# I piani dell'analisi

6 copie

~~Lo studio riguarda~~:

La ricerca compiuta con l'analisi fattoriale può riguardare:

a) una singola occasione. La matrice dei dati comprende tests (o variabili) × soggetti
Si possono quindi calcolare le correlazioni tra i tests (R) o fra i soggetti (Q)
La tecnica R è quella usata generalmente. La tecnica Q determina i fattori comuni a più soggetti

b) una singola persona. La matrice dei dati comprende tests (o variabili) × occasioni
Si possono calcolare le correlazioni fra le occasioni (O) o fra i tests (P)
Le tecniche O e P, essendo applicate ad un soggetto, costituiscono mezzi di indagine clinica

c) un singolo test. La matrice dei dati comprende soggetti × occasioni
Si possono calcolare le correlazioni fra soggetti (S) o fra occasioni (T)
Le due tecniche sono state usate raramente. Secondo Cattell la tecnica S potrebbe servire a studiare le affinità tra i comportamenti, e la tecnica T a studiare problemi di costanza dei tests

# Le matrici fattoriali nella rotazione obliqua

| | Proiezioni ortogonali | Proiezioni oblique |
|---|---|---|
| Vettori di riferimento (V) (ortogonali ai piani contenenti i testi ~~cioè realizzanti la struttura semplice~~) | Matrice $\overset{s}{V}$ Struttura semplice (un certo numero di correlazioni nulle fra testi e vettori di riferimento) | Matrice $\overset{c}{V}$ Composizione non semplice (~~proiezioni~~ saturazioni non nulle di tutti i testi su tutti ~~i fattori~~ i vettori di riferimento) |
| Fattori primari (P) (intersezioni dei piani contenenti i vettori testi; ~~cioè realizzanti la composizione semplice~~) | Matrice $\overset{s}{P}$ Struttura non semplice correlazioni non nulle di tutti i testi con tutti i vettori primari | Matrice $\overset{c}{P}$ Composizione semplice (un certo numero di saturazioni nulle di testi nei fattori primari) |

(La freccia indica l'ultimo passaggio: dalla struttura semplice dei vettori di riferimento – ottenuta per mezzo delle rotazioni – alla composizione semplice dei fattori primari, cioè dalla matrice $\overset{s}{V}$ delle correlazioni fra testi e vettori di riferimento – orientati in modo da realizzare la struttura semplice – alla matrice $\overset{c}{P}$ delle saturazioni dei testi nei fattori primari

## Passaggio dalla struttura semplice dei vettori di riferimento alla composizione semplice dei fattori primari

La trasformazione si ottiene ~~mediante~~ ~~mediante una~~ post moltiplicando la matrice $\overset{s}{V}$ per ~~la matrice~~ l'inverso di una matrice diagonale $D_{PV}$, cioè in base all'equazione

$$\overset{c}{P} = \overset{s}{V} D_{PV}^{-1} \qquad (1)$$

la cui dimostrazione richiede una certa abilità nell'uso dell'algebra matriciale e perciò viene tralasciata.

Resta da stabilire come si ottiene la matrice diagonale $D_{PV}$ (delle correlazioni fra fattori primari e vettori di riferimento) necessaria per il calcolo della matrice $\overset{c}{P}$ delle saturazioni dei testi nei fattori primari, che rappresenta la meta della rotazione obliqua.

~~Ed~~ Vedremo anzitutto come si procede col metodo dei vettori estesi.

Ricordiamo che con il
~~Si è mostrato (p. ) che la~~ metodo dei vettori estesi si ottiene la matrice $\overset{s}{V}$ della struttura semplice dei vettori di riferimento con una sola rotazione, potendosi ottenere immediatamente la matrice $\Lambda_{0\overset{s}{V}}$ dei coseni degli angoli che i vettori fattoriali ortogonali (centroidi) formano con i vettori di riferimento orientati in modo da attuare la struttura semplice (cioè ognuno ortogonalmente ad uno dei piani che contengono i vettori testi). L'equazione matriciale è

$$\overset{s}{V} = F_0 \Lambda_{0\overset{s}{V}} \quad (2)$$

§ Si è pure veduto che, sempre col metodo dei vettori estesi, ~~è possibile ottenere~~ si ottiene la matrice T (denominata nel libro $X K_{0F}$) dei coseni degli angoli formati dai vettori fattoriali ortogonali con i vettori primari, la quale permette di ~~calco~~ calcolare le proiezioni ortogonali dei testi sui ~~fat~~ vettori fattoriali primari, in base all'equazione

$$\overset{s}{P} = F_0 T$$

Tale calcolo è tuttavia privo di interesse. Ciò che si vuol ottenere è la matrice $\overset{c}{P}$ della composizione semplice, comprendente le proiezioni oblique dei testi sui vettori fattoriali primari.

A tale scopo serve la matrice T dalla quale ~~si~~ si ricava la matrice diagonale $D_{PV}$ necessaria per ~~il~~ calcolare ~~$\overset{c}{P}$~~, per mezzo dell'equazione (1) la matrice $\overset{c}{P}$ della composizione semplice.

La matrice T è, come si è detto, la matrice dei coseni degli angoli che i vettori fattoriali primari formano con i vettori fattoriali ortogonali (centroidi). ~~In quanto~~ I coseni si possono interpretare come correlazioni (dato che i vettori fattoriali sono tutti di lunghezza unitaria); perciò la matrice T rappresenta la matrice delle correlazioni tra fattori primari e fattori centroidi, ed anche (essendo i fattori centroidi ortogonali) la matrice delle saturazioni dei fattori primari ~~dei~~ sui fattori centroidi.

Se in luogo della T usiamo la trasposta T' e ricorriamo al solito artificio di considerare al posto dei fattori primari altrettanti testi che misurano perfettamente i fattori primari, ~~possiamo~~ la T' ~~assume~~ ~~il car~~ diventa una matrice fattoriale, che comprende le saturazioni dei ~~tes~~ tests fattoriali primari nei fattori centroidi: (~~Tab~~ v. Tab.)

$$T = \begin{array}{c|ccc} & P_1 & P_2 & P_3 \\ \hline A & \cdot & \cdot & \cdot \\ B & \cdot & \cdot & \cdot \\ C & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \qquad T' = \begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline P_1 & & & \\ P_2 & & & \\ P_3 & & & \end{array}$$

~~Considerata~~ Interpolata in tal modo, la matrice T' può essere considerata come una parte della matrice fattoriale centroide $F_0$, la quale oltre a comprendere le saturazioni ~~fattoriali~~ degli altri tests $1, 2 \ldots 10$ comprende anche quelle dei test fattoriali primari $P_1$, $P_2$, $P_3$.

Si è visto precedentemente (equazione 2) che moltiplicando la matrice centroide $F_0$ per la matrice $\Lambda_{0V}^{s}$ dei coseni degli angoli formati dai vettori centroidi con i vettori di riferimento (orientati in modo da ottenere la struttura semplice) ~~$\Lambda_{0V}^{s}$~~ si ottiene la matrice $\overset{s}{V}$ delle correlazioni dei tests con i vettori di riferimento suddetti, (cioè della struttura semplice dei vettori di riferimento. Se tale moltiplicazione si esegue anche per l'aggiunta alla matrice $F_0$ costituita dalla matrice T' si ottiene la matrice D delle correlazioni fra ~~Fattori primari~~ tests fattoriali primari, (cioè Fattori primari,) e Vettori di riferimento, cioè la

$$\underset{F_0 / T'}{\begin{array}{c|ccc} & A_0 & B_0 & C_0 \\ \hline 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 10 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline P_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_3 & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}} \cdot \underset{\Lambda_{0V}^{s}}{\begin{array}{c|ccc} & A_V & B_V & C_V \\ \hline A_0 & & & \\ B_0 & & & \\ C_0 & & & \end{array}} = \underset{\overset{s}{V} / D}{\begin{array}{c|ccc} & A_V & B_V & C_V \\ \hline 1 & & & \\ 2 & & & \\ \vdots & & & \\ 10 & & & \\ \hline P_1 & d_{11} & 0 & 0 \\ P_2 & 0 & d_{22} & 0 \\ P_3 & 0 & 0 & d_{33} \end{array}}$$

la matrice $D_{PV}$ necessaria per ~~ottenere~~ ottenere la matrice $\overset{c}{P}$ che rappresenta il fine della rotazione obliqua.

La matrice D è una matrice diagonale, cioè una matrice che ha nulli tutti gli elementi, tranne quelli della diagonale principale. ~~Ciò~~ ~~Limitandoci a considerare l'esempio di una struttura bidimensionale vediamo che~~ tale proprietà della matrice $D_{PV}$ dipende dal fatto che ~~ogni~~ ogni fattore primario essendo ~~ciascuno~~ l'intersezione di due dei piani che contengono i test (v. fig. 123), ~~giace nel~~ fa parte ~~dell'uno e dell'~~ dell'uno e dell'altro piano, ma ogni piano è perpendicolare ad un vettore di riferimento, e quindi ogni vettore primario, giacendo su due piani, è perpendicolare a due vettori di riferimento, ~~ed è~~ è quindi privo di correlazione con ambedue, ed è correlato soltanto con il terzo.

Ottenuta la matrice $D_{PV}$ resta soltanto da calcolarne l'inverso $D^{-1}$. L'inverso di una matrice A ~~è una matrice~~ (che esiste soltanto per certe matrici quadrate) è una matrice $A^{-1}$ che moltiplicata con A dà come risultato la matrice I, cioè una matrice che pre- o post-moltiplicata con una altra matrice, dà come risultato la matrice stessa (così come 1, moltiplicato con qualunque numero, lo lascia invariato).

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \qquad\qquad IB = BI = B$$

Il calcolo dell'inverso di una matrice è lungo e complesso, tranne nel caso di una matrice diagonale, in cui per ottenere l'inverso basta sostituire agli elementi della diagonale principale il loro valore reciproco. ~~Con~~ Riprendendo il nostro esempio.

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \qquad D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d_{33}} \end{bmatrix}$$

Ottenuto in tal modo $D_{PV}^{-1}$ si calcola, eseguendo la moltiplicazione

$$\overset{s}{V} D_{PV}^{-1} = \overset{c}{P}$$

la matrice $P_c$ della composizione semplice dei fattori primari cioè delle saturazioni dei test nei fattori primari.

Il procedimento descritto nelle pagine precedenti si può utilizzare soltanto quando si è ottenuta la matrice $\overset{s}{V}$ con il metodo dei vettori estesi. Se invece si è utilizzato, come avviene comunemente, il metodo radiale, la matrice $D_{VP}$, necessaria per ottenere la matrice $\overset{c}{P}$ della composizione semplice, si ottiene per un'altra via.

Sappiamo che

$$D_{VP} = T' \Lambda_{O\overset{s}{V}} \quad (3)$$

ma conosciamo soltanto $\Lambda_{O\overset{s}{V}}$, cioè la matrice di rotazione con cui si è ottenuta la matrice $\overset{s}{V}$ della struttura semplice dei vettori di riferimento.

Ciononostante è possibile calcolare $D_{VP}$ procedendo nel modo seguente.

Postmoltiplicando ~~da ambedue le parti~~ da ambedue le parti per $\Lambda^{-1}_{O\overset{s}{V}}$ si ottiene

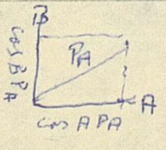
$$D_{VP} \Lambda^{-1}_{O\overset{s}{V}} = T' \Lambda_{O\overset{s}{V}} \Lambda^{-1}_{O\overset{s}{V}}$$

Ma $\Lambda_{O\overset{s}{V}} \Lambda^{-1}_{O\overset{s}{V}} = \underline{I}$ e $T' \underline{I} = T'$ quindi

$$D_{VP} \Lambda^{-1}_{O\overset{s}{V}} = T'$$

Sappiamo inoltre che ~~i coseni degli angoli~~ $T'$ ha la proprietà di essere "normalizzata per righe", che cioè la somma dei quadrati dei termini di ogni riga è uguale a 1.[1] ~~In base a tale proprietà e alla proprietà delle matrici diagonali~~ Sappiamo ~~inoltre~~ infine che quando si premoltiplica una matrice diagonale $D$ ad una matrice $A$ si ottiene una matrice $C$ in cui i termini della prima riga sono i termini della ~~matrice~~ prima riga della matrice $A$ moltiplicati per il primo termine ($D_{11}$) della matrice diagonale,

(1) Questa proprietà si spiega considerando la matrice $T$, che essendo la trasposta di $T'$ deve essere normalizzata per colonne. $T$ è una matrice di rotazione che contiene i coseni degli angoli tra i vettori fattoriali centroidi e quelli primari. Ogni colonna contiene i coseni degli angoli che un vettore primario forma con i ~~vettori centroidi~~ i vettori centroidi, che sono ortogonali. Se consideriamo ~~due vettori centroidi~~ il caso in cui i ~~vettori centroidi~~ fattori sono soltanto due, è facile vedere che, per il teorema di Pitagora, la somma dei quadrati dei coseni è uguale a 1. Tale proprietà vale per qualsiasi numero di fattori:




$$\cos^2 AP_A + \cos^2 BP_A = 1$$

i termini della 2ª riga sono i termini della ~~matrice~~ seconda riga della matrice $\Lambda$, moltiplicati per il 2° termine ($D_{22}$) della matrice diagonale, e così via.

Eseguendo la moltiplicazione si avrà dunque

$$\begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11}\Lambda_{11} & d_{11}\Lambda_{12} & d_{11}\Lambda_{13} \\ d_{22}\Lambda_{21} & d_{22}\Lambda_{22} & d_{22}\Lambda_{23} \\ d_{33}\Lambda_{31} & d_{33}\Lambda_{32} & d_{33}\Lambda_{33} \end{bmatrix}$$

$$D_{PV} \qquad\qquad \Lambda^{-1}_{OV^{\xi}} \qquad\qquad T'$$

E siccome $T'$ è normalizzata per righe, abbiamo, per la prima riga

$$(d_{11}\Lambda_{11})^2 + (d_{11}\Lambda_{12})^2 + (d_{11}\Lambda_{13})^2 = 1$$

$$d_{11}^2\Lambda_{11}^2 + d_{11}^2\Lambda_{12}^2 + d_{11}^2\Lambda_{13}^2 = 1$$

$$d_{11}^2(\Lambda_{11}^2 + \Lambda_{12}^2 + \Lambda_{13}^2) = 1$$

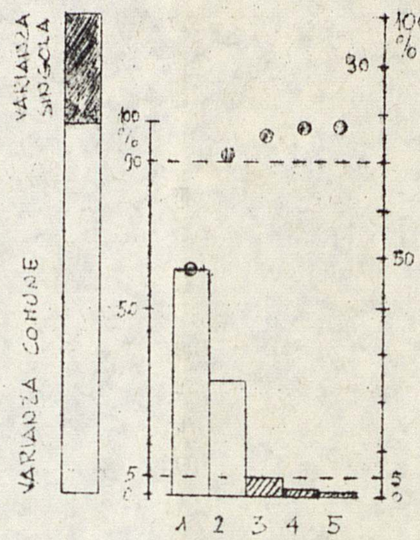
$$d_{11} = \sqrt{\frac{1}{\Lambda_{11}^2 + \Lambda_{12}^2 + \Lambda_{13}^2}}$$

e così per le altre righe.

~~Conoscendo~~ Conoscendo $\Lambda_{OV^{\xi}}$ e quindi calcolando $\Lambda^{-1}_{OV^{\xi}}$ dunque si può calcolare, termine per termine, la matrice diagonale ~~D~~ $D_{PV}$, ottenuta la quale si calcola $D^{-1}_{PV}$ e si ottiene quindi, per mezzo della (-1) la matrice $\hat{P}$.

<u>CRITERI PER STABILIRE IL NUMERO DEI FATTORI</u>

Per rendersi conto del problema basterà considerare il seguente diagramma




(da K.Überla - Faktorenproblem (Berlin,1968))

Proporzione di varianza dovuta ai singoli fattori, in relazione alla somma delle comunanze dei tests (varianza comune) ed alla varianza complessiva (varianza comune + varianza specifica e casuale). La scala a sinistra indica la percentuale della varianza comune, quella a destra la percentuale della varianza complessiva. L'istogramma permette di leggere l'ammontare della varianza connessa ad ogni singolo fattore, e i punti danno la curva cumulativa. La parte tratteggiata dell'istogramma comprende i fattori che assorbono una quota trascurabile di varianza.

Il diagramma permette di rendersi conto, dell'importanza dei singoli fattori e permette d'orientarsi sul numero di fattori da accettare. Sono da considerare, sia la percentuale della varianza comune assorbita da un fattore, sia la percentuale della varianza complessiva. Infatti, se la varianza comune è piccola rispetto alla varianza complessiva, un fattore che assorbe per es. il 30% della varianza comune, assorbe, e quindi spiega, soltanto una piccola percentuale della varianza complessiva.