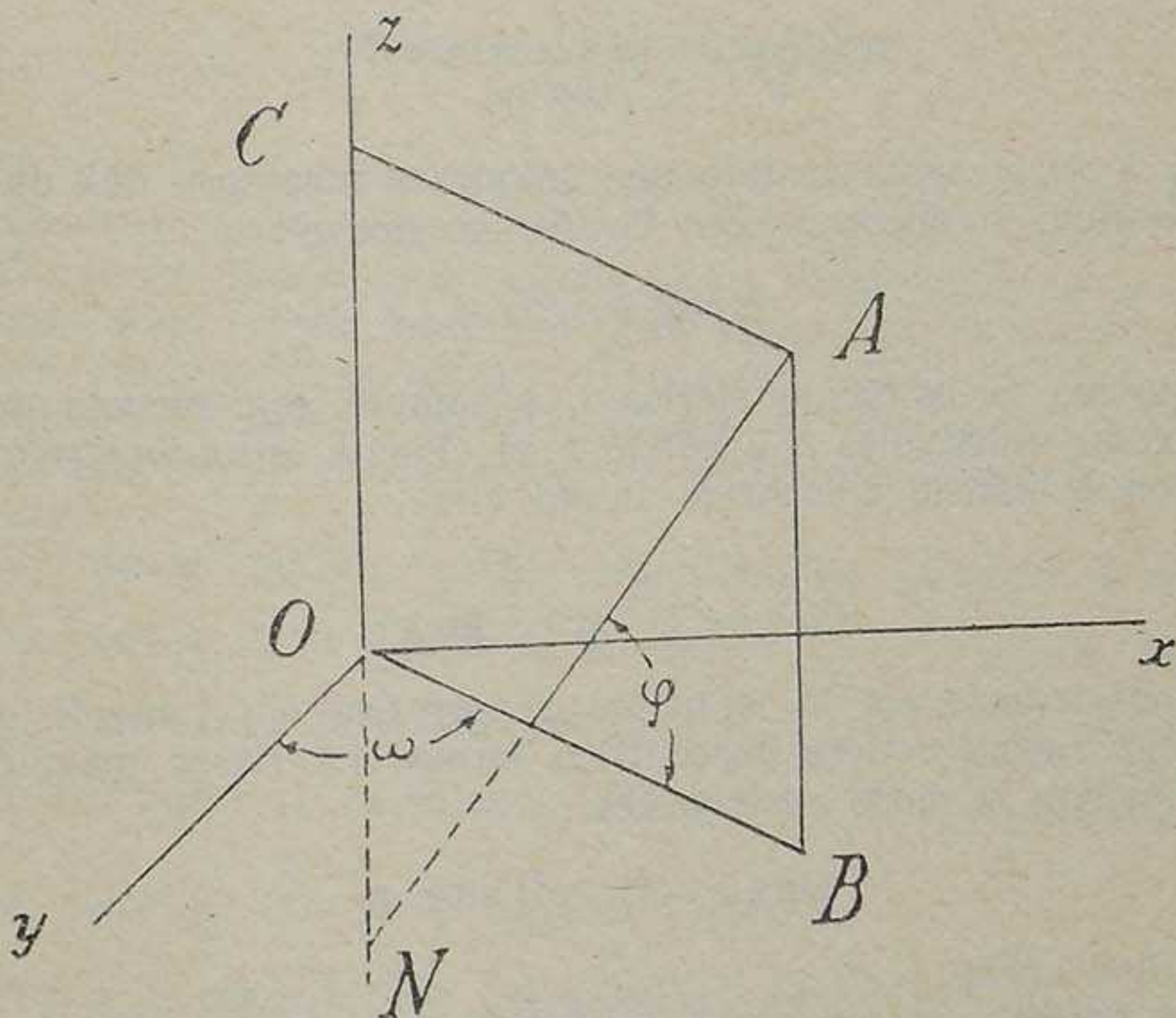


Fig. 6.

rispondenti i punti della sfera e dell'ellissoide che si trovano sulla parallela all'asse z e per i quali sussisterà la relazione :

$$N \cos \varphi = a \cos \theta \quad (5)$$

Ora, nella ipotesi di $\omega = 0$, le equazioni parametriche dell'ellissoide si semplificano così :

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= N \cos \varphi \\ z &= N (1 - e^2) \sin \varphi \end{aligned}$$

mentre la (4) diventa :

$$y^2 + \frac{z^2}{1-e^2} = a^2$$

Sostituendo in quest'ultima equazione i valori precedenti di y e di z si ricava, dopo facili riduzioni :

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \operatorname{sen} \varphi}} = a K ,$$

dove K rappresenta sempre una grandezza maggiore dell'unità. Sostituendo questo valore in (5), si ricava :

$$K \cos \varphi = \cos \theta$$

Dunque la latitudine sferica θ è sempre più piccola della latitudine ellissoidica φ e perciò θ si chiama *latitudine ridotta*. Non è difficile dimostrare infatti che :

$$\operatorname{tang} \theta = (1-e^2)^{\frac{1}{2}} \operatorname{tang} \varphi$$

Considerando poi la latitudine geocentrica φ' , l'angolo cioè che un raggio vettore geocentrico forma con l'asse maggiore, si dimostra in modo analogo che :

$$\operatorname{tang} \varphi' = (1-e^2) \operatorname{tang} \varphi$$

e quindi anche $\varphi' < \varphi$.

La normale in un punto dell'ellissoide segna anche la direzione della verticale, del filo a piombo; quindi per determinare la stessa linea occorrono misure di latitudine e di longitudine. Il medesimo principio vale anche per l'ellissoide. Ma la verticale fisica non può essere fissata che mediante misure delle coordinate geografiche con riferimento al sistema delle stelle fisse, mentre, nel caso dell'ellissoide, le medesime grandezze sono determinate indirettamente, cioè per mezzo del calcolo numerico. Se in un punto si potrà fare il confronto fra le coordinate determinate astronomicamente e quelle dedotte con opportuni procedimenti analitici, si avrà allora la maniera di mettere in piena luce le deviazioni fra la superficie *dinamica* del globo terrestre e quella definita geometricamente.

Sono queste deviazioni, chiamate soltanto per analogia *at-*

trazioni locali, che possono far costruire la carta della vera superficie terrestre nello stesso modo di una qualsiasi carta topografica, ossia con la nozione dei piani quotati e delle curve di uguale altitudine che sopra la superficie dinamica accennata caratterizzano le curve del contorno geoidico rispetto all'ellissoide di riferimento.

Nozione sulla curvatura.

Gl'infiniti piani che passano per la verticale di un punto determinato sulla superficie della Terra altrettante *sezioni normali*, e da ciascuna di queste linee viene giudicata la curvatura della Terra intorno a quel punto. La curvatura della Terra dunque varia da un allineamento all'altro, e per determinarla occorre riferirsi a quelle di due sezioni normali principali a cui corrispondono la massima e la minima curvatura.

Ad una di queste sezioni, sull'ellissoide, compete il raggio di curvatura N e quindi la curvatura $\frac{1}{N}$; e poichè questa corrisponde alla direzione del parallelo, così l'altra curvatura sarà attribuita al meridiano. Vediamo che $\rho < N$; quindi $\frac{1}{\rho}$ è la massima ed $\frac{1}{N}$ la minima curvatura.

Prima di determinare l'espressione analitica di ρ , giova far notare che i meridiani ed i paralleli geografici formano un sistema di traiettorie ortogonali e che il metodo dei piani quotati, usato per costruire le carte topografiche, specifica anche un sistema di traiettorie ortogonali composto dalle curve di livello e dalle linee di massima pendenza.

Sulle sfera celeste noi possiamo immaginare un sistema analogo di linee prendendo per base il piano dell'orbita terrestre, e si avranno così per ogni suo punto la latitudine e la longitudine celeste. Quest'ultima grandezza è contata dal punto dove l'equatore terrestre incontra l'*eclittica*, cioè dall'equinozio di primavera, e per il quale passa il Sole al 21 di marzo. Queste due coordinate non sono invariabili nel tempo, perchè, a causa dell'attrazione cosmica, i due piani: equatore

ed eclittica, non sono stabili ed il polo celeste non ha per questo la medesima posizione sulla sfera stellata. Si delinea così il fenomeno della *precessione*, per cui, in 258 secoli circa, ogni punto del cielo compreso nell'angolo di 47° , col vertice nel centro dell'eclittica, diventerà polo della sfera celeste. Quattromilatrecento anni fa la stella α *Draconis* era al polo e fra 130 secoli la nostra Stella Polare, α *Ursæ minoris*, ne sarà distante di circa 46° e allora, vicino al polo, si troverà la *Vega*.

L'altra conseguenza di questo imponente fenomeno è lo spostarsi delle costellazioni zodiacali dai segni con i quali coincidevano al tempo d'Ipparco, nel secondo secolo avanti Cristo; ed ecco che oggi, all'equinozio di primavera, il Sole, invece di entrare nel segno dell'Ariete, si trova ancora nella costellazione dei Pesci. Ancora una conseguenza si riversa fra l'anno siderale e l'anno tropico, perchè il sole descrive 360° in un anno tropico e non già durante l'anno siderale.

L'anno tropico, tempo che occorre al Sole medio per il suo ritorno all'equinozio di primavera, è di 365,24 giorni medi; l'anno siderale è l'intervallo di tempo nel quale la longitudine del Sole varia di 360° rispetto ad un equinozio fisso, ossia il tempo che occorre al Sole per ritornare al medesimo punto del cielo: comprende 365,26 giorni medi.

Il Sole medio è un astro fittizio che intorno alla Terra assume velocità angolare costante; all'*apogeo* ed al *perigeo* è simultaneo col Sole vero, perchè la linea degli apsi divide l'orbita terrestre in due parti uguali.

Ora, ricordando la nozione della misura angolare analitica, e considerando un piccolo arco di meridiano σ che potrà essere identificato con un arco di circolo, per cui l'amplitudine corrispondente sarà la differenza delle latitudini relative ai termini dell'arco medesimo, e che indichiamo con φ e φ_1 , avremo:

$$\rho = \frac{\sigma}{(\varphi - \varphi_1) \text{ arc } 1''}$$

e quindi:

$$\sigma = \rho (\varphi - \varphi_1) \text{ arc } 1'' \quad (5)$$

Questa formola è valida finchè $\varphi - \varphi_1$ non supera 2° ; ma richiede che sia conosciuto anche ρ .

Tale elemento di meridiano potrà anche essere considerato come ipotenusa del triangolo rettangolo i cui cateti sono adagiati rispettivamente agli assi y e z , quando si supponga nulla la longitudine, ossia z y il piano del primo meridiano, ed in tal caso noi potremo trovare l'espressione algebrica di ρ .

Essa risulta così definita :

$$\rho = a (1 - e^2) K^3$$

in cui :

$$K = \frac{1}{\sqrt{(1 - e^2) \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

Analogamente alla (5), possiamo indicare la formola che serve al calcolo di un arco di parallelo avente il raggio :

$$r = N \cos \varphi$$

e con l'amplitudine centrale $\omega - \omega_1$ che rappresenta la differenza di longitudine.

Avremo in questo caso, senza alcuna restrizione :

$$\Sigma = N \cos \varphi (\omega - \omega_1) \operatorname{arc} 1'' \quad (6)$$

Determinati i valori dei parametri dell'ellissoide che si assume per indicare la superficie della terra, e detto perciò *ellissoide terrestre*, non è difficile calcolare tavole numeriche relativamente ai due raggi di curvatura principali ρ ed N , per le quali l'argomento è sempre la latitudine. Allo scopo di riferire una superficie ad un'altra, occorre avere la nozione di curvatura totale e questa resta così concepita :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{\rho N}}$$

Il raggio R caratterizza la sfera che meglio si adatta, in un punto, alla Terra ed alla quale è attribuito il nome di *sfera locale*.

Al polo :

$$\rho = N = R$$

ed in tal caso la sfera locale diventa *osculatrice*, perchè essa allora ha il contatto dell'ordine più elevato.

Tutti i problemi di geodesia operativa possono essere risolti, in prima approssimazione, sopra la sfera locale, cosicchè un triangolo sferico, di cui la somma degli angoli supera sempre 180° di una quantità che si chiama *eccesso sferico*, viene trattato con la regola di Legendre, ossia diminuendo ogni angolo di un terzo dell'eccesso sferico, per poi seguire le norme della trigonometria piana.

Occorre ora ricordare le seguenti nozioni fondamentali:

1) Quando l'arco del circolo unitario è piccolo, allora la sua lunghezza, al limite, s'identifica col seno, di guisa che si può scrivere:

$$\lim \frac{x}{\text{sen } x} = 1$$

ed analogamente:

$$\lim \frac{x}{\text{tang } x} = 1$$

perchè:

$$\text{sen } x < x < \text{tang } x,$$

da cui:

$$1 < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{1}{\text{cos } x}$$

ed infine:

$$\lim \text{cos } x = 1$$

2) Quando h indica un incremento piccolissimo dell'arco x , si deduce, con semplici considerazioni:

$$\left. \begin{aligned} \text{sen } (x \pm h) &= \text{sen } x \pm h \text{cos } x \\ \text{cos } (x \pm h) &= \text{cos } x \mp h \text{sen } x \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

3) In virtù di due teoremi di trigonometria, e più ancora col concetto di graduale approssimazione, nel caso di x piccolo, si avrà sempre:

$$\left. \begin{aligned} \text{sen } x &= x - \frac{x^3}{6} \\ \text{cos } x &= 1 - \frac{x^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Teorema di Legendre.

Consideriamo il triangolo sferico ABC e ricordiamo che a ciascuno dei suoi lati corrisponde un'amplitudine e quindi una misura analitica. Se R indica il raggio della sfera a cui il trian-

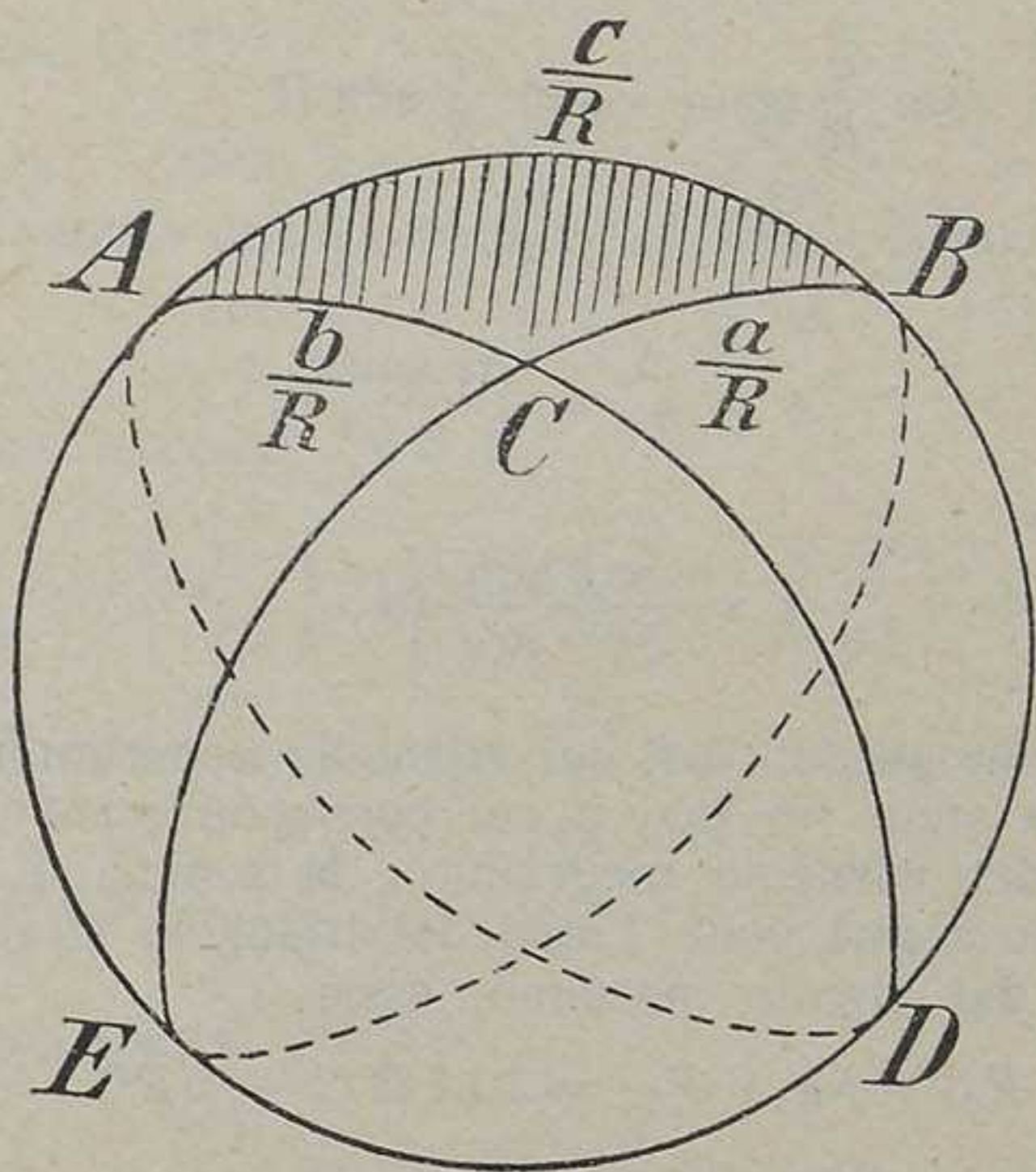


Fig. 7.

golo appartiene, $\frac{a}{R}$, $\frac{b}{R}$, $\frac{c}{R}$ rappresentano le misure analitiche dei suoi lati. Supposto $R=6400$ chilometri ed $\frac{a}{R}=0,003$, ognuno dei tre rapporti indicherà una grandezza piccola del 1° ordine, mentre i loro prodotti, come $\frac{a b}{R^2}$, ed i loro qua-

drati, come $\left(\frac{a}{R}\right)^2$, ecc., rappresentano una grandezza piccola del secondo ordine. Nel campo geodetico e balistico, il più esteso realizzabile, noi arresteremo l'approssimazione numerica ai termini del secondo ordine, mentre, nel campo topografico, alla regione sferica potrà logicamente essere sostituito il piano, e quindi non considerata la curvatura.

Sulla sfera, per il triangolo, vale il teorema del seno, quindi scriveremo, riferendoci alla figura :

$$\operatorname{sen} \frac{b}{R} \operatorname{sen} A = \operatorname{sen} \frac{a}{R} \operatorname{sen} B \quad (9)$$

Indicando con Δ l'area del triangolo piano e con ε l'eccesso sferico, sarà :

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{R^2} = \frac{ab \operatorname{sen} C}{2 R^2}$$

ossia in arco :

$$\varepsilon = \frac{ab \operatorname{sen} C}{2 R^2 \operatorname{arc} 1''} \quad (10)$$

Perchè prolungando i lati del triangolo appariranno sulla superficie della sfera tre fusi a cui corrisponderanno gli angoli A , B e C del triangolo medesimo : la somma di questi tre fusi è uguale a due volte l'area del triangolo sferico più due volte l'area del circolo massimo, ossia :

$$F_A + F_B + F_C = 2 (A B C + \pi R^2)$$

Ma il primo membro rappresenta :

$$\frac{\pi R^2}{90^\circ} (A + B + C) ;$$

dunque, ricordando che per definizione :

$$\varepsilon = A + B + C - 180^\circ$$

ne risulterà :

$$\frac{\varepsilon}{90^\circ} = \frac{A B C}{\frac{1}{2} \pi R^2}$$

Ora $\frac{1}{2} \pi R^2 = \frac{4 \pi R^2}{8}$ rappresenta l'area del triangolo sfe-

rico trirettangolo, di cui l'eccesso sferico è di 90° , dunque ε rappresenterà l'area del triangolo ABC , e quindi resta giustificata la formola (10). Ciò posto avremo, per la medesima relazione :

$$\frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{1}{2\Delta} = \frac{1}{6R^2}$$

e poichè, per la (8) :

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \frac{b}{R} &= \frac{b}{R} \left(1 - \frac{b^2}{6R^2}\right) \\ \operatorname{sen} \frac{a}{R} &= \frac{a}{R} \left(1 - \frac{a^2}{6R^2}\right), \end{aligned}$$

così potremo scrivere :

$$b \left(1 - \frac{\varepsilon}{3} \frac{b^2}{2\Delta}\right) \operatorname{sen} A = a \left(1 - \frac{\varepsilon}{3} \frac{a^2}{2\Delta}\right) \operatorname{sen} B$$

Ma $2\Delta = bc \operatorname{sen} A = ac \operatorname{sen} B$; dunque sarà :

$$b \left(\operatorname{sen} A - \frac{\varepsilon}{3} \frac{b}{c}\right) = a \left(\operatorname{sen} B - \frac{\varepsilon}{3} \frac{a}{c}\right)$$

Dalla trigonometria piana :

$$\begin{aligned} \frac{b}{c} &= \cos A + \frac{a}{c} \cos C ; \\ \frac{a}{c} &= \cos B + \frac{b}{c} \cos C . \end{aligned}$$

Quindi la relazione precedente diventa :

$$b \left(\operatorname{sen} A - \frac{\varepsilon}{3} \cos A\right) = a \left(\operatorname{sen} B - \frac{\varepsilon}{3} \cos B\right)$$

Infine, per la prima delle (7),

$$b \operatorname{sen} \left(A - \frac{\varepsilon}{3}\right) = a \operatorname{sen} \left(B - \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

e resta così dimostrato il teorema di Legendre, giacchè ponendo :

$$A_1 = A - \frac{\varepsilon}{3}$$

$$B_1 = B - \frac{\varepsilon}{3}$$

$$C_1 = C - \frac{\varepsilon}{3},$$

si deduce :

$$A_1 + B_1 + C_1 = A + B + C - \varepsilon = 180^\circ$$

Gli allineamenti dunque, che la geodesia segna sulla superficie terrestre, vengono già a costituire la rete geodetica, in cui coesistono, con legge di continuità, serie di triangoli in direzione delle linee geografiche fondamentali, meridiani e paralleli, o coprenti tutta una regione determinata. Nel primo caso, si tratta di valorizzare le teorie che caratterizzano il problema della figura della Terra; nell'altro, invece, si può anche giungere alla descrizione geometrica, ossia alla carta topografica della regione medesima. Così, l'opera è svolta tanto nel campo geodetico come nel campo topografico, e quindi di ogni triangolo dev'essere generalmente considerato l'eccesso sferico per essere risoluto col teorema di Legendre. L'eccesso sferico nel campo geodetico è calcolato con le grandezze di secondo ordine e può essere trascurato nel campo topografico, come abbiamo già accennato. Mentre, in campi più vasti di quello geodetico, la determinazione dell'eccesso sferico richiede ancora termini di terzo e quarto ordine.

I triangoli, che nel loro insieme caratterizzano la figura di una rete, si chiamano — giova ripeterlo — *triangoli geodetici*; la somma dei loro angoli è sempre maggiore di due angoli retti ed all'effetto di calcolare la lunghezza dei lati, devono essere considerati sopra la sfera locale, cioè sopra una sfera che ha per raggio :

$$R = \sqrt{\rho_1 N}$$

in cui ρ ed N sono i raggi di curvatura corrispondenti ad un vertice del triangolo medesimo.

Ora, occorre per tutto, la misura di una base fondamentale e quella degli angoli; nei due casi la misura è diretta.

Designati sul terreno i vertici dei successivi triangoli, la misura della base è realizzata lungo un allineamento, in prossimità del mare, quando ciò sia possibile, e della stessa rete geodetica.

L'allineamento può essere individuato col cannocchiale di un goniometro o con un semplice cannocchiale provvisto di reticolo. La grossezza dei fili in tutti i casi può essere determinata con la seguente relazione:

$$\delta \lesssim \frac{f}{I} 100'' \text{ arc } 1'',$$

dove f rappresenta la distanza focale dell'obbiettivo, I l'ingrandimento del cannocchiale.

Supposto $f=300$ millimetri, $I=30$, si ricava:

$$\delta \lesssim 0^{\text{mm}},005$$

Ora la parallasse del filo, cioè $100''$, produce alla distanza di un chilometro l'incertezza lineare di $0^{\text{m}},48$, ma invece è più logico considerare la precisione del puntamento, che nel caso dell'approssimazione di $2''$ nella lettura del circolo graduato, sarà:

$$m = \frac{60''}{I} = 2''$$

dove $60''$ rappresenta l'acuità normale dell'occhio.

Alla distanza di mille metri, si avrà:

$$\varepsilon = 2'' \cdot 1000^{\text{m}} \cdot \text{arc } 1'' = 0^{\text{m}},01.$$

Il campione di misura è generalmente una spranga metallica omogenea di 4 metri, o bimetallica — ferro e zinco — nel caso che si voglia utilizzare la nozione del termometro metallico introdotta da Borda come ha fatto Bessel per il suo apparato composto di quattro spranghe.

Ma il metodo di Bessel, complicato per le vaste operazioni di campionatura e per le non poche difficoltà che offre il trasporto delle spranghe lungo la curva di allineamento, è ormai vinto dal metodo ottico di Porro e — per lavori che non includono eccessiva precisione — dall'uso dei fili e nastri invariabili.

In tal caso il metodo è quello di Jäderin: il nastro od il filo sono messi nella tensione, per ogni termine, esercitata dal peso di dieci chilogrammi, ed assumono perciò la forma di una catenaria, ossia di una curva che ha per equazione:

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

la quale, come abbiamo visto, definisce il coseno iperbolico.

Il metodo di Porro non richiede alcuna lettura, soltanto successive coincidenze di segni agli estremi del campione col filo del reticolo annesso ad un cannocchiale *panfocale*, ovvero di un *plesiotoscopio*.

Se nello stesso piano del reticolo di uno di questi cannocchiali si adagia con opportunità una scala a frazioni di millimetro, allora anche l'osservazione del punto a terra acquista estrema semplicità, come quella di tratti residuali rispetto ad un centro prestabilito sul terreno.

Infine, come già fu accennato, nel campo topografico, la misura di un allineamento può essere conseguita con la nozione della parallasse relativa ad una spranga di 4 metri, disposta normalmente all'allineamento principale. Ma, mentre col metodo ottico sorge un errore relativo di $\frac{1}{1\,000\,000}$ per la base, con quello parallattico la precisione è assai più piccola, però sempre compatibile con lo scopo che si tratta di conseguire. In ogni caso la lunghezza direttamente misurata deve essere trasportata fino alla rete geodetica o alla triangolazione per le quali occorrono le dimensioni lineari. L'operazione accennata deve seguire il principio del minimo percorso, perchè, quanti più angoli si misurano, meno grande sarà la precisione conseguita per il primo lato della triangolazione o della rete geodetica, detto *base calcolata*. L'errore relativo corrispondente, nel campo geodetico, dev'essere tale da consentire per

il lato più lontano l'approssimazione di $\frac{1}{100\,000}$ e nel campo topografico armonizzato con la precisione della carta, la quale, per la scala di $\frac{1}{n}$ sarà :

$$\lambda = 0, \frac{m}{m} 2 n = \frac{n}{500}$$

Ammessso che nelle misure angolari si consegua la precisione unitaria di $1''$, non è difficile provare che, per le ricerche di alta geodesia e nel caso di vaste lunghezze, la misura della base dev'essere ripetuta ogni 400 chilometri circa.

Eseguita la misura lineare, occorre, in taluni casi, orientarla rispetto alla rosa dei venti e fissare uno dei termini rispetto al reticolato geografico. Basta allora eseguire una determinazione di latitudine e di azimut con riferimento alle stelle fisse e così poi tutta la triangolazione potrà essere descritta sopra l'ellissoide terrestre. Di ogni vertice vengono in tal caso calcolate le coordinate geografiche latitudine e longitudine — e per ogni geodetica i due orientamenti — azimut reciproci — collegati con questa relazione :

$$\alpha_1 = \alpha + 180^\circ + m,$$

dove :

$$m = (\omega - \omega_1) \text{ sen } \varphi_m$$

e :

$$\varphi_m = \frac{1}{2} (\varphi + \varphi_1)$$

poichè i meridiani geografici non sono paralleli. Perciò l'amplitudine m si dice convergenza dei meridiani.

Ora, quando la lunghezza dei lati non oltrepassa i 25 chilometri, il calcolo delle coordinate geografiche è consentito dalle seguenti relazioni analitiche :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi + \frac{s \cdot \cos \alpha}{\rho_m \text{ arc } 1''} - \frac{(s \cdot \text{sen } \alpha)^2}{2\rho N \text{ arc } 1''} \text{ tang } \varphi_1 \\ \omega_1 &= \omega + \frac{s \cdot \text{sen } \alpha}{N \text{ arc } 1''} \text{ sec } \varphi_1 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Per $\alpha = 0^\circ$ si ottiene l'arco di meridiano ; per $\alpha = 90^\circ$, quello di parallelo.

Coordinate geodetiche ortogonali.

Se dal punto B si abbassa la geodetica BC perpendicolare al meridiano di A , si ottengono le coordinate geodetiche ortogonali :

$$\begin{aligned} BC &= X ; AC = Y \\ X &= s \cdot \text{sen } \alpha \\ Y &= s \cdot \text{cos } \alpha \end{aligned}$$

in cui $s = AB$; e quindi altre relazioni per queste coordinate e le coordinate geografiche.

L'eccesso sferico del triangolo ABC è in questo caso :

$$3 \varepsilon = \frac{s^2 \text{sen } 2 \alpha}{4 \rho N \text{ arc } 1''}$$

quindi, oltre il campo topografico, bisognerà considerare :

$$\begin{aligned} X &= s \cdot \text{sen } (\alpha - \varepsilon) \\ Y &= s \cdot \text{cos } (\alpha - 2 \varepsilon) \end{aligned}$$

Quando è noto Y , si può calcolare la latitudine φ_0 del punto C così :

$$\varphi_0 = \varphi + \frac{Y}{\rho \text{ arc } 1''}$$

e supposto conosciuto anche X si avrà, per il calcolo della latitudine φ_1 del punto B :

$$\varphi_1 = \varphi_0 - \frac{X^2}{2 \rho N \text{ arc } 1''} \text{ tang } \varphi_1$$

da cui, sostituendo il valore di φ_0 :

$$\varphi_1 = \varphi + \frac{Y}{\rho \text{ arc } 1''} - \frac{X^2}{2 \rho N \text{ arc } 1''} \text{ tang } \varphi_1$$

La longitudine ω_1 del punto B risulterà immediatamente con la sostituzione di $\alpha = 90^\circ$, ossia :

$$\omega_1 = \omega + \frac{X}{N \text{ arc } 1''} \sec \varphi_1$$

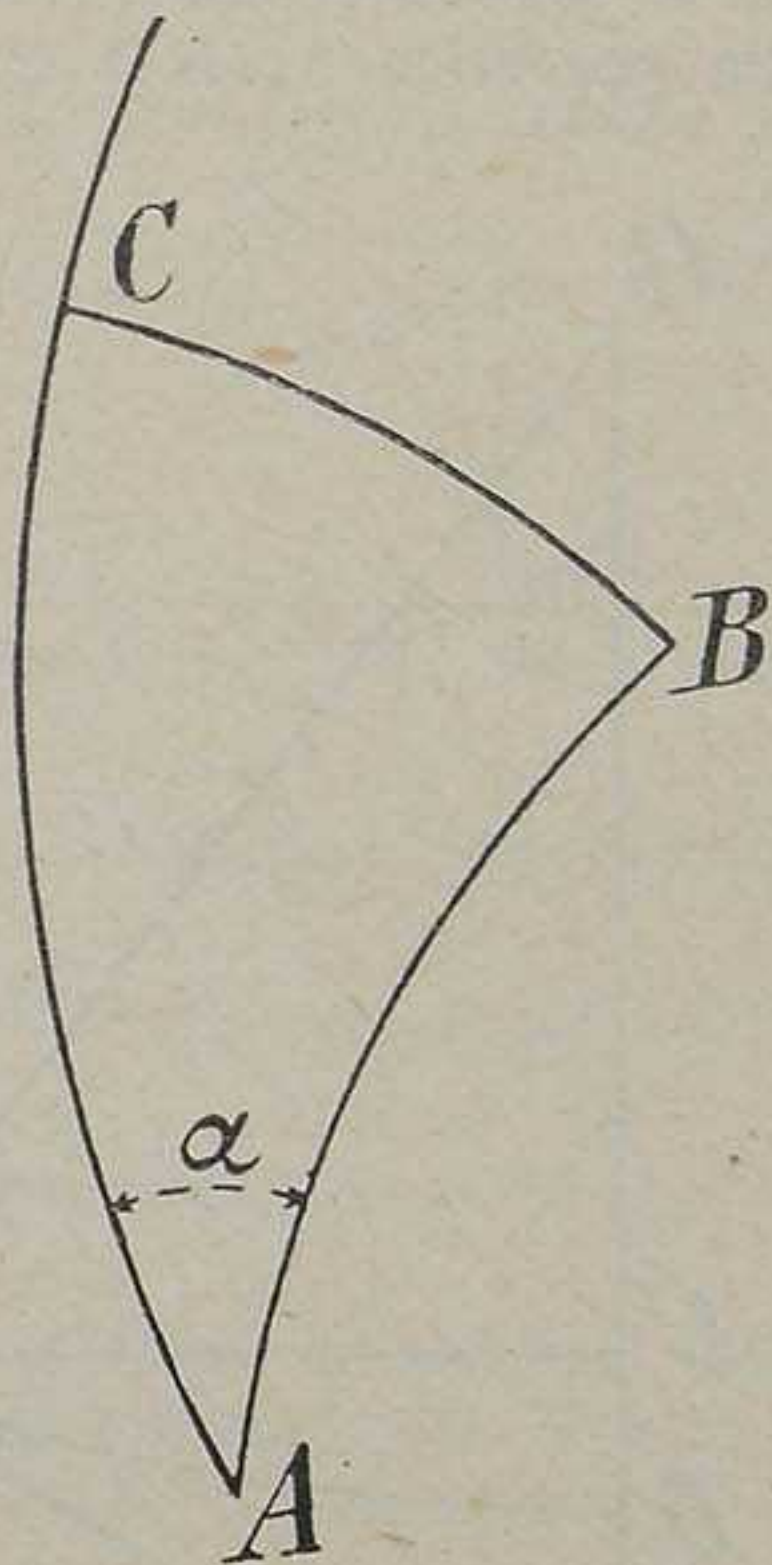


Fig. 8.

Il problema inverso si risolve alla stessa guisa di prima, cioè calcolando avanti l'azimut piano :

$$\text{tang } \alpha_0 = \frac{X}{Y}$$

e poi attribuendovi la metà della convergenza dei meridiani. Possiamo ora vedere, con semplici considerazioni geometriche, come si deducono le formole (11).

Coordinate geografiche.

Consideriamo il piano tangente all'ellissoide terrestre nel punto A ; nascerà la seguente figura: AO proiezione del meridiano; AB della geodetica s ; BD arco di conica, che nel

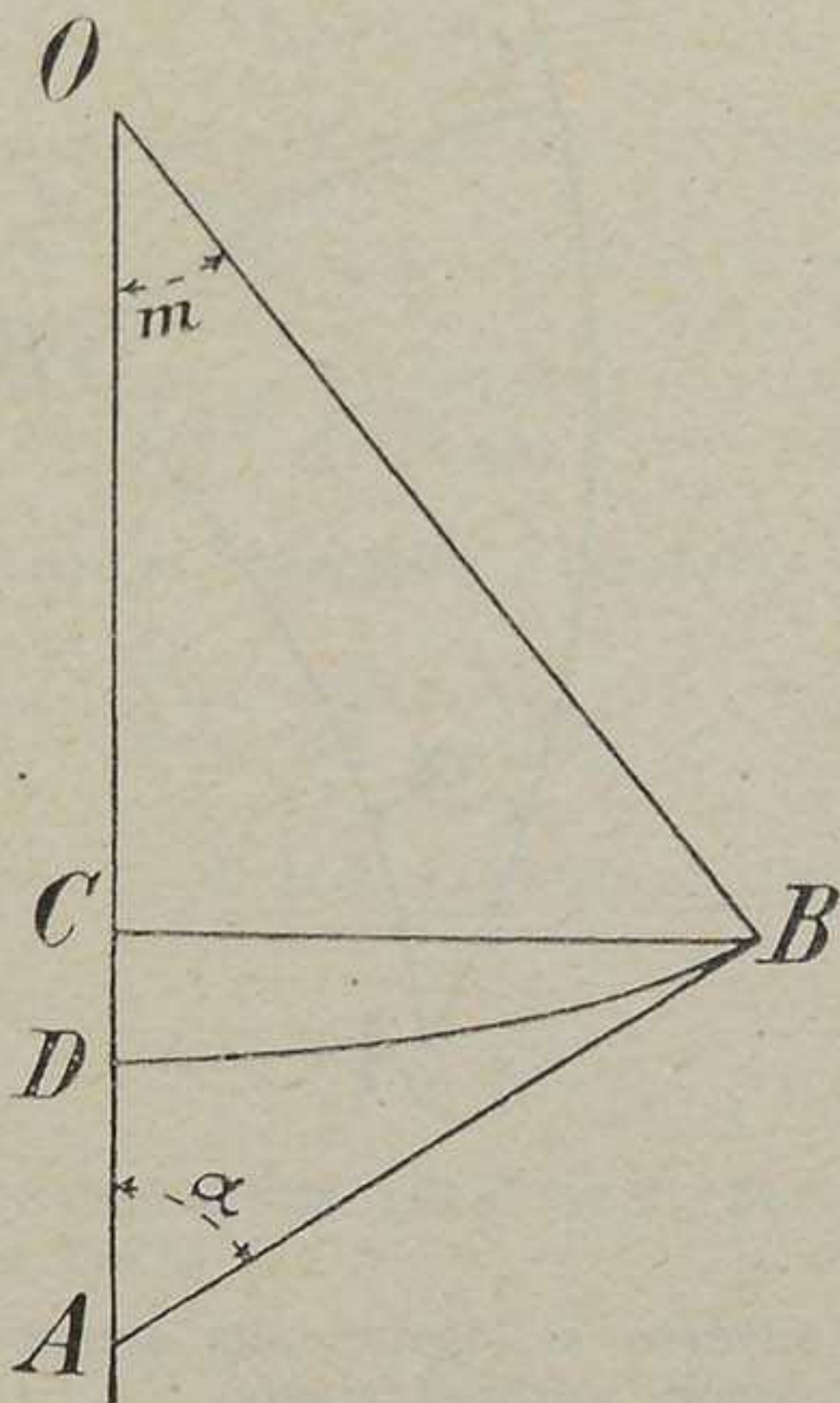


Fig. 9.

campo topografico può essere sostituito da un arco di circolo col raggio $OB = N \cotg \varphi$; BC geodetica perpendicolare al meridiano. Ora è facile dedurre:

$$Y = AC = AD + DC = \varphi_m (\varphi_1 - \varphi) \text{ arc } 1'' + DC$$

Ricordiamo che :

$$m = (\omega_1 - \omega) \operatorname{sen} \varphi$$

per ricavare :

$$\begin{aligned} DC &= N_1 \operatorname{cotg} \varphi - N_1 \operatorname{cotg} \varphi \cos m = \\ &= N_1 \operatorname{cotg} \varphi (1 - \cos m) = N_1 \operatorname{cotg} \varphi 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} m = \\ &= \frac{1}{4} N_1 \operatorname{sen} 2 \varphi_1 [(\omega_1 - \omega) \operatorname{arc} 1'']^2 \end{aligned}$$

Quindi :

$$s \cos \alpha = \rho_n (\varphi_1 - \varphi) \operatorname{arc} 1'' + \frac{1}{4} N_1 \operatorname{sen} 2 \varphi_1 [(\omega_1 - \omega) \operatorname{arc} 1'']^2$$

Ed analogamente, con adeguate approssimazioni :

$$s \operatorname{sen} \alpha = X = BC = N_1 \cos \varphi_1 (\omega_1 - \omega) \operatorname{arc} 1''$$

Onde, risolvendo rispetto a $\varphi_1 - \varphi$ ed $\omega_1 - \omega$, si ottengono le formole (11).

Dividendo la seconda per la prima, cioè $s \operatorname{sen} \alpha$ per $s \cos \alpha$, e passando ai logaritmi, si ottiene :

$$\log \operatorname{tang} \alpha = \log \frac{N_1 \cos \varphi_1 (\omega_1 - \omega)}{\rho_m (\varphi_1 - \varphi)} - K \cos^2 \varphi_1 \frac{(\omega_1 - \omega)^2}{\varphi_1 - \varphi}$$

Il secondo termine costituisce la correzione in unità del 7° ordine decimale, dovuta alla convergenza dei meridiani, ma di questo termine non si deve tener conto quando $\varphi_1 - \varphi$ è piccolo, ossia i due punti considerati si trovano quasi sul medesimo parallelo.

Avuto α , si calcolerà infine :

$$\alpha_1 = \alpha \pm (180^\circ + m) ; + \text{ se } \omega_1 - \omega > 0 ; - \text{ quando } \omega_1 - \omega < 0.$$

Nel caso che $\varphi_1 - \varphi$ sia piccolissimo, allora converrà di più calcolare separatamente l'angolo α con la formola:

$$\text{tang } \beta = \frac{N_1 \cos \varphi_1 (\omega_1 - \omega)}{\rho_m (\varphi_1 - \varphi)}$$

e poi la convergenza dei meridiani m per dedurre alla fine i due azimut.

Quando $\omega_1 - \omega > 0$, allora:

$$\alpha = \beta - \frac{m}{2}$$

$$\alpha_1 = \beta + 180^\circ + \frac{m}{2}$$

Se, invece, $\omega_1 - \omega < 0$, si avrà:

$$\alpha = 360^\circ - \left(\beta - \frac{m}{2} \right)$$

$$\alpha_1 = 180^\circ - \left(\beta + \frac{m}{2} \right)$$

Calcolo dell'altitudine.

Alle levate topografiche occorre anche l'altitudine, altrimenti non potrebbe essere graficamente sintetizzata la forma del paesaggio. L'opportuna formola per il calcolo dei dislivelli è questa:

$$h - H = s \cotg z + \beta s^2 \text{ arc } 1'',$$

dove z rappresenta la distanza zenitale, angolo con la verticale. Il primo termine si riferisce al piano; il secondo consi-

dera la curvatura terrestre che abbassa e la rifrazione atmosferica, la quale ha per effetto d'innalzare.

Infatti :

$$\beta = \frac{1 - K}{2R \text{ arc } 1''}$$

K rappresenta il coefficiente di rifrazione e per l'Italia assume il valore medio di 0,12; R il raggio della sfera locale. La formola precedente è però scritta così :

$$h - H = s \cotg (z - \beta s)$$

allo scopo di rendere più speditivo il calcolo.

Ma giova mettere in evidenza che :

$$\beta s^2 \text{ arc } 1'' = \frac{s^2}{2R} - \frac{s^2}{2R} K$$

allo scopo di specificare bene le due correzioni della sfericità terrestre e della rifrazione, la quale, appunto per il valore di K , è sempre minore dell'altra.

Il valore di K , in pratica, viene determinato geometricamente assumendo :

$$K = 1 + \frac{180^\circ - (z_1 + z_2)}{s} R \text{ arc } 1''$$

e così risulta che K è sempre positivo, minore dell'unità, poichè $z_1 + z_2 > 180^\circ$; quindi la traiettoria luminosa rivolge la sua concavità verso terra.

Il valore di K può anche essere ricavato con la nozione degli elementi atmosferici dominanti; ed allora, in ogni centro di osservazione, si potrà considerare :

$$K = 0,00025 \frac{p}{(1 + 0,0036 t)^2}$$

(p = pressione in millimetri; t = temperatura).

Il problema opposto a quello del calcolo dell'altitudine, dev'essere risoluto con queste relazioni:

$$\frac{1}{2} (z + z_1) = 90^\circ + \beta s$$

$$\frac{1}{2} (z_1 - z) = \text{arc tang} \frac{h - H}{s}$$

Per i telemetri che usa l'artiglieria da costa, occorre, come elemento di rettifica dell'istrumento, la *distanza fittizia*, cioè l'arco della sezione normale fra la proiezione del centro istrumentale sul mare medio ed il punto dove questa superficie è incontrata dalla traiettoria luminosa. Si può calcolare con una delle seguenti formole:

$$x = H \text{ tang } z + \beta \text{ arc } 1'' H^2 \text{ tang}^3 z$$

$$x = \frac{s H}{H - h} + \frac{h}{H^2} \left(\frac{s H}{H - h} \right)^3 \beta \text{ arc } 1''$$

H indica l'altitudine del telemetro, z la distanza zenitale relativa ad un caposaldo di orientamento, s la distanza intercetta, h l'altezza del medesimo punto mirato.

Effettiva determinazione dei vertici di una triangolazione.

Nel caso della rete geodetica fondamentale, devono essere misurati i tre angoli di ogni triangolo; la relazione:

$$A + B + C = 180^\circ + \text{eccesso sferico}$$

non è mai soddisfatta per gli inevitabili effetti di cause ignote predominanti, perturbatrici, quindi:

$$A + B + C - (180^\circ + \text{eccesso sferico}) = \Delta,$$

errore di chiusura, che non deve superare 4 o 5 secondi.

Per le triangolazioni ausiliarie, quelle cioè utilizzate dalle operazioni topografiche, tale limite può essere anche maggiore. Nelle medesime triangolazioni i vertici sono anche determinati per *intersezione diretta*, cioè misurando gli angoli di orientamento di un punto lontano da almeno tre vertici di nota posizione, con l'*intersezione indiretta*, ossia mediante il problema di Snellius, ed infine applicando il problema di Hansen.

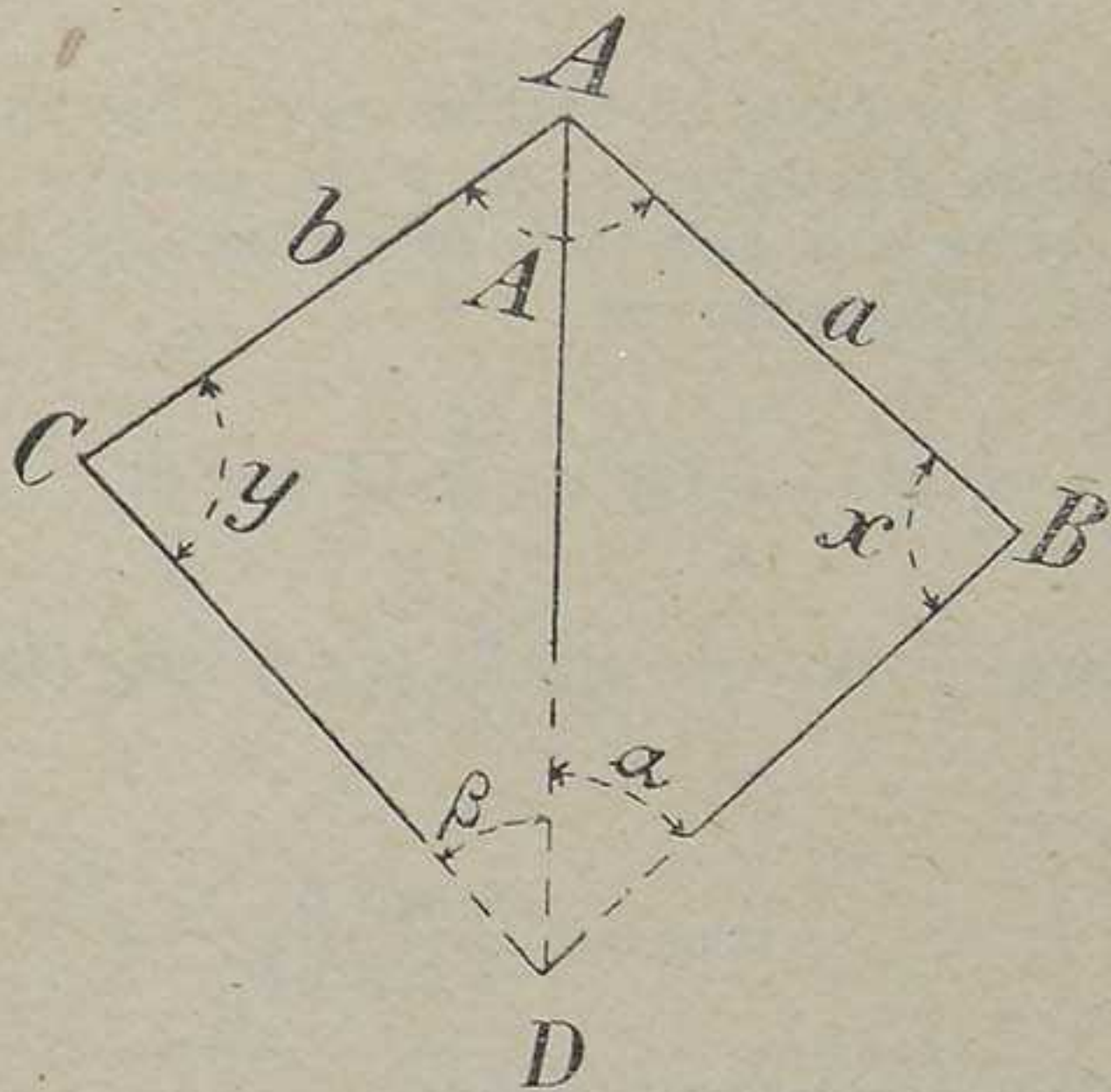


Fig. 10.

Il primo caso procede con la identità :

$$\frac{b}{a} \frac{AD}{AC} \frac{AB}{AD} = 1$$

generalmente non soddisfatta, quando si sostituisce :

$$\frac{AD}{AC} = \frac{\text{sen } ACD}{\text{sen } \beta} \quad ; \quad \frac{AB}{AD} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } ABD}$$

e nasce allora la *discordanza laterale*, che in unità della 7^a

cifra decimale non deve mai superare due o trecento unità logaritmiche, perchè l'errore relativo ammesso per le distanze è di $\frac{1}{10\,000}$. Ad ognuno dei due triangoli ABD , ADC è applicato il teorema di Legendre, per cui si deducono:

$$\begin{aligned}\alpha &= 180^\circ + \text{eccesso} - (DAB + ABD) \\ \beta &= 180^\circ + \text{eccesso} - (DAC + ACD).\end{aligned}$$

Nel caso del problema di Snellius questi due angoli vengono invece misurati direttamente, ed allora occorre, per l'applicazione del teorema di Legendre, determinare gli angoli x ed y . Ciò si ottiene osservando che:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(x+y) &= 180^\circ - \frac{1}{2}(A + \alpha + \beta) \\ \text{tang } \frac{1}{2}(x-y) &= \text{tang } \frac{1}{2}(x+y) \text{ tang } (45^\circ - \varphi),\end{aligned}$$

in cui:

$$\text{tang } \varphi = \frac{a \text{ sen } \beta}{b \text{ sen } \alpha}$$

Nasce l'indeterminazione, quando:

$$A + \alpha + \beta = 180^\circ,$$

perchè allora i quattro punti appartengono ad una medesima circonferenza.

Perciò in pratica il centro D di osservazione è collegato ad un quarto vertice.

Il problema di Hansen collega due centri di osservazione A e B d'ignota distanza, a due vertici C e D di cui però è conosciuta la distanza; ed in questo caso, partendo dalla relazione identica:

$$\frac{BD}{BC} \times \frac{BC}{BA} \times \frac{BA}{BD} = 1,$$

si ottiene :

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} (x - y) = \operatorname{tang} \frac{1}{2} (x + y) \operatorname{tang} (45^\circ - \varphi)$$

in cui :

$$\frac{1}{2} (x + y) = 90^\circ - \frac{1}{2} \delta$$

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\operatorname{sen} (\alpha + \beta) \operatorname{sen} (\beta + \gamma + \delta)}{\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} (\alpha + \beta + \gamma)}$$

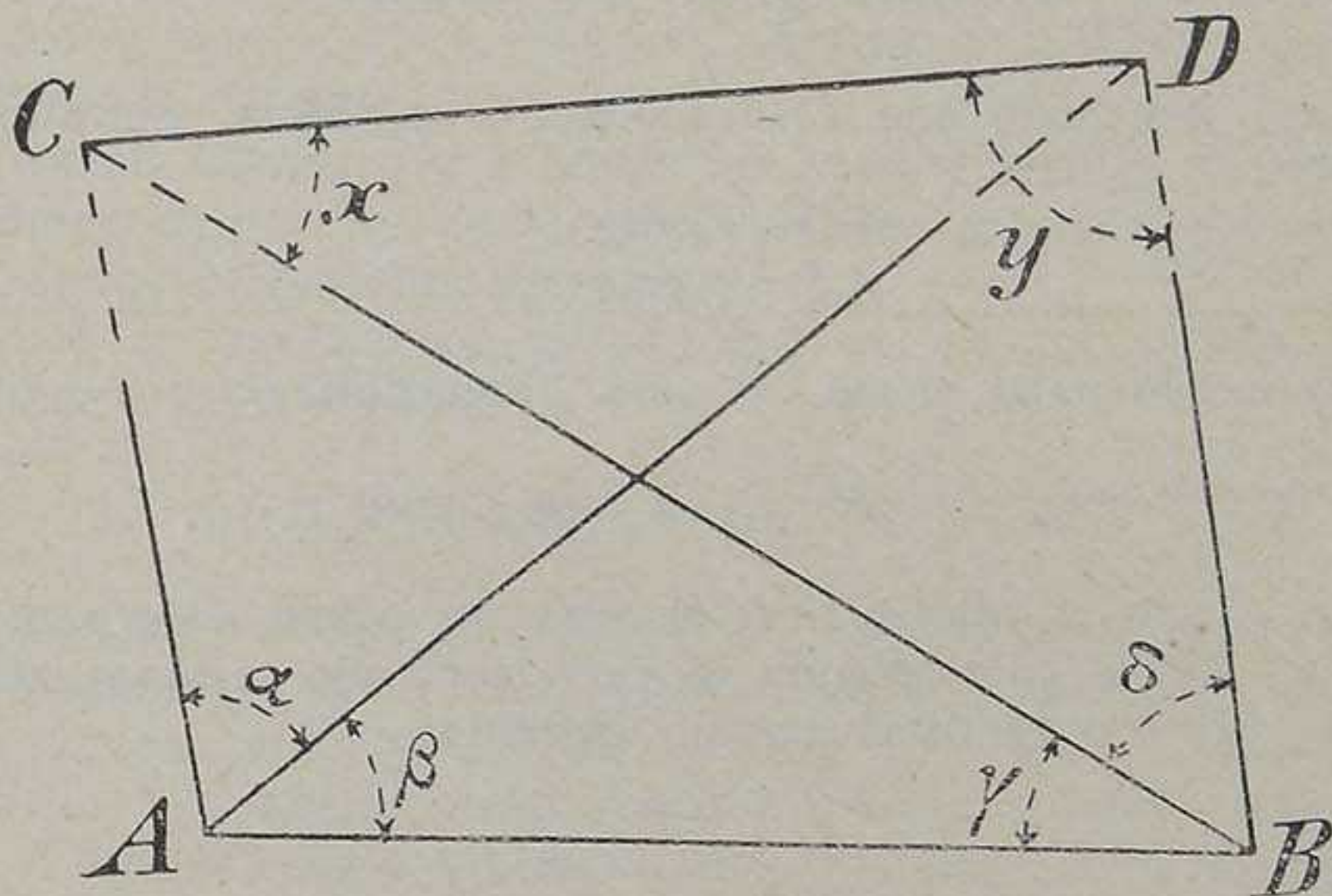


Fig. 11.

Determinati così gli angoli x ed y , poichè è dato $CD = a$, si potranno infine calcolare le distanze di B e di A dai vertici C e D e altresì la mutua distanza loro AB . La posizione dei punti considerati può dar luogo a diversi aspetti della figura; ma per ogni caso non è difficile giungere alla formula definitiva seguendo il procedimento accennato.

Può, infine, un dato vertice ausiliario A essere collegato a due punti C e D di nota posizione; allora bisogna considerare le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} a^2 &= AC^2 + AD^2 - 2 AC \cdot AD \cos \alpha \\ h - H &= AC \cotg (z - \beta AC) \\ h - H_1 &= AD \cotg (z_1 - \beta AD) \end{aligned}$$

Dalle due ultime ricavasi la relazione :

$$H_1 - H = A D \cotg (z_1 - \beta A D) - A C \cotg (z - \beta A C),$$

che, insieme alla prima — poichè $H_1 - H$ è noto — servirà al calcolo dei due lati $A C$, $A D$. Questo problema si semplifica quando $H = H_1$, ed in tal caso bisogna procedere con successive approssimazioni, ossia prima assumendo :

$$A D \cotg z_1 = A C \cotg z$$

per cui, indicando con I un'incognita ausiliaria, potremo desumere :

$$\begin{aligned} A D &= I \cotg z \\ A C &= I \cotg z_1 \end{aligned}$$

Sostituendo nella prima, si avrà l'equazione :

$$a^2 = I^2 (\cotg^2 z + \cotg^2 z_1 - 2 \cotg z \cotg z_1 \cos \alpha)$$

da cui, tratto il valore di I , si avrà un primo valore di $A D$ ed $A C$. Poi si calcoleranno le correzioni alle distanze zenitali z e z_1 per procedere al calcolo definitivo.

Livellazione geometrica.

Indicando con H_0 l'altitudine di un punto intermedio della medesima traiettoria luminosa, h ed H quelle di due centri di osservazione, avremo :

$$\begin{aligned} H - H_0 &= s_1 \cotg z_1 + \beta s_1^2 \text{ arc } 1'' \\ h - H_0 &= s_2 \cotg z_2 + \beta s_2^2 \text{ arc } 1'' \end{aligned}$$

quindi :

$$H - h = s_1 \cotg z_1 - s_2 \cotg z_2 + \beta \text{ arc } 1'' (s_1^2 - s_2^2)$$

Quando $s_1 = s_2 = s$, allora si ottiene :

$$H - h = s (\cotg z_1 - \cotg z_2)$$

e quando la linea di mira è orizzontale, ossia $z_1 = z_2 = 90^\circ$, dette L ed l le distanze di detta linea dai due punti estremi della traiettoria, nel qual caso il punto C diventa un centro di osservazione, si ricaverà :

$$H - h = L - l.$$

Le grandezze L ed l sono lette sopra due mire verticali, onde proseguendo così lungo un allineamento prestabilito, a cominciare dal mare medio, si realizza la livellazione geometrica e un vero piano quotato quando il centro di osservazione rappresenta un *radiante*.

In questa operazione è ammessa la tolleranza di $\pm 3^{\text{mm}}$ per chilometro in pianura, di $\pm 5^{\text{mm}}$ in terreno ondulato, e di $\pm 7^{\text{mm}}$ nelle forme orografiche accentuate.

Invece la livellazione ellissoidica, in cui l'altitudine è determinata con la formula :

$$H = h + s \cotg (z - \beta s) + \Delta I - \Delta M$$

(ΔI altezza dell'asse di rotazione dell'istrumento dal suolo; ΔM distanza verticale tra la linea mirata e quella di cui occorre determinare l'altitudine) assume, per tutte le cause perturbatrici incombenti, una precisione sette od otto volte minore. L'origine delle altitudini, nei due casi, è in prossimità del mare, ed è determinata nel modo più semplice, osservando le fasi della marea durante 25 ore, ossia per un giorno lunare, sopra un'asta graduata a centimetri immersa, posta stabilmente in località adatta, dove non vi sia rigurgito o trasformazione del moto potenziale caratteristico della marea in moto vorticoso. La formola che in tal caso determina l'altitudine locale del livello medio è questa :

$$H = \frac{h_1 + 2(h_2 + h_3 + h_4) + h_5}{8}$$

(h_1, h_3, h_5 alte maree successive; h_2, h_4 basse maree intermedie).

Coordinate cartesiane nel campo topografico e geodetico.

Consideriamo un punto A rispetto a tre assi cartesiani ortogonali, di cui la z è diretta secondo la verticale, ed il piano xy è quello dell'orizzonte; supponiamo che la y sia diretta

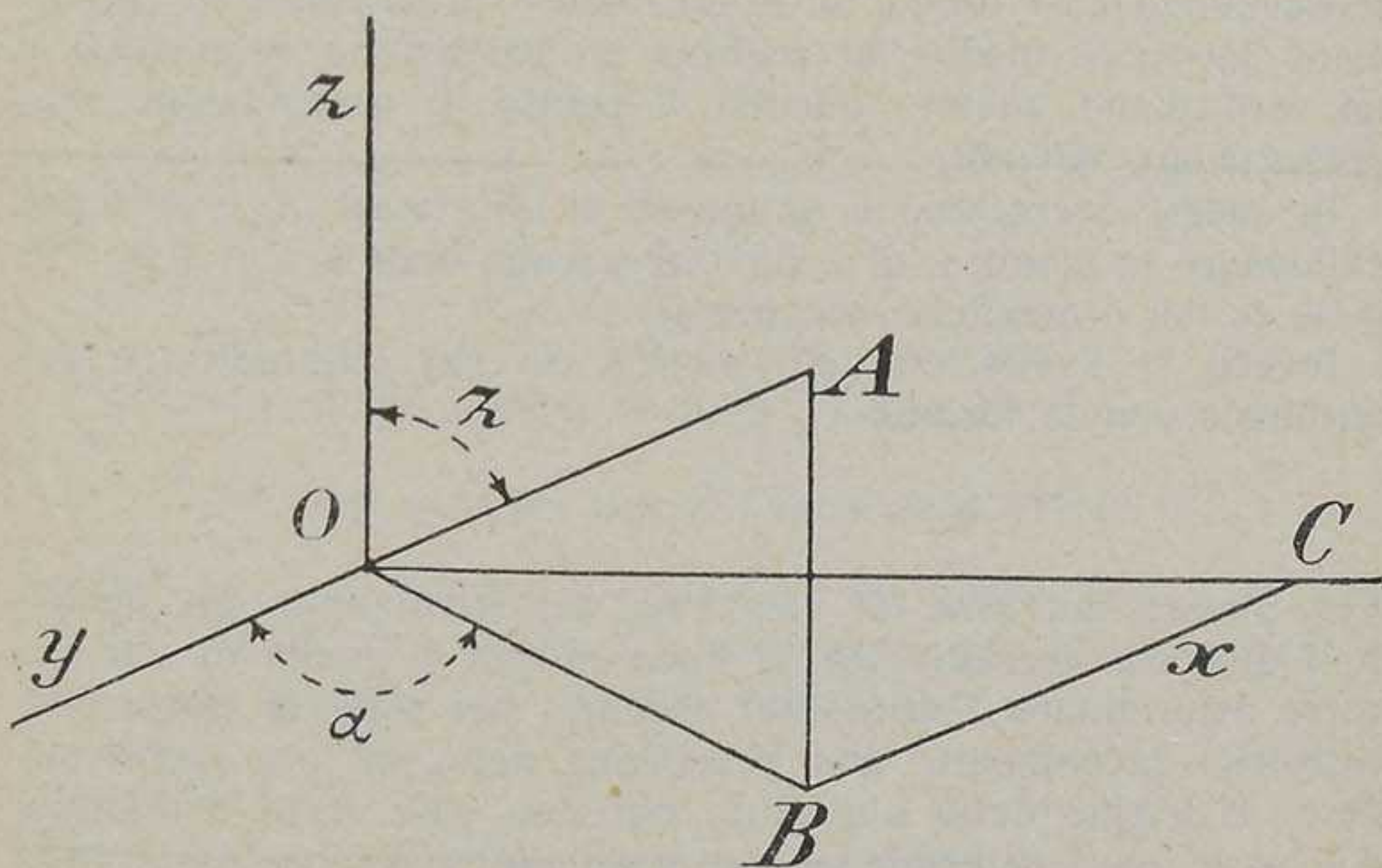


Fig. 12.

al punto Nord e sia α l'azimut della visuale diretta al punto A di cui indicheremo con z l'altitudine, ossia poniamo $z = AB = h$.

Essendo $OB = s$ il lato formato dalla triangolazione avremo:

$$\left. \begin{aligned} x &= s \cdot \text{sen } \alpha \\ y &= s \cdot \text{cos } \alpha \\ h &= s \cdot \text{cotg } z \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Tenendo conto invece della curvatura, avremo:

$$\left. \begin{aligned} x &= s \cdot \text{sen } (\alpha - \varepsilon) \\ y &= s \cdot \text{cos } (\alpha - 2\varepsilon) \\ h &= s \cdot \text{cotg } z + \frac{s^2}{2R} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

e per $z=90^\circ$, avremo :

$$\begin{aligned}x &= s \cdot \text{sen} (\alpha - \varepsilon) \\y &= s \cdot \text{cos} (\alpha - 2\varepsilon) \\h &= \frac{s^2}{2R}\end{aligned}$$

Le tre relazioni (1) caratterizzano precisamente il campo topografico e provengono da sviluppi più ampi dovuti a Puiseux-Weingarten; rappresentano anche le coordinate di Eulero. Nel campo geodetico, le tre relazioni precedenti (2) contengono anche i termini del 2° ordine, cioè in $\left(\frac{s}{R}\right)^2$, perchè l'eccesso sferico è calcolato fino ai termini dell'ordine accennato.

La lunghezza del lato nel campo geodetico non oltrepassa i 110 chilometri.

Il teodolite.

Questo strumento, nel suo insieme, rappresenta un sistema di tre assi ortogonali e precisamente specifica il metodo di Eulero per la determinazione dei punti nello spazio. Perciò è provvisto di due cerchi, uno parallelo all'orizzonte che serve alla misura geometrica degli azimut, l'altro verticale con cui si ottengono gli angoli di altezza, cioè la *distanza zenitale*, l'angolo che la tangente alla linea di mira forma con la verticale, o il suo complemento che rappresenta la *pendenza* della medesima retta rispetto all'orizzonte.

L'azimut varia da 0° a 360° da Nord a Sud, passando dall'Est; gli angoli di altezza da 0° a 90° . La relazione $z=0^\circ$ caratterizza la verticale; $z=90^\circ$. l'orizzonte; mentre, rispetto all'orizzonte, le indicazioni sono opposte.

Ora nel teodolite l'asse della x è rappresentato dall'asse di rotazione del cannocchiale, l'asse delle y dalla linea di mira e l'asse z dalla verticale, quindi l'uso logico di questo strumento richiede che i tre assi siano ortogonali; l'origine delle coordinate è il centro del teodolite.

Praticamente è impossibile conseguire con vera esattezza l'accennata condizione, nonostante la livella amovibile sovrapposta all'asse di rotazione del cannocchiale, le viti calanti e tutti gli altri organi che mirano ad eliminare qualsiasi perturbazione. L'asse di rotazione non sarà mai assolutamente parallelo all'orizzonte ed assumerà un'inclinazione i piccola; la linea di mira non coinciderà con l'asse ottico del cannocchiale ed infine l'asse z non sarà mai adagiato perfettamente sulla verticale geometrica, onde in ogni misura angolare, vi è conglobato l'errore d'inclinazione i , l'errore di collimazione c e l'errore di verticalità v . I due primi si possono eliminare con *misure coniugate*, eseguite cioè nelle due posizioni dell'istrumento, circolo verticale a sinistra ed a destra dell'osservatore; l'altra non è mai possibile compensarla, ed ecco la necessità di una grande precisione nell'orditura meccanica. I cerchi devono essere divisi in modo da conseguire, nella completa escursione della graduazione, il minimo residuo; le viti di richiamo senza interruzione di passo; nelle livelle, quella del cannocchiale e l'altra in corrispondenza del circolo verticale, per una parte della relativa scala l'amplitudine (sensibilità quando la lunghezza fra due tratti successivi della scala è uguale ad un millimetro) non deve mai superare l'approssimazione che consente il nonio ovvero il microscopio micrometrico. Riguardo dunque alle tre ineguaglianze citate, una semplice misura angolare sarà così espressa:

$$L_1 = L_0 + A c + B i + C v,$$

in cui A , B e C rappresentano tre coefficienti facilmente conosciuti.

Ora, per determinare il valore di c , *errore di collimazione*, basta osservare nelle due posizioni dello strumento un medesimo oggetto all'orizzonte e poi assumere:

$$c = \frac{1}{2} (L_2 - L_1) - 90^\circ$$

Si può allora rimettere la linea di mira nella sua giusta posizione, ossia eliminare l'errore c , attribuendo al circolo orizzontale la posizione $L_2 - c$ e poscia riportando, con le due viti a contrasto, il filo verticale del reticolo nell'immagine. L'effetto

residuo della collimazione si manifesta sopra la singola lettura con la ragione di $\frac{1}{\sin z} = A$; quello d'inclinazione in misura corrispondente al valore di $B = \cotg z$ e finalmente l'errore di verticalità in maniera corrispondente al valore $C = \cotg z \sin L_0$;

$$L = L_0 \pm \frac{c}{\sin z} \pm i \cotg z + \nu \cotg z \sin L_0$$

(+ *posizione diretta*, ossia circolo verticale a destra; - *posizione inversa*, cioè circolo verticale a sinistra dell'osservatore). Ricordiamo che :

$$i = \frac{1}{2} (a \pm b) \alpha ;$$

a e b letture della bolla; α valore angolare di una parte della livella.

L'ultimo termine, che non si può eliminare, diventa massimo per $z = 45^\circ$ ed $L_0 = 90^\circ$. Oltre queste ineguaglianze, bisogna pure ricordare che nella misura di un angolo incombono anche l'errore dell'eccentricità di rotazione e quello dell'eccentricità di reiterazione. Il primo è connesso al moto dell'alidada, cioè alla rotazione dei microscopi; l'altro, invece, dipende dallo spostamento del circolo intorno al proprio asse. Anche gli effetti di queste due cause analoghe sono soggetti a naturale compensazione; infatti, allo scopo di eliminare l'eccentricità di rotazione, ogni lettura è fatta con due microscopi opposti, cioè a distanza angolare di 180° .

Corretto l'istrumento in modo da realizzare meglio che sia possibile le condizioni teoriche, ogni angolo resta così definito :

$$\text{Angolo } A = L_d - L_s$$

(direzione a destra, meno direzione a sinistra) perchè sopra i circoli la graduazione procede nel senso diretto.

Nelle reti geodetiche, ogni misura angolare è osservata 36 volte; 18 nella posizione diretta e 18 in quella inversa. l'errore medio di una sola determinazione è previsto così;

supponiamo che l'approssimazione dei microscopi sia di $2''$; la lettura media corrispondente ai due microscopi avrà allora l'errore medio di $\frac{2'}{\sqrt{2}} = \pm 1'',5$ (per eccesso), quindi l'errore medio della media sarà :

$$m = \frac{\pm 1'',5}{6} = \pm 0'',25$$

Infine, relativamente all'angolo, bisogna assumere :

$$m_1 = 0'',25 \sqrt{2} = \pm 0'',38$$

Ma questa grandezza che caratterizza la precisione di un angolo medio non è mai più piccola di $1''$, e praticamente, quando si ha una serie di triangoli chiusi, è realizzata la formola del generale Annibale Ferrero :

$$m_1 = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{3n}},$$

essendo $[\Delta^2]$ la somma dei quadrati di tutti gli errori di chiusura ed n il numero dei triangoli. Qui può anche presentarsi il problema della forma più conveniente che deve assumere il triangolo geodetico; problema non nuovo e che ha sempre inutilmente preoccupata la mente dei geodeti; ma anche intuitivamente, si può comprendere che nessun triangolo soddisfa alla condizione di rendere minimo l'errore che si rovescia sui lati per l'effetto cospirante di quello inerente alla base e soprattutto alla misura degli angoli. Gli ostacoli della precisione lineare sono proprio gli errori angolari, ed ecco perchè, quando si tratta di trasportare una lunghezza misurata direttamente, bisogna farlo attraverso il più piccolo numero di triangoli. Ora, per la misura di un angolo verticale, occorre, innanzi tutto, determinare lo *zenit instrumentale*, cioè la lettura corrispondente ad una data posizione del circolo verticale, anch'esso mobile intorno all'asse di rotazione del cannocchiale, e sul quale la graduazione procede in senso contrario alle lancette di un orologio. Adagiata al piano che contiene l'asse dei

due microscopi con cui si realizza la lettura del circolo verticale, vi è una livella per cui il valore angolare di una parte della sua scala non dovrebbe mai superare l'approssimazione dei microscopi stessi. Per ottenere il valore di z si osserva collimando col filo orizzontale del reticolo — mentre la collimazione col filo verticale deve riferirsi alla lettura dell'altro circolo — un oggetto nelle due posizioni coniugate, circolo a destra l_a e circolo a sinistra l_s ; indicando con u lo zenit istrumentale si dimostra che,

$$u_o^r = \frac{1}{2} (l_a + l_s)$$

e quando i due assi dei microscopi sono orizzontali e con la medesima condizione:

$$z_o = \frac{1}{2} (l_a - l_s) .$$

La prima relazione offre un mezzo di controllo per ogni posizione del circolo. Se poi si presenta la necessità di tener conto della livella, allora occorre distinguere questi tre casi:

1) origine della scala a sinistra dell'osservatore — ed allora la posizione del centro per ogni lettura resterà così determinata:

$$c = \frac{1}{2} (a + b) \alpha$$

ed assumerà il segno negativo; a lettura a destra, b lettura a sinistra dell'osservatore.

2) origine della scala a destra:

$$c = \frac{1}{2} (a + b) \alpha$$

col segno positivo.

3) origine della scala nel centro della livella; allora:

$$c = \frac{1}{2} (a - b) \alpha$$

ed in tal caso il segno è quello della differenza. a lettura a sinistra, b lettura a destra del centro.

Quindi in definitiva sarà :

$$\left. \begin{aligned} z &= z_0 \mp \frac{1}{4} \alpha [(a+b) - (a_1 + b_1)] \\ u &= u_0 \mp \frac{1}{4} \alpha [(a+b) + (a_1 + b_1)] \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} - \text{ Origine della scala a sini-} \\ \text{stra.} \\ + \text{ Origine della scala a de-} \\ \text{stra di chi guarda il cir-} \\ \text{colo.} \end{array}$$

Quando però l'origine della scala è nel centro della livella, allora si avrà :

$$\begin{aligned} z &= z_0 + \frac{1}{4} \alpha [(a-b) - (a_1 - b_1)] \\ u &= u_0 + \frac{1}{4} \alpha [(a-b) + (a_1 + b_1)] \end{aligned}$$

Vi è ancora un'altra causa che può alterare la misura di una distanza zenitale, la *flessione del cannocchiale*; ma questa, in geodesia come in astronomia, è trascurata.

Trasporto delle misure angolari dal centro di osservazione ad un altro punto vicino.

Anche in questo problema è utilizzata la nozione della parallasse, perchè assumendo $CV=r$; C centro di osservazione e V vertice della triangolazione, $AV=s$ distanza di V dal punto A congenere, si otterrà :

$$\alpha = - \frac{r \operatorname{sen} y}{s \cdot \operatorname{arc} 1''},$$

in cui l'angolo y = direzione al vertice V meno direzione al punto A ; α è la parallasse, ossia la riduzione al centro.

La determinazione di questo angolo parallattico richiede grande precisione nella misura di r , l'eccentricità, che deve

essere conseguita al centimetro, mentre y può essere anche approssimato al minuto primo e la distanza s , a volte, opportunamente tratta soltanto da una carta al 25 mila, la cui precisione è di $\pm 5^m$.

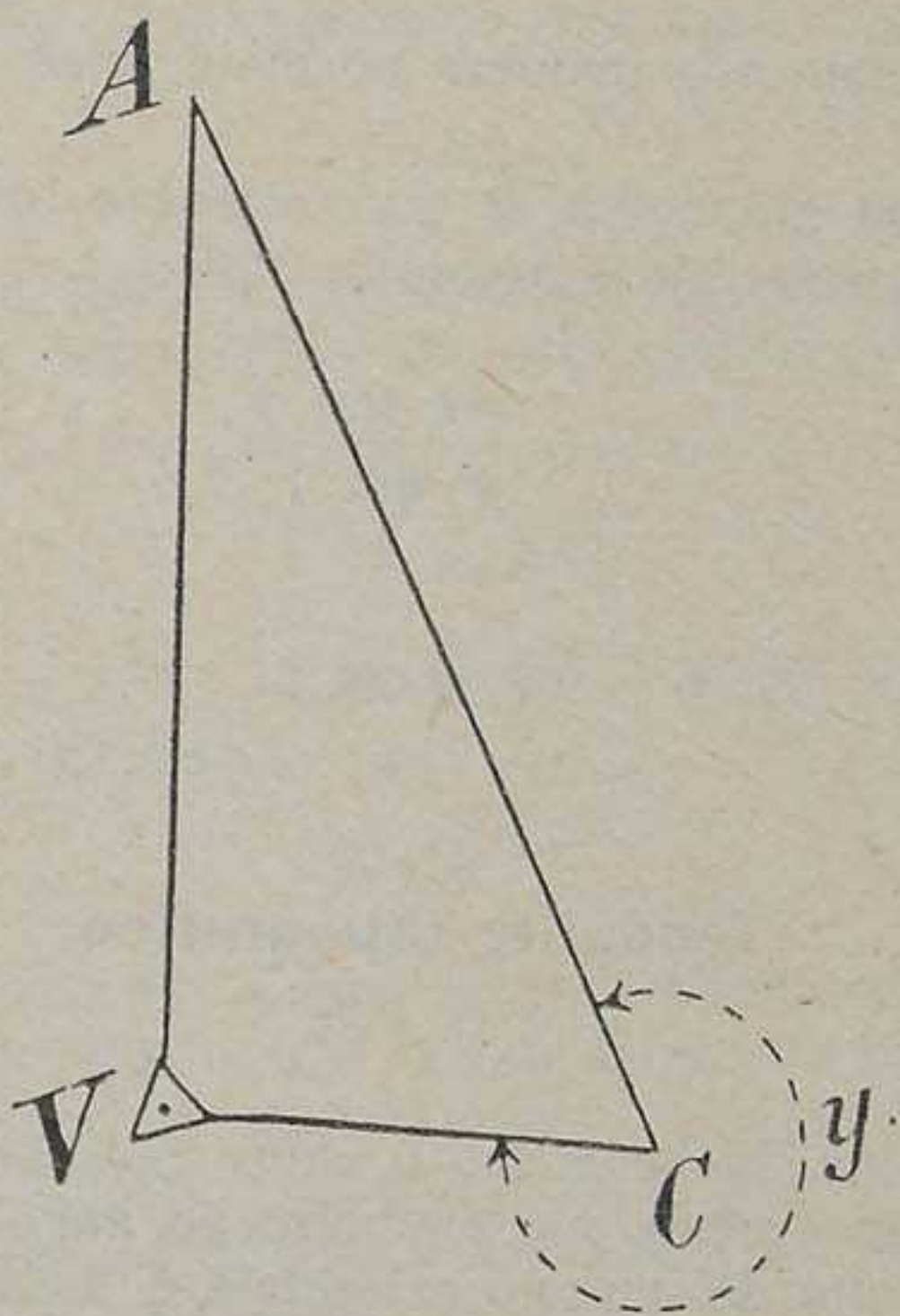


Fig. 13.

La riduzione della distanza zenitale al vertice V si ottiene con la seguente formola :

$$\Delta z = - \frac{\Delta I - \Delta M}{s \cdot \text{arc } 1''},$$

in cui ΔI è positivo o negativo, secondo che il centro del teodolite è sopra o sotto il piano di cui è nota o si tratta di conoscere l'altitudine, e ΔM è ugualmente positivo o negativo, in corrispondenza della linea di mira sopra o sotto il piano di cui è nota o si tratta di determinare l'altitudine. Questa correzione richiede inoltre quella inerente alla distanza del

centro di osservazione dal punto mirato, e che si consegue con la formola :

$$\Delta s = \pm \alpha \cdot s \operatorname{arc} 1'' \cotg y \begin{cases} + & 1^\circ \text{ e } 3^\circ \text{ quadrante} \\ - & 2^\circ \text{ e } 4^\circ \text{ quadrante} \end{cases}$$

in cui y è contato alla maniera normale, cioè rappresenta l'angolo interno.

La medesima grandezza si può ottenere anche così: sostituendo ad α il suo valore assoluto, cioè :

$$\alpha = \frac{r \operatorname{sen} y}{s \cdot \operatorname{arc} 1''},$$

si ricava :

$$\Delta s = r \cos y.$$

Teodolite topografico.

È un teodolite, *tacheometro* o *cleps*, col cannocchiale distanziometro; propriamente un telemetro ad angolo parallattico costante. Al disotto del circolo azimutale è fissato un declinatore magnetico, quindi l'istrumento è utile anche alla misura della declinazione magnetica, cioè dell'azimut del meridiano magnetico.

Per la misura delle distanze lineari, si adopera la formola :

$$s = d + k H$$

in cui :

$$d = f_1 + \Delta$$

f_1 distanza focale dell'obbiettivo; Δ distanza del punto anallattico — fuoco anteriore dell'obbiettivo — dal centro dell'istrumento;

H porzione di mira fra due fili del reticolo; $k = \frac{f_1}{h}$ rapporto diastimometrico; h distanza tra i due medesimi fili del reticolo.

Applicando nell'interno del cannocchiale una lente, fra l'obiettivo e l'oculare, si può trasportare l'immagine dal punto anallattico al centro dell'istrumento; allora $d=0$ e quindi senz'altro :

$$s_0 = k H$$

Per determinare k si misurano due basi s ed s_1 , in modo che :

$$s = 8 s_1$$

si legge la mina nelle due posizioni ricavando H ed H_1 ed allora si calcola, col metodo del Prof. Iadanza :

$$k = \frac{7}{8} \frac{s}{H - H_1}$$

Assumendo $s = 50^m$, e quindi $s_1 = 6^m,25$, si ottiene, per $H = 1,0020$, $H_1 = 0,1284$:

$$k = 50.$$

Per avere invece un valore approssimato della declinazione magnetica, è necessario che, tanto il centro di osservazione quanto il punto mirato, siano entrambi vertici di una triangolazione, perchè occorre conoscere gli azimut reciproci. Detta allora L la lettura del circolo orizzontale relativa al punto mirato ed α l'azimut corrispondente, sarà :

$$N = L - \alpha$$

il *nord istrumentale*, cioè la lettura corrispondente al punto Nord dell'orizzonte.

Ma indicando con L_1 la lettura, quando l'ago magnetico è diretto al tratto centrale del declinatore, ossia relativa al Nord magnetico e con δ la declinazione magnetica, si avrà :

$$\delta = L_1 - N.$$

La grandezza δ varia di circa $10'$ all'anno e di $20'$ per ogni grado di longitudine, da ovest ad est.

Le moderne teorie altimetriche.

Quando si procede nella direzione di un itinerario assegnato, con l'istrumento sempre nel punto intermedio di due mire verticali, il dislivello corrispondente ai due termini fissati si calcola, in pratica, supponendo parallele le superficie di livello, ossia con la semplice relazione :

$$h - H = \frac{1}{2} (\Sigma l_i - \Sigma l_a) \quad (1)$$

l rappresenta la lettura della mira in corrispondenza del filo medio. Ma le superficie di livello terrestri, a forma ellissoidica, non possono essere parallele fra loro, quindi il valore di $H - h$ cambia con la via percorsa.

Allo scopo di conseguire dunque un unico valore occorre prendere in considerazione il difetto di parallelismo delle superficie di livello.

Innanzitutto, la superficie dinamica del nostro globo, modellata dalla gravità, e di cui una immagine noi possiamo vederla nella superficie media degli oceani, avrà per equazione :

$$W = V + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2)$$

in cui V rappresenta il potenziale dell'attrazione ed $\frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2)$,

in via analogica soltanto, quello della forza centrifuga antagonista.

Con la nozione della forza di gravità non è difficile comprendere l'unico valore corrispondente al dislivello fra due punti, perchè esso rappresenta, in realtà, il lavoro di una forza, il quale è indipendente dall'itinerario percorso.

La gravità varia dal polo all'equatore secondo la legge :

$$g = 9^m,78052 (1 + 0,005285 \text{ sen}^2 \varphi)$$

ovvero riferendosi al valore che essa assume alla latitudine di 45° , con la medesima legge:

$$g = 9^{\text{m}},80632 (1 - 0,002644 \cos^2 \varphi).$$

Ora questa forza s'identifica con la sua componente normale, la quale, entro un itinerario cortissimo, può raffigurarsi in questo modo:

$$g = - \frac{W_1 - W}{h - H} = - \frac{\Delta W}{\Delta H}$$

quindi:

$$h - H = - \frac{W_1 - W}{g}.$$

Così precisamente resta eliminato il difetto di parallelismo delle superficie di livello, perchè l'altitudine è allora rappresentata dalla variazione che subisce il potenziale della gravità nell'itinerario percorso, espresso in unità lineari.

La teoria che specifica così la quota di un punto, si chiama *dinamica*, mentre un'altra che considera superficie di uguale altezza è detta *ortometrica*.

Al dislivello calcolato con la relazione primitiva (1), applicando questa correzione:

$$\varepsilon = -2^{\text{mm}},644 (H + h) \text{ sen } 2\varphi_m (\varphi - \varphi_0) \text{ arc } 1'',$$

si ottiene l'altitudine ortometrica; ed a questa, attribuendo l'altra correzione:

$$\eta = 2^{\text{mm}},644 H \cos 2\varphi - 0^{\text{mm}},000157 H^2,$$

si ricava la quota dinamica.

La prima è sempre utile: dall'altra non si può prescindere quando si tratta di studiare l'equilibrio delle acque a grandi altezze.

Le due correzioni sono tratte da tavole numeriche; per ε con gli argomenti $H + h$ e $\varphi - \varphi_0$; per η con gli argomenti H e φ .

Nozioni di celerimensura.

Quando una carta topografica dev'essere disegnata a grande scala, allora è utile la celerimensura, la quale, con un insieme di misure, può giungere alla formazione più razionale di un piano quotato e perciò a definire, senza alcuna ambiguità, le curve di livello e le linee di massima pendenza sul piano cartesiano. Giova per tutto questo tener conto che la precisione, per ogni distanza, è limitata dalla relazione:

$$\Delta s = 0^m,014 \sqrt{s}.$$

in cui s è espresso in unità, mentre, riguardo agli angoli, la tolleranza è fissata nella seguente misura:

$$\Delta \alpha = 1',5 \sqrt{n},$$

n essendo il numero dei centri di osservazione.

Ogni distanza resta definita con l'equazione:

$$s = d \operatorname{sen} z + k H \operatorname{sen}^2 z$$

quando non vi è lente anallattica e si guarda un oggetto a cui corrisponde la distanza zenitale z , altrimenti $d=0$ e si ha semplicemente:

$$s_0 = k H \operatorname{sen}^2 z$$

Invece i dislivelli sono determinati utilizzando il complemento della distanza zenitale, cioè propriamente l'angolo di altezza: $\alpha = 90^\circ - z$.

E mentre allora:

$$s_0 = k H \cos^2 \alpha,$$

si ottiene poi il dislivello fra la mira e lo strumento:

$$\Delta h = s_0 \operatorname{tang} \alpha = k H \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

Ammissa l'approssimazione di 20'' per la lettura del circolo verticale, la tolleranza per ogni dislivello fra punti distanti di 100 metri, è stabilita a 0^m,01.

Per i goniometri di batteria, i quali consentono l'approssimazione di 3',5 circa in ogni amplitudine, si può ammettere, nelle distanze, la tolleranza di 5^m per ogni 100 metri, e per gli angoli :

$$\Delta \alpha = 10,5 \sqrt{n} .$$

Infine, ammesso per tali istrumenti il reticolo inciso, con divisioni di 2 millesimi sul filo verticale, la distanza resterà così definita :

$$s = \frac{1000}{n} H + 0^m,2$$

(n è il numero dei millesimi). Se $n=10$, ogni misura essendo di 2 millesimi, si avrà allora :

$$\frac{1000}{n} = 50$$

per il rapporto diastimometrico corrispondente nel tratto delle divisioni rilevate.

FENOMENO DELLE MAREE

MEMORIO DELLA MARSA

Il fenomeno delle maree si manifesta col meccanismo del flusso e riflusso il quale è conseguenza dell'attrazione lunisolare. La superficie del mare, prescindendo dall'azione dei venti, è dotata di un movimento continuo e periodico in virtù del quale le acque si innalzano e si abbassano rispetto alle coste. La durata di una oscillazione è di circa $12^h 25^m$; ma nelle prime sei ore le acque salgono avanzandosi verso la costa ed ha allora luogo il *flusso* che termina coll'alta marea; nelle altre sei ore successive avviene il movimento di *riflusso* da cui deriva la bassa marea.

Il periodo delle maree, ossia l'intervallo fra due alte maree consecutive, è realmente $12^h 25^m 14^s$; l'ora della bassa marea non coincide coll'istante medio di questo periodo, giacchè, terminato il flusso, le acque rimangono per un certo tempo stazionarie.

L'amplitudine di queste oscillazioni varia col tempo in un medesimo luogo ed il suo valore medio varia anche da un posto ad un altro. L'altezza dell'alta marea non è la stessa ogni giorno per un dato luogo; essa è maggiore nelle epoche sizigiali e minore alle quadrature. La massima alta marea non succede al momento della sizigia, ma trentasei ore dopo; e così pure la minore bassa marea avviene trentasei ore dopo le quadrature.

Si chiama *marea totale* la semisomma delle altezze di due alte maree successive rispetto alla bassa marea intermedia; la sua grandezza varia colla distanza della Luna dalla Terra ed aumenta se la Luna si avvicina, diminuisce quando si allontana dalla Terra. La variazione della distanza della Luna dalla Terra è di circa $1/15$ del suo valore medio, mentre la variazione corrispondente della marea totale nella sizigia è di

circa $3/26$. La variazione della distanza del Sole dalla Terra esercita anche un'influenza sull'altezza delle maree; ma essa è meno sensibile di quella che dipende dalla distanza della Luna.

Sulle maree influiscono anche le variazioni di declinazione del Sole e della Luna; ed infatti le maree sizigiali sono tanto maggiori, e quelle delle quadrature tanto minori quanto più la Luna ed il Sole sono vicini all'equatore.

Infine, le maree non sono apprezzabili che in mari molto estesi: esse, per conseguenza, sono trascurabili nei mari chiusi, come il Mar Nero ed il Mar Caspio e per i laghi.

Causa delle maree.

Risulta da quanto precede che le maree sono prodotte dalle *azioni combinate del Sole e della Luna*. L'azione di questa essendo preponderante, si verifica per l'alta marea un ritardo giornaliero di circa 50 minuti. Volendo dare ragione del fenomeno supporremo la Terra completamente coperta di acque ed immobile. Se la superficie liquida sarà soggetta alla sola azione della gravità assumerà la forma sferica; ma, se intervengono le azioni del Sole e della Luna, la superficie di equilibrio sarà differente da quella di una sfera.

Per determinarla supponiamo in T ed in L i centri della Terra e della Luna; sia m la massa della Luna ed a una molecola della superficie solida su cui l'attrazione si manifesta come se tutta la massa della Terra fosse riunita al centro.

Ponendo $d = TL$ e chiamando μ la costante di attrazione; l'attrazione della Luna sulla molecola a , che supporremo di massa uno, sarà

$$f = \mu \frac{m}{d^2}$$

Consideriamo ora una molecola liquida A , la quale è libera di muoversi; essa sarà attratta da una forza:

$$f' = \mu \frac{m}{(d-r)^2}$$

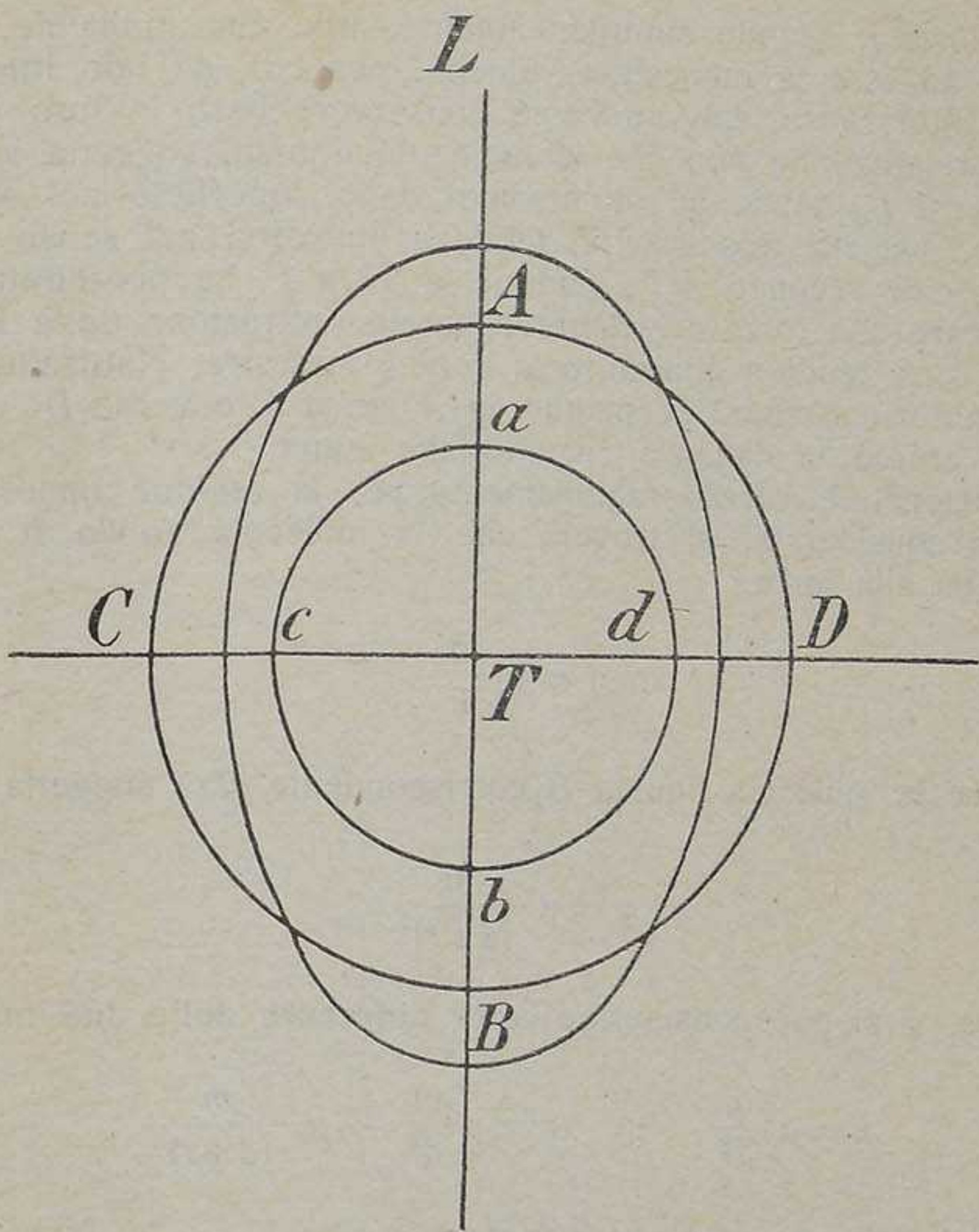


Fig. 14.

in cui r esprime il raggio della Terra.

Ora, f che è maggiore di f' può considerarsi come somma di due forze e cioè :

$$f = \mu \frac{m}{d^2} \quad ; \quad f' = \mu \frac{m}{(d-r)^2} - \mu \frac{m}{d^2}$$

le quali agiscono entrambe secondo la direzione AL .

3.

La forza f , agendo simultaneamente sulle due molecole, imprime ad esse la medesima velocità, per cui, se non intervenisse altra causa, tali molecole conserverebbero la loro posizione relativa. Se non che la molecola liquida, soggetta anche alla forza f' , tende ad allontanarsi dalla superficie nel senso AL e, soggetta alla gravità, tende a muoversi nel senso contrario, cioè secondo AT ; dunque la forza f' ha per effetto di provocare una forza *divellente* e perciò l'attrazione della Luna sulla Terra tende a diminuire la gravità terrestre. Naturalmente la diminuzione andrà scemando da A verso C e verso D , ossia come cresce la distanza rispetto alla Luna.

Ripetendo lo stesso ragionamento per la regione opposta a quella considerata, si troverà che la molecola solida b sarà soggetta alla forza:

$$f = \mu \frac{m}{d^2}$$

mentre la molecola liquida B corrispondente sarà soggetta alla forza:

$$\varphi = \mu \frac{m}{(d+r)^2}$$

Ora, φ si può considerare come differenza delle due forze:

$$f = \mu \frac{m}{d^2} \quad ; \quad \varphi' = \mu \frac{m}{d^2} - \mu \frac{m}{(d+r)^2}$$

le quali agiscono in senso contrario.

La forza f che agisce contemporaneamente su b e su B imprime a queste due molecole la stessa velocità, ed esse assumerebbero una posizione relativa invariabile qualora fossero soggette alla sola forza f . Ma la forza φ' che agisce secondo LB , e però contrariamente alla gravità, alla quale è anche soggetta la molecola liquida B , provocherà una *forza divellente* e quindi un allontanamento di B da b . L'effetto andrà diminuendo da B verso C e da B verso D .

In conclusione lo strato liquido considerato sarà, in ogni punto, sottoposto ad una forza centrale: la gravità; e ad una forza contraria: l'attrazione della Luna. Esso, per conseguenza, assumerà la forma di un ellissoide allungato secondo TL , per

cui nei punti A e B vi sarà alta marea e nei punti D e C bassa marea.

Tale risultato non muterebbe qualora la Luna occupasse sempre la stessa posizione rispetto alla Terra; invece, come l'esperienza prova, la marea segue il moto della Luna.

Ora, se si tien presente che con facili trasformazioni le espressioni di f'' e f' assumono la forma:

$$f'' = \mu \frac{m(2dr - r^2)}{d^2(d-r)^2} \quad ; \quad f' = \mu \frac{m(2dr + r^2)}{d^2(d+r)^2}$$

e che, essendo $d=60$ raggi terrestri circa, si può trascurare r^2 rispetto a $2dr$ al numeratore, ed r rispetto a d al denominatore, ne risulterà:

$$f'' = f' = \mu \frac{2mr}{d^3}$$

Così la forza che solleva le acque in A e in B è direttamente proporzionale alla massa della Luna ed inversamente al cubo della distanza della Luna dalla Terra.

Effetto della rotazione della Terra.

Se la Terra fosse immobile, come abbiamo supposto, la forma di equilibrio dello strato liquido non verrebbe mai a cambiare di posizione. Ciò invece non si verifica a causa del moto diurno della Terra, il quale si compie in 24 ore, e di quello della Luna intorno alla Terra che si compie in circa giorni 27,32.

Per semplicità supporremo la Luna sul piano dell'equatore, ossia che la sua declinazione sia nulla. L'asse maggiore dell'ellissoide liquido, diretto sempre alla Luna, cambierà di posizione a misura che la Luna si muove intorno alla Terra. A capo di $6^h 12^m 37^s$, cioè dopo che la Luna avrà girato di 90° , essa si trova sul meridiano di C e D ed allora si avrà l'alta marea nei punti C e D ; bassa marea in A e B . Siccome tutto ciò avviene in modo progressivo, così il mare sale durante $6^h 12^m 37^s$ in C e D , discende nello stesso tempo in A e B .

Inoltre l'alta marea si è verificata successivamente in tutti i luoghi situati fra A e C , B e D , in corrispondenza delle culminazioni superiori ed inferiori della Luna. Dopo un altro intervallo di $6^h 12^m 37^s$, la culminazione della Luna è superiore in B , inferiore in A e si verifica di nuovo l'alta marea in B ed in A e bassa marea in C e D , ed in modo successivo per tutti i punti compresi fra B e C e fra D ed A . Dopo altre $6^h 12^m 37^s$ la Luna passerà al meridiano di D e si avrà di nuovo alta marea in D e C ; bassa in B ed A .

Adunque l'intervallo di due alte maree consecutive in ogni luogo della Terra è precisamente di $12^h 25^m 14^s$.

Marea solare.

Se M dinota la massa del Sole, sarà :

$$F = \mu \frac{2 M r}{D^3}$$

la forza che solleva le acque in A e B ; essendo D la distanza del centro della Terra dal Sole. Ora, poichè

$$\frac{f''}{F} = \frac{m}{M} \cdot \frac{D^3}{d^3}$$

così, assumendo :

$$m = \frac{1}{81} \quad ; \quad M = 355000 \quad ; \quad D = 23400 \quad ; \quad d = 60$$

si deduce :

$$\frac{f''}{F} = 2,05$$

e perciò la marea lunare è circa il doppio della marea solare.

Effetto risultante della marea lunare e solare.

Si dimostra in meccanica che il movimento di un sistema soggetto a due forze è la risultante dei movimenti parziali ai quali ciascuna di queste forze darebbe luogo se agisse da sola. Perciò i due flussi parziali, prodotti dalla Luna e dal Sole, si combinano fra loro dando luogo al flusso che effettivamente si osserva in un punto. Ma i periodi dei due fenomeni non sono identici e però l'istante della marea solare non sempre coincide con quello della marea lunare. Se ad una certa epoca i due astri culminano nello stesso tempo, le due maree coincidono; ma la marea lunare successiva ritarda sulla marea solare di $25^m 14^s$ che rappresentano la differenza fra il semiarco diurno lunare e quello solare, cioè la metà di $50^m 28^s$ che sono l'accelerazione del Sole rispetto alla Luna.

Il ritardo andrà accumulandosi, dimodochè a capo di giorni $7 \frac{1}{4}$ risulterà di $6^h 15^m$ circa, e l'alta marea lunare coinciderà colla bassa marea solare e viceversa.

Queste differenze spiegano appunto le variazioni dell'alta marea durante le fasi lunari. Così alla congiunzione le due maree si sommano e si ha l'alta marea della sizigia; mentre alla quadratura i due astri culminano a 6 ore di distanza e la marea è più piccola.

In ogni caso la marea effettiva è regolata dall'attrazione lunare, perchè essa è preponderante.

Ritardo delle maree.

Nei nostri porti la più grande marea effettivamente accade 36 ore dopo il giorno della sizigia. Questo ritardo dipende dal fatto che la Terra non è come l'abbiamo supposta, cioè completamente coperta dalle acque. Se si ammette che l'onda della marea si formi al centro dell'oceano, tale ritardo si può spiegare colla resistenza che incontra il moto ondoso a propagarsi.

Stabilimento del porto.

Vi è un ritardo che cambia da un porto all'altro; ma che è costante per lo stesso luogo. Questo ritardo si chiama *stabilimento del porto* ed è uguale alla differenza fra l'ora della culminazione della Luna sizigia e l'alta marea successiva.

Nello stabilimento del porto possono avere influenza anche le condizioni topografiche, altrimenti non si potrebbe spiegare come in punti della stessa costa, molto vicini fra loro, esso assuma talvolta valori molto differenti.

Mascaret.

È un fenomeno che avviene alla foce dei fiumi: l'alta marea respinge le acque del fiume verso la sorgente e ne deriva, per un certo tratto, una specie di barriera liquida.

Il Mascaret è conseguenza della poca profondità dell'estuario.

Derivazione delle quote altimetriche.

Le altitudini dei punti vengono contate dal livello medio del mare; positive dal basso in alto; negative in senso contrario. Per determinare il livello medio del mare si ricorre ai mareometri, ovvero ai mareografi.

I *mareometri* o *idrometri* sono costituiti da una lastra di marmo, graduata a centimetri dal basso in alto, la quale viene fissata verticalmente con lo zero immerso ed in località adatta, cioè protetta dai movimenti irregolari del livello marino e però nei moli, scogliere, ecc., ecc. La media delle letture L corrispondenti alle oscillazioni del livello marino, per intervalli

uguali di tempo e per lunghi periodi, fornisce l'altezza del livello medio rispetto allo zero dell'idrometro.

Per determinare la quota di un punto A prossimo all'idrometro, e che si assume come *origine delle altitudini*, si dispone il livello fra esso e la scala mareometrica S . Indicando con L la divisione della scala che coincide col filo orizzontale del

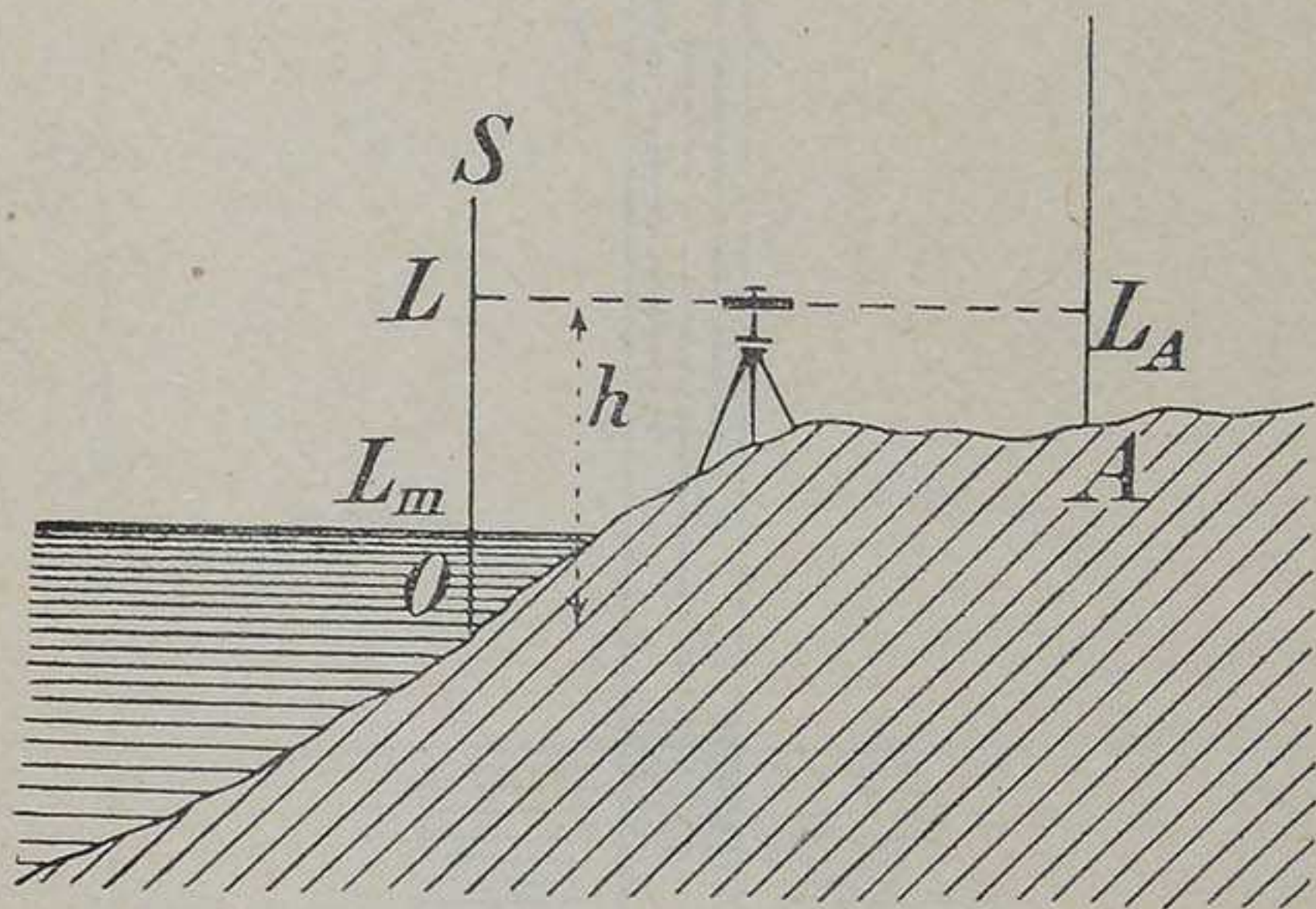


Fig. 15.

reticolo del cannocchiale, L_A quella di una mira verticale posta in A , il dislivello corrispondente sarà :

$$h = L - L_A$$

Onde la quota altimetrica Q di A sarà :

$$Q = h - L_m$$

e quindi :

$$Q = (L - L_m) - L_A$$

Nella livellazione trigonometrica si adotta generalmente per la misura del livello medio un *flussometro* il quale è costituito

da un tubo cilindrico di lamiera di ferro lungo circa 3 metri ed avente il raggio di 3 centimetri.

Inferiormente porta un diaframma *a* con un foro centrale ed a circa un metro un altro diaframma *b* al disopra del quale tro-

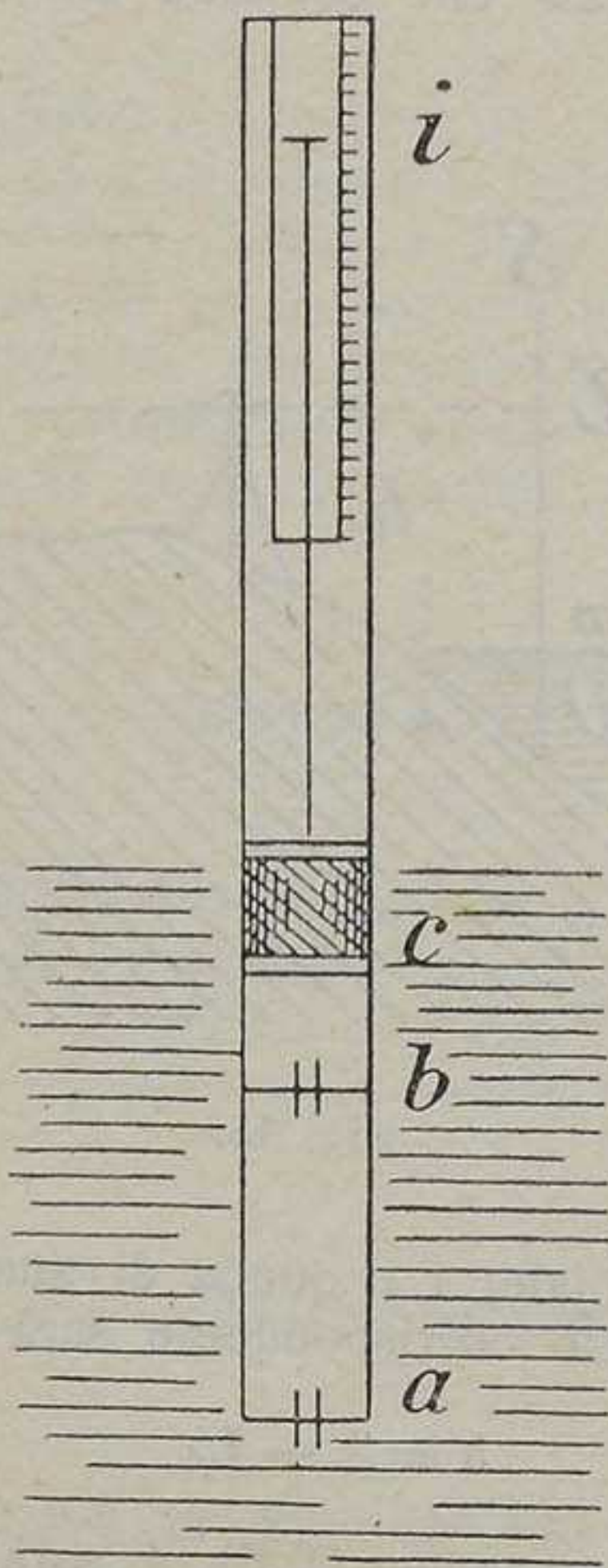


Fig. 16.

vasi un galleggiante *c* che è un cilindro di rame lungo 20 centimetri ed avente il raggio poco minore di 3 centimetri.

Il galleggiante è innestato ad un'asta verticale portante un indice *i* il quale scorre lungo una fenditura longitudinale graduata in centimetri.

L'istrumento viene fissato in località adatta, ed il livello medio si deduce facendo la media di tutte le letture fatte in un periodo di 25 ore, ad intervalli di 15 minuti, e sottraendo dal livello medio così ottenuto la distanza fra l'indice e la linea d'immersione del galleggiante.

Le determinazioni sistematiche del livello medio del mare si ottengono con maggior precisione mediante i *mareografi* che sono meccanismi registratori. Con questi strumenti si hanno

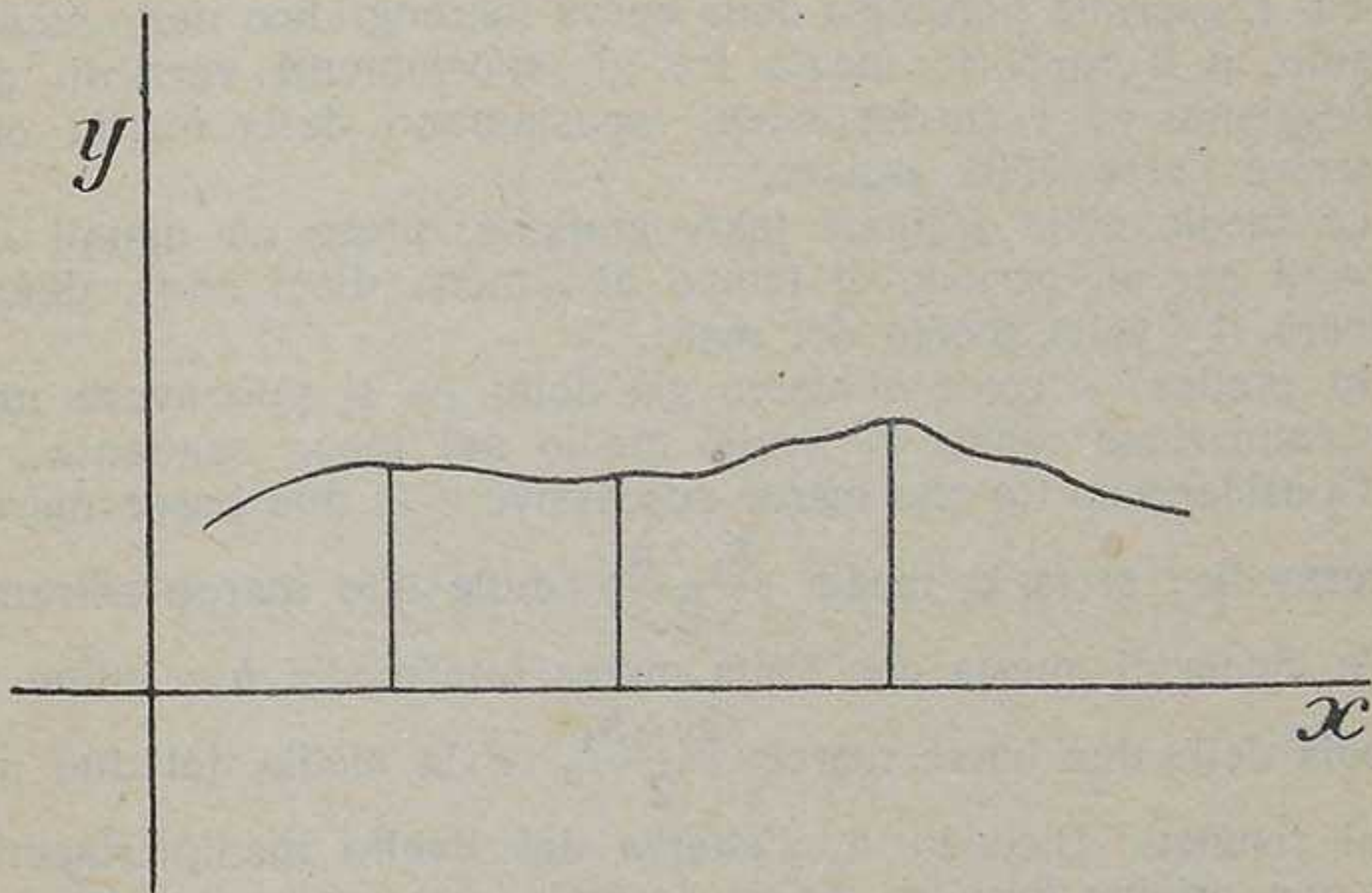


Fig. 17.

dei diagrammi, cioè la rappresentazione grafica del movimento periodico del livello marino.

La curva mareografica fa conoscere in ogni istante l'altezza del pelo d'acqua. Se noi riferiamo queste curve a due assi cartesiani ortogonali, quello delle ascisse per il tempo e quello delle ordinate per le altezze, si potrà anche da esse dedurre l'altezza del piano del foglio sul livello del mare e quindi l'altitudine di un punto prossimo da assumersi come origine delle quote.

Per bene intendere ciò si noti che ad ogni mareografo è annesso un galleggiante, come in un flussometro, il quale è collegato ad una matita che disegna la curva mentre una matita fissa descrive l'asse delle ascisse.

Ora, segnata sul galleggiante la linea d'immersione, lo si solleva fino a che la matita a cui è collegato viene a descrivere l'asse della ascissa; la distanza c del piano del foglio dalla linea d'immersione rappresenta la costante del mareografo.

L'altezza del piano del foglio in un altro istante sarà:

$$h = c + \mu L$$

in cui L esprime l'ordinata della curva mareografica nello stesso istante, μ il rapporto medio fra gli spostamenti verticali del galleggiante ed i corrispondenti spostamenti della matita che descrive l'asse delle ascisse.

La media delle ordinate mareografiche, prese ad uguali intervalli per un periodo di tempo di almeno dieci anni, determinerà il livello medio del mare.

In pratica — come abbiamo già detto — si può avere una determinazione rapida di livello medio nel modo seguente:

Consideriamo tre alte maree successive e le due basse maree intermedie; si fa la media $\frac{h_1 + h_5}{2}$ delle alte maree estreme e la media di questa con l'alta marea intermedia h_3 ; infine la media delle due basse maree $\frac{h_2 + h_4}{2}$, e la media dei due ultimi risultati. Dicendo h_0 l'altezza del livello medio rispetto ad una origine fissa, si ha la formola riassuntiva:

$$h_0 = \frac{h_1 + 2h_2 + 2h_3 + 2h_4 + h_5}{8}$$

TEORIA DEGLI ERRORI

Noi studiamo il mondo fisico con l'esperienza, vale a dire segnalando fedelmente le circostanze di un dato fenomeno e regolandone le condizioni con le quali si manifesta, in modo da poterlo riprodurre a volontà. Ma l'esperienza, per essere logica, richiede almeno la conoscenza sommaria del fenomeno stesso, e perciò, in ogni scienza, il periodo sperimentale ha dovuto seguire quello dell'abitudine a coordinare in classi gli elementi di osservazione.

Non è quindi difficile comprendere che da principio l'osservazione e l'esperienza sono state qualitative: le misure e la ricerca delle leggi numeriche corrispondenti caratterizzano invece l'attività di una scienza già in progresso ed il sicuro fondamento di ogni teoria.

L'osservazione primitiva si affida completamente ai sensi; ma le nostre sensazioni sono relative e non di rado la dilucidazione di fatti osservati è falsa. Una breve perturbazione nella sede di un senso determinato è capace infatti di creare un risultato non corrispondente alle condizioni dell'ambiente in cui il fenomeno accade.

Come un'alterazione dei canali semicircolari dell'orecchio può turbare la facoltà dell'equilibrio, così una maggiore pressione arteriosa produce la sensazione di rumori inesistenti, e perciò solo il controllo sperimentale può attribuire un valore logico alle manifestazioni sensorie.

Ora, per eliminare qualsiasi deviazione della natura accennata, si deve collegare il fenomeno preso in esame ad un altro ben conosciuto, in modo che tra i due fenomeni subentri definita una corrispondenza univoca e reciproca.

Ma i nostri sensi, soggetti alle condizioni medie della vita naturale, non possono adattarsi a tutti gli stati della conoscenza

per quanto l'abitudine e l'esercizio possano aver modificato lo stato ereditario.

Ecco perchè si ricorre agli strumenti meccanici, i quali amplificano il potere naturale dei sensi allargando il campo di azione. Così noi rendiamo presbite l'occhio adoperando un cannocchiale, ed alla pupilla naturale, il cui diametro non può superare i 4 mm., e sostituita una lente, cioè una pupilla artificiale gigantesca.

Quanto più veniamo a conoscere i difetti dei nostri sensi e le qualità inerenti alla materia, tanto più siamo in grado di modificare ed attenuare gli errori inevitabili che intervengono nella interpretazione dei fenomeni; ma i nostri sensi possono soltanto segnalare l'entità di una causa e non valutarne l'effetto.

Per fissare le idee consideriamo la misura di una linea. Nel determinare la sua lunghezza con un'asta divisa in millimetri, noi portiamo, in primo luogo, a coincidere un estremo di ogni segmento con l'origine della graduazione e poscia osserviamo che l'altro estremo cadrà tra due divisioni successive: sarà allora possibile stimare l'errore relativo della misura, e naturalmente la precisione, la quale — come si sa — dipende dalle coincidenze per cui il nostro occhio ha speciali attitudini connesse alla sua acuità.

Ora, al pari dei nostri sensi, gli strumenti non sono perfetti, nè costanti nel tempo e nello spazio, perchè a ciascuno strumento corrisponde una individualità propria necessaria a dar valore all'operazione in cui viene adoperato.

Senza di ciò la precisione conseguita è illusoria e d'altra parte giova soggiungere che nessuna cosa è più ingannevole di un strumento male adoperato.

Riprendendo adunque l'esempio precedente diremo che un apparato longimetro condurrà ad un risultato tanto più preciso quanto più ravvicinate saranno le divisioni della scala congiunta al campione di misura; mentre, per giudicare bene le coincidenze, si può adoperare un microscopio nei limiti che impongono la lunghezza dei tratti e le irregolarità della loro forma.

Con l'uso di un moltiplicatore qualsiasi (per esempio una leva ottica la quale, per mezzo di un fascio luminoso riflesso, pone in evidenza piccoli movimenti di rotazione di uno specchio; lo spostamento delle frange d'interferenza, ecc., ecc.) il limite accennato passa dal millimetro al decimo, al centesimo ed anche al millesimo di millimetro; ma non può essere allargato indefinitamente.

Ad ogni strumento corrisponde un limite di sensibilità connesso principalmente alle condizioni meccaniche ed alle medie imperfezioni del senso che mette in opera la misura. Tale sensibilità, che indicheremo con ε , può segnalare l'ordine dell'errore assoluto, ed allora il risultato della misura sarà compreso fra $a + \varepsilon$ ed $a - \varepsilon$, se a rappresenta il valore della misura stessa liberato dalle inuguaglianze strumentali.

Praticamente basta conoscere soltanto l'errore relativo $\frac{\varepsilon}{\alpha}$ per comprendere che quando i due termini di questo rapporto sono dello stesso ordine di grandezza l'operazione non ha ragione di essere.

In ogni caso adunque, fissata la precisione occorrente, resta determinata la scelta dell'istrumento che si deve adoperare.

Se, ad esempio, la precisione sarà di $\frac{1}{1000}$, diventa perfettamente inutile cercare strumenti relativamente più precisi, ma giova sempre invece aumentare il numero delle osservazioni ed assicurarsi che durante l'operazione non siano male applicate le regole fondamentali stabilite per analoghe esperienze.

Ora bisogna distinguere le misure *originarie* da quelle *derivate*; per queste ultime l'errore complessivo rappresenta la risultante di quelli inerenti alle misure originarie. Così l'errore relativo della velocità — rapporto di spazio a tempo — sarà, nel caso più favorevole, la somma degli errori relativi alla lunghezza ed alla misura del tempo.

In ogni caso un buon metodo ed una critica rigorosa dei risultati sperimentali rispetto alla sensibilità dell'istrumento, congiunti all'abilità dell'osservatore, bastano per avere elementi propri a caratterizzarne la precisione relativa.

Infine ricorderemo che da principio le misure ebbero forse per stimolo più il bisogno del commercio che il desiderio di istruirsi. Infatti le misure di lunghezza per mezzo di un regolo, quelle di volume mediante recipienti campione, ed in ultimo quelle di massa con apparati a bilancia risalgono a tempi molto lontani dal nostro. La stadera romana era usata in oriente probabilmente avanti la fondazione di Roma. Gli strumenti per la misura del tempo, come gli orologi a polvere, furono adoperati dagli ateniesi per frenare la facondia degli avvocati e limitarne l'onorario. Gli strumenti scientifici più antichi sono quelli adoperati nell'indagine del Cielo.

Un'esperienza rudimentale si può intravedere nella determinazione pitagorica della lunghezza delle corde vibranti, rispetto agli intervalli musicali, la quale, discussa venti secoli dopo, condusse a fare adottare la gamma di Pitagora, invece di quella armonica, per rappresentare gli intervalli usati dai musicisti nella esecuzione delle melodie.

Solo da pochi secoli il cammino della scienza ha acquistato maggiore velocità, precisamente da quando il pensiero di Galileo, a guisa di fulgido sole, poté diradare le nebbie della metafisica e della superstizione.

Gli errori di osservazione.

La teoria degli errori, utilissima a tutte le scienze sperimentali, ha speciali applicazioni nell'astronomia, nella geodesia, nella balistica, nelle scienze naturali e fisico-chimiche.

Noi abbiamo già accennato come ogni misura conduca ad un risultato differente, ed ora diremo che gli errori di osservazione dovuti a cause perturbatrici di ordine e natura diversa possono raggrupparsi nelle seguenti categorie:

- 1) Errori sistematici o regolari.
- 2) Errori accidentali o irregolari.

Alla prima appartengono gli errori strumentali e personali dei quali, essendo conosciuta la causa, si può valutare l'effetto. Quelli che costituiscono l'altra categoria dipendono da un grandissimo numero di cause indecifrabili e perciò essi restano conglobati nei risultati medesimi delle osservazioni. Errori di natura sistematica sono quelli connessi alle ineguaglianze istrumentali, alla deviazione della traiettoria luminosa nel piano verticale per la mutabile densità atmosferica. La caratteristica di questi errori è precisamente la costanza del segno, e giova a tale proposito rammentare l'analisi che condusse Bradley alla scoperta dell'aberrazione luminosa e Leverrier a quella del pianeta Nettuno.

Gli errori personali che — come abbiamo detto — sono di natura sistematica dipendono da fatti congeniti, per cui, ad esempio, un osservatore è costretto ad attribuire ad un mobile una posizione differente da quella che gli può assegnare un altro

operatore. A produrre questo stato di cose concorrono alcune circostanze estrinseche, come quelle che attribuiscono all'occhio una maggiore prontezza a seguire il moto delle stelle più splendenti e più vicine all'equatore; onde la precisione relativa al passaggio di una stella per un punto dello spazio è tanto più grande quanto minore è la declinazione di detta stella.

In ogni caso è precisamente l'accennata predisposizione organica che dà luogo all'errore personale, il quale, secondo Wolf, è sempre la risultante degli effetti di due cause: una variabile, inerente all'educazione dell'osservatore, l'altra costante, dipendente dal *tempo di reazione*.

Mentre tutto ciò conferma la caratteristica degli errori personali, prova anche che i risultati sperimentali possono essere senz'altro paragonati fra loro, se eseguiti con lo stesso strumento e dal medesimo osservatore; ma subentra l'*equazione personale* quando nello stesso risultato concorre l'opera di due osservatori.

Ora, se anche i risultati direttamente ottenuti siano liberati da tutti gli errori sistematici, non costituiscono tuttavia un sistema concreto di misure, poichè in ciascuno di essi fa sentire la propria influenza il *residuo accidentale*, vale a dire ciò che rimane di tutti gli errori irregolari per loro natura piccolissimi e tendenti a compensarsi.

Non è possibile fissare, a priori, le grandezze degli errori accidentali; ma si può rendere il loro residuo sempre più piccolo aumentando il numero delle osservazioni, e nasce allora il *calcolo di compensazione*.

Lo scopo di questo calcolo non è già di eliminare gli errori accidentali; ma di distribuire su tutto il sistema di misure il loro residuo, affinchè siano verificate condizioni determinate.

Media aritmetica.

Quando è dato un sistema di misure della medesima specie, ciascuna eseguita nelle identiche condizioni ed un ugual numero di volte, non è possibile attribuire alla grandezza cui si riferiscono il valore di una qualunque di esse, perchè manca sempre la ragione essenziale per giustificarne la scelta.

Gauss, a proposito di tutto ciò, adotta il *principio delle media aritmetica*, che non può considerarsi come un postulato, perchè deriva da una asserzione *a priori*, e non già da un contenuto di verità ammissibile per comune consenso, e definisce come valore della grandezza presa in esame, la *media aritmetica di tutti i risultati concreti ottenuti, senza alcuna eccezione*.

Se adunque: $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n$ rappresentano tali risultati, ed M la grandezza data, per l'enunciato principio assumeremo:

$$M = \frac{O_1 + O_2 + O_3 + \dots + O_n}{n} = \frac{[O]}{n}$$

Agli scostamenti:

$$M - O_r = v_r \quad r = (1, 2, 3, \dots, n)$$

è attribuito il carattere degli errori accidentali ed è soddisfatta la condizione:

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n = [v] = 0$$

La nozione del valore medio ha una grande importanza nella critica dei risultati sperimentali perchè non di rado basta da sè sola a caratterizzare un sistema di valori numerici. Essa è poi perfettamente analoga alla nozione del centro di gravità in meccanica, perchè, come il movimento di un sistema è riferito a quello del centro di gravità, così col valore medio noi possiamo avere un giusto criterio sopra un risultato che può dipendere dal caso, vale a dire da ciò che rappresenta l'indice della nostra ignoranza.

Ora, poichè la somma:

$$M - O_1 + M - O_2 + M - O_3 + \dots + M - O_n$$

moltiplicata per 2 rappresenta la derivata rispetto ad M di:

$$(M - O_1)^2 + (M - O_2)^2 + (M - O_3)^2 + \dots + (M - O_n)^2$$

così si può assumere :

$$[(M - O)^2] = [v^2] = \text{minimo}$$

e concludere che qualunque altro valore diverso da M non può soddisfare alla medesima condizione.

Così il principio della media aritmetica viene ad identificarsi con quello dei minimi quadrati.

Ora, essendo :

$$2(v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n) = 0$$

quando

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_n^2 = \text{minimo}$$

così la somma dei quadrati ridotta al minimo si può considerare come mezzo efficace a giudicare la precisione delle misure eseguite.

E mentre adunque :

$$\epsilon = \pm \sqrt{\frac{[v v]}{n}}$$

costituirà l'elemento necessario a definire la precisione unitaria, relativa cioè ad una sola osservazione, la grandezza :

$$m = \pm \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$$

potrà fornire un giudizio per la precisione della media aritmetica.

La quantità ϵ si chiama *errore medio quadratico unitario* ed m , *errore medio quadratico definitivo*.

In alcuni casi, come quando il numero delle osservazioni è piccolo, giova attribuire ad ϵ il valore medio degli scostamenti considerati in valore assoluto, ed allora ϵ si chiama *errore intermedio* ed è più piccolo dell'errore medio quadratico.

La precisione del risultato medio, dato il modo come è stata concepita, si può considerare proporzionale al numero delle osservazioni.

Se m_1, m_2 rappresentano gli errori medi di due valori medi M_1 ed M_2 , si avrà, per quanto precede :

$$m_1^2 = \frac{\varepsilon_1^2}{n_1} \quad ; \quad m_2^2 = \frac{\varepsilon_2^2}{n_2}$$

da cui :

$$n_1 : n_2 = \left(\frac{\varepsilon_1}{m_1} \right)^2 : \left(\frac{\varepsilon_2}{m_2} \right)^2$$

Per l'analogia meccanica fra il centro di gravità e la media aritmetica di un sistema di valori si può attribuire ai rapporti :

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{m_1} \right)^2 \quad ; \quad \left(\frac{\varepsilon_2}{m_2} \right)^2$$

il concetto di peso, onde il peso di un sistema di osservazioni dipende dal numero delle osservazioni eseguite per ciascuna misura e dall'errore medio unitario, il quale, per questo motivo, si chiama *errore medio dell'unità di peso*.

Quando si tratta di misure di ugual precisione, bisogna intendere che ad esse competa lo stesso errore unitario. Mentre adunque nel caso generale porremo :

$$p = \left(\frac{\varepsilon}{m} \right)^2$$

si avrà per $\varepsilon = 1$

$$p = \frac{1}{m^2}$$

Per un sistema di misure di ugual precisione, logicamente aggruppate tra loro, si avrà dunque :

$$\varepsilon = m \sqrt{p}$$

Ora, detto P il peso della media aritmetica M di un sistema di osservazioni omogenee, p quello dell'unità di peso, si avrà :

$$P : p = \frac{K}{m^2} : \frac{K}{\varepsilon^2}$$

dove K rappresenta una costante arbitraria.

E poichè :

$$m^2 = \frac{\varepsilon^2}{n}$$

così la relazione precedente diventa :

$$P : p = \frac{K}{m^2} : \frac{K}{n m^2}$$

da cui :

$$P = n p$$

Assumendo $p=1$, il peso della media aritmetica M è uguale al numero delle osservazioni eseguite.

Media aritmetica pesata.

Seguendo l'analogia più volte accennata si può immediatamente dedurre che il valore della media aritmetica pesata di un sistema di gruppi di osservazione, a ciascuno dei quali corrisponde un dato peso, si identifica con l'ascissa di Möbius nella geometria della retta. Indicando con O_1, O_2, \dots, O_n i valori medi parziali e con M quello della media pesata si avrà :

$$M = \frac{p_1 O_1 + p_2 O_2 + \dots + p_n O_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

ovvero, adottando la notazione abbreviata :

$$M = \frac{[pO]}{[p]}$$

Il peso del valore così definito è uguale alla somma dei pesi, cioè :

$$P = p_1 + p_2 + \dots + p_n$$

L'errore medio μ della media si potrà in questo caso determinare considerando che tutti i gruppi di osservazione dipendono dalla stessa unità di peso e sarà cioè :

$$\varepsilon = m_r \sqrt{p_r} \quad ; \quad (r = 1 . 2 \dots n)$$

Quadrando e sommando si otterrà :

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{[pm^2]}{n}}$$

Ma d'altra parte si ha ancora :

$$\varepsilon = \mu \sqrt{P}$$

dunque :

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[p m^2]}{n P}}$$

Naturalmente tutte le formole che caratterizzano gli errori medi non possono essere dimostrate, ma giustificate in vari altri modi ricorrendo a calcoli assai complicati.

Determinazione indiretta di più incognite.

L'osservazione di un fenomeno può sempre condurre ad un gruppo di equazioni che, per il momento, potremo supporre a forma lineare e con un numero d'incognite variabile da un caso all'altro.

Supponiamo dunque che si tratti di equazioni così formate :

$$a x + b y - c = 0$$

Per il principio più volte citato, il quale è connesso alla necessità di avere un numero sovrabbondante di osservazioni, potremo considerare n equazioni come la precedente, e determinare per le incognite il sistema di valori che genera i residui più piccoli, tali cioè che la loro somma sia nulla e la somma dei loro quadrati minima.

La forma generica del residuo sarà :

$$a x + b y - c = v$$

ed :

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{[v v]}{n - 2}}$$

l'errore medio unitario, essendo 2 il numero delle incognite.

Per determinare i valori di v bisogna prima conoscere quelli che competono alle due incognite e per ciò basta assumere la condizione :

$$(a_1 x + b_1 y - c_1)^2 + (a_2 x + b_2 y - c_2)^2 + (a_3 x + b_3 y - c_3)^2 + \dots = \text{minimo}$$

Ora ne consegue che la prima derivata rispetto ad x ed y dev'essere uguale a zero, ossia :

$$a_1(a_1 x + b_1 y - c_1) + a_2(a_2 x + b_2 y - c_2) + a_3(a_3 x + b_3 y - c_3) + \dots = 0$$

$$b_1(a_1 x + b_1 y - c_1) + b_2(a_2 x + b_2 y - c_2) + b_3(a_3 x + b_3 y - c_3) + \dots = 0$$

Sviluppando e ponendo :

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots &= [a a] \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots &= [b b] \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots &= [a b] \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 + \dots &= [a c] \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 + \dots &= [b c] \end{aligned}$$

si ricava il sistema delle equazioni normali :

$$\begin{aligned} [a a] x + [a b] y - [a c] &= 0 \\ [a b] x + [b b] y - [b c] &= 0 \end{aligned}$$

col quale resta definito il valore delle due incognite.

Praticamente si procede a questa maniera :

Siano :

$$a_1 x + b_1 y - c_1 = 0$$

$$a_2 x + b_2 y - c_2 = 0$$

$$a_3 x + b_3 y - c_3 = 0$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$\dots$$

le equazioni date.

Per ricavare la prima equazione normale si moltiplica ciascuna di esse per $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$ rispettivamente.

$$\begin{aligned} a_1^2 x + a_1 b_1 y - a_1 c_1 &= 0 \\ a_2^2 x + a_2 b_2 y - a_2 c_2 &= 0 \\ a_3^2 x + a_3 b_3 y - a_3 c_3 &= 0 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

e poi si sommano i risultati.

Analogamente, per ottenere la seconda equazione normale, si moltiplica ciascuna delle equazioni date rispettivamente per $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3$.

$$\begin{aligned} a_1 b_1 x + b_1^2 y - b_1 c_1 &= 0 \\ a_2 b_2 x + b_2^2 y - b_2 c_2 &= 0 \\ a_3 b_3 x + b_3^2 y - b_3 c_3 &= 0 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{aligned}$$

e poscia si sommano i risultati.

Dal sistema delle equazioni normali si ricavano anche le *equazioni di peso*, le quali caratterizzano l'errore medio che compete ai valori determinati.

Considerando a tale proposito le espressioni :

$$x = \frac{[a c][b b] - [a b][b c]}{\Delta} ; y = \frac{[a a][b c] - [a b][a c]}{\Delta}$$

dove :

$$\Delta = [a a][b b] - [a b]^2$$

si ottiene, derivando rispetto alla variabile c :

$$\Delta \delta x = \{ a_1 [b b] - b_1 [a b] \} \delta c_1 + \{ a_2 [b b] - b_2 [a b] \} \delta c_2 + \dots$$

Quadrando e sostituendo ϵ^2 a $(\delta c)^2$ si può scrivere :

$$\Delta^2 (\delta x)^2 = \{ [b b]^2 [a a] + [a b]^2 [b b] - 2 [b b][a b][a b] \} \epsilon^2$$

ossia :

$$\Delta^2 (\delta x)^2 = \{ [b b] ([a a] [b b] - [a b]^2) \} \varepsilon^2$$

ed infine :

$$\Delta^2 (\delta x)^2 = \Delta \varepsilon^2 [b b]$$

Dunque si ottiene :

$$m_x = \delta x = \pm \varepsilon \sqrt{\frac{[b b]}{\Delta}}$$

Di guisa che, ricordando la formola fondamentale :

$$\varepsilon = m \sqrt{p}$$

si deduce :

$$p_x = \frac{\Delta}{[b b]} \quad ; \quad p_y = \frac{\Delta}{[a a]}$$

Ora, $\frac{I}{p_x}$ ed $\frac{I}{p_y}$ rappresentano le soluzioni dei due sistemi :

$$\begin{aligned} [a a] x' + [a b] y' &= 1 \\ [a b] x' + [b b] y' &= 0 \\ [a a] x' + [a b] y' &= 0 \\ [a b] x' + [b b] y' &= 1 \end{aligned}$$

in cui $x' = p_x$; $y' = p_y$ e perciò essi costituiscono le *equazioni di peso*.

Tutto ciò vale quando alle osservazioni compete la stessa precisione, ossia dipendono da un ugual numero di esperienze eseguite con lo stesso istrumento e da un solo operatore. Quando invece l'accennato numero varia da una esperienza all'altra, allora la condizione del minimo assume la forma :

$$p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + p_3 v_3^2 + \dots = \text{minimo}$$

ed il sistema delle equazioni normali diventa :

$$\begin{aligned} [p a a] x + [p a b] y - [p a c] &= 0 \\ [p a b] x + [p b b] y - [p b c] &= 0 \end{aligned}$$

Quindi :

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{[p \ v \ v]}{n-2}}$$

e come nel caso precedente :

$$m_x = \pm \varepsilon \sqrt{x'} \quad ; \quad m_y = \pm \varepsilon \sqrt{y'}$$

Regola di Gauss.

Le equazioni normali vengono praticamente risolte col metodo di Gauss che qui spiegheremo trattando il caso di osservazioni di uguale precisione.

Eliminando la x nel seguente sistema :

$$\begin{aligned} [a a] x + [a b] y + [a c] z &= [a d] \\ [a b] x + [b b] y + [b c] z &= [b d] \\ [a c] x + [c b] y + [c c] z &= [c d] \end{aligned}$$

ed assumendo per analogia :

$$\begin{aligned} [b b . 1] &= [b b] - \frac{[a b]^2}{[a a]} \\ [b c . 1] &= [b c] - \frac{[a b]}{[a a]} [a c] \\ [b d . 1] &= [b d] - \frac{[a b]}{[a a]} [a d] \\ [c c . 1] &= [c c] - \frac{[a c]^2}{[a a]} \\ [c d . 1] &= [c d] - \frac{[a c]}{[a a]} [a d] \end{aligned}$$

si ottengono le equazioni :

$$\begin{aligned} [b b . 1] y + [b c . 1] z &= [b d . 1] \\ [b c . 1] y + [c d . 1] z &= [c d . 1] \end{aligned}$$

che si dicono *equazioni ridotte di primo ordine*.

Eliminando poi l'incognita y ed assumendo :

$$[c c . 2] = [c c . 1] - \frac{[b c . 1]^2}{[b b . 1]}$$

$$[c d . 2] = [c d . 1] - \frac{[b c . 1]}{[b b . 1]} [b d . 1]$$

si ricava la *ridotta di secondo ordine* :

$$[c c . 2] z - [c d . 2] = 0$$

la quale serve a determinare il valore della terza incognita z .

Riepilogando avremo adunque le seguenti equazioni risolvibili :

$$[a a] x + [a b] y + [a c] z = [a d]$$

$$[b b . 1] y + [b c . 1] z = [b d . 1]$$

$$[c c . 2] z = [c d . 2]$$

Come è facile comprendere, la regola spiegata rientra nel metodo generale delle successive eliminazioni.

Calcolo delle probabilità applicato alla teoria degli errori.

La teoria degli errori accidentali rientra in quella delle probabilità e perciò ora ricorderemo le nozioni relative alla probabilità matematica di un avvenimento ed il teorema di Moivre sulla probabilità composta.

La probabilità di un avvenimento è il rapporto fra il numero dei casi favorevoli e quello di tutti i casi possibili.

Così dunque, mentre una probabilità, espressa in numero, rappresenta una frazione propria, l'unità rappresenta la certezza.

Ad esempio 6 rappresenta il numero dei casi possibili relativamente al presentarsi di uno dei numeri segnati sulle sei facce di un dado; la probabilità per un determinato numero è $1/6$.

Quando i casi possibili sono infiniti, allora il concetto di probabilità cessa di avere un senso determinato ed allora l'estendere a problemi di tal natura il calcolo delle probabilità conduce spesso a soluzioni discordanti, alle quali non è possibile adattare nessun criterio di scelta.

Per chiarire bene questo concetto proponiamoci di voler determinare le probabilità che una corda condotta a caso in un cerchio superi il lato del triangolo equilatero.

Fissato un estremo A della corda e immaginando una retta mobile intorno ad esso, i casi favorevoli sono rappresentati dalle posizioni della retta mobile che con la tangente in A fanno angoli compresi fra 60° e 120° , mentre i casi possibili corrispondono alle possibili posizioni della retta mobile con inclinazione da 0° a 180° . Quindi la probabilità è $\frac{60}{180} = \frac{1}{3}$

D'altra parte, ricordando che il centro del circolo è equidistante dai lati del triangolo equilatero di $\frac{r}{2}$, ossia che il cerchio inscritto nel triangolo equilatero è quarta parte del cerchio circoscritto, possiamo constatare che tutte le distanze possibili del centro della corda (tenendo sempre fisso l'estremo A della corda stessa) sono comprese fra 0 ed r . I casi favorevoli corrispondono alle distanze comprese fra 0 ed $\frac{r}{2}$; dunque la probabilità è $\frac{1}{2}$

Rispetto all'area dei due cerchi la probabilità invece è uguale ad $\frac{1}{4}$ e così via discorrendo.

Ebbene, fra questi risultati ed altri che potrebbero scaturire da analoghi ragionamenti, non vi può essere preferenza e la difficoltà sta precisamente nel fatto che essendo infiniti i casi, il concetto dei casi possibili non ha più un senso determinato.

Ora, per conoscere la legge di probabilità degli errori, supporremo che essa possa essere rappresentata con una funzione $f(x)$ di cui occorrerà poi determinare le proprietà caratteristiche. E per ciò giova in primo luogo riflettere che avendo i valori positivi e negativi di x la stessa probabilità, la funzione $f(x)$ dovrà essere indipendente da x ed annullarsi invece per ogni

valore che supera l'errore massimo K relativo ad un determinato sistema di osservazioni.

Se poi si ammette che $f(x)$ sia continua, allora x dovrà assumere tutti gli stati di grandezza compresi fra $-K$ e $+K$; e perciò il numero degli errori possibili è semplicemente infinito.

Ora, in un sistema di n osservazioni possono presentarsi p errori compresi fra x ed $x + \Delta x$, cosicchè essendo $\frac{p}{n}$ la probabilità unitaria, relativa cioè a ciascuno di essi, si avrà:

$$\frac{p}{n} = \int_{-x}^{x + \Delta x} f(x) dx$$

Adunque la probabilità di un errore x assolutamente determinato sarà $f(x) dx$, mentre, estendendo l'integrazione fra $+K$ e $-K$, si avrà la certezza, ossia:

$$\int_{-K}^{+K} f(x) dx = 1$$

Nota in tal modo la natura della funzione $f(x)$, resta ora da determinarla appoggiandosi a fatti conosciuti ed universalmente ammessi.

Riprendiamo perciò il caso della media aritmetica che rappresenta il valore più probabile di una incognita derivante da un numero determinato di osservazioni. Noi abbiamo visto che:

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n = 0 \dots \quad (1)$$

Ora, se $f(v_1) dv$ è la probabilità di un errore v_1 ; $f(v_2) dv$ quella dell'errore v_2 , ecc., ecc., per il teorema di Moivre la probabilità simultanea degli n errori sarà:

$$f(v_1) \cdot f(v_2) \dots \dots \dots dv^n$$

Ma, affinchè i valori delle incognite corrispondenti a questo insieme di scostamenti siano i più probabili, è necessario

che l'accennata probabilità sia massima; quindi la sua derivata deve essere uguale a zero. Differenziando logicamente avremo :

$$\frac{I}{f(v_1)} \frac{df(v_1)}{dv} + \frac{I}{f(v_2)} \frac{df(v_2)}{dv} + \dots = 0 \dots \quad (2)$$

ossia una relazione identica alla (1).

Quindi, sotto forma generica, ed a meno di una costante 2α , possiamo assumere :

$$\frac{df(x)}{f(x)} = 2\alpha \cdot x dx$$

Integrando si ottiene :

$$f(x) = C e^{\alpha x^2}$$

in cui, per la condizione di massimo, α deve essere negativo; e resta così determinata la forma della funzione.

Ponendo adunque $\alpha = -h^2$ e ricordando che $f(x)$ deve diminuire quando x cresce per avvicinarsi al limite K , il valore della costante C risulterà dalla relazione :

$$\int_{-K}^{+K} C e^{-h^2 x^2} dx = 1$$

E poichè, a partire da un certo valore di x fino all'infinito, questo integrale si avvicina a zero, così, con sufficiente approssimazione, possiamo assumere :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C e^{-h^2 x^2} dx = 1$$

Di qui si ricava, come è dimostrato nei trattati di calcolo infinitesimale :

$$C = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

e quindi sarà :

$$f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \dots\dots\dots (3)$$

la probabilità tipica dell'errore.

Curva di probabilità.

Riferendosi ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, noi potremo avere l'immagine della legge precedente, portando sull'asse x gli errori e sull'asse y la funzione ad essi relativa, cioè la loro frequenza.

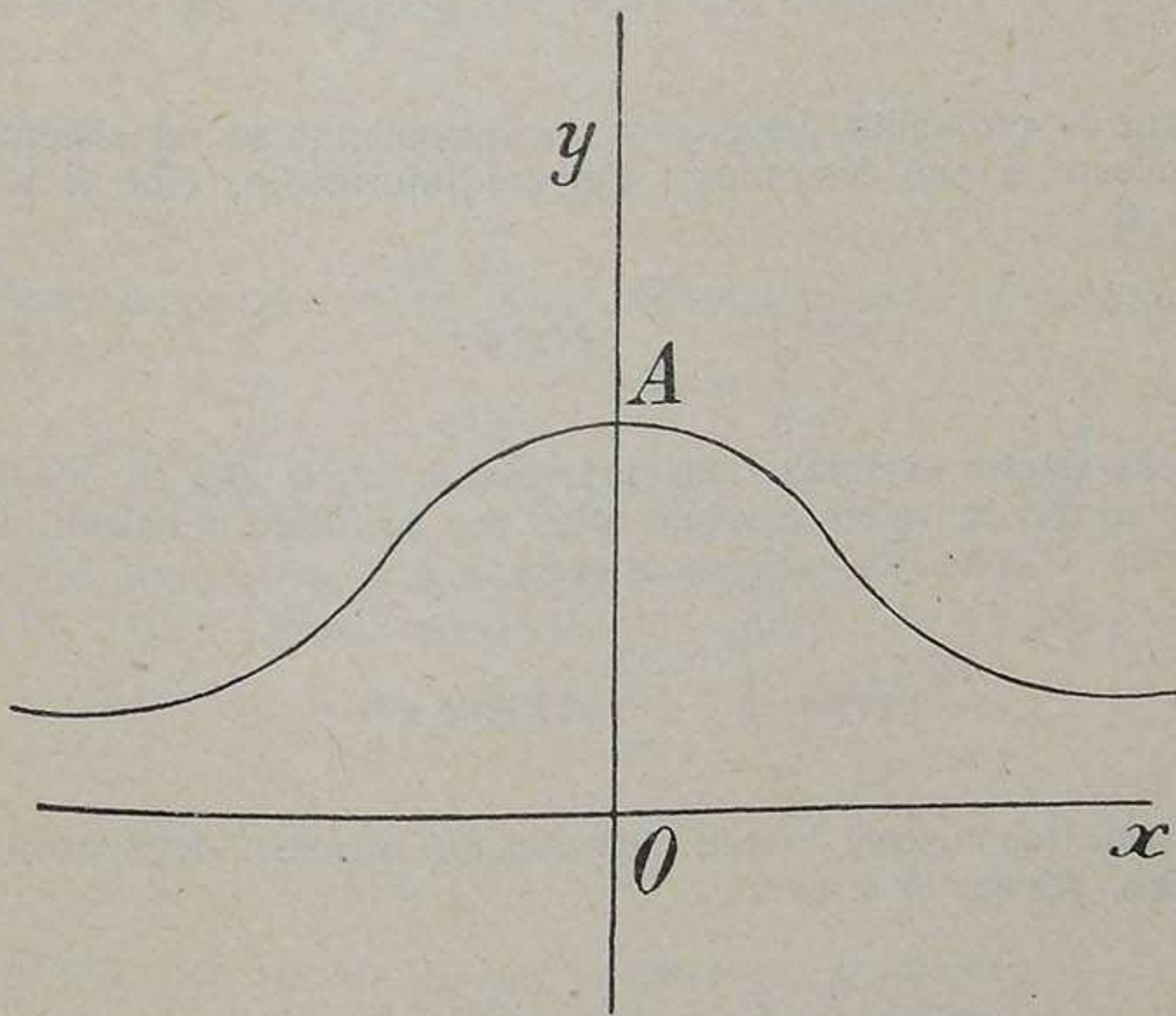


Fig. 18.

Se in altri termini si parte dall'equazione :

$$y = K a^{-x^2}$$

in cui K indica una costante qualunque ed a una grandezza maggiore dell'unità, noi potremo costruire una linea che si chiama *curva degli errori* la quale taglia l'asse y nel punto A corrispondente ad $x=0$ e perciò $OA=K$. E poichè per $x=\pm\infty$ $\lim. y=0$, così la curva è asintotica rispetto ad x ; essa è simmetrica rispetto ad y perchè scambiando x in $-x$ la y non cambia valore.

Infine giova osservare che la curva rimane tutta dalla stessa parte dell'asse x perchè il segno di y è sempre uguale a quello di K .

Misura della precisione.

Date le probabilità degli errori corrispondenti ad un sistema di misure si può determinare l'errore intermedio, cioè il valore di :

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

perchè questo integrale non rappresenta altro che la media degli errori in valore assoluto. Ma, per facilitare i calcoli, in pratica, è considerata l'espressione :

$$m^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$$

la quale rappresenta invece la media dei quadrati degli errori. Ora, per la (3) si avrà :

$$m^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-h^2 x^2} dx = \frac{1}{2h^2}$$

quindi :

$$m = \frac{1}{h\sqrt{2}} \quad ; \quad h = \frac{1}{m\sqrt{2}}$$

La grandezza h si assume come misura della precisione delle osservazioni e perciò essa è in ragione inversa dell'errore medio quadratico.

Errore probabile.

Qualunque sia la legge degli errori, chiameremo errore probabile quello che ha la medesima probabilità di un altro errore più grande o più piccolo. Considerando la probabilità che un errore sia compreso fra $-x$ e $+x$ avremo :

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{+x} e^{-h^2 x^2} dx$$

Sostituendo ad $(e^{-h^2})^{x^2}$ il suo sviluppo in serie ed integrando si ha :

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(hx - \frac{h^3 x^3}{3} + \frac{h^5 x^5}{10} - \frac{h^7 x^7}{42} + \dots \right)$$

Così dunque resta definita la probabilità P .

Per contro volendo determinare i limiti $-\eta$ e $+\eta$ entro cui deve cadere un errore affinchè sia $p = \frac{1}{2}$ porremo :

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(h\eta - \frac{h^3 \eta^3}{3} + \dots \right)$$

Da cui, per successive approssimazioni, si ottiene :

$$h\eta = 0,4769363$$

E poichè :

$$h m = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

così sarà :

$$\eta = m \times 0,6744897$$

La quantità η è precisamente l'errore probabile ed è uguale a circa $\frac{2}{3}$ dell'errore medio.

Metodo dei minimi quadrati.

Quantunque la (3) non rappresenti rigorosamente la probabilità di un errore x inerente ad un sistema di osservazioni la cui precisione è uguale ad h , tuttavia essa è sufficiente per giustificare in modo approssimativo ogni conclusione logica di giudizio.

Supponiamo dato un sistema di n equazioni fra incognite e misure corrispondenti che servono a determinarle, e supponiamo che ad un dato sistema di valore delle dette incognite corrispondano i residui $v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 \dots v_n$. saranno :

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 v_1^2} d v \quad ; \quad \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 v_2^2} d v$$

le probabilità rispettive degli errori inevitabili, e per il citato teorema di Moivre sarà :

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}} d v \right)^n e^{-h^2 (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2)}$$

la probabilità simultanea.

Il sistema più probabile dei valori delle incognite è quello che rende massima l'espressione precedente, ed ecco perchè dovrà essere

$$v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 = \text{minimo}$$

e si ha così la condizione che regge il metodo di Legendre reso completo più tardi da Gauss.

Contro questo metodo si possono elevare due obiezioni:

1) Il procedimento, per essere logico, esige un numero grandissimo di osservazioni.

2) L'errore medio non può costituire altro che un indice caratteristico e giammai un elemento di valutazione, ovvero suggerire un criterio di reiezione come ammettono tutti coloro facili all'entusiasmo o al disperante scetticismo.

Tuttavia, se la teoria non può vittoriosamente combattere queste ed altre obiezioni, l'esperienza prova dal canto suo che nella misura delle grandezze fisiche non è assolutamente necessario che il numero delle osservazioni sia molto grande; basta soltanto che l'insieme delle misure e di equazioni sia logico, ossia ben determinato e meglio connesso.

Solo in questo modo il metodo può acquistare il carattere di mezzo potente a diradare le nebbie della metafisica che spesso, per molti, avvolgono sistemi di osservazioni e metodi di ricerca sperimentale.

Quando si tratta specialmente di vedere come la teoria e le formole matematiche si accordano con la realtà, e quando occorre determinare con la maggiore precisione possibile un sistema di costanti fondamentali nella scienza, allora il metodo dei minimi quadrati può essere utilissimo.

Compensazione degli errori di osservazione.

L'esperienza prova che l'equazione angolare relativa ad un triangolo sferico:

$$A + B + C - (180^\circ + \epsilon) = 0$$

non è mai realmente verificata.

Quando agli angoli A , B e C sono sostituiti i valori osservati, allora si ha infatti:

$$A + B + C - (180^\circ + \epsilon) = \Delta$$

Nel caso di un solo triangolo l'equazione è logicamente risolta, in modo da riassumere il suo carattere geometrico. Perchè allora, indicando con (1), (2) e (3) le variazioni attri-

buibili agli angoli A , B e C allo scopo di verificare l'equazione angolare pura, si avrà :

$$(1) + (2) + (3) = \Delta$$

da cui :

$$-I \cdot [d(1) + d(2) + d(3)] = 0$$

essendo I un'incognita ausiliaria.

Ma sarà anche ammissibile la condizione :

$$(1)^2 + (2)^2 + (3)^2 = \text{minimo}$$

e quindi :

$$(1) d(1) + (2) d(2) + (3) d(3) = 0$$

Deducendo poi con la somma :

$$[(1) - I] d(1) + [(2) - I] d(2) + [(3) - I] d(3) = 0$$

si conseguirà :

$$(1) = (2) = (3) = I$$

E perciò :

$$3I = \Delta$$

da cui :

$$I = \frac{\Delta}{3}$$

Adunque, col principio dei minimi quadrati, la condizione geometrica viene realizzata sottraendo da ogni angolo la terza parte dell'equazione aritmetica Δ , volgarmente detta *errore di chiusura*.

Ora, prima di esporre la regola di compensazione di una rete geodetica, occorre ricordare che, quando l'insieme dei triangoli procede con legge di continuità, bisogna allora definire due specie di equazioni: una relativa agli angoli, analoga a quella che occorre per un triangolo isolato, e l'altra condizione, che i lati di contiguità dei triangoli devono assumere sempre un unico valore.

Mentre per una rete di p vertici ed l lati il numero delle equazioni angolari resta così definito :

$$A = l - p + 1$$

quello delle equazioni laterali sarà :

$$B = l - 2p + 3$$

Qui giova distinguere la rete propriamente detta dalla catena di triangoli che non consente alcuna condizione laterale.

Per fissare le idee basta ricordare che un quadrilatero con una sola diagonale definisce una catena e con due la rete geodetica; dunque il numero delle equazioni laterali è uguale al numero dei lati che bisogna sopprimere affinchè una rete diventi catena.

Per un quadrilatero occorreranno allora quattro equazioni di condizione: tre angolari ed una laterale così definita (vedi fig. 19) :

$$\frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} \cdot \frac{AD}{AB} = 1$$

Onde, per avere il valore della reale equazione, bisognerà sostituire a ciascun rapporto quello dei seni.

Equazioni angolari.

$$\begin{aligned} \text{Triangolo } A B C & : (2) + [(3) + (4)] + (5) = \Delta_1 \\ \text{» } A C D & : (1) + (6) + [(7) + (8)] = \Delta_2 \\ \text{» } A B D & : [(1) + (2)] + (3) + (8) = \Delta_3 \end{aligned}$$

Equazione laterale.

$$\frac{\text{sen } [ACB + (5)]}{\text{sen } [ABC + (3) + (4)]} \cdot \frac{\text{sen } [ADC + (7) + (8)]}{\text{sen } [ACD + (6)]} \cdot \frac{\text{sen } [ABD + (3)]}{\text{sen } [ADB + (8)]} = 1$$

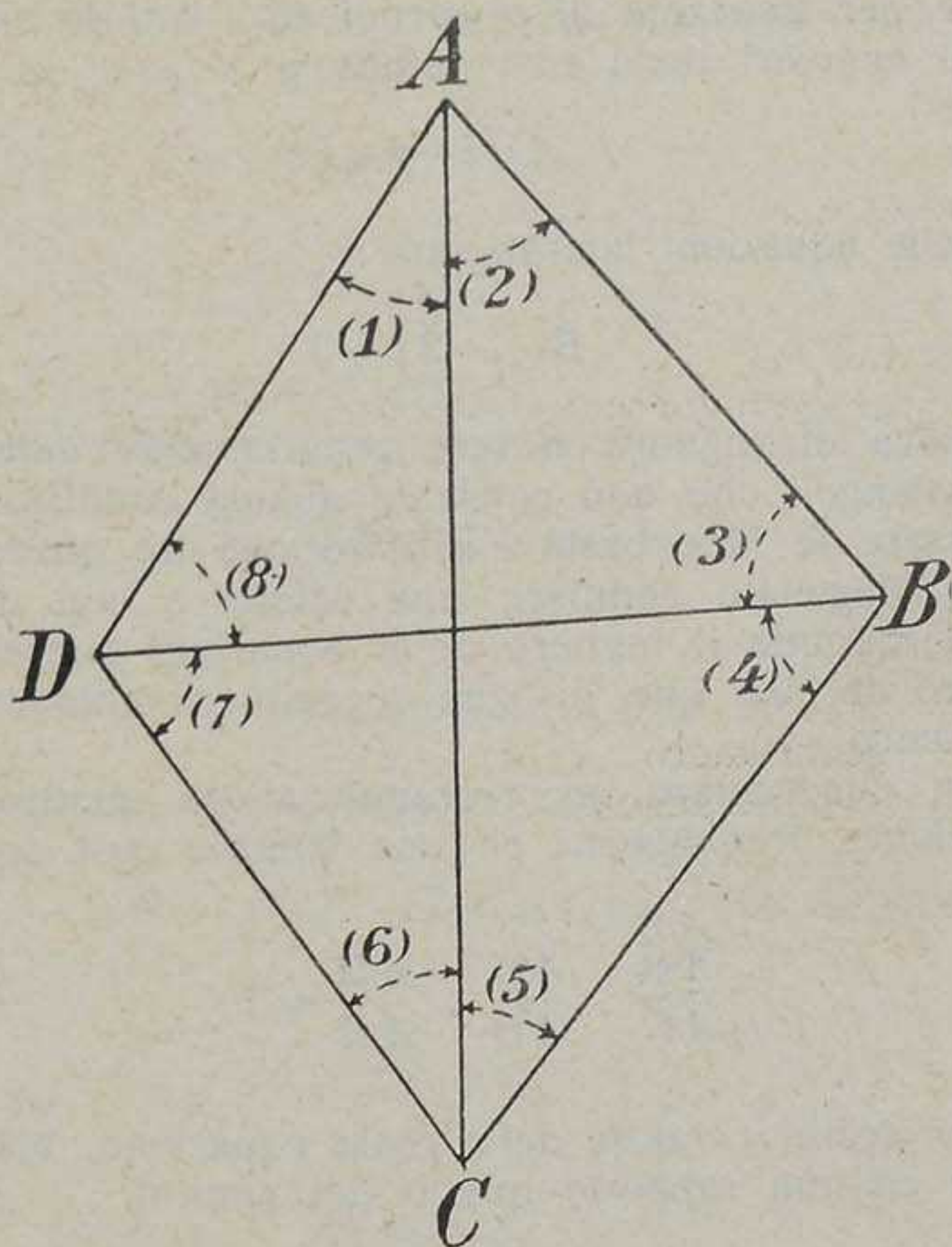


Fig. 19.

Prima di ridurre questa equazione alla forma lineare ricorderemo che :

$$\log \operatorname{sen} (x+h) = \log \operatorname{sen} x + m h \operatorname{arc} 1'' \cdot 10^7 \cot x$$

m modulo dei logaritmi briggiani, 10^7 nell'ipotesi di adoperare tavole a sette decimali.

Onde, assumendo :

$$\log \frac{\operatorname{sen} ACB \cdot \operatorname{sen} ADC \cdot \operatorname{sen} ABD}{\operatorname{sen} ABC \cdot \operatorname{sen} ACD \cdot \operatorname{sen} ADB} = \Delta$$

ed indicando con $C_1 : C_2 : C_3 : C_4 : C_5 : C_6$ le cotangenti,

e quindi le *equazioni normali*:

$$\left[\frac{aa}{p} \right] I + \left[\frac{ab}{p} \right] II + \left[\frac{ac}{p} \right] III = \Delta_1$$

$$\left[\frac{ab}{p} \right] I + \left[\frac{bb}{p} \right] II + \left[\frac{bc}{p} \right] III = \Delta_2$$

$$\left[\frac{ac}{p} \right] I + \left[\frac{bc}{p} \right] II + \left[\frac{cc}{p} \right] III = \Delta_3$$

che determinano i valori dei correlativi e questi, a loro volta, quelli delle correzioni.

Il problema della compensazione di una rete geodetica non

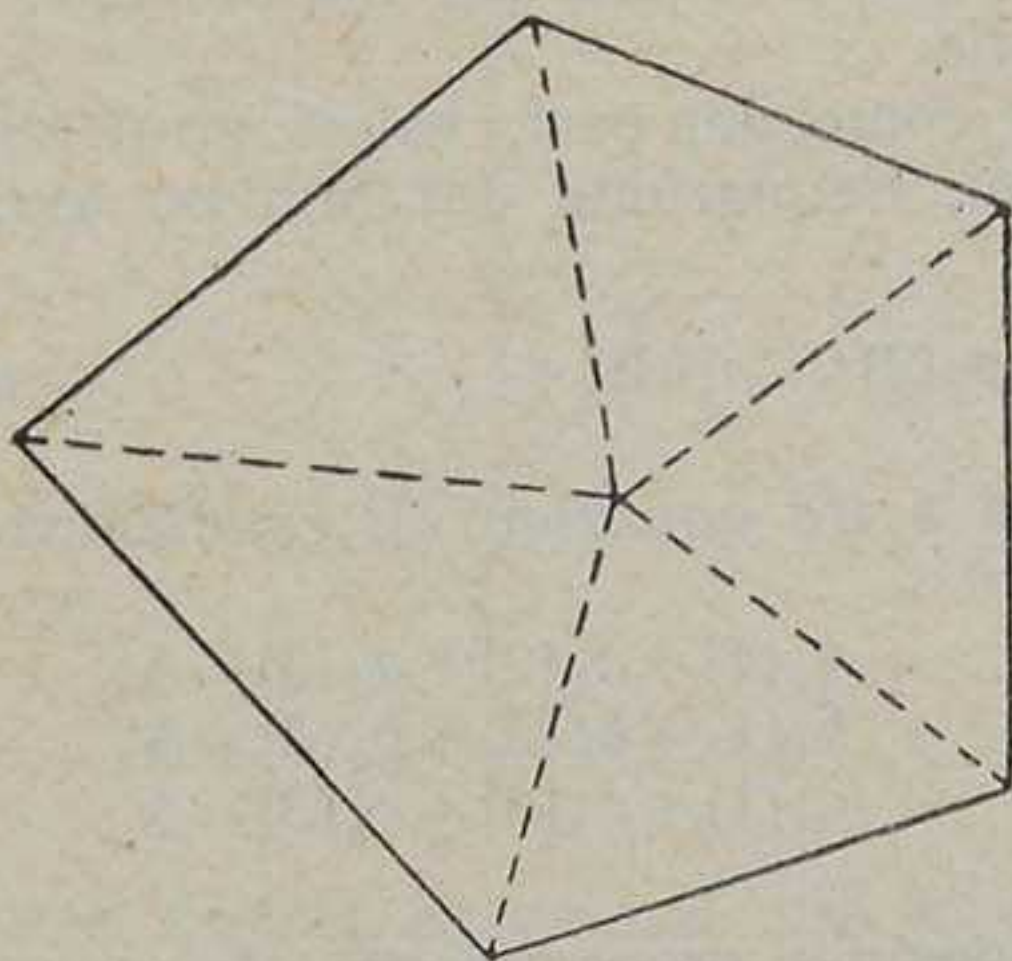


Fig. 20.

è dunque semplice; ma irto di difficoltà e molto laborioso, specialmente poi quando la rete si trova appoggiata a più basi, perchè allora si deve considerare un'altra specie di equazioni, dette *equazioni delle basi*, uguali al numero delle basi stesse meno una.

Al lettore però interesserà di più la compensazione della triangolazione ausiliaria ossia dei vertici determinati con l'intersezione diretta o inversa, ovvero anche con la regola di Hansen largamente utilizzata nella sintesi grafica.

E bisogna allora ricordare che, per un poligono con perimetro invariabile e con i vertici collegati ad un punto del suo piano, il numero delle equazioni angolari sarà :

$$A' = l - p.$$

mentre, per ottenere quello delle equazioni laterali, ad l bi-

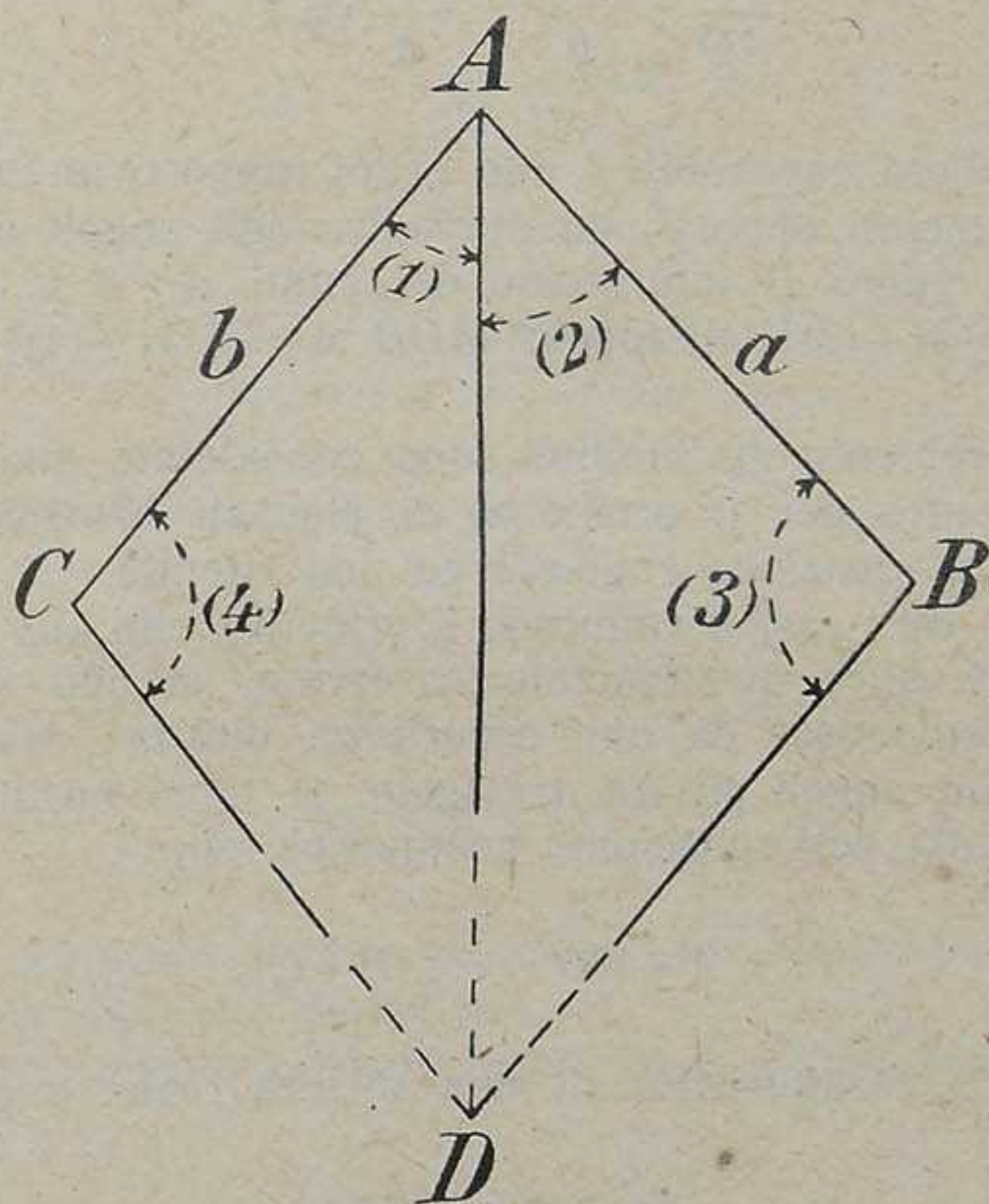


Fig. 21.

sogna aggiungere il numero delle diagonali uscenti da un vertice cioè $(p-1) - 3 = p-4$; cosicchè sarà :

$$B' = l - (p + 1)$$

Ad esempio : la compensazione di un pentagono a contorno fisso richiederà *quattro equazioni angolari e tre equazioni late-*

rali; una *perigonale*, cioè intorno al punto interno e le altre due relative alle diagonali uscenti da un vertice (v. fig. 20).

Ora, nel caso dell'intersezione diretta, si dovrà considerare, per la compensazione, soltanto l'equazione laterale che deriva dall'identità (v. fig. 21):

$$\frac{a}{AD} \cdot \frac{AD}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

e basterà allora esprimere i due primi rapporti in funzione dei seni degli angoli opposti, ed attribuire agli angoli dedotti, col vertice nel punto D intersecato dai punti A , B e C , le correzioni $-[(2)+(3)]$ all'angolo ADB e $-[(1)+(4)]$ all'angolo ADC .

Per il problema di Snellius sono considerate due equazioni laterali, mentre per il problema di Hansen bisogna prendere in esame un'equazione angolare ed una laterale.

In tutti e tre i casi è ammesso il principio che una grandezza, dedotta con altre direttamente osservate, si può considerare come se provenisse da una esperienza diretta; cosicchè, misurando due angoli di un triangolo, il terzo angolo, dedotto con la regola dell'equazione geometrica pura:

$$A = 180^\circ + \varepsilon - (B + C)$$

assumerà la caratteristica di una misura reale, e perciò:

$$dA = -(dB + dC)$$

Relativamente alle poligonali determinate col metodo celerimetrico si può considerare un'equazione angolare e due laterali; la prima conseguenza della legge geometrica che assegna alla somma degli angoli di un poligono tanti angoli retti quanti sono i lati meno 2, e le altre due conseguenze del teorema che prende in esame la proiezione di un perimetro chiuso sopra due assi cartesiani ortogonali. Quindi:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \dots = \pi (n - 2)$$

da cui, per la legge di compensazione :

$$(1) + (2) + (3) + \dots = \Delta$$

E qui bisogna ricordare che $\Delta \leq 1,5 \sqrt{n}$.

Per le due equazioni laterali bisogna tener presente che quando l'asse della y è diretto secondo il meridiano, allora :

$$x = s \cdot \sin \alpha$$

$$y = s \cdot \cos \alpha$$

da cui :

$$dx = \sin \alpha \cdot ds + s \cos \alpha d\alpha$$

$$dy = \cos \alpha \cdot ds - s \sin \alpha d\alpha$$

Onde, assumendo :

$$\Delta X = \sum_1^n dx \quad ; \quad \Delta Y = \sum_1^n dy$$

si avrà :

$$E = \pm \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}$$

ossia un segmento analogo a quello che risulta per un campo di forze in equilibrio dinamico.

Il rapporto direttivo di questo errore di chiusura sarà perciò :

$$\varphi = \text{arc tang} \frac{\Delta X}{\Delta Y}$$

Ricorderemo ancora che la tolleranza, ammessa per le misure lineari indirette, dev'essere sempre in corrispondenza con la formola di previsione :

$$\Delta s \leq 0^m,014 \sqrt{s}$$

in cui s è espresso in centinaia.

Col metodo di separazione, cioè compensando gli angoli indipendentemente dai lati, si otterrà per ognuno la variazione

di $\frac{\Delta}{n}$, mentre, con le due altre equazioni, si avranno le correzioni relative alle coordinate ortogonali.

Anche per la compensazione delle altitudini bisogna considerare due casi: quello che si riferisce alla livellazione geodetica:

$$H - h = s \cotg z + \beta s^2 \text{ arc } 1''$$

in cui il peso è considerato proporzionale ad $\frac{1}{s^2}$, e l'altro, connesso alla livellazione geometrica di precisione, per cui si deve assumere il peso uguale ad $\frac{1}{s}$.

Ma, in entrambi i casi, l'equazione di condizione deriva dal medesimo principio e cioè: la somma dei dislivelli dev'essere uguale a zero, perchè, percorrendo una poligonale, tanto si sale quanto si discende. Allora, indicando con (1), (2), (3) le correzioni ai dislivelli h_1, h_2, h_3 si avrà:

$$(1) + (2) + (3) + \dots = \Delta$$

in cui $\Delta = \sum_1^n h$ (somma algebrica).

Nel campo geodetico e topografico l'equazione del minimo sarà:

$$\frac{(1)^2}{s_1^2} + \frac{(2)^2}{s_2^2} + \frac{(3)^2}{s_3^2} + \dots = \text{minimo}$$

mentre per la livellazione geometrica di precisione è:

$$\frac{(1)^2}{s_1} + \frac{(2)^2}{s_2} + \frac{(3)^2}{s_3} + \dots = \text{minimo}$$

Tuttavia il procedimento per la determinazione delle correzioni resta sempre lo stesso.

Per la livellazione che collega due osservatori mareografici, si affaccia il caso relativo all'equazione della base, e quindi,

oltre alle equazioni caratteristiche di chiusura altimetrica, bisogna considerare anche quella che si riferisce all'invariabilità delle due altitudini origini.

Così, indicando con H un'altitudine origine ed H' essendo il valore assegnato dalla livellazione proveniente dall'altro osservatorio si avrà, è vero :

$$H - H' = \Delta$$

ma in questo caso Δ potrà rappresentare l'errore di chiusura e giammai il dislivello fra i due mari.

Vi è ancora il postulato che considera tutti i dislivelli dei mari medi del mondo, appartenenti ad una unica superficie di livello della gravità, ossia al geoide. Non ha certamente carattere di verità assoluta questa proposizione, ma sempre quella di un'ipotesi, ammissibile, finchè le superficie di livello terrestri continueranno ad essere definite con la variazione che subisce il potenziale della gravità lungo la linea di forza.

Ciò posto, per determinare il valore più probabile di un'altitudine intermedia bisogna ricorrere al principio della media aritmetica pesata, e così si avrà genericamente :

$$(H)_r = \frac{p_r H_r + p_{n-r} H_{n-r}}{p_r + p_{n-r}} \Delta$$

ovvero, prima :

$$(H)_r = H_{n-r} + \frac{p_r}{p_r + p_{n-r}} \Delta$$

e poi :

$$(H)_r = H_r - \frac{p_{n-r}}{p_r + p_{n-r}} \Delta$$

Per controllo :

$$\frac{p_r}{p_r + p_{n-r}} \Delta + \frac{p_{n-r}}{p_r + p_{n-r}} \Delta = \Delta$$

In modo analogo si otterranno le altezze corrette per ogni chilometro di una linea livellata a profilo doppio i cui termini abbiano le altitudini già compensate. Perchè, indicando, anche

in questo caso, con Δ l'errore di chiusura, e con L la lunghezza dell'itinerario, si avrà :

$$H = H_r - \frac{l_r}{L} \Delta$$

$$H = H_{n-r} + \frac{l_{n-r}}{L} \Delta .$$

Le Carte geografiche.

Il problema delle Carte geografiche è un argomento di geometria differenziale che qui riferiremo alla rappresentazione delle due superficie — la sfera e l'ellissoide — sul piano cartesiano; attribuibili rispettivamente in prima e poi in più adeguata approssimazione.

La soluzione di questo problema richiede le *Equazioni della Carta*, cioè corrispondenze analitiche fra le coordinate geografiche — latitudine e longitudine — e le coordinate cartesiane del piano.

Ma le due accennate superficie curve non sono applicabili al piano, ossia non possono esservi distese senza rotture o duplicazioni. Quindi in ogni Carta intervengono delle *deformazioni* — *lineari*, *superficiali* ed *angolari*, ossia :

$$n = \frac{ds_1}{ds} \quad ; \quad m = \frac{d\Omega_1}{d\Omega} \quad ; \quad \delta = \alpha_1 - \alpha$$

Viene allora fatta questa classificazione :

- 1) Carte *autogonali*, *isogoniche* o *conformi*

$$n = \text{cost.} \quad m = \text{cost.} \quad \delta = 0$$

(In questo caso sono dunque conservati gli angoli.)

- 2) Carte *autaliche* o *equivalenti*

$$n \neq 1 \quad ; \quad m = 1 \quad ; \quad \delta \neq 0$$

(Sono allora conservate le aree.)

3) Carte *aflattiche* quando :

$$n \neq 1 \quad ; \quad m \neq 1 \quad ; \quad \delta \neq 1$$

Ora, tutte le proprietà enunciate scaturiscono dal valore che il modulo n di trasformazione lineare assume per ogni orientamento; occorre allora, come nel caso della curvatura, considerare l'*indicatrice* dei moduli ai cui assi corrispondono i moduli principali N_1 ed N_2 . Si deduce allora che :

$$\text{tang } \delta_m = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{N_2}{N_1}} - \sqrt{\frac{N_1}{N_2}} \right)$$

$$m = N_1 N_2$$

e si può concludere che quando $N_1 = N_2$ la Carta è *autogonale*, mentre nel caso di $N_1 N_2 = 1$ la rappresentazione è *autalica*. Quindi si avrà una Carta *aflattica* se N_1 ed N_2 hanno valori differenti.

Ora, il metodo più opportuno per la rappresentazione di una Carta geografica è connesso sempre alla forma topografica ed allo scopo che tale lavoro può conseguire.

Ad esempio, la considerazione della *lossodromia* (rotta della nave) conduce alle carte nautiche, mentre, per la costruzione delle *mappe catastali* è utilissimo il metodo *autalico*.

Queste conclusioni non hanno però carattere assoluto, perchè nel Catasto si adopera la rappresentazione *cilindrico-trasversa* di Cassini (*aflattica*) e la Balistica esterna utilizza il metodo *autalico* che travolge, nel caso di un Foglio della Carta d'Italia, la deformazione angolare assai più piccola del millesimo convenzionale, $3' 22'', 5$, che rappresenta l'approssimazione dei goniometri più in uso.

La precisione poi di una Carta dipende dalla scala in cui è rappresentata, e noi già sappiamo che essa può essere definita col rapporto :

$$\lambda = \frac{n}{5000}$$

n essendo il denominatore della scala medesima.

* * *

I principali metodi, prescindendo dalla Navigazione, sono i seguenti :

- 1) Proiezione di Cassini
- 2) » » Bonne
- 3) » » Lambert

Nel primo caso le equazioni della Carta sono :

$$\begin{aligned}x &= s \cdot \text{sen } \alpha \\y &= s \cdot \text{cos } \alpha\end{aligned}$$

in cui s è la distanza, geodeticamente determinata, α l'azimut noto alla stessa maniera.

La deformazione angolare massima è :

$$\delta_m = \frac{x^2}{4R^2 \text{arc } 1''}$$

in cui R indica il raggio della sfera ; mentre relativamente alle aree si ha :

$$m = 1 + \frac{x^2}{2R^2}$$

Ad esempio, per $x=200$ chilometri, si ricava :

$$\delta_m = 51'' \quad ; \quad m = 1,0005$$

Questo metodo fu adoperato in Francia per la costruzione della Carta alla Scala di 1 : 86400 : ma poi venne sostituito con la regola di Bonne che assegna alle equazioni della Carta i seguenti valori (Carta autalica) :

$$x = R \text{sen } \vartheta \quad ; \quad y = R_0 - R \text{cos } \vartheta$$

in cui $R_0 = N_0 \text{cotg } \varphi_0$ rappresenta il raggio di curvatura geodetica del parallelo medio ; mentre :

$$\begin{aligned}R &= R_0 - \int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho \, d\varphi \\ \theta &= \frac{r}{R} \omega\end{aligned}$$

In questa rappresentazione — con i paralleli circolari ed i meridiani curve trascendenti — la deformazione angolare massima resta così definita:

$$\text{tang } \delta_m = \frac{1}{2} \omega \left(\text{sen } \varphi_0 - \frac{r}{R} \right)$$

e per $\varphi_0 = 45^\circ$, $\varphi = 48^\circ 30'$, si ottiene:

$$\delta_m = 18' 15''.$$

L'Artiglieria francese, nella guerra mondiale, abbandonò questo metodo per adottare la rappresentazione *conica autogonale* di Lambert, per la quale:

$$\begin{aligned} x &= R_0 \text{sen } \theta - (R_0 - R) \text{sen } \theta \\ y &= (R_0 - R) \cos \theta + 2 R_0 \text{sen}^2 \frac{1}{2} \theta \end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned} R_0 &= N_0 \text{cotg } \varphi_0 \quad ; \quad \theta = \omega \varphi_0 \\ R_0 - R &= \sigma + \frac{\sigma^3}{\sigma \rho_0 N_0} + \frac{\sigma^4}{24 \rho_0 N_0} + \dots \end{aligned}$$

essendo:

$$\sigma = \rho_m (\varphi - \varphi_0) \text{arc } 1''.$$

Quando θ è piccolissimo allora le equazioni precedenti definiscono la proiezione naturale della Carta d'Italia, per la quale dunque:

$$\begin{aligned} x &= N \cos \varphi (\omega - \omega_0) \text{arc } 1'' \\ y &= \rho_m (\varphi - \varphi_0) \text{arc } 1'' \\ \delta_m &= \frac{1}{2} \omega \text{sen } \varphi. \end{aligned}$$

Infine, nel caso della Terra sferica, le equazioni del metodo di Flamsteed sono:

$$\begin{aligned} x &= R \cos \varphi [(\omega - \omega_0) \text{arc } 1''] \\ y &= R (\varphi - \varphi_0) \text{arc } 1'' \end{aligned}$$

e così apparisce chiaramente che questa proiezione — come quella della Carta d'Italia, pure autalica — ha i paralleli rettilinei ed i meridiani sinusoidali.

La Carta d'Italia, alla scala di 1 : 100 mila, prima della guerra, era l'insieme di 277 Fogli, ognuno dei quali definito con l'amplitudine di 30' in longitudine e 20' in latitudine. Con le nuove provincie bisogna considerare altri 46 Fogli in più.

Per la sintesi grafica furono adottate scale più grandi, al 50 mila ed al 25 mila, rispettivamente con quattro quadranti e sedici tavolette.

Nel primo caso :

$$\delta_m = 5' 15''$$

nel secondo caso :

$$\delta_m = 2' 38''$$

ed infine :

$$\delta_m = 1' 18''$$

La Balistica esterna dunque, anche per il tiro in direzione, può utilizzare benissimo le Carte al 25 mila che realizza l'Istituto geografico militare, da oltre mezzo secolo.

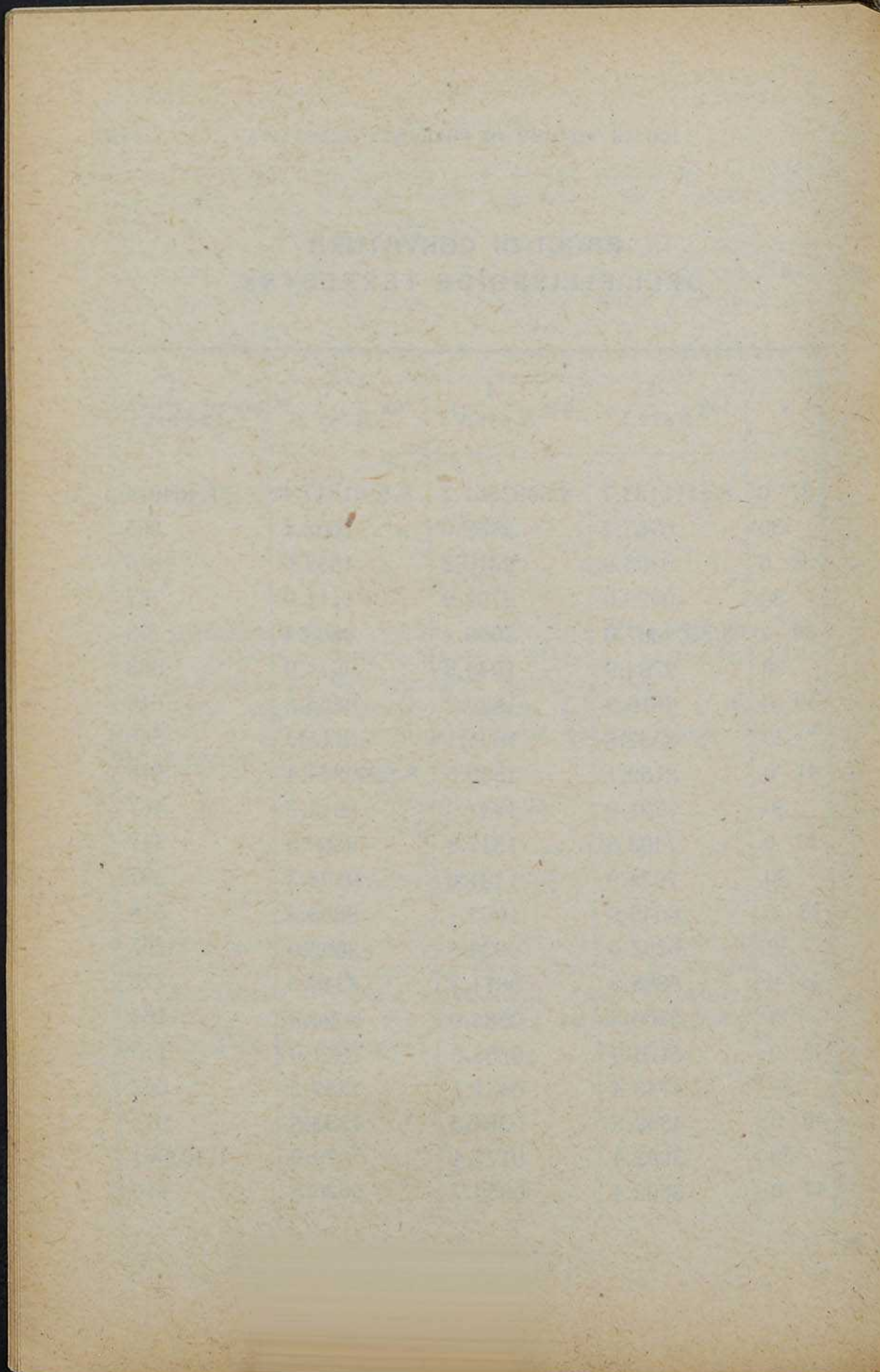
Un'altra rappresentazione autalica, cilindrica, è quella di Lambert — utile però soltanto nelle regioni equatoriali. Le sue equazioni sono :

$$\begin{aligned} x &= R (\omega - \omega_0) \text{ arc } 1'' \\ y &= R \text{ sen } \varphi \\ \text{tang } \delta_m &= \frac{1}{2} \text{ sen } \varphi \text{ tang } \varphi. \end{aligned}$$

Questo procedimento è stato adottato per la Carta della Somalia italiana, con la nozione della *Finestra di Viviani*, ossia un quadrilatero di uguale amplitudine tanto nel senso del meridiano che in quello del parallelo; quindi sul piano è rappresentato da un rettangolo.

**RAGGI DI CURVATURA
DELL' ELLISSOIDE TERRESTRE.**

φ	$\log \frac{1}{\rho \text{ arc } 1''}$	$\log \frac{1}{N \text{ arc } 1''}$	$\log \frac{1}{R \text{ arc } 1''}$	$\log \frac{1}{2\rho N \text{ arc } 1''}$
37° 0'	8.5111133.7	8.5992561.2	8.5101847.4	1.404914
30	0767.2	2439.0	1603.1	865
38 0	0398.9	2316.2	1357.6	816
30	0029.0	2192.9	1111.0	767
39 0	8.5109657.6	2069.1	0863.4	718
30	9284.9	1944.9	0614.9	668
40 0	8910.8	1820.2	0365.5	618
30	8535.5	1695.1	0115.3	568
41 0	8159.1	1569.6	8.5099864.4	518
30	7781.9	1443.9	9612.9	467
42 0	7403.8	1317.8	9360.8	417
30	7024.9	1191.6	9108.3	367
43 0	6645.5	1065.1	8855.3	316
30	6265.6	0938.5	8602.0	265
44 0	5885.3	0811.7	8348.5	215
30	5504.8	0684.9	8094.8	164
45 0	5124.0	0558.0	7841.0	113
30	4743.4	0431.1	7587.2	062
46 0	4362.8	0304.2	7333.5	012
30	3982.4	0177.4	7079.9	1.403961
47 0	3602.4	0050.7	6826.5	910



NOZIONI
DI ASTRONOMIA GEODETICA

NOTION
BY THE REV. JOHN W. WALKER

La posizione geografica — latitudine e longitudine — di un punto iniziale, vertice di una triangolazione, viene determinata mediante osservazioni astronomiche con le relazioni esistenti fra le coordinate degli astri e gli elementi analoghi ellissoidici terrestri.

Ma allora è necessario avere la nozione precisa dei movimenti apparenti degli astri sopra la sfera celeste, la quale si può considerare con un raggio uguale ad uno, e col centro in ogni punto del nostro globo.

Questa sfera si manifesta all'osservazione con un moto di rotazione uniforme intorno alla linea dei poli geografici (asse diurno) la quale è precisamente un asse di simmetria.

La verticale, che segna lo *zenit* ed il *nadir*, è anch'essa una linea di simmetria perpendicolare all'orizzonte su cui noi scorriamo, in modo tangibile, la traccia del *meridiano* e quella del *primo verticale*; le due linee che formano la *rosa dei venti*.

Poichè il movimento della sfera celeste è uniforme e perpetuo, così si fa da esso scaturire la sorgente del tempo e quindi la nozione del *giorno siderale*, il ricorso cioè del moto di una stella allo stesso meridiano.

Il giorno siderale è considerato di 24 ore, un'ora di 60 minuti, un minuto di 60 secondi. All'equatore un raggio mobile descriverà il perigono — 360° — in 24 ore; quindi non è difficile la riduzione della misura geometrica in grandezza *intensiva*, poichè la divisione sessagesimale è uguale a 15 volte quella oraria.

In un luogo qualunque la posizione di una stella può essere definita con l'angolo orario t e la sua declinazione δ ; per analogia, come la latitudine sulla sfera terrestre, è variabile anche da 0° a $\pm 90^\circ$; ovvero con la declinazione e l'ascensione retta α , analoga alla longitudine esprimibile, in misura geometrica sessagesimale, o nel campo intensivo da 0^h a 24^h .

La latitudine geografica rappresenta l'altezza del polo, ovvero anche la declinazione dello zenit ed il punto sul meridiano, da cui sono contati gli angoli orari — il *mezzo cielo* — che dista dall'orizzonte di un angolo uguale al complemento della latitudine geografica. In tale punto l'equatore celeste tocca il meridiano celeste.

Una relazione fondamentale è quella che considera il tempo siderale ϑ uguale all'ascensione retta più l'angolo orario di una stella, cioè :

$$\vartheta = \alpha + t$$

Quando l'astro passa al meridiano, ossia *culmina*, allora $t=0$ e perciò l'ascensione retta di una stella non è che il tempo siderale della sua culminazione. L'ora corrispondente viene segnata da un orologio a pendolo, ovvero con un cronometro; quindi la differenza — positiva o negativa — fra ϑ' ed α definisce lo stato dell'orologio. Con una serie di stati si può allora conoscere l'andamento dell'orologio in 24 ore, *positivo* quando l'orologio ritarda, *negativo* quando avanza.

Indicando con m tale correzione per un'ora, con ϑ_0 lo stato all'epoca t_0 sarà :

$$\vartheta_1 = \vartheta_0 + (t_0 - t_1) \quad (1)$$

la correzione corrispondente all'epoca t_1 .

Si capisce allora che la differenza di longitudine fra due punti geografici può essere definita col confronto delle ore locali.

D'altra parte, considerando la culminazione di una stella e la distanza zenitale corrispondente, si potrà definire la misura della latitudine geografica con l'equazione generica :

$$\varphi = \delta \pm z \pm r \quad (2)$$

+ se la stella culmina a sud dello zenit

— se la stella culmina a nord dello zenit

sempre per la culminazione superiore; z distanza zenitale osservata, r rifrazione definita con la formola di Oriani.

$$r = 60'',15 \operatorname{tag} z - 0,067 \operatorname{tag}^3 z$$

finchè $z < 75^\circ$.

Per la culminazione inferiore si considera invece la sola formola :

$$\varphi = 180^\circ - (\delta + z + r)$$

Il teodolite, che rappresenta meccanicamente il sistema delle coordinate zenitali, connesso alla rosa dei venti, serve a misurare la distanza zenitale z e l'azimut A , cioè l'angolo che la proiezione della linea di mira sul piano dell'orizzonte fa con la traccia del meridiano. Quest'angolo varia, come l'ascensione retta, da 0° a 360° da nord a sud passando per l'est.

Per misurare invece le coordinate uranografiche α e δ si ricorre al Transito, ovvero all'Equatoriale — un teodolite con l'asse diretto al polo, un circolo parallelo all'equatore, quello su cui sono lette le ascensioni rette, l'altro sopra un piano di declinazione.

Ora, poichè i valori di α e δ sono raccolti nelle effemeridi astronomiche, come la *Connaissance des Temps* ed il *Berliner Astronomisches Jahrbuch*, così nel campo sperimentale — ossia quando si tratta di eseguire una triangolazione astronomica, di determinare cioè in ogni vertice prescelto la latitudine e la longitudine — le misure relative sono quasi sempre eseguite in meridiano utilizzando le equazioni (1) e (2).

Ma si può conoscere l'andamento dell'orologio, il valore della latitudine e quello dell'azimut osservando la *Stella Polare*: nel primo caso col metodo di Döllén; nel secondo caso con la relazione :

$$\varphi = 90^\circ - z + R + S$$

dove i valori di R ed S sono raccolti in una tavola da Albrecht, ed, infine, per l'azimut, utilizzando la formola di Borda :

$$\cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{\text{sen } S - \text{sen } (S - \delta)}{\cos \varphi \text{ sen } z}$$

in cui S è l'angolo all'astro, cioè l'angolo parallattico.

L'ora della massima digressione della *Polare* resta così definita :

$$\cos t = \text{tang } \varphi \text{ cotg } \delta \quad (3)$$

e l'azimut corrispondente con la relazione :

$$\text{sen } A \cos \varphi = \cos \delta \quad (4)$$

in cui il valore di φ risulta anche così assegnato :

$$\text{sen } \varphi = \cos z \text{ sen } \delta \quad (5)$$

Con queste equazioni (3), (4) e (5) si possono determinare : l'angolo orario, la distanza zenitale e l'azimut, date la declinazione della stella e la latitudine geografica.

La longitudine di un punto rispetto ad un meridiano fondamentale si può però determinare anche mediante le occultazioni delle stelle dietro la Luna, ovvero con i segnali radiotelegrafici trasmessi da Parigi e da Bordeaux o da altre stazioni internazionali designate allo stesso scopo.

La Luna, nel suo movimento intorno alla Terra, determina sulla sfera celeste un campo circolare col diametro di circa 32', ed allora si verifica l'*immersione* (occultazione) e l'*emersione* (ricomparsa delle stelle) come nel caso di un osservatore situato al centro della Terra. Alla superficie il fenomeno non è così semplice a causa della parallasse lunare che fa cambiare istantaneamente la posizione apparente della Luna stessa.

Occorre perciò un giusto calcolo di previsione del fenomeno, altrimenti rimarrebbe turbata la precisione dell'indagine quantitativa.

La *Connaissance des Temps* raccoglie le formole necessarie ad un esempio di calcolo per la conoscenza della latitudine, della longitudine approssimata, dell'angolo orario relativo alla congiunzione vera, vista cioè dal centro della Terra; l'epoca dell'immersione e quella dell'emersione, ed utilizza per ciò anche il metodo nomografico.

Ma occorre sempre conoscere l'ora del nascere e del tramontare della Luna, non difficile, del resto, a calcolarsi con la nota equazione :

$$\text{cost} = - \text{tang } \varphi \text{ tang } \delta$$

Così, con adeguata approssimazione, si può conoscere l'ora dell'occultazione e se il fenomeno accadrà di notte.

In quanto poi al metodo dei segnali radiotelegrafici, esistono già vari strumenti che utilizzano quelli trasmessi dalle stazioni fondamentali prescelte nel confronto dell'ora locale e conseguentemente nella conoscenza della longitudine geografica.

La misura del tempo — quando non occorre una grandissima precisione — si può ottenere osservando il Sole e così pure per la latitudine e per l'azimut.

La distanza zenitale geocentrica del Sole sarà, in ogni caso, prevista con l'equazione :

$$Z = z + r \pm \frac{\Delta}{2} - \pi \begin{cases} + & \text{lembo superiore} \\ - & \text{lembo inferiore} \end{cases}$$

in cui Δ rappresenta il diametro apparente del Sole, π la parallasse di altezza; raccolti con i loro valori nelle effemeridi astronomiche.

Per conoscere Z occorre prima calcolare l'angolo orario del Sole, cioè :

$$t = \alpha - (\vartheta + m)$$

poi l'angolo ausiliario :

$$\text{tang } M = \text{tang } \delta \sec t$$

ed infine :

$$\cos z = \cos (\varphi - M) \frac{\text{sen } \delta}{\text{sen } M}$$

Alla culminazione $M = \delta$ e quindi :

$$z = \varphi - \delta$$

come già sappiamo.

Dato però il valore di z , la formola precedente serve invece a calcolare la latitudine; nel qual caso si deve assumere :

$$\cos (\varphi - M) = \cos z \frac{\text{sen } M}{\text{sen } \delta}$$

L'azimut (sempre osservando il Sole) viene calcolato con la formola :

$$\text{tang } A = \frac{\text{tang } t \cos M}{\text{sen } (\varphi - M)} \pm K$$

e la distanza zenitale anche con l'altra relazione :

$$\text{tang } z = \frac{\text{tang } (\varphi - M)}{\cos A}.$$

La correzione K resta così definita :

$$K = \frac{\Delta}{2 \cdot \text{sen } z}$$

col segno positivo, nel caso che sia osservato il lembo orientale del Sole, e col segno negativo quando si osserva il lembo occidentale.

Conversione del tempo siderale in tempo medio.

Il tempo civile principia alla mezzanotte; così, ora, anche il tempo astronomico.

Allo scopo accennato viene utilizzata la formola :

$$\vartheta_1 = \vartheta \pm 9^s,86 \omega$$

in cui :

$$9^s,86 = \frac{236^s,56}{24}$$

$236^s,56$ rappresenta l'incremento diurno della ascensione retta del Sole medio, ω la differenza di longitudine espressa in ora.

Sottraendo ϑ_1 dal tempo siderale dato e poscia convertendo il resto in equivalente di tempo medio (mediante tavole ausiliarie) si ottiene il tempo medio, e viceversa nel caso del problema reciproco.

Misura della latitudine con osservazioni in meridiano e della longitudine con azimut reciproci.

Per la latitudine viene allora utilizzata la (2), previa misura della distanza zenitale, la quale richiede per altro la conoscenza dello zenit istrumentale che scaturisce da quattro osservazioni della *Polare*, opportunamente distribuite rispetto alla posizione

del circolo verticale di un teodolite o di un transito. In quest'ultimo caso, non solo resta eliminato lo zenit strumentale, ma, al circolo verticale graduato, è sostituito un oculare micrometrico, con filo mobile, che consente una maggiore approssimazione.

Quando si adopera un teodolite, ossia un istrumento universale, si avrà per una mira terrestre :

$$u = \frac{l_d + l_s}{2}$$

e quindi :

$$z = l_d - u = u - l_s$$

l_d ed l_s rappresentano le letture angolari coniugate corrispondenti alle posizioni *destra* e *sinistra* del circolo rispetto all'osservatore.

Ora, quando una stella culmina a sud dello zenit, col circolo a destra si ha :

$$\varphi = \delta_s + l_s - u + r_s$$

e sempre con la medesima posizione del circolo, rispetto ad una stella culminante a nord dello zenit, si avrà anche :

$$\varphi = \delta_n - l_n + u - r_n$$

Quindi, sommando si ricava :

$$\varphi = \frac{1}{2} (\delta_s + \delta_n) + \frac{1}{2} (l_s + l_n) + \frac{1}{2} (r_s - r_n)$$

ossia l'equazione che caratterizza il metodo di Talcott, nella quale l'errore d'inclinazione è supposto eliminato.

Scegliendo le due stelle in modo che :

$$\delta_n - \varphi = \varphi - \delta_s$$

allora $r_n = r_s$ e resta così caratterizzato il metodo di Villarceau che, in pratica, non è facilmente realizzabile.

Si può invece osservare una coppia a sud ed un'altra a nord dello zenit in modo che risulti :

$$z_s + z'_s = z_n + z'_n$$

il che è meno difficile. In questo caso le osservazioni devono essere così distribuite :

$C D$	1^a	stella	}	a sud dello zenit
$C S$	2^a	stella		
$C S$	1^a	stella	}	a nord dello zenit
$C D$	2^a	stella		

e si potranno avere allora quattro valori della latitudine e cioè :

$$\text{Coppia a sud} \quad \varphi = \frac{1}{2} (\delta_1 + \delta_2) + \frac{1}{2} (l_d - l_s) + \frac{1}{2} (r_1 + r_2)$$

$$\text{Coppia a nord} \quad \varphi = \frac{1}{2} (\delta_3 + \delta_4) - \frac{1}{2} (l_s - l_d) - \frac{1}{2} (r_3 + r_4)$$

ed altri due valori combinando la prima con l'ultima e le due intermedie alla maniera di Talcott.

Questo metodo, oltre all'utile eliminazione dello zenit istrumentale, permette anche di prescindere dalla rifrazione atmosferica.

La longitudine astronomica fra due punti si può determinare con questa equazione :

$$\alpha_1 - \alpha_2 = (\omega_1 - \omega_2) \text{ sen } \varphi_m$$

in cui α_1 ed α_2 rappresentano gli azimut reciproci, ossia relativi a due centri di osservazione visibili fra loro e dei quali φ_1 e φ_2 indicano le latitudini determinate con riferimento alle stelle fisse, e :

$$\varphi_m = \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2)$$

Dall'equazione precedente si ricava dunque :

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\text{sen } \varphi_m}$$

Così si vede la necessità impellente che i valori di α_1 ed α_2 siano determinati con la massima precisione, e quindi la distanza più utile, come nel caso dei profili lineari occorrenti alla conoscenza della superficie dinamica terrestre, in plaghe staccate, non dovrebbe mai superare i 30 chilometri, ossia il campo previsto per la così detta riduzione isostatica.

* * *

Ora, quando vengono eseguite misure relative di gravità, principalmente lungo le linee geografiche fondamentali — meridiani e paralleli — per giovare al metodo di Stokes, si ottengono risultati utilissimi, tanto per il problema geodetico, come per la geologia dinamica.

La conclusione generale, che può infatti scaturire dall'esame delle deviazioni, è quella che un difetto di densità continentale fa diminuire la gravità in superficie, mentre un eccesso di densità al disotto degli oceani tenderebbe a correggere l'effetto della poca densità dell'acqua e ad annullare l'anomalia della gravità in pieno oceano.

Così nacque la teoria isostatica per cui la densità, al disopra di una speciale superficie interna conforme al geoide (superficie di compensazione isostatica a 120 chilometri di profondità) sia in difetto, e quella della regione inferiore sia invece in eccesso, mentre le deficienze, come gli aumenti di densità, sarebbero costanti lungo la verticale.

L'attrazione locale e le anomalie della gravità sono dunque connesse alla medesima causa, ma il geoide è soggetto a cambiare col tempo, perchè col tempo varia la distribuzione delle masse, e per questo la costruzione dei profili lineari del geoide assume il carattere di una vera ricerca naturalistica. Tuttavia la geologia non può molto sperare nel campo di risultati positivi, perchè, mentre un rapido cambiamento di segno nelle attrazioni locali e nelle anomalie della gravità non può far pensare a masse poco profonde vicine fra loro, peraltro si può sempre dire che le masse perturbatrici siano cosparse sopra uno strato orizzontale vicine alla superficie quando tale mutamento non si manifesta.

INDICE

	<i>Pag.</i>
PREFAZIONE	3
Nozioni preliminari	7
Misura degli angoli	8
Nozione della parallasse con riferimento al sistema solare	9
Equazioni delle curve di 2° grado	12
Funzioni iperboliche	15
Superficie	18
Nozioni sulla curvatura	23
Teorema di Legendre	27
Coordinate geodetiche ortogonali	34
Coordinate geografiche	36
Calcolo dell'altitudine	38
Effettiva determinazione dei vertici di una triangolazione	40
Livellazione geometrica	44
Coordinate cartesiane nel campo topografico e geodetico	46
Il Teodolite	47
Trasporto delle misure angolari dal centro di osservazione ad un altro punto vicino	52
Teodolite topografico	54
Le moderne teorie altimetriche	56
Nozioni di celerimensura	58
Fenomeno delle maree	61
Causa delle maree	64
Effetto della rotazione della Terra	67
Marea solare	68
Effetto risultante della marea lunare e solare	69
Ritardo delle maree	ivi
Stabilimento del porto	70
Mascaret	ivi
Derivazione delle quote altimetriche	ivi
Teoria degli errori	75
Gli errori di osservazione	80
Media aritmetica	81
Media aritmetica pesata	85
Determinazione indiretta a più incognite	86
Regola di Gauss	90
Calcolo della probabilità applicato alla teoria degli errori	91
Curva di probabilità	95
Misura della precisione	96
Errore probabile	97
Metodo dei minimi quadrati	98
Compensazione degli errori di osservazione	99
Le Carte geografiche	110
Raggi di curvatura dell'ellissoide terrestre	115
Nozioni di astronomia geodetica	117
Conversione del tempo siderale in tempo medio	124
Misura della latitudine con osservazione in meridiano e della longitudine con azimut reciproci	ivi

BIBLIOTECA DEL POPOLO

a Cent. 80 il Volume :: Volume doppio Lire 1.60

ULTIMI VOLUMI PUBBLICATI

553. Prontuario delle forme del verbo francese.
554. Pile per usi domestici.
555. Accumulatori per usi domestici.
556. Lo Stato nella Sociologia Spenceriana. [tici]
557. Curiosità e sofismi matematici.
558. La Luce Elettrica domestica.
559. Storia Parlamentare della III Repubblica di Francia.
560. Disinfezione e disinfettanti.
561. Come coniug. i verbi inglesi
562. Storia del popolo arabo.
563. L'aritmetica per gli adulti.
564. Id., id. - Parte II. [Parte I]
565. Id., id. - Parte III.
566. I fondamenti della Geometria di posizione.
567. Beethoven, la sua vita e le sue opere.
568. La lotta greco-romana.
569. La Cinematografia.
570. Canottaggio e nuoto.
571. Nozioni di idraulica.
572. Foot-ball.
573. Compendio di letteratura indiana.
574. Francesco Giuseppe e la storia di Casa d'Absburgo.
575. Applicazioni algebriche alla geometria piana e solida.
576. Dizionario biblico. — Vol. I. - Parte Geografico-Storica.
577. Idem. — Vol. II. - Parte Religiosa.
578. Trento e Trieste. [giosa]
579. I terremoti e la sismologia.
- 580-581. Manualetto indicatore dei servizi del telegrafo e del telefono.
582. Storia del Messico. [fono]
583. La Marina Militare Italiana
584. Storia del Belgio. [nel 1915]
585. Leggi, usi e convenzioni della guerra moderna.
586. Storia di Spagna.
587. L'Esercito Italiano. [numeri]
- 588-589. Iniziamiento alla teoria dei
590. Geometria non-euclidea.
591. Il Dispotismo.
- 592-593. Tesi di calcolo letterale.
594. Allevamento del coniglio e degli animali da cortile.
595. Storia dell'Albania fino al 1910.
596. Le caldaie a vapore marine.
- 597-598. Il mare Adriatico.
- 599-600. Panificazione razionale moderna. [clista]
601. La motocicletta e il motociclista.
602. Elem. di telegrafia senza filo.
603. Dizionarietto Geografico Etimologico.
604. L'automobile. [mologico]
605. L'Orlando furioso esposto al popolo.
606. Idem. - Parte II. [popolo]
607. Idem. - Parte III.
608. Idem. - Parte IV.
609. Idem. - Parte V.
- 610-611. La storia delle razze cavaliere.
- 612-613. Idee di Cosmogonia. [line]
614. La sifilide.
615. La blenorragia.
616. La Casa di Savoia. [logia]
617. Frammenti di storia dell'astrologia.
- 618-619. La pesca meccanica.
620. Le malattie professionali.
621. Istruzione orale dei sordomuti.
- 622-623. Lo sviluppo storico delle forme animali. [derna cura]
624. La tisi polmonare e la sua moderna cura.
625. G. B. Molière e le sue opere.
626. L'essiccazione delle patate e di altri generi commestibili.
627. Il gergo nella società, nella storia, nella letteratura.
628. Camillo Benso di Cavour.
629. Conferenze popolari sulla tubercolosi.
630. Storia della scrittura.
631. Il Benzolo, il Toluolo e gli esplosivi derivanti.
- 632-633. Fari e segnali marittimi.
634. Carlo Goldoni. [materiali]
635. Nozioni sulla resistenza dei materiali.
636. Dizionario degli Autori italiani, latini, greci.

Inviare Cartolina-vaglia alla Casa Editrice Sonzogno via Pasquirolo, 14, Milano (104)

BIBLIOTECA DEL POPOLO

- | | |
|--|---|
| <p>637. Sezioni coniche.
 638-639. L'industria del freddo.
 640-641. Nozioni e curiosità araldiche (con illustrazioni).
 642. La fabbricazione dell'acciaio al forno Martin.
 643-644. Prontuario dantesco.
 645-646. Calcolo infinitesimale. Parte I, <i>Calcolo differenziale</i>.
 647. Calcolo infinitesimale. - Parte II, <i>Calcolo integrale</i>.
 648. Elementi di costruzione in cemento armato.
 649. La patria dell'uomo.
 650. Compendio di letteratura italiana.
 651. I motori d'aviazione. [liana].
 652. Malattie e rimedi.
 653. Formulario per il tornitore meccanico. [materiali].
 654. Esercizi sulla resistenza dei
 655. Federico Mistral e « Mirella ».
 656. Galileo Galilei.
 657. Sunti di didattica.
 658. Gli ingranaggi. [popolo].
 659-660. I Promessi Sposi esposti al
 661. Misure elettriche pratiche.
 662. I motori a scoppio nell'agricoltura.
 663. I contatori elettr. a induzione.</p> | <p>664-665. Costruzioni navali in ferro
 666-667. Piccolo vocabolario commerciale.
 668. Breve corso di geografia economica. — Vol. I. — Nozioni generali.
 669. Id. Vol. II. - Dell'Italia
 670. Id. Vol. III - L'Europa.
 671. Id. Vol. IV - L'America.
 672. Id. Vol. V. - L'Asia.
 673. Id. Vol. VI. - L'Africa.
 674. Corso Elementare d'Algebra Vol. I.
 675. Id. - Vol. II.
 676. Id. - Vol. III.
 677. Id. - Vol. IV.
 678. Id. - Vol. V.
 679-680. Geometria Elementare Vol. I.
 681-682. Id. - Vol. II.
 683-684. Id. - Vol. III.
 685. La tenuta dei libri in scrittura semplice e doppia. - Vol. I.
 686. Id. - Vol. II.
 687. Antologia della vita moderna - Vol. I - Vita commerciale.
 688. Id. - Vol. II - Vita industriale
 689. Id. - Vol. III - Vita economica
 690. Id. - Vol. IV - Vita sociale.</p> |
|--|---|

VOLUMI RINNOVATI O SOSTITUITI:

- | | |
|--|---|
| <p>10. Pizzo d'Irlanda.
 20. Alessandro Volta.
 22. Botanica.
 23. Punto Filet.
 32. Merletto ad uncinetto.
 72. Sindacalismo fascista.
 75. Storia della Russia dalle origini ai nostri giorni.
 78. Radiotelegrafia-radiotelefonìa.
 81. San Francesco d'Assisi.
 85. Storia della letterat. italiana.</p> | <p>86. La canzone d'Orlando riassunta ed esposta al popolo.
 95. Lavori femminili a punto in croce.
 96. Enrico Ibsen.
 98. I fratelli Giuseppe e André Chenier.
 112. Emanuele Filiberto.
 199-200. La tubercolosi nei piccoli centri.
 213-214. Benito Mussolini.</p> |
|--|---|

Inviare Cartolina-vaglia alla Casa Editrice Sonzogno, via Pasquirolo, 14, Milano (10)

GRATIS La CASA EDITRICE SONZOGNO, Milano (104), Via Pasquirolo 14, spedisce, a semplice richiesta, il Catalogo Generale delle sue pubblicazioni