PROPAGANDA D'ISTRUZIONE

BIBLIOTECA DEL POPOLO

CENTESIMI 90 IL VOLUME

Prezzo L. 0,80

Prof. LUIGI PEDROTTI

INTRODUZIONE

AL

CALCOLO DIFFERENZIALE

COLLA TEORICA DEI MASSIMI E DEI MINIMI

OGNI VOLUME 90 CENTESIMI

Ogni volumetto consta di 64 pagine di fitta composizione e contiene un completo trattatello elementare di scienza pratica, di cognizioni utili e indispensabili, dettato in forma popolare, succinta, chiara alla portata di ogni intelligenza.

CASA EDITRICE SONZOGNO
VIA PASQUIROLO 14
MILANO

BATTAGLINI

VOLUME 432

Printed in Italy - Stab. Grafico Matarelli - Milano - Via Passarella, 15
6-25-5

PREFAZIONE

Questo manualetto è destinato ai giovani che coltivano le discipline matematiche e che si avviano agli studi superiori. La forma piana ed elementare, con cui è svolta la materia, servirà a facilitarne lo studio, che deve servire d'introduzione all'analisi.

Ho dato molti esempi sulla teorica dei massimi e minimi stimando questo un ramo importantissimo del calcolo.

Il manualetto nella sua semplicità e nella sua forma modesta troverà, voglio sperarlo, buona accoglienza da parte degli studiosi.

L. P.

INTRODUZIONE AL CALCOLO DIFFERENZIALE colla teorica dei massimi e minimi

DERIVATE

CAPITOLO I.

Quantità costanti e variabili.

1. — Si chiama *costante* una grandezza che durante i calcoli non può cambiare di valore. Allorchè si studia la variazione che subisce il perimetro di un poligono regolare inscritto in un circolo, col variare del numero dei suoi lati, abbiamo per *costante* il raggio del circolo.

Di due capitali impiegati rende più il maggiore, avendo per *costanti* il tempo ed il tasso, ecc.

2. — Chiamasi *variabile* una grandezza che può assumere, in una determinata questione, più *valori* o *stati*.

Se poi due quantità variabili x ed y sono legate l'una all'altra in modo che la variazione di una di esse implichi la variazione dell'altra, si dice che queste due quantità sono *funzioni* l'una dell'altra. Così la circonferenza quanto l'area del circolo sono evidentemente funzioni del raggio.

Se si considera y come una funzione di x, si indica questo legame col simbolo $y = f(x)$.

Noi supporremo in ciò che segue che, allorquando la variabile x varia d'un modo continuo entro certi limiti, la funzione y vari pure d'un modo continuo; in altre parole, supporremo che ad una variazione piccolissima h della variabile, corrisponda una variazione piccolissima k della funzione.

Così ad una variazione piccolissima del raggio, corrisponde una variazione pure piccolissima della circonferenza.

Se poi la prima variazione tende verso zero, la seconda tende pure verso zero. In generale il rapporto $\frac{h}{k}$ della variazione della funzione alla variazione della variabile tende verso un limite finito e determinato; questo limite è ciò che si chiama la *derivata* della funzione proposta. La derivata è una nuova funzione di x che rappresenteremo col simbolo y' o $f'(x)$.

Consideriamo, ad esempio, un corpo animato di moto vario. A partire da un certo istante i potremo supporre che il corpo si muova di moto uniforme, purchè si consideri un tempo infinitamente breve t. Sia s lo spazio percorso in quel tempo. Il rapporto $\frac{t}{s}$ sarà la velocità del corpo durante quel tempo. Se ammettiamo che t tenda verso zero, anche la funzione s tenderà verso zero, ed il rapporto $\frac{s}{t}$ tenderà verso un valore v finito e determinato, che esprime la velocità del corpo nell'istante i.

La velocità d'un corpo che si muove di moto vario è dunque la derivata della funzione *spazio* rispetto alla variabile *tempo*.

In matematica si dà il nome di *accrescimento* alle variazioni piccolissime delle grandezze continue, nulla importando se queste variazioni sono positive o negative.

3. — Consideriamo, per esempio, la funzione $y = x^2$. Se si dà alla variabile x l'accrescimento h, la funzione diventa

$$(x + h)^2 = x^2 + 2\,x\,h + h^2.$$

e si ha così la variazione o accrescimento

$$k = (x + h)^2 - x^2 = 2\,x\,h + h^2.$$

Si può rendere h tanto piccolo che ciascuno dei due termini $2\,x\,h$ ed h^2, e per conseguenza la loro somma k diventi piccola quanto si vuole; così la funzione y varia d'un modo continuo con x.

Dividendo per h si ha $\frac{k}{h} = 2\,x + h$.

Allorchè si fa tendere h verso zero, il rapporto $\frac{k}{h}$ dell'accrescimento della funzione all'accrescimento della variabile tende verso il limite $2\,x$. Si conchiude che la funzione proposta ammette una derivata $y' = 2\,x$.

4. — Consideriamo ancora la funzione più generale $y = ax^m$ nella quale l'esponente m è intero e positivo ed il coefficiente a. Se si dà alla variabile x l'accrescimento h, la funzione, giusta il binomio newtoniano, diventa:

$$a\,(x + h)^m = a\,x^m + \frac{m}{1}\,a\,x^{m-1}\,h + \\ + m\,\frac{(m-1)}{1.2}\,a\,x^{m-2}\,h^2 + \ldots\ldots + a\,h^m$$

e subisce l'accrescimento

$$k = a\,(x + h)^m - a\,x^m = m\,a\,x^{m-1}\,h + \\ + m\,\frac{m\,(m-1)}{1.2}\,a\,x^{m-2}\,h^2 + \ldots\ldots + a\,h^m$$

Ora si può prendere h tanto piccolo perchè ciascuno dei termini del secondo membro, e per conseguenza la loro somma k, assuma un valore piccolo quanto si vuole; così la funzione y varia d'un modo continuo con x.

Dividendo per h si ha:

$$\frac{k}{h} = m\,a\,x^{m-1} + \frac{m\,(m-1)}{1.2}\,a\,x^{m-2}\,h + \ldots\ldots + a\,h^{m-1}$$

Allorchè si fa tendere h verso zero, tutti i termini del secondo membro, a partire dal secondo, tendono verso zero; e come sono in un numero finito, la loro somma tende pure verso zero. Il rapporto $\frac{k}{h}$ tende dunque verso il limite $m\,a\,x^{m-1}$; si conchiude che la funzione proposta ammette una derivata $y' = m\,a\,x^{m-1}$.

Così, *si ottiene la derivata della funzione* ax^m *moltiplicando questa funzione per l'esponente di* x, *e diminuendo in seguito l'esponente di una unità.*

Così la derivata di $7\,x^4$ è $4.7\,x^3 = 28\,x^3$.

5. — In generale, le funzioni continue ammettono delle derivate; a questa proprietà analitica delle funzioni continue, corrisponde la proprietà geometrica delle curve, che le rappresentano, di ammettere una tangente in ciascuno dei loro punti.

Sia $y = f\,(x)$ la funzione proposta. Tracciamo in piano due rette fisse OX, OY, l'una perpendicolare all'altra; a partire dall'*origine* O portiamo sulla prima una lunghezza OP uguale ad un valore qualunque della variabile x; dal punto P tracciamo la perpendicolare sulla quale prenderemo la lunghezza PM uguale al valore corrispondente della funzione y, e facciamo altrettanto per ciascun valore di x; la funzione essendo continua, il luogo dei punti M così ottenuti formerà una curva che rappresenterà la marcia della funzione. Allo scopo di estendere questo modo di rappresentazione a tutti i valori, si è convenuto di portare i valori positivi di x a destra del punto O, i valori negativi a sinistra; come pure si porta il valore di y sulla perpendicolare al di sopra se è positivo, ed al di sotto se è negativo.

Ciò posto diamo alla variabile x un accrescimento $PP' = h$; la funzione proverà un accrescimento k rappresentato dalla differenza $M'D$ fra le due perpendi-

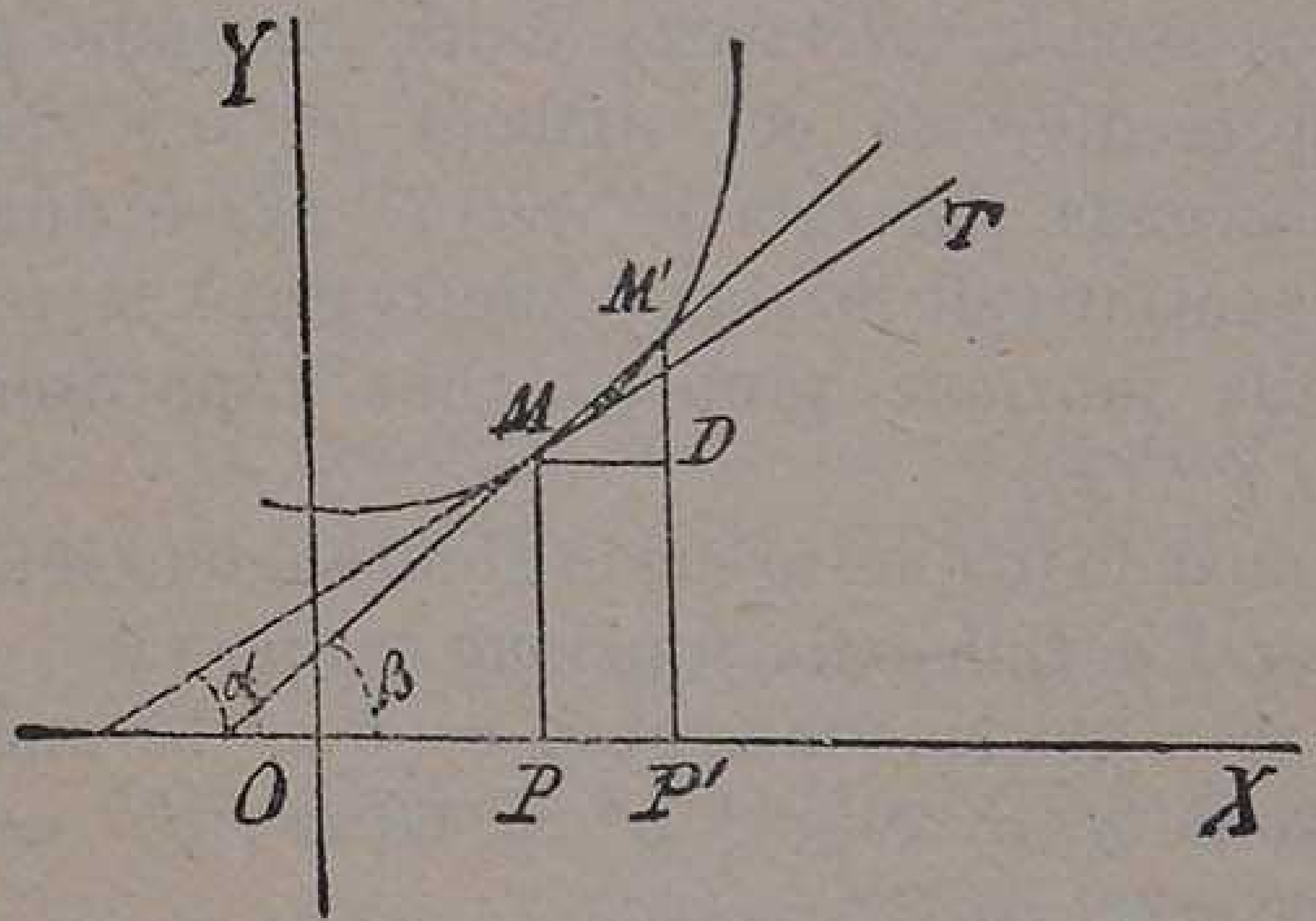

Fig. 1.

colari, od *ordinate* vicine MP, $M'P'$. Tracciamo la segante MM'; nel triangolo rettangolo $MM'D$, il rapporto $\frac{k}{h}$ è eguale alla tangente dell'angolo $M'MD$, o dell'angolo B che questa segante fa coll'asse orizzontale OX. Se si fa diminuire l'accrescimento h fino a zero, il punto M' si avvicinerà indefinitamente al punto M; se la funzione $f(x)$ ammette una derivata, vale a dire, se il rapporto $\frac{k}{h}$ tende verso il limite $f'(x)$, l'angolo β tenderà verso un angolo limite α dato dall'equazione tang $\alpha = f'(x)$ e la segante MM', ruotando attorno al punto M, tenderà verso la retta MT che forma coll'asse orizzontale OX l'angolo α; questa posizione limite MT della segante è ciò che si chiama la *tangente* alla curva nel punto M.

6. — Abbiamo chiamata derivata d'una funzione continua $y = f(x)$ il limite del rapporto dell'accrescimento della funzione all'accrescimento della variabile, quando questi due accrescimenti tendono verso zero. Questa derivata $f'(x)$ è una nuova funzione di x, che ammette una derivata; questa derivata della *prima derivata* è la *seconda derivata* della funzione proposta e la rappresenteremo col simbolo y'' o $f''(x)$. Così pure la seconda derivata $y'' = f''(x)$ è una nuova funzione continua di x; la sua derivata è la *terza derivata* della funzione proposta, che rappresenteremo con y''' o $f'''(x)$.

Continuando in questo modo si ottengono le derivate dei differenti ordini della funzione proposta.

Così, se si ha la funzione $y = 5\,x^4$ le successive derivate sono $y' = 20\,x^3$; $y'' = 60\,x^2$; $y''' = 120\,x$; $y'''' = 120$ $y''''' = 0$.

Derivata d'una somma.

7. — Si abbiano diverse funzioni $u, v, w,$ della medesima variabile x. Supponiamo che queste funzioni abbiano delle derivate che rappresenteremo con u', v', w'

Indichiamo con $\Delta\,x$ l'accrescimento che si dà alla variabile x, e con $\Delta\,u$, $\Delta\,v$, $\Delta\,w$ gli accrescimenti o variazioni che ne derivano per le funzioni u, v, w.

La somma algebrica $y = u + v - w$ delle funzioni proposte è una nuova funzione della variabile x. Indicando con $\Delta\,y$ la variazione che prova questa funzione si ha evidentemente $\Delta\,y = \Delta\,u + \Delta\,v - \Delta\,w$.

Ciascuna delle funzioni u, v, w essendo continua, si può attribuire alla variabile x un accrescimento Δx tanto piccolo così che ciascuno degli accrescimenti Δu, Δv, Δw e per conseguenza la loro somma Δy, abbia un valore piccolo quanto si vuole; da ciò si comprende che la nuova funzione y varia d'un modo continuo con x. Dividendo tutti i termini per Δx risulta:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

Supponiamo ora che l'accrescimento Δx della variabile tenda verso zero, gli accrescimenti corrispondenti Δu, Δv, Δw delle funzioni tenderanno pure verso zero; il rapporto $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ tenderà verso un limite che, per definizione, è la derivata della funzione u, derivata che abbiamo rappresentata colla notazione u'; i rapporti $\frac{\Delta v}{\Delta x}$, $\frac{\Delta w}{\Delta x}$ tendono pure verso limiti che sono le derivate delle funzioni v e w rappresentate con v' e w'; si conchiude che il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tende pure verso un limite eguale a $u' + v' - w'$; la funzione y ammette dunque una derivata, e si ha $y' = u' + v' - w'$.

Così, *la derivata d'una somma algebrica è uguale alla somma delle derivate delle diverse funzioni che la compongono.*

Derivata d'una funzione intera.

8. — Ogni funzione intera di grado m è della forma

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m \; 1} + \dots\dots + A_{m-1} x + A^m$$

Ciascun termine essendo una funzione continua di x avente una derivata, la loro somma, in virtù del teorema precedente, è pure una funzione continua di x che ammette una derivata, e questa derivata è uguale alla somma delle derivate dei differenti termini che la compongono. Abbiamo visto (N.° 4) che per trovare la derivata della funzione elementare $a\,x^m$, bisogna moltiplicare per l'esponente di x e diminuire poi questo esponente di una unità: applicando questa regola a ciascun termine del polinomio si ha

$$f'(x) = m\,A_0\,x^{m-1} + (m-1)\,A_1\,x^{m-2} + \,......\, + A_{m-1}$$

Il grado di ciascun termine abbassandosi di una unità, la derivata sarà una funzione intera di grado $m-1$. Il termine costante A_m non entra nella derivata, e, infatti, quando x varia, l'accrescimento k della costante essendo nullo, si ha $\dfrac{k}{h} = o$ e così la derivata è nulla.

Prendendo la derivata di questa prima derivata, si ottiene la seconda derivata del polinomio proposto.

$$f''(x) = m\,(m-1)\,A_0\,x^{m-2} +$$
$$+ (m-1)\,(m-2)\,A_1\,x^{m-3} + \,......\, + 2\,A_{m-2}$$

la quale è una funzione intera di grado $m-2$.

La terza derivata, o la derivata della seconda derivata è

$$f'''(x) = m\,(m-1)\,(m-2)\,A_0\,x^{m-3} + \,.......$$

Esempio.

$$f(x) = x^3 + 5\,x^2 - 7\,x + 6$$

Applicando la regola enunciata, si ottengono le successive derivate

$$f'(x) = 3\,x^2 + 10\,x - 7$$
$$f''(x) = 6\,x + 10$$
$$f'''(x) = 6$$

Derivata d'un prodotto.

9. — Consideriamo dapprima il prodotto $y = u\,v$ di due funzioni continue u e v d'una medesima variabile x; ammetteremo sempre che le funzioni u e v abbiano delle derivate.

Se alla variabile x si dà l'accrescimento $\Delta\,x$, le funzioni u, v, y subiranno i corrispondenti accrescimenti $\Delta\,u$, $\Delta\,v$, $\Delta\,y$ e si ha $y + \Delta\,y = (u + \Delta\,u)\,(v + \Delta\,v)$.

Eseguendo la moltiplicazione e sopprimendo nei due membri le qualità uguali y ed $u\,v$ si ottiene

$$\Delta\,y = u\,\Delta\,v + v\,\Delta\,u + \Delta\,u \times \Delta\,v$$

Si può rendere l'accrescimento $\Delta\,x$ così piccolo tanto che gli accrescimenti $\Delta\,u$, $\Delta\,v$, e per conseguenza $\Delta\,y$, sieno pure così piccoli quanto si vuole, il che significa che la nuova funzione è pure una funzione continua della variabile x Dividendo tutti i termini per $\Delta\,x$ si ottiene

$$\frac{\Delta\,y}{\Delta\,x} = u\,\frac{\Delta\,v}{\Delta\,x} + v\,\frac{\Delta\,u}{\Delta\,x} + \frac{\Delta\,u}{\Delta\,x} \times \Delta\,v$$

Se l'accrescimento $\Delta\,x$ della variabile x tende verso zero, i rapporti $\dfrac{\Delta\,u}{\Delta\,x}$, $\dfrac{\Delta\,v}{\Delta\,x}$ tendono verso limiti che sono le derivate u', v' delle funzioni u, v; il terzo termine del secondo membro diventa nullo, poichè il primo fattore $\dfrac{\Delta\,u}{\Delta\,x}$ tende verso un valore finito u', mentre il secondo fattore tende verso zero.

Si conchiude che il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tende esso pure verso un limite uguale a $u v' + v u'$; la funzione y ammette dunque una derivata, e si ha $y' = u v' + v u'$.

Così, *la derivata d'un prodotto di due fattori è uguale al primo fattore moltiplicato per la derivata del secondo, più il secondo moltiplicato per la derivata del primo.*

OSSERVAZIONE.

Allorchè una funzione è moltiplicata per un fattore costante, è evidente che la sua derivata è moltiplicata per il medesimo fattore. Sia $y = au$; si ha evidentemente $\Delta y = a \Delta u$ e per conseguenza $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a \frac{\Delta u}{\Delta x}$ da cui $y' = a u'$.

10. — Consideriamo ora il prodotto $y = u v w$ di tre funzioni continue che ammettono delle derivate.

Risguardando il prodotto $u v$ delle due prime funzioni come un solo fattore, la nuova funzione y, in virtù del teorema precedente, sarà pure continua ed ammetterà una derivata

$$y' = (u v) w' + w (u v)'$$

e sviluppando la derivata $(u v)'$ del prodotto $u v$ si ha

$$y' = u v w' + w (u v' + v u')$$

ossia $$y' = u v w' + u w v' + v w u'$$

Così, *la derivata d'un prodotto di più fattori è uguale alla somma dei prodotti che si ottengono moltiplicando la derivata di ciascun fattore per il prodotto di tutti gli altri.*

ESEMPI.

1°) $y = (3\,x - 7)\,(5\,x^3 + 2\,x^2 - 6)$
$y^1 = (3\,x - 7)\,(15\,x^2 + 4\,x) + (5\,x^3 + 2\,x^2 - 6)\,3 =$
$= 60\,x^3 - 87\,x^2 - 28\,x - 18$

2°) $y = x^3\,(x^2 + 1)\,(3\,x - 1)$
$y' = x^3\,(x^2 + 1)\,3 + x^3\,(3\,x - 1)\,2\,x +$
$+ (x^2 + 1)\,(3\,x - 1)\,3\,x^2 = 18\,x^5 - 5\,x^4 + 12\,x^3 - 3\,x^2$

Derivata d'un quoziente.

11. — Sia il quoziente $y = \dfrac{u}{v}$ di due funzion continue che ammettono delle derivate. Si ha $y + \Delta\,y = \dfrac{u + \Delta\,u}{v + \Delta\,v}$ e per conseguenza

$$\Delta\,y = \frac{u + \Delta\,u}{v + \Delta\,v} - \frac{u}{v} = \frac{v\,\Delta\,u - u\,\Delta\,v}{v\,(v + \Delta\,v)}$$

Ora si può rendere $\Delta\,x$ così piccolo che $\Delta\,u$ e $\Delta\,v$ e per conseguenza $\Delta\,y$ diventino tanto piccoli quanto si vuole; così la nuova funzione y varia d'una maniera continua con x.

Se si divide per $\Delta\,x$ si ha

$$\frac{\Delta\,y}{\Delta\,x} = \frac{v\,\dfrac{\Delta\,u}{\Delta\,x} - u\,\dfrac{\Delta\,v}{\Delta\,x}}{v\,(v + \Delta\,v)}$$

Quando $\Delta\,x$ tende verso zero, i rapporti $\dfrac{\Delta\,u}{\Delta\,x}$, $\dfrac{\Delta\,v}{\Delta\,x}$

tendono verso limiti che sono le derivate u', v' delle funzioni u, v; d'altronde il denominatore ha per limite v^2; si conchiude che il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tende verso un limite uguale a $\frac{v u' - u v'}{v^2}$; la funzione y ammette dunque una derivata $y' = \frac{v u' - u v'}{v^2}$

Così *la derivata d'un quoziente è uguale al denominatore moltiplicato per la derivata del numeratore, meno il numeratore moltiplicato per la derivata del denominatore, questa differenza poi divisa per il quadrato del denominatore.*

ESEMPI.

1°) $y = \frac{x - 1}{x + 1}$ $y' = \frac{x + 1 - (x - 1)}{(x + 1)^2} = \frac{2}{(x + 1^2)}$

2°) $y = \frac{5 x^2 - 3 x + 4}{x^2 - 1}$

$$y' = \frac{(x^2 - 1)(10 x - 3) - (5 x^2 - 3 x + 4) 2 x}{(x^2 - 1)^2} =$$

$$= \frac{3 x^2 - 18 x + 3}{(x^2 - 1)^2}$$

Derivata d'una potenza.

12. — Abbiamo già trovata la derivata della funzione $y = a x^m$ nel caso in cui l'esponente m è intero e positivo; derivata è $y' = m a x^{m-1}$. Ora proveremo che la stessa regola si estende ad un esponente qualunque.

Consideriamo dapprima il caso in cui l' esponente m è della forma $\frac{1}{n}$, n essendo un numero intero e positivo. Si ha $y = x^{\frac{1}{n}}$ e per conseguenza $x = y^n$; x è allora una funzione intera di y; la funzione proposta y di x deve essere considerata come la funzione inversa di quest'ultima. Ad una serie di valori vicinissimi di y corrispondono dei valori vicinissimi di x; reciprocamente a questi valori vicinissimi di x, facciamo corrispondere la serie dei valori dati primativamente ad y; in tal modo y è una funzione continua di x. È facile trovare la derivata della funzione inversa col mezzo della derivata della funzione diretta; infatti si ha

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)}$$

Il rapporto $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ ha per limite la derivata della funzione intera $x = y^n$, e cioè $n\, y^{n-1}$; il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tende dunque verso un limite uguale a $\frac{1}{n\, y^{n-1}}$ se si sostituisce in luogo di y il suo valore $x^{\frac{1}{n}}$ questa ultima espressione diventa $\frac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n} - 1}$. Così, la funzione irrazionale $y = x^{\frac{1}{n}}$ ammette una derivata

$$y' = \frac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n} - 1} = m\, x^{m-1}.$$

13. — Supponiamo ora che l'esponente non sia della forma $\frac{p}{n}$.

Ponendo $u = x^{\frac{1}{n}}$, la funzione proposta $y = x^{\frac{p}{n}}$ diventa $y = u^{p}$; essa è una funzione intera della quantità u, che è a sua volta una funzione irrazionale della variabile x della forma considerata precedentemente. Se si dà ad x un accrescimento piccolissimo $\Delta\, x$, u prova un accrescimento piccolissimo $\Delta\, u$, e per conseguenza y un accrescimento piccolissimo $\Delta\, y$; così y è una funzione continua di x. Si ha

$$\frac{\Delta\, y}{\Delta\, x} = \frac{\Delta\, y}{\Delta\, u} \times \frac{\Delta\, u}{\Delta\, x}$$

Il rapporto $\frac{\Delta\, u}{\Delta\, x}$ ha per limite la derivata della funzione $u = x^{\frac{1}{n}}$ e cioè $\frac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n} - 1}$; il rapporto $\frac{\Delta\, y}{\Delta\, u}$ ha per limite la derivata della funzione $y = u^{p}$; nella quale si considera u come la variabile indipendente, e cioè $p\, u.^{p-1}$ Si conchiude che il rapporto $\frac{\Delta\, y}{\Delta\, x}$ tende a sua volta verso il limite $p\, u^{p-1} \times \frac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n} - 1}$

Se si sostituisce in luogo di u il suo valore $x^{\frac{1}{n}}$ questa espressione diventa $\frac{p}{n}\, x^{\frac{p}{n} - 1}$. Così la funzione proposta $y = x^{\frac{p}{n}}$ della variabile x ammette una derivata $y' = \frac{\ }{n}\, x^{\frac{p}{n} - 1} = m\, x^{m-1}$.

14. — Supponiamo infine che l'esponente m sia negativo e poniamo $m = -n$, essendo n un numero positivo, intero o frazionario. Si ha $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ ed applicando la regola del quoziente, si ottiene la derivata

$$y' = \frac{-n x^{n-1}}{x^{2n}} = -n x^{-n-1} = m x^{m-1}$$

Come si vede dunque la medesima regola si applica a tutti gli esponenti.

ESEMPI.

1.° $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}};\ y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2.° $y = \frac{1}{x} = x^{-1};\ y' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

3.° $y = \frac{1}{x^2} = x^{-2};\ y' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

4.° $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}};\ y' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

15. — Consideriamo ora la funzione $y = u^m$ che si ottiene inalzando ad una potenza qualunque m una funzione continua u della variabile x e che ammette una derivata.

Quando si dà alla variabile x un accrescimento piccolissimo Δx, la funzione u prova un accrescimento piccolissimo Δu e per conseguenza y un accrescimento piccolissimo Δy; così y è una funzione continua di x. Si ha $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x}$. Il rapporto $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ ha per limite la derivata u' della funzione u; il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta u}$

ha per limite la derivata della funzione $y = u^m$, in cui si considera u come la variabile indipendente, e cioè $m u^{m-1}$. Si conchiude che il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tende a sua volta verso un limite $y' = m u^{m-1} \times u'$, e per conseguenza che y, considerata come una funzione di x, ammette una derivata $y' = m u^{m-1} \times u'$.

Così, *si ottiene la derivata della potenza di una funzione moltiplicando per l'esponente, diminuendo l'esponente di una unità, e moltiplicando il prodotto per la derivata di questa funzione.*

Corollario. — La derivata d'una radice quadrata è uguale alla derivata del radicando diviso per il doppio del radicale. Infatti applicando la regola precedente alla funzione

$$y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}} \text{ si ha } y' = \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}-1} u' = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}$$

$$u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

ESEMPI.

1.° $$y = \sqrt{5x^4 - 7x^2 + 8};$$

$$y' = \frac{20x^3 - 14x}{2\sqrt{5x^4 - 7x^2 + 8}}$$

2.° $$y = x(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$y' = (a^2 + x^2)\sqrt{a^2 - x^2} + 2x^2\sqrt{a^2 - x^2} -$$

$$- \frac{x^2(a^2 + x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

3.° $y = a + \frac{b}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{c}{x\sqrt[3]{x}} + \frac{d}{x^2} =$

$$= a + bx^{-\frac{2}{3}} - cx^{-\frac{4}{3}} + dx^{-2}$$

$$y' = -\frac{2}{3} bx^{-\frac{5}{3}} + \frac{4}{3} cx^{-\frac{7}{3}} - 2dx^{-3} =$$

$$= -\frac{2b}{3x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4c}{3x^2\sqrt[3]{x}} - \frac{2d}{x^3}$$

Derivata della funzione esponenziale.

16. — Sappiamo dall' algebra complementare che la funzione esponenziale $y = a^x$ nella quale a è un numero costante e positivo, varia d'un modo continuo con x. Se si dà alla variabile x l'accrescimento h, la funzione prova un accrescimento

$$k = a^{x+h} - a^x = a^x \left(a^h - 1\right)$$

e il rapporto dei due accrescimenti è $\frac{k}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h}$.

Allorchè h è piccolissimo, la differenza $a^h - 1$ è piccolissima; poniamo dunque $a^h - 1 = \alpha$ da cui $a^h = 1 + \alpha$ e prendendo i logaritmi neperiani dei due membri si ottiene

$h\,L\,a = L\,(1 + \alpha)$ da cui $h = \frac{L\,(1 + \alpha)}{L\,a}$ e sostituendo ad h il suo valore, l'espressione del rapporto diventa

$$\frac{k}{h} = a^x \frac{\alpha L a}{L(1+\alpha)} = \frac{a^x L a}{\frac{1}{\alpha} L(1+\alpha)} = \frac{a^x L a}{L(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

Allorquando h tende verso zero, α tende pure verso zero, e la quantità $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ diventa eguale al numero e, base dei logaritmi neperiani; ma $L e = 1$; il rapporto $\frac{k}{h}$ tende dunque verso un limite eguale ad $a^x L a$, e per conseguenza la funzione proposta ammette una derivata $y' = a^x L a$.

Così, *per avere la derivata d'una funzione esponenziale, basta moltiplicare questa funzione per il logaritmo neperiano della base.*

Consideriamo in particolare la funzione esponenziale $y = e^x$ poichè $L e = 1$, si ha $y' = e^x$. Così, *la derivata della funzione e^x è la funzione stessa.* La funzione e^x gode della proprietà caratteristica di riprodursi per *derivazione.*

Derivata dalla funzione logaritmica.

17. — La funzione $y = log\ x$ è l'inversa della funzione esponenziale $x = a^y$; a ciascun valore reale e positivo di x corrisponde un valore reale di y, ed uno solo, e quando x varia d'una maniera continua, y varia pure d'una maniera continua. Si ha evidentemente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)}$$

Il rapporto $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ ha per limite la derivata della funzione esponenziale $x = a^y$ e cioè $a^y \; L \; a$; il rapporto $\frac{\Delta\, y}{\Delta\, x}$ tende dunque verso un limite uguale a

$$\frac{1}{a^y L\, a} = \frac{1}{x\, L\, a}$$

Così la funzione proposta $y = log\; y$ ammette una derivata $y' = \frac{1}{x\, L\, a}$

Nel sistema neperiano, la funzione $y = L\, x$ ammette per derivata $\frac{1}{x}$

Derivata del seno.

18. — La funzione $y = sen\; x$ varia d'una maniera continua coll'arco x; quando x cresce da 0 a $\frac{\pi}{2}$, y cresce da 0 ad 1; x crescendo poscia da $\frac{\pi}{2}$ a π, y decresce da 1 a 0. Se alla variabile x si dà un accrescimento h, la funzione prova un accrescimento

$$k = sen\,(x + h) - sen\; x$$

Se si trasforma in prodotto questa differenza di seni si ha $k = 2\; sen\; \frac{h}{2}\; cos \left(x + \frac{h}{2} \right)$ e quindi

$$\frac{k}{h} = \frac{sen\; \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \times cos \left(x + \frac{k}{2} \right)$$

Quando l'accrescimento h della variabile tende verso zero, il rapporto $\dfrac{sen \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ del seno all'arco $\dfrac{h}{2}$ tende verso l'unità, mentre il secondo fattore si riduce a $cos\ x$; il rapporto $\dfrac{k}{h}$ tende dunque verso un limite eguale a $cos\ x$ e quindi la funzione proposta ammette una derivata $y' = cos\ x$.

Così, *la derivata del seno è il coseno*

La derivata del coseno.

19. — La funzione $y = cos\ x$ varia pure d'una maniera continua con x. Si ha nel medesimo modo

$$\frac{k}{h} = \frac{cos\ (x + h) - cos\ x}{h} = \frac{-2\, sen \frac{h}{2}\, sen \left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} =$$

$$= - \frac{sen \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\, sen \left(x + \frac{h}{2}\right)$$

e per conseguenza: $lim\ \dfrac{k}{h} = -\ sen\ x$

Così, *la derivata del coseno è il seno preso col segno* contrario. Da quanto precede si ottengono facilmente le derivate successive del seno e del coseno:

$$\begin{array}{ll} y \ \ = sen\ x & \qquad y \ \ = cos\ x \\ y' \ = cos\ x & \qquad y' \ = -\ sen\ x \\ y'' \ = -\ sen\ x & \qquad y'' \ = -\ cos\ x \\ y''' = -\ cos\ x & \qquad y''' = sen\ x \\ y'''' = sen\ x & \qquad y'''' = cos\ x \\ \cdots\cdots & \qquad \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \qquad \cdots\cdots \end{array}$$

Derivate della tangente, cotangente secante e cosecante.

20. — La funzione $y = \text{tang}\ x$ è uguale al quoziente $\dfrac{sen\ x}{cos\ x}$ di due funzioni continue, che hanno delle derivate.

Essa ammette pure una derivata che si ottiene secondo la regola del n.° 11; si ha così

$$y' = \frac{cos^2 x + sen^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x}$$

Così pure la cotangente $y = cot\ x = \dfrac{cos\ x}{sen\ x}$ ha per derivata $y' = -\dfrac{1}{sen^2 x}$

La secante, potendosi porre sotto la forma $y = sec\ x = \dfrac{1}{cos\ x}$ si otterrà la sua derivata colla regola dei quozienti $y' = \dfrac{sen\ x}{cos^2 x}$

Così pure la cosecante $y = cosec\ x = \dfrac{1}{sen\ x}$ ha per derivata $y' = -\dfrac{cos\ x}{sen^2 x}$

Derivate delle funzioni circolari inverse.

21. — La definizione delle funzioni circolari inverse richiede qualche spiegazione, poichè a ciascun valore della variabile corrispondono infiniti valori dell'arco.

Consideriamo dapprima la funzione $y = \text{arc. tang.}\ x$. Per definire la funzione in un modo preciso, si dà il valore y_0 dell'arco per un valore particolare x_0 della tangente. Quando la tangente varia d'una maniera continua a partire da x^0, uno degli archi corrispondenti varia d'una maniera continua a partire da y_0; questo arco variabile è la funzione y. Se, per esempio, si suppone che y si annulli con x, la funzione y varierà da o a $+\frac{\pi}{2}$, quando x varierà da o a $+\infty$ e da o a $-\frac{\pi}{2}$, quando x varierà da o a $-\infty$.

La funzione proposta è l'inversa della funzione diretta $x = tang\ y$. Si è visto che il rapporto $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ tende verso un limite uguale a $\frac{1}{cos^2 y}$, il rapporto inverso $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tende dunque verso un limite uguale a $cos^2 y$ e si ha $y' = cos^2 y$.

Ma si ha dalla trigonometria che

$$cos^2 y = \frac{1}{1 + tang^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

si conclude che $y' = \frac{1}{1 + x^2}$

22. — Sia la funzione inversa $y =$ arc. $sen\ x$. Se ne deduce $x = sen\ y$.

Si è visto che il rapporto $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ tende verso un limite uguale a $cos\ y$; il rapporto inverso $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tende dunque verso un limite uguale a $\frac{1}{cos\ y}$ e si ha $y' = \frac{1}{cos\ y}$ e siccome $sen\ y = x$, si ha $cos\ y = -\!\!+ \sqrt{1 - x^2}$ e se si sostituisce a $cos\ y$ il suo valore, abbiamo

$$y' = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - x^2}}$$

Bisognerà mettere davanti al radicale il segno di $cos\ y$; se l'arco termina nel primo o nel quarto quadrante, si prenderà il segno $+$ e se termina nel secondo o nel terzo, si prenderà il segno —.

23. — Nella stessa guisa si ottiene la derivata della funzione inversa $y = arc\ cos\ x$.

Infatti si ha $x = cos\ y$ e siccome il rapporto $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ tende verso un limite uguale a $-\ sen\ y$, il rapporto inverso $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tende verso un limite uguale ad $-\frac{1}{sen\ y}$

Si ha dunque $y' = -\frac{1}{sen\ y} = \frac{-1}{\pm\sqrt{1-x^2}}$

Si metterà davanti al radicale il segno di $sen\ y$.

Riassunto.

24. — Abbiamo trovate le derivate delle funzioni semplici che si considerano ordinariamente in matematica; è necessario apprenderle a memoria; lo specchietto seguente permette di abbracciarle d'un colp d'occhio.

$y = x^m$	$y' = m\,x^{m-1}$ m, numero qualunque
$y = a^x$	$y' = a^x\,L\,a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = L\,x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = sen\ x$	$y' = cos\ x$
$y = cos\ x$	$y' = -\ sen\ x$
$y = tang\ x$	$y' = \frac{1}{cos^2\ x}$

$$y = arc\ sen\ x \qquad y' = \frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = arc\ cos\ x \qquad y' = \frac{-1}{\pm\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = arc\ tang\ x \qquad y' = \frac{1}{1+x^2}$$

Derivata d'una funzione di funzione.

25. — Coll'aiuto delle funzioni semplici che abbiamo or ora esposte, si può formare una infinità di funzioni composte. Sia y una funzione $f(u)$ della quantità u, che è a sua volta una funzione $\varphi(u)$ della variabile x; coll'intermediario della funzione u, si potrà considerare y come una funzione di x; è ciò che si chiama una *funzione di funzione.*

Ammetteremo che u sia una funzione continua di x che ammette una derivata u' od $\varphi'(x)$ e che $f(u)$ sia una funzione continua di u che ammette una derivata $f'(u)$.

Se si dà ad x un accrescimento piccolissimo Δx, ne risulterà per u un accrescimento piccolissimo Δu e di conseguenza per y un accrescimento piccolissimo Δy; così y è una funzione continua della variabile x. Si ha evidentemente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Quando l'accrescimento Δx tende verso zero, il rapporto $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ tende verso un limite u', il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta u}$ tende verso un limite $f'(u)$; il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tende dunque verso un limite uguale al prodotto $f'(u) \times u'$ si conchiude che y, considerata come funzione di x, ammette una derivata $y' = f'(u)u'$.

Così, *la derivata d'una funzione di funzione è uguale al prodotto delle derivate delle funzioni che la compongono.*

Abbiamo già avuta occasione di considerare delle funzioni di funzioni quando abbiamo cercata la derivata d'una potenza frazionaria $y = x^{\frac{p}{n}}$ o d'una potenza $y = u^m$ d'una funzione di x; il ragionamento che abbiamo impiegato allora è lo stesso di quello che ci ha servito per dimostrare il teorema generale.

26. — Questo teorema può essere generalizzato: sia y una funzione $F(v)$ della quantità v, che è una funzione $f(u)$ della quantità u, la quale a sua volta è una funzione $\varphi(x)$ della variabile x; coll'intermediario delle quantità v ed u, si può considerare y come una funzione della variabile x.

Supporremo che le funzioni $F(v)$, $f(u)$, $\varphi(x)$ sieno continue ed ammettino delle derivate $F'(u)$, $f'(u)$, $\varphi(x)$. Se si dà ad x un accrescimento piccolissimo Δx ne risulta per u un accrescimento piccolissimo Δu, e quindi per v un accrescimento piccolissimo Δv e di conseguenza per y un accrescimento piccolissimo Δy; così y è una funzione continua di x. Si ha evidentemente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta v} \times \frac{\Delta v}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Quando Δx tende verso zero, i rapporti $\frac{\Delta u}{\Delta x}, \frac{\Delta v}{\Delta u}, \frac{\Delta y}{\Delta v}$ tendono rispettivamente verso i limiti u', $f'(u)$, $F'(v)$; il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tende dunque verso un limite uguale al prodotto $F'(v) \times f'(u) \times u'$. Si conchiude che y, considerata come funzione di x, ammette una derivata

$$y' = F'(v) \times f'(u) \times u'.$$

27. — Poichè le funzioni semplici, che abbiamo passato in esame, hanno delle derivate, risulta, dal teorema precedente, che le funzioni composte che si otterranno combinando fra loro in un modo qualunque queste funzioni semplici ammetteranno pure delle derivate.

Eccone qualche esempio:

1.° $y = sen\, x^2$. Se si pone $u = x^2$ si ha $y = sen\, u$ e si vede che y è una funzione di funzione.

L'applicazione del teorema ci dà

$$y' = cos\, u \times u' = 2\, x\, cos\, x^2.$$

2.° $y = e^{sen\, x}$. Ponendo $u = sen\, x$, si ha ancora una funzione di funzione $y = e^u$ che ha per derivata $y' = e^u \times u' = e^{sen\, x} cos\, x$

Esercizi.

Trovare le derivate delle seguenti funzioni:

1.° $y = tang\, x - cot\, x$ $\qquad y' = \dfrac{1}{sen^2\, x\, cos^2\, x}$

2.° $y = e^x (x - 1)$ $\qquad y' = x\, e^x$

3.° $y = x\, sen\, x + cos\, x$ $\qquad y' = x\, cos\, x$

CAPITOLO II.

Variazione delle funzioni e teorica dei massimi e minimi.

28. — Sia $f(x)$ una funzione continua che ammette una derivata. Abbiamo chiamata derivata d' una funzione il limite del rapporto dell'accrescimento k della funzione all'accrescimento h della variabile, quando questi accrescimenti tendono verso zero. Allorchè h è piccolissimo, il rapporto $\frac{k}{h}$ differisce dal suo limite; si ha dunque $\frac{k}{h} = f'(x) + m$ da cui $k = h \left\{ f'(x) + m \right\}$ essendo m una quantità piccolissima che si annulla con h. Allorchè la derivata $f'(x)$ non è nulla, si può determinare una quantità positiva α tale che se si attribuisce ad h un valore positivo qualunque inferiore ad α, la quantità m sia minore di $f'(x)$ in valore assoluto. In tal caso è la quantità $f'(x)$ che dà il suo segno alla quantità collocata fra parentesi; e se h è positivo la variazione k della funzione ha il segno della derivata $f'(x)$. Se la derivata è positiva, k è positiva e per conseguenza per ogni valore di h minore di m sarà $f(x + h)$ più grande di $f(x)$. Se invece la derivata è negativa, k è negativa e per conseguenza $f(x + h)$ minore di $f(x)$.

Così, *quando la variabile aumenta a partire d'un valore* X, *se per questa variabile la derivata è positiva, la funzione comincia a crescere; se la derivata è negativa, la funzione comincia a diminuire.*

Supponiamo che la derivata d'una funzione resti positiva per tutti i valori di x compresi fra x_0 ed x_1 ove x_1 è maggiore di x_0; è evidente da quanto precede che se x cresce da x_0 ad x_1 la funzione andrà aumentando in tutto questo intervallo. Al contrario, se la derivata è negativa per tutti i valori di x compresi fra x_0 ed x_1, la funzione andrà diminuendo.

Questa verità sussiste anche nel caso in cui la derivata s'annulli nell'intervallo fra x_0 ed x_1; basta che non cambi il segno. Supponiamo, per esempio, che la derivata restando positiva fra x_0 ed x_1; si annulli per un valore intermediario a; indichiamo con m una quantità positiva piccolissima; quando x varia da x_0 ad $a - m$ la derivata essendo positiva, la funzione cresce; x variando da $a + m$ ad x_1, e la derivata restando positiva la funzione cresce ancora e siccome l'intervallo $2m$ può essere reso piccolo quanto si vuole e la funzione è continua, si conchiude che la funzione aumenta incessantemente, quando x aumenta da x_0 ad x_1.

29. — Allorquando una grandezza variabile, dopo aver aumentato durante un certo tempo, diminuisce in seguito, essa passa da un valore più grande dei valori vicini, cioè quelli che lo precedono e quelli che lo seguono immediatamente. Si dice allora che essa passa per un *massimo*.

All'opposto, quando una grandezza variabile, dopo aver diminuito durante un certo tempo, aumenta in seguito, essa passa da un valore più piccolo dei valori vicini, cioè quelli che lo precedono e quelli che lo seguono immediatamente. Si dice allora che essa passa per un *minimo*.

Consideriamo, per esempio, la sezione con un piano verticale d'un terreno accidentato e supponiamo che si misurino le altezze dei differenti punti di questa curva al disopra del piano orizzontale GH.

Il vertice A d'una collina sarà un massimo, il fondo B d'una valle un minimo. Se si percorre questa linea nel senso Fl, dopo essersi elevati sino al punto A, si discenderà in seguito da A verso B; l'altezza AA' del punto A è maggiore di quella dei punti vicini, tanto da una banda quanto dall'altra; è un massimo.

Continuando il movimento si discenderà fino al punto B per risalire in seguito da B verso C; l'altezza BB' del punto B è minore di quella dei punti vicini, tanto da una banda quanto dall'altra; è un minimo. Si trova in seguito un nuovo massimo CC', ecc.

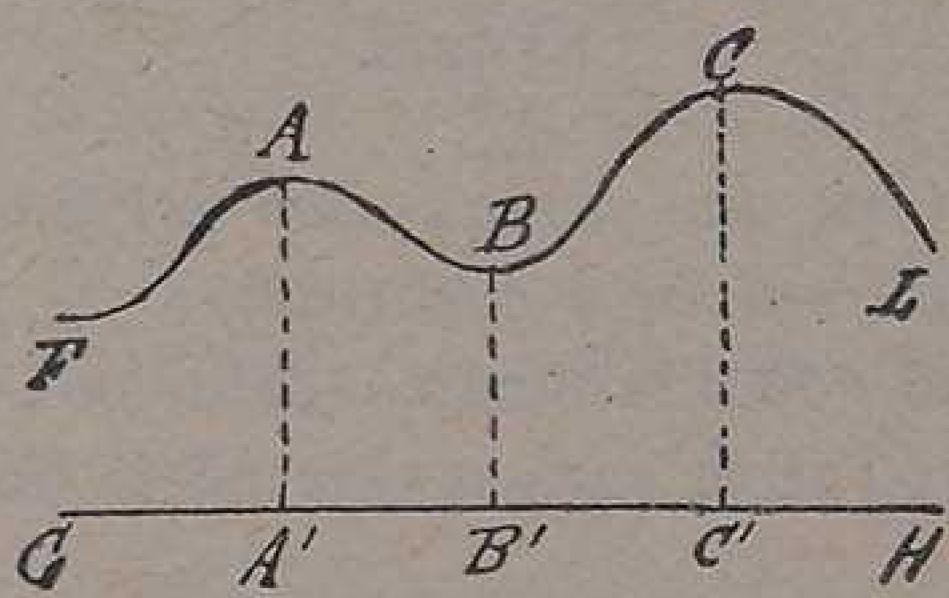

Fig. 2.

30. — Quando una funzione passa per un massimo, la funzione comincia a crescere e la derivata è positiva; la funzione decrescendo in seguito, la derivata diventa negativa. Così, quando la funzione passa per un massimo, la derivata cambia di segno: da positiva diventa negativa.

Quando una funzione passa per un minimo, la funzione comincia a diminuire e la derivata è negativa; la funzione aumentando in seguito, la derivata diventa positiva. Così, quando la funzione passa per un minimo, la derivata cambia di segno; da negativa diventa positiva. Le reciproche sono vere: allorchè la derivata cambia di segno, la funzione passa per un massimo o per un minimo. Se la derivata diventa negativa, la funzione aumenta prima per diminuire dopo e quindi passa per un massimo. Se la derivata da negativa diventa positiva, la funzione diminuisce prima per aumentare dopo e quindi passa per un minimo.

Ordinariamente la derivata d' una funzione continua è pure una funzione finita e continua, essa cambia di segno passando per il valore intermediario zero. In generale, dunque, si otterranno i valori di x che rendono la funzione massima o minima cercando i valori di x che annullano la derivata, e che inoltre fanno provare un cambiamento di segno.

Esempi.

31. — *Studiare la variazione del prodotto di due numeri la cui somma è costante.*

Indichiamo con a la somma data, con x uno dei numeri variabili; l'altro sarà $a - x$ ed il prodotto y avrà per valore

$$y = x\,(a - x)$$

Facciamo variare x da o ad a; quando $x = o$, il prodotto y è nullo; quando x raggiunge il valore a, il prodotto diventa ancora nullo. Così la funzione y parte da zero per ritornare a zero; nell' intervallo essa passa per una serie di valori positivi e finiti; aumenta dapprima per diminuire in seguito; passa dunque per un massimo.

La sua derivata è $y' = - x + a - x = a - 2x$.

Cerchiamo il valore di x che annulla la derivata; esso ci vien dato da $a - 2x = o$ da cui $x = \frac{a}{2}$

A questo valore corrisponde il massimo della funzione y, poichè per un valore minore la derivata è positiva, e per un valore maggiore è negativa. Cambia dunque di segno. Così, *il prodotto di due fattori, di somma costante, è massimo, quando questi fattori sono uguali.*

32. — A questa questione astratta corrisponde la quistione geometrica seguente: *Studiare la variazione della superficie d'un rettangolo di perimetro dato.* Infatti, indicando con $2a$ il perimetro dato, x la base, l'altezza sarà $a - x$ e l'area sarà rappresentata dal prodotto $x(x - a)$ di due fattori di somma costante. Questo prodotto raggiunge il suo valore massimo quando i due fattori sono eguali; così, di tutti i rettangoli di egual perimetro il maggiore è il quadrato.

33. — Alla medesima quistione si collega ancora il seguente problema di geometria: *Studiare la variazione della superficie d'un triangolo di base e di perimetro costanti.*

Chiamato $2p$ il perimetro dato, a il lato costante, b, c i due lati variabili, la superficie del triangolo è data dalla nota formola

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Si può fare astrazione dei due fattori costanti $p, p - a$ e considerare solamente i due fattori variabili $p - b$, $p - c$, la cui somma $2p - b - c$ è a, cioè costante. Rappresentando con x il primo fattore, il secondo essendo $a - x$ abbiamo da considerare il prodotto $x(a - x)$, il quale è massimo per $x = \frac{a}{2}$, e cioè il triangolo massimo è il triangolo isoscele. Più i due lati variabili differiscono tra loro, più la superficie del triangolo è piccola.

34. — *Studiare la variazione della somma dei quadrati di due numeri la cui somma è costante.*

Indichiamo con a la somma data, con x uno dei numeri variabili; l'altro sarà $a - x$ e la somma y dei loro quadrati sarà rappresentata da $y = x^2 + (a - x)^2$

Per trovare la derivata sviluppiamo il quadrato e riduciamo $y = 2x^2 + a^2 - 2ax$ da cui $y' = 4x - 2a$ Uguagliando a zero questa derivata si ha $4x - 2a = o$ da cui $x = \frac{a}{2}$

La funzione y raggiunge il valore minimo per $x = \frac{a}{2}$ poichè per un valore minore la derivata è negativa e per uno maggiore è positiva. Il valore minimo della somma dei due quadrati si raggiunge quando si divide il numero dato a in due parti uguali.

35. — A questa quistione si collega *lo studio della variazione della diagonale d' un rettangolo il cui perimetro è costante.* Infatti, chiamato $2a$ il perimetro dato, x la base, $a - x$ l'altezza, la diagonale y sarà

$$y = \sqrt{x^2 + (a-x)^2}$$

Quando $x = o$, il rettangolo si riduce ad una linea retta di lunghezza a e la diagonale è $y = a$. Se si fa crescere x da o ad $\frac{a}{2}$, la diagonale diminuisce da a a $\frac{a}{\sqrt{2}}$; x continuando a crescere da $\frac{a}{2}$ ad a, la diagonale aumenta da $\frac{a}{\sqrt{2}}$ ad a; infine quando $x = a$, il rettangolo si riduce di nuovo ad una linea retta e la diagonale ridiventa $= a$. Così la diagonale raggiunge il suo valore minimo per $x = \frac{a}{2}$, cioè quando il rettangolo è un quadrato.

36. — *Studiare la variazione del volume del cilindro circolare retto la cui superficie totale è costante.*

Chiamato x il raggio di base, y l'altezza e rappresentando la superficie totale data con $2\pi a^2$ avremo la relazione $2 \pi x^2 + 2 \pi x y = 2 \pi a^2$ o più semplicemente $x^2 + x y = a^2$.

Il volume V del cilindro ha per espressione $V = \pi x^2 y$ e si sostituisce ad y il suo valore $y = \frac{a^2 - x^2}{x}$ dedotto dalla relazione precedente

$$V = \pi x (a^2 - x^2) = \pi (a^2 x - x^3)$$

che è una funzione della variabile indipendente x.

I valori di x ed y devono mantenersi positivi e il raggio x della base non può variare che da o ad a. Quando x varia da o ad a, il volume parte da zero per tornare a zero, passando per una serie di valori finiti e positivi; comincia per aumentare per diminuire in seguito, e per conseguenza passa certamente per un massimo.

Per studiare in modo completo la variazione di questa funzione, prendiamo la sua derivata

$$V' = \pi (a^2 - 3 x^2) = 3 \pi \left(\frac{a^2}{3} - x^2 \right)$$

La derivata è positiva per i valori positivi di x inferiori ad $\frac{a}{\sqrt{3}}$, negativa per i valori superiori di x superiori ad $\frac{a}{\sqrt{3}}$. Se dunque si fa crescere x da o a $\frac{a}{\sqrt{3}}$ il volume andrà aumentando da zero ad un certo massimo; x crescendo in seguito da $\frac{a}{\sqrt{3}}$ ad a il volume andrà diminuendo da questo valore massimo a zero.

Per $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$ si ha $y = \frac{2 a}{\sqrt{3}}$. Così fra tutti i cilindri di egual superficie, il maggiore è quello la cui altezza è uguale al diametro della base.

37. — *Dividere il numero* a *in due parti* x *ed* y *tali che il prodotto* $x^m\, y^n$ *sia massimo.*

Sarà $y = a - x$ ed il prodotto $x^m\,(a - x)^n$

Per $x = o$ il prodotto $x^m\,(a - x)^n$ diventa zero. Se x cresce detto prodotto aumenta passando per un certo massimo per ritornare a zero per $x = a$.

Prendiamo la derivata di questo prodotto

$$m\, x^{m-1}\,(a - x)^n - n\, x^m\,(a - x)^{n-1}$$

Ponendola uguale a zero e semplificando per il fattore comune $x^{m-1}\,(a - x)^{n-1}$ si ottiene

$$m(a - x) - n\,x = o \quad \text{da cui } x = \frac{a\,m}{m + n}$$

L'altra parte sarà $y = a - \dfrac{a\,m}{m + n} = \dfrac{a\,m}{m + n}$

e facendo il rapporto fra queste due grandezze si ha

$$x : y = m : m$$

È facile vedere che la derivata cambia il segno allorchè x passa dal valore massimo. Conchiudiamo che il prodotto $x^m \times$ è y^n massimo quando le parti in cui si deve dividere a sono proporzionali agli esponenti m ed n.

38. — *Studiare la variazione d'un trapezio inscritto in un semicerchio.*

Sia r il raggio del circolo. La base maggiore del trapezio è costante ed $= 2\,r$. Indichiamo con x la base variabile, con y l'altezza del trapezio, S la sua area. Sará $S = \dfrac{2\,r + x}{2}\,y$. Dal triangolo rettangolo ABD si ha $y^2 = AE \times EB = AE\,(x + AE)$ ma $2\,A\,E = 2\,r - x$; $AE = \dfrac{2\,r - x}{2}$ e sostituendo

$$y^2 = \frac{2\,r - x}{2}\left(x + \frac{2\,r - x}{2}\right) \text{ da cui } y = \frac{\sqrt{4\,r^2 - x^2}}{2}$$

e per sostituzione

$$S = \frac{2r+x}{2} \times \frac{\sqrt{4r^2-x^2}}{2} = \frac{(2r+x)\sqrt{4r^2-x^2}}{4}$$

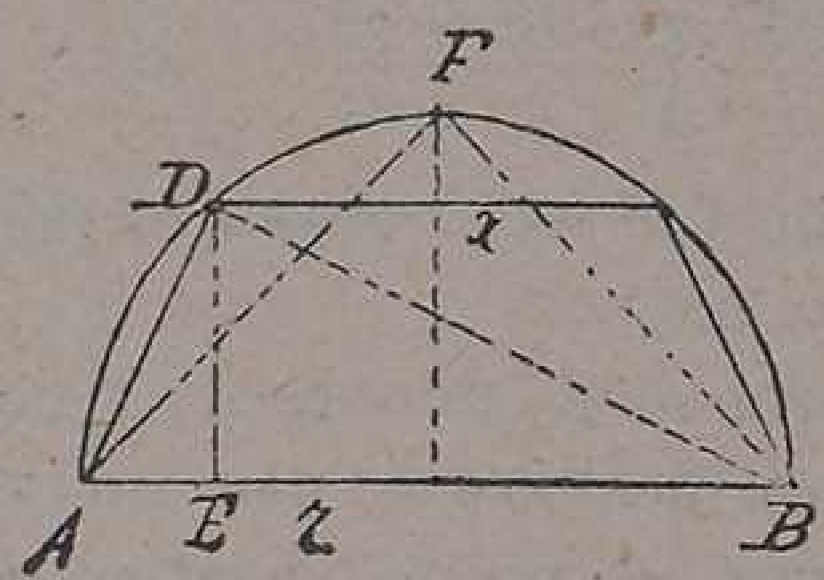

Fig. 3.

Per $x = 2r$ abbiamo $y = o$ ed $S = o$

Per $x = o$ abbiamo $y = r$ ed $S = r^2$.

In quest'ultimo caso il trapezio si risolve nel triangolo rettangolo ABF.

Per studiare la variazione della funzione S prendiamo la sua derivata ed uguagliamola a zero. Si ha

$$\frac{\sqrt{4r^2-x^2}}{4} + \frac{-2x(2r+x)}{8\sqrt{4r^2-x^2}} = o \text{ od anche}$$

$$\frac{\sqrt{4r^2-x^2}}{4} - \frac{x(2r+x)}{4\sqrt{4r^2-x^2}} = o.$$ Semplificando e moltiplicando per $\sqrt{4r^2-x^2}$ si ottiene

$4r^2 - x^2 - x(2r\,x) = o$, da cui $4r^2 - 2rx - 2x^2 = o$

e risolvendo $x = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} + 2r^2}$

$$x' = -\frac{r}{2} \pm \frac{3}{2}r$$

donde le due radici $x' = -\frac{r}{2} - \frac{3}{2}r = -2r$

$$x'' = -\frac{r}{2} + \frac{3}{2}r = r$$

Alla prima radice x' corrisponde il minimo della funzione S il qual minimo è o. Alla seconda radice $x'' = r$ corrisponde il massimo di S che è

$$S = \frac{(2r + r)\sqrt{4r^2 - r^2}}{4} \qquad S = \frac{3\sqrt{3}}{4} r^2$$

L'espressione $4r^2 - 2rx - 2x^2$ per $x = o$ si riduce a $2r^2 - 2r^2 = o$.

Per un valore di x minore di r detta espressione assume un valore positivo e per un valore di x maggiore di r assume un valore negativo. La derivata passando per o, cambiando di segno, ci avverte che la funzione S passa per un massimo.

Così, un trapezio inscritto in un cerchio è massimo quando la base variabile uguaglia il raggio.

In questo caso l'altezza y è $y = \frac{r\sqrt{3}}{2}$ e cioè la metà del lato del triangolo equilatero inscritto nel cerchio.

39. — *Osservazione.* — Un gran numero di problemi di massima e minima si corrispondono due a due così che ad un massimo in uno corrisponde un minimo nell'altro. Sieno u, v due quantità variabili, tali che a ciascun valore di u corrisponde una serie di valori di v ed a ciascun valore di v una serie di valori di u. Indichiamo con b il più grande dei valori di v che corrispondono ad un medesimo valore a di u, e b' il più grande dei valori di v che corrispondono ad un altro valore a' di u; supponiamo che se il secondo valore a' attribuito ad u è più piccolo di a, anche il secondo massimo b' è più piccolo del primo b. Reciprocamente si può affermare che a è il minore dei valori di u che corrispondono al valore b attribuito a v. Osserviamo intanto che a è uno di questi valori; d'altronde è impossibile che u assuma un valore a' minore di a, poichè i valori di v che corrispondono a questo

valore a' di u essendo tutti uguali od inferiori alla quantità b' che è minore di b, nessuno di essi è quindi uguale a b.

Analogamente indichiamo con b il più piccolo dei valori di v che corrispondono ad un valore a di u, e b' il più piccolo dei valori di v che corrispondono ad un altro valore a' di u; supponiamo che se a' è maggiore di a, il secondo minimo b' è maggiore di b. Si dimostrerà in egual modo che reciprocamente a è il maggiore dei valori di u che corrispondono al valore b di v.

Così, quando le due grandezze variabili u e v hanno dei valori a e b tali che b sia il *minore* o il *maggiore* dei valori di v che corrispondono al valore a di u, se b aumenta o diminuisce con a, reciprocamente a è il *maggiore* o il *minore* dei valori di u che corrispondono al valore b di v.

Supponiamo, ad esempio, che u e v sieno rispettivamente il perimetro e la superficie d'un rettangolo. Siccome esiste un numero infinito di rettangoli di ugual perimetro (isoperimetrici), ad uno stesso valore del perimetro u corrisponde un numero infinito di valori della superficie v.

Analogamente, come esiste un numero infinito di rettangoli aventi la medesima superficie, ad uno stesso valore di v corrisponde un numero infinito di valori di u. È noto poi che tutti i rettangoli di ugual perimetro a il maggiore è il quadrato; chiamiamo b l'area di questo quadrato: è poi evidente che l'area b del quadrato diminuisce col suo perimetro a. Si conchiude che, reciprocamente, di tutti i rettangoli di ugual superficie b, questo quadrato è quello che ha il minore perimetro a.

Di tutti i triangoli di ugual perimetro, l'equilatero è il maggiore. D'altronde l'area del triangolo equilatero diminuisce col suo perimetro. Si conchiude che di tutti i triangoli di ugual superficie, l'equilatero è quello che ha il minor perimetro.

Abbiamo supposto, nella dimostrazione del teorema precedente, che b aumenta o diminuisce con a; se b aumenta quando a diminuisce, si considererebbero b quantità variabili v ed $\frac{1}{u}$. Ad un massimo di v corrisponderebbe un minimo di $\frac{1}{u}$ e per conseguenza un massimo di u.

CAPITOLO III.

Derivate d'una funzione di più variabili.

40. — Fin qui abbiamo considerate delle funzioni ad una sola variabile; occupiamoci ora brevemente delle funzioni di più variabili.

Sia $f(x,y)$ una funzione di due variabili indipendenti x ed y, cioè di due quantità che variano in un modo affatto arbitrario ed indipendentemente l'una dall'altra. Se consideriamo y come una costante, prendendo la derivata della funzione rispetto alla variabile x, avremo ciò che si chiama la *derivata parziale* della funzione rispetto ad x.

Analogamente se consideriamo x come una costante, prendendo la derivata rispetto ad y avremo la derivata parziale rispetto ad y. Queste sono le due derivate parziali di primo ordine della funzione proposta; le designeremo coi simboli f'_x e f'_y, l'indice indicando la lettera rispetto alla quale si prende la derivata.

Se si prende due volte successivamente la derivata, sia due volte rispetto ad x, sia una volta rispetto ad x ed una seconda volta rispetto ad y, sia due volte rispetto ad y, si ottengono tre derivate parziali di secondo ordine che indicheremo coi simboli f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2}, e così di seguito.

Si abbia ad esempio la funzione

$$f(x, y) = 3x^2 - 5xy + y^2 - 3x + 4y + 2$$

Prendendo le derivate tanto rispetto ad x, quanto rispetto ad y si hanno le due derivate parziali

$$f'_x = 6x - 5y - 3$$
$$f'_y = -5x + 2y + 4$$

e prendendo le derivate sia rispetto ad x, quanto ad y, si formano le tre derivate parziali di secondo ordine

$$f''_{x^2} = 6, \quad f''_{xy} = -5, \quad f''_{y^2} = 2$$

Le derivate seguenti sono nulle.

41. — Si abbia ora la funzione $f(x, y, z...)$ delle variabili indipendenti x, y, z... Potremo prendere le derivate rispetto a ciascuna variabile considerando le altre come quantità costanti e così avremo le derivate f'_x, f'_y, f'_z......, e le successive f''_{x^2}, f''_{y^2}, f''_{z^2}, f''_{xy}......

Funzioni omogenee.

42. — Una funzione intiera di x, y, z... al pari di un polinomio si dice *omogenea* e di grado m, se la somma degli esponenti di queste lettere in ciascun termine è costante ed uguale ad m.

Per precisare le idee supporremo che la funzione contenga tre sole variabili x, y, z. Ciascun termine sarà della forma $A\,x^n\,y^p\,z^q$ ove n, p, q, rappresentano numeri interi la cui somma è uguale ad m, ed A una costante.

La funzione sarà dunque una somma di più termini della forma indicata e potremo scrivere

$$f(x, y, z) = \Sigma\, A\, x^n\, y^p\, z^q$$

Prendendo la derivata rispetto a ciascuna variabile si ha

$$\begin{aligned} f'_x &= \Sigma\, nAx^{n-1}\, y^p\, z^q \\ f'_y &= \Sigma\, pAx^n\, y^{p-1}\, z^q \\ f'_z &= \Sigma\, qAx^n\, y^p\, z^{q-1} \end{aligned}$$

e moltiplicando queste derivate rispettivamente per x, y, z risulta

$$\begin{aligned} x\, f'_x &= \Sigma\, n\, A\, x^n\, y^p\, z^q \\ y\, f'_y &= \Sigma\, p\, A\, x^n\, y^p\, z^q \\ z\, f'_z &= \Sigma\, q\, A\, x^n\, y^p\, z^q \end{aligned}$$

ed addizionando si ottiene

$$x\, f'_x + y\, f'_y + z\, f'_z = \Sigma\, (n + p + q)\, A\, x^n\, y^p\, z^q$$

ed essendo $n + p + q = m$ si ha

$$x\, f'_x + y\, f'_y + z\, f'_z = m\, \Sigma\, A\, x^n\, y^p\, z^q$$

oppure

$$x\, f'_x + y\, f'_y + z\, f'_z = m\, f(x.\, y.\, z.)$$

e cioè, la somma dei prodotti di ciascuna variabile per la derivata della funzione rispetto a questa variabile di una funzione omogenea di grado m è uguale ad m volte la funzione stessa.

Sia ad esempio la funzione omogenea di quarto grado

$$5\, x^2\, y^2 - 7\, x\, z^3 + 4\, y^3\, z - 5\, y^4 - z^4$$

delle tre variabili indipendenti x, y, z. Abbiamo

$$f'_x = 10\,x\,y^2 - 7\,z^3$$
$$f'_y = 10\,x^2\,y + 12\,y^2\,z - 20\,y^3$$
$$f'_z = -21\,x\,z^2 + 4\,y^3 - 4\,z^3$$

da cui

$$x\,f'_x = 10\,x^2\,y^2 - 7\,x\,z^3$$
$$y\,f'_y = 10\,x^2\,y^2 + 12\,y^3\,z - 20\,y^4$$
$$z\,f'_z = -21\,x\,z^3 + 4\,y^3\,z - 4\,z^4$$

ed addizionando

$$x\,f'_x + y\,f'_y + z\,f'_z = 20\,x^2\,y^2 - 28\,x\,z^3 + 16\,y^3\,z - 20\,y^4 - 4\,z^4 = 4\,(5\,x^2\,y^2 - 7\,x\,z^3 + 4\,y^3\,z - 5\,y^4 - z^4)$$

Derivate delle funzioni composte.

43. — Sia una funzione $y = f(u, v)$ di due quantità u, v che alla loro volta sono funzioni della variabile indipendente x; è evidente che in ultima analisi y è una funzione della variabile x. Se si dà alla variabile x l'accrescimento $\Delta\,x$, ne risulteranno per u e per v gli accrescimenti $\Delta\,u$, $\Delta\,v$ e per y l'accrescimento $\Delta\,y$ e si avrà $\Delta\,y = f(u + \Delta\,u, v + \Delta\,v) - f(u, v)$ ossia

$$\Delta\,y = f(u + \Delta\,u, v + \Delta\,v) - f(u, v + \Delta\,v) + f(u, v + \Delta\,v) - f(u, v)$$

e dividendo per $\Delta\,x$ si ha

$$\frac{\Delta\,y}{\Delta\,x} = \frac{f(u + \Delta\,u, v + \Delta\,v) - f(u, v + \Delta\,v)}{\Delta\,u} \times \frac{\Delta\,u}{\Delta\,x} + \frac{f(u, v + \Delta\,v) - f(u, v)}{\Delta\,v} \times \frac{\Delta\,v}{\Delta\,x}.$$ Supponiamo ora che $\Delta\,x$ tenda verso zero; allora i rapporti $\frac{\Delta\,u}{\Delta\,x}$ e $\frac{\Delta\,v}{\Delta\,x}$ tenderanno verso le derivate u' e v' delle funzioni u e v.

Nel rapporto $\dfrac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v}$ il numeratore è l'aumento che prova la funzione $f(u, v)$, quando alla variabile v si dà l'aumento Δv, u rimanendo costante; il limite di questo rapporto è dunque la derivata parziale $f'(u, v)$ della funzione $f(u, v)$ rispetto a v e il secondo termine ha quindi per limite $f'_v(u, v) \times v'$,

Consideriamo ora il rapporto:

$$\frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u. v + \Delta v)}{\Delta u}$$

Il numeratore è l'aumento che prova la funzione $f(u, v + \Delta v)$ quando si dà alla variabile u l'aumento Δu; questo rapporto è dunque uguale a $f'_u(u, v + \Delta v) + m$, in cui la quantità m svanisce con Δu.

D'altronde $f'_u(u, v)$ essendo una funzione continua di v, si ha

$$f'_u(u, v + \Delta v) = f'_u(u, v) + m'$$

in cui la quantità m' svanisce con Δv; risulta da ciò che il rapporto che si considera è uguale a

$$f'_u(u, v) + m + m'$$

Se ora si fa tendere Δx verso zero, Δu e Δv tenderanno simultaneamente verso zero, come pure m ed m', e il rapporto avrà per limite $f'_u(u, v)$. Il limite del primo termine è dunque $f'_u(u, v) \times u'$ e si ha quindi

$$y' = f'_u(u, v) \times u' + f'_v(u, v) \times v'$$

e così, *la derivata d'una funzione di due funzioni* u *e* v *d'una medesima variabile* x *è uguale alla derivata parziale della funzione proposta rispetto ad* u *moltiplicata per la derivata di* u, *più la derivata parziale rispetto a* v *moltiplicata per la derivata di* v.

ESEMPIO.

Consideriamo la funzione $y = x^x$. Se si pone $u = x$, $v = x$ si ha $y = u^v$, da cui, applicando il teorema precedente

$$y' = v\, u^{v-1} u' + u^v L\, u.\, v' = x^x + x^x L\, x = x^x (1 + L\, x)$$

Derivate delle funzioni implicite.

44. — Si dice che una funzione è *implicita* allorquando essa è legata alla variabile da una equazione non risolta.

Le altre funzioni, per contrapposto, si dicono *esplicite*. Così l'equazione $f(x, y) = o$ nella quale il primo membro è una funzione qualunque delle due variabili x, y esprime una funzione implicita y di x.

Se si potesse risolvere l'equazione si ricaverebbe

$$y = \varphi(x)$$

e la funzione diventerebbe esplicita. Si ottiene facil mente la derivata d'una funzione implicita. Prendiamo la derivata della funzione $f(x, y)$, in cui consideremo x come la variabile indipendente ed y come una funzione di x; questa derivata, in virtù del teorema precedente, è uguale a $f'_x + f'_y \times y'$ e siccome la funzione $f(x,y)$ è costantemente nulla, la sua derivata lo sarà altresì e si avrà l'equazione $f'_x + f'_y \times y' = o$ da cui si deduce $y' = -\dfrac{f'_x}{f'_y}$.

Tale è l'espressione della derivata della funzione implicita y.

Esempi.

1.° Consideriamo la funzione implicita y definita dall'equazione $x^2 - 4xy + y^2 + 2x = o$.

Dalla formola ora stabilita si ha senz'altro

$$y' = -\frac{2x - 4y + 2}{-4x + 2y} = \frac{2y - x - 1}{y - 2x}$$

L'equazione proposta essendo di secondo grado rispetto ad y, può essere risolta e si ha

$$y = 2x \pm \sqrt{3x^2 - 2x}$$

La funzione essendo diventata in tal modo esplicita si trova direttamente la sua derivata,

$$y' = 2 \pm \frac{3x - 1}{\sqrt{3x^2 - 2x}}$$

Sostituendo ad y il suo valore nella prima espressione di y', si ottiene la seconda.

2.° $5x^6 + 7xy - y^4 = o \qquad y' = -\frac{30x^5 + 7y}{7x - 4y^3}$

CAPITOLO IV.

Delle funzioni primitive.

45. — Si chiama *funzione primitiva* d'una funzione data una funzione della quale la funzione primitiva è la derivata.

Dimostreremo innanzi tutto l'esistenza della funzione primitiva, si possa o meno esprimerla col mezzo dei segni dell'algebra.

Sia $y = f(x)$ la funzione proposta; rappresentiamo questa curva, come abbiamo spiegato al n. 5, portando sulla retta orizzontale OX, a partire dal punto O delle lunghezze uguali ai diversi valori della variabile x, e l inalzando delle perpendicolari od ordinate uguali ai valori corrispondenti di y. Consideriamo l'area $ABPM$ contata a partire da una ordinata fissa AB fino ad una

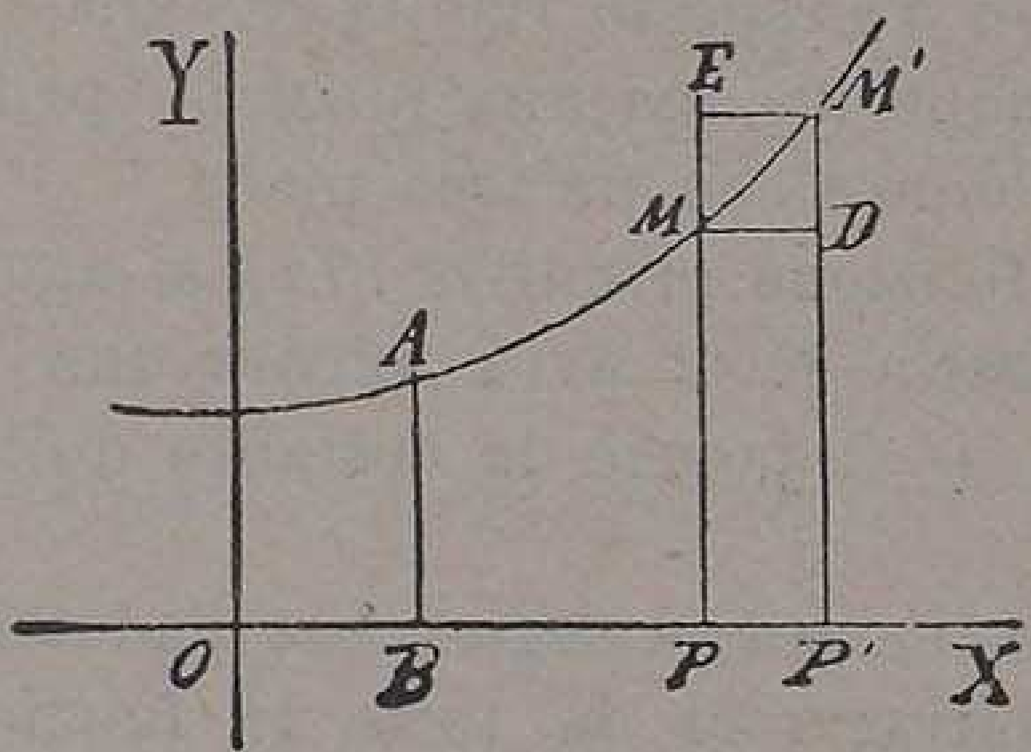

Fig. 4.

ordinata mobile MP; quest'area è una funzione di x, poichè se si fa aumentare x, l'ordinata MP allontanandosi, l'area aumenta; indicheremo questa funzione con $F(x)$.

Dimostreremo che la funzione $F(x)$, così definita, è una funzione primitiva della funzione proposta $f(x)$. Imaginiamo, infatti, che si dia ad x un aumento $PP' = h$; l'aumento R della funzione $F(x)$ sarà l'area del trapezio curvilineo $MPP'M'$; dai punti M ed M' tracciamo le orizzontali MD, $M'E$; l'area del trapezio curvilineo è così compresa fra quelle dei rettangoli $MPP'E$ ed $EPP'M'$; questi rettangoli avendo per misure $MP \times h$, $M'P' \times h$ si avrà la limitazione

$$MP \times h < h < M'P' \times h$$

e dividendo per h si ha

$$MP < \frac{k}{h} < M'P'$$

Quando h tende verso zero, l'ordinata $M'P'$ diventa uguale ad MP, e, per conseguenza, il rapporto $\frac{k}{h}$ tende verso un limite che è uguale all'ordinata MP. Così la funzione $F(x)$ ammette una derivata che è la funzione proposta $f(x)$; questa funzione $F(x)$ è dunque una funzione primitiva di $f(x)$.

Da quanto si è esposto risulta che una funzione continua qualunque ha una una funzione primitiva, che si può rappresentare con un'area piana.

Se alla funzione primitiva $F(x)$ si aggiunge una costante arbitraria C, si avrà ancora una funzione primitiva $F(x) + C$, poichè la costante nulla muta nella derivata.

Vedremo, in ciò che segue, che l'addizione di questa costante arbitraria ci dà tutte le funzioni primitive della funzione proposta.

46. — Dimostriamo che quando una funzione continua ha la sua derivata costantemente nulla, questa funzione è costante.

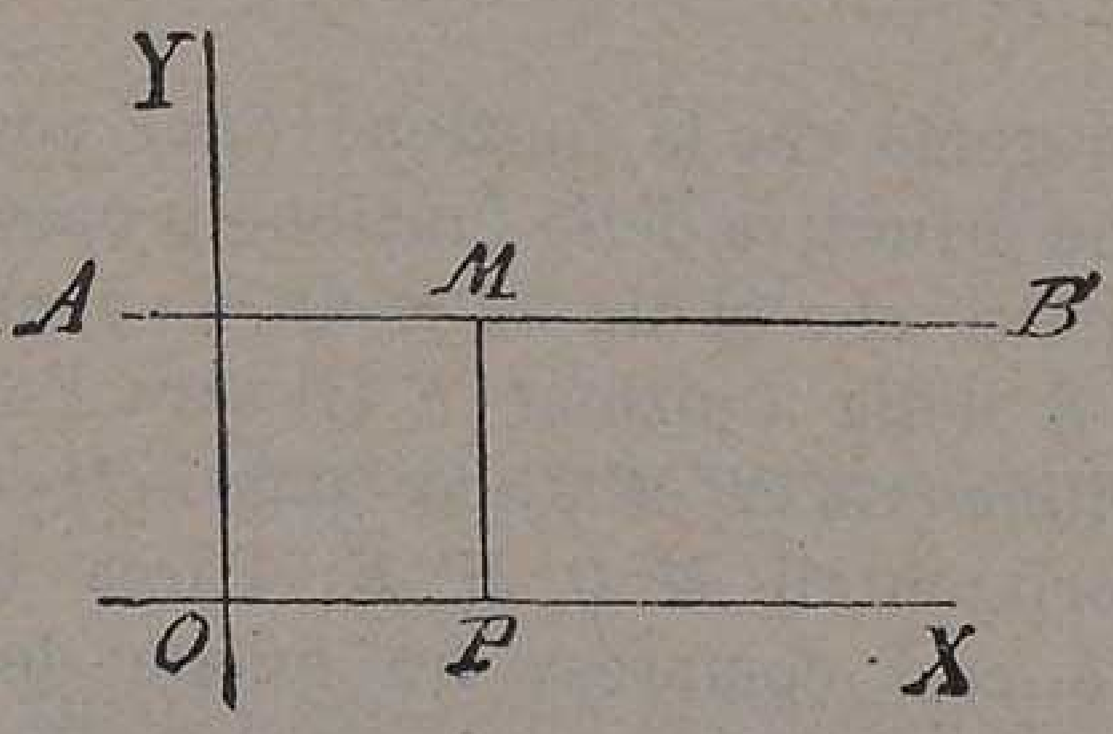

Fig. 5.

Imaginiamo la funzione rappresentata da una linea. Se si indica con α l'angolo che fa la tangente alla linea in un punto qualunque coll'orizzontale OX, sappiamo che la derivata della funzione è $=$ tang. α. E poichè la derivata è costantemente nulla, l'angolo α è pure costantemente nullo. Così la linea in ciascuno dei suoi punti ha la sua tangente orizzontale e quindi non può essere che una linea retta orizzontale. L'ordinata MP di ciascun punto di questa linea retta è costante; si conchiude che la funzione proposta ha un valore costante.

Sieno ora due funzioni $F(x)$, $\varphi(x)$ aventi la medesima derivata $f(x)$, dico che queste due funzioni non possono differire che per una costante. Infatti per ipotesi si ha

$$\varphi'(x) = f(x) \qquad F'(x) = f(x)$$

e sottraendo queste due uguaglianze una dall'altra si ha

$$\varphi'(x) = F'(x) = 0$$

Ma $\varphi'(x) - F'(x)$ è la derivata della funzione

$$\varphi(x) - F(x)$$

e poichè questa derivata è costantemente nulla, la funzione è costante; dunque

$$\varphi(x) - F(x) = C$$

Abbiamo detto nel numero antecedente che quando si è trovata una funzione primitiva $F(x)$ della funzione proposta, aggiungendovi una costante arbitraria, si ottiene una nuova funzione primitiva $F(x) + C$. Da ciò che precede risulta che si formano così tutte le funzioni primitive della funzione proposta, poichè qualsiasi altra funzione primitiva non differisce dalla prima che per una costante.

Questa funzione primitiva $F(x) + C$, contenendo una costante arbitraria, si chiama, per questa ragione, funzione primitiva *generale* della funzione proposta.

Si può determinare la costante di guisa che la funzione primitiva abbia un valore dato A per un valore dato a di x; si metterà

$$F(a) + C = A$$

da cui

$$C = A - F(a)$$

Se, ad esempio, si vuole che la funzione primitiva si annulli per $x = a$ si metterà

$$F(a) + C = o$$

da cui

$$C = - F(a)$$

e la funzione primitiva sarà

$$F(x) - F(a)\cdot$$

La rappresentazione geometrica della funzione primitiva rivela che questa funzione contiene una costante arbitraria; ed invero si può misurare l'area a partire da una ordinata iniziale AB qualunque, e cambiando la posizione di questa ordinata iniziale, si modifica evidentemente l'area di una quantità costante.

Determinare la costante in modo che la funzione primitiva si annulli per $x = a$ equivale a misurare l'area a partire dall'ordinata iniziale che corrisponde ad $x = a$.

47. — La ricerca delle funzioni primitive è un' operazione complicatissima: forma l'oggetto del così detto calcolo integrale.

Ci limiteremo ai casi più semplici. Consideriamo dapprima una funzione intiera

$$A_0\, x^m + A_1\, x^{m-1} + A_2\, x^{m-2} + \ldots\ldots + A^{m-1}\, x + A_m$$

La sua funzione primitiva è

$$\frac{A_0 x^{m+1}}{m+1} + \frac{A_1 x^m}{m} + \frac{A_2 x^{m-1}}{m-1} + \ldots\ldots + \frac{A_{m-1} x^2}{2} +$$

$$A_m x + C$$

poichè prendendo la derivata di questo polinomio si ritrova il polinomio proposto.

Così, *per avere la funzione primitiva di una funzione intera, si aumentano tutti gli esponenti di una unità, e si divide ciascun termine per l' esponente così aumentato.*

Per esempio il polinomio

$$x^4 - 5x^2 + 7x - 6$$

ha per funzione primitiva generale

$$\frac{x^5}{5} - \frac{5\,x^3}{3} + \frac{7\,x^2}{2}\,6\,x + C$$

Se si vuole che la funzione primitiva si annulli per $x = o$ si porrà $C = o$.

La stessa regola si applica agli esponenti qualunque.

ESEMPI.

$$1.° - f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}};$$

$$F(x) = \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$$

$$2.° - f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2};$$

$$F(x) = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

$$3.^\circ - f(x) = -\frac{2}{3}\,a\,x^{-\frac{5}{3}} + \frac{4}{3}\,b\,x^{-\frac{7}{3}} - 2\,d\,x^{-3}$$

$$F(x) = a\,x^{-\frac{2}{3}} - b\,x^{-\frac{4}{3}} + d\,x^{-2} + C$$

Ecco altri casi in cui si può trovare immediatamente la funzione primitiva:

$$1.^\circ - f(x) = \frac{1}{x} \quad ; \quad F(x) = L\,x + C$$

$$2.^\circ - f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad ; \quad F(x) = arc\ tang\ x + C$$

$$3.^\circ - f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad ; \quad F(x) = arc\ sen\ x + C$$

$$4.^\circ - f(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad ; \quad F(x) = arc\ cos\ x + C$$

$$5.^\circ - f(x) = e^x \quad ; \quad F(x) = e^x + C$$

$$6.^\circ - f(x) = a^x \quad ; \quad F(x) = \frac{a^x}{L\,a} + C$$

$$7.^\circ - f(x) = cos\ x \quad ; \quad F(x) = sen\ x + C$$

$$8.^\circ - f(x) = sen\ x \quad ; \quad F(x) = -\ cos\ x + C$$

$$9.^\circ - f(x) = \frac{1}{cos^2\ x} \quad ; \quad F(x) = tang\ x + C$$

$$10.^\circ - f(x) = \frac{1}{sen^2\ x} \quad ; \quad F(x) = -\ cot\ x + C$$

$$11.^\circ - f(x) = \frac{sen\ x}{cos^2\ x} \quad ; \quad F(x) = sec\ x + C$$

$$12.^\circ - f(x) = \frac{cos\ x}{sen^2\ x} \quad ; \quad F(x) = -\ cosec\ x + C$$

Spesse volte il teorema sulle funzioni di funzioni permette di trovare la funzione primitiva:

$$1.^\circ\ f(x) = \frac{1}{x+a};\ F(x) = L\,(x+a)\ C$$

$$2.^\circ - f(x) = \frac{1}{(x+a)^m} = (x+a)^{-m};$$

$$F(x) = \frac{-1}{(m-1)\ (x-a)^{m-1}} + C$$

$$3.^\circ - f(x) = \frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

$$F(x) = \frac{1}{a}\ arc\ tang\ \frac{x}{a} + C$$

$$4.^\circ - f(x) = \frac{x}{a^2+x^2} = \frac{1}{2} . \frac{2\,x}{a^2+x^2}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\ L\ (a^2+x^2) + C$$

Si deve osservare in quest' ultimo esempio che essendo il numeratore $2x$ la derivata del denominatore $a^2 + x^2$, la funzione $\frac{2\,x}{a^2+x^2}$ è la derivata di $L\ (a^2 + x^2)$

$$5.^\circ - f(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}};\quad F(x) = \sqrt{a^2+x^2} + C$$

$$6.^\circ - f(x) = e^{a\,x}\quad ;\quad F(x) = \frac{e^{a\,x}}{a} + C$$

$$7.^\circ - f(x) = \cos a\,x\quad ;\quad F(x) = \frac{sen^{a}\,x}{a} + C$$

$$8.^\circ - f(x) = \frac{L\,x}{x} \quad ; \quad F(x) = \frac{1}{2}(L\,x)^2 + C$$

$$9.^\circ - f(x) = \frac{1}{x\,L\,x} \quad ; \quad F(x) = L\;L\,x + C$$

$$10.^\circ - f(x) = \frac{1}{x\,(L\,x)^m} \quad ; \quad F(x) = \frac{1}{(m-1)\,(L\,x)^{m-1}} + C$$

$$11.^\circ - f(x) = \frac{e^{x}}{1 + e^{2x}} \quad ; \quad F(x) = arc\ tang\ (e^x) + C$$

CAPITOLO V.

Annotazioni.

48. — Abbiamo visto al n. 45 che la funzione primitiva $F(x)$ di una funzione $f(x)$ è rappresentata geometricamente da un'area e che la lunghezza dell'ordinata di un punto qualunque della funzione $f(x)$ è la derivata di $F(x)$. Se questa derivata viene moltiplicata per l'aumento piccolissimo che si dà alla variabile x, aumento che abbiamo indicato con h, si ottiene un rettangolo la cui area piccolissima rappresenta un elemento dell'area espressa da $F(x)$.

Questo elemento si chiama il *differenziale* di $F(x)$, mentre $F(x)$ si chiama l'*integrale* dell'elemento piccolissimo.

Data una funzione $f(x)$ la sua derivata è $f'(x)$; il suo differenziale è $f'(x)\,d\,x$ in cui $d\,x$ rappresenta l'aumento infinitamente piccolo della variabile x. Questo prodotto rappresenta l'area d'un rettangolo le cui dimensioni sono $d\,x$ e $f'(x)$ cioè l'ordinata in un punto qualunque.

Calcolato il valore di questo elemento, trovato cioè il differenziale d'una funzione, troveremo la funzione primitiva facendo la somma degli infiniti elementi infinitamente piccoli compresi fra due estremi dati a e b che corrispondono a due ordinate.

Tale somma si chiama *integrazione*, e eseguirla si dice *integrare* e si esprime col simbolo $\int_a^b$ significando che l'integrazione deve avvenire fra a e b.

Mentre fisse e precise sono le regole con cui si trova il differenziale delle funzioni, non altrettanto lo sono quelle per la ricerca del loro integrale; spesso la risoluzione di queste quistioni si raggiunge mediante artifici ingegnosissimi; talora riesce impossibile.

49. — Il calcolo differenziale ed integrale, chiamato calcolo superiore o sublime, o meglio calcolo infinitesimale è il calcolo degli infinitamente piccoli.

Il primo cerca l'elemento, il secondo la somma di tutti quegli elementi che si trovano nelle medesime condizioni del primo.

La geometria, la meccanica, la fisica trovano nel calcolo infinitesimale un ausiliare preziosissimo, e le quistioni per la soluzione delle quali occorre coi processi elementari un ragionamento lungo e vizioso, sono invece col calcolo prontamente risolute.

DEL NUMERO *E*.

50. — Il numero, che nel calcolo si suole indicare colla lettera e, gode di una importanza grandissima. Esso è la base dei logaritmi naturali o neperiani.

Consideriamo la serie

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

I primi due termini danno una somma uguale a 2. I termini seguenti sono rispettivamente minori dei termini della progressione geometrica

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\ldots$$

che si ottiene sostituendo a ciascuno dei fattori 3, 4, 5....... il fattore più piccolo 2, il che aumenta le frazioni. Siccome la seconda serie è convergente lo sarà altresì la prima, e la somma dei primi n termini, astrazion fatta dei due primi, tende verso un limite minore della somma dei termini della seconda serie, che è una progressione per quoziente, la cui ragione è $\frac{1}{2}$. E come la somma dei suoi termini è 1, così il limite della somma dei termini della prima serie è minore di 1. Quest'ultima somma tende dunque verso un limite compreso fra 2 e 3.

Questo limite è un numero irrazionale.

Supponiamo infatti, ch'esso sia uguale ad una frazione ordinaria $\frac{m}{n}$, si avrebbe allora

$$\frac{m}{n} = 1 + 1 \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

Se scriviamo dapprima gli $n + 1$ primi termini, e se poniamo i seguenti sotto la forma

$$\frac{1}{1.2.3\ldots\ldots 12}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\ldots\right]$$

avremo

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots\ldots + \frac{1}{1.2\ldots.\, n} +$$

$$+ \frac{1}{1.2.3\ldots\, n}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\ldots\right]$$

Moltiplichiamo ora tutti i termini dell'uguaglianza per il prodotto $1.2.3\ldots\ldots n$; il primo membro diventa un numero intero $1, 2. 3\ldots.. (n-1)\, m$; gli $n + 1$ primi termini diventano pure numeri intieri, di cui, per abbreviazione, indicheremo la somma con N; in tal modo si ottiene l'uguaglianza

$$1.2\ldots..(n-1)\, m = N + \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots..\right]$$

La quantità fra parentesi è una frazione minore dell'unità, poichè i suoi termini sono rispettivamente minori di quelli della progressione

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \ldots\ldots$$

che si ottiene sostituendo a ciascuno dei fattori $n+2$, $n+3, \ldots\ldots$, il fattore più piccolo $n+1$, il che aumenta le frazioni; il limite della somma dei termini di questa progressione essendo $\frac{1}{n}$ la quantità fra parentesi è dunque minore di $\frac{1}{n}$; è dunque una frazione propriamente detta. Si avrebbe dunque nell'uguaglianza precedente un numero intero uguale ad una frazione, ciò che è assurdo. Così, il limite verso il quale tende la somma dei termini della serie proposta è un numero irrazionale compreso fra 2 e 3.

51. — Indichiamo con R il resto della serie, ossia l'errore commesso quando si prendono gli $n+1$ primi termini,

$$R = \frac{1}{1.2\ldots\ldots n}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\ldots\right]$$

la quantità fra parentesi essendo minore di $\frac{1}{n}$, dopo quanto è stato detto, si ha $R < \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1.23\ldots n}$.

Così quando si prendono $n+1$ termini, l'errore commesso è minore dell'ennesima parte dell'ultimo termine calcolato.

Ecco il calcolo di e con otto cifre decimali.

$$
\begin{array}{rcl}
2 & & \\
\dfrac{1}{1.2} & = & 0,5 \\
\dfrac{1}{1.2.3} & = & 0,16666667 \\
\dfrac{1}{1.2.3.4} & = & 0,04166667 \\
\dfrac{1}{1.2..5} & = & 0,00833333 \\
\dfrac{1}{12...6} & = & 0,00138889 \\
\dfrac{1}{1.2\ldots7} & = & 0,00019841 \\
\dfrac{1}{1.2\ldots.8} & = & 0,00002480 \\
\dfrac{1}{1.2\ldots..9} & = & 0,00000276 \\
\dfrac{1}{1.2\ldots\ldots10} & = & 0,00000028 \\
\dfrac{1}{1.2\ldots\ldots.11} & = & 0,00000003 \\
\hline
 & & 2,71828181
\end{array}
$$

I termini si deducono gli uni dagli altri per successive divisioni. Si sono presi i primi dodici termini; i tre primi sono esatti, e si sono calcolati gli altri con otto decimali, per difetto o per eccesso, in modo che l'errore commesso su ciascuno di essi sia minore di una mezza unità dell'ottavo ordine decimale; sei sono stati calcolati per eccesso, tre per difetto. D'altronde la somma dei termini trascurati è minore dell'undicesima parte dell'ultimo termine calcolato, e quindi minore pure di una mezza unità dell'ottavo ordine decimale.

Per correggere la somma ottenuta basterebbe diminuirla di una quantità minore di 3 unità dell'ottavo ordine decimale ed aumentarla di una quantità minore di 2 unità del medesimo ordine, ciò che dà

$$e > 2{,}71828181$$
$$e < 2{,}71828186$$

Si ha così per difetto, con sette decimali esatti,

$$e = 2{,}7182818$$

INDICE